



115-летию со дня рождения Н.Г. Четаева
и памяти академика АН РТ
Т.К. Сиразетдинова
посвящается

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ

ТРУДЫ XI МЕЖДУНАРОДНОЙ
ЧЕТАЕВСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

Казань, 13 – 17 июня 2017 г.

4 изображены на рис. 2, рис. 3 точками.
 $\psi = 0$ ($\delta_3 = \delta_5 = 1$, $\delta_4 = \delta_6 = 0$) получим
в случае кругового пятна контакта [2, 4].
имеет составляющую, перпендикулярную
по является отличия от модели плоского
плоскостью [2, 4, 5]. Этим же свойством
кого контакта тела с опорной плоскостью [8].
делает зависимость параметров пятна контакта
асающихся тел, полученная модель трения
механики любых выпуклых гладких тел. При этом
ния предложенной модели зависит не только
ния тела, но и от геометрических параметров
и, которые, в свою очередь, зависят от ориента
ие. Л.Т. Тихомиров (Бернский фонд фунда
финансовой поддержке Российского фонда фунда
(10-01-00292-11-01-00354) в своей статье «Н
ТЕРАТУРА

Министерство образования и науки Российской Федерации
Российская академия наук
Министерство образования и науки Республики Татарстан
Национальный комитет по автоматическому управлению
Академия наук Республики Татарстан
Научный совет РАН по теории управляемых процессов и автоматизации
Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова
Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ»

*115-летию со дня рождения Н.Г. Четаева
и памяти академика АН РТ
Т.К. Сиразетдинова посвящается*

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ

ТРУДЫ XI МЕЖДУНАРОДНОЙ ЧЕТАЕВСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

13 – 17 июня 2017 г.



Казань 2017

УДК 531.01 (063) + 531.391.5 (063)

ББК 22.211 + 22.236.37

Ан 64

Ан 64

Аналитическая механика, устойчивость и управление:
труды XI Международной Четаевской конференции: пленарные доклады. Казань, 13 – 17 июня 2017 г. – Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. – 216 с.

ISBN 978-5-7579-2226-3

Представлены доклады, посвященные актуальным проблемам и задач теории и практики управления сложными динамическими системами, являющиеся дальнейшим развитием методов А.М. Ляпунова, Н.Г. Четаева, Н.Н. Красовского, В.М. Матросова, Т.К. Сиразетдинова.

Опубликованные доклады представляют интерес для научных работников, аспирантов и инженеров, специализирующихся в области устойчивости и управления.

УДК 531.01 (063) + 531.391.5 (063)

ББК 22.211 + 22.236.37

Редакционная коллегия:

Васильев С.Н., академик РАН

Козлов В.В., академик РАН

Дегтярёв Г.Л., академик АН РТ, д.т.н., профессор

Сидоров И.Н., д.ф.-м.н., профессор

Маликов А.И., д.ф.-м.н., профессор

Балоев А.А., д.т.н., профессор

Емалетдинова Л.Ю., д.т.н., профессор

Ответственные секретари:

Хасанов А.Ю., к.т.н., доцент

Петрув И.В.

ISBN 978-5-7579-2226-3

© Авторы, перечисленные в содержании, 2017

© Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017

**PLEASE DO (NOT) DISTURB – LEVERAGING
DISTURBANCE INFORMATION IN ECONOMIC MODEL
PREDICTIVE CONTROL**

Florian A.

(Bayer and Frank Allgöwer

*Institute for Systems Theory and Automatic Control, University of Stuttgart,
Pfaffenwaldring 9, 70550 Stuttgart, Germany)*

E-mail: norvi.brendle-forero@ist.uni-stuttgart.de

**ПОЖАЛУЙСТА, (НЕ) ВОЗМУЩАЙТЕ – ИСПОЛЬЗОВАНИЕ
ИНФОРМАЦИИ О ВОЗМУЩЕНИЯХ
В ЭКОНОМИЧЕСКИХ MPC**

Ф. Алговер, Ф. Байер

Keywords: economic model predictive control, robust control,
bounded disturbances.

Many goals in control can be formulated in terms of (the solution of) an optimal control problem with infinite horizon. The resulting controller provides an input to achieve the desired task, but the infinite horizon optimal control problem can only be solved for special cases. A modern approach to circumvent this drawback is Model Predictive Control (MPC). MPC is an optimization-based control technique which aims for approximating the solution of the infinite horizon optimal control problem by repeatedly solving an appropriately designed optimal control problem with finite horizon. The basic principle is as follows: At each time instance the current state is measured and the associated optimal control problem over a finite horizon is solved. The computed (optimal) predicted input is applied to the system for

one time instance. Then, the system state is re-evaluated and the optimization is started again. By considering the re-evaluated state of the system within the optimal control problem at each iteration, feedback is introduced.

MPC has successfully been applied to many problems as it (i) allows to consider a performance criterion within the underlying optimal control problem, (ii) can handle hard state and input constraints, and (iii) is applicable to nonlinear and multiple-input multiple-output systems. Due to these advantages, MPC has been of interest for researchers both from a theoretic and from an application-oriented point of view. Most of the approaches considered in the literature focus on stabilization (or tracking) of a desired behavior of the system to be controlled and are therefore referred to as stabilizing MPC. In these approaches, the stage cost function within the objective of the optimal control problem is usually chosen positive definite with respect to the desired behavior (Mayne et al., 2000; Magni et al., 2009; Rawlings and Mayne, 2009).

Most real-world systems are affected by disturbances or the system cannot be modelled exactly. Thus, considering robustness against disturbances and uncertainties is a mature field in MPC. Since some information about the uncertainty and the disturbances is often available or can be approximated, different approaches have been presented to explicitly incorporate knowledge about uncertainties and disturbances into the controller design, i.e., when designing the MPC algorithm and especially the underlying optimal control problem (Grüne and Pannek, 2011; Mayne, 2014; Kouvaritakis and Cannon, 2015; Rawlings and Mayne, 2009). In these approaches, the goal is to guarantee (robust) stability even though the system is affected by disturbances or varies due to uncertainties.

In the last decade, the preliminary goal of stabilizing a system has been diversified due to the following reason: For many real-world applications, the immediate goal of the controller is not directly associated to some set-point to be stabilized, but to some economic objective, e.g., minimizing the energy consumption of a building climate control or maximizing the profit of some process plant. As mentioned before, the performance criterion considered in the optimal control problem is a design choice, and thus, choosing this criterion with respect to the immediate goal can be beneficial. In the literature, this is referred to as economic MPC (Ellis et al., 2014; Müller and Allgöwer, 2017; Angeli et al., 2009). This means in particular that the stage cost function need not be positive definite with respect to any behavior.

In this talk, we investigate how information about disturbances can be considered in an economic MPC framework. In a stabilizing setup, the desired behavior of the system is known explicitly beforehand and, thus, stability properties of the closed loop with respect to this behavior shall be guaranteed under disturbances. In an economic setup, the desired goal need not be representable by stabilizing an a priori determined behavior, and it is not clear if only considering the nominal behavior leads to a good performance of the real system. This could be due to several reasons: (i) Disturbances can be beneficial for reaching a “better” state configuration, and thus, might actually help to improve the performance. (ii) When only the nominal system is considered, states with a poor performance in a close neighborhood of the nominal system can be overlooked, but the disturbance can cause the system to drift into these states. (iii) Algorithmic approaches developed for the robust stabilizing case might counteract all, even beneficial disturbances.

In order to leverage for disturbance information in an economic setup, we present three different approaches in order to account for the available disturbance information. These three approaches differ in the way in which the disturbance is represented in the underlying optimal control problem:

Min-max robust economic MPC (Bayer et al., 2016a): Considering nonlinear systems, we account for the disturbance information by means of a min-max based approach, i.e., we the worst case system configuration induced by the disturbance consider at each prediction step in the optimal control problem. Therefore, the system behavior is approximated by appropriate set-based methods.

Tube-based averaging robust economic MPC (Bayer et al., 2014): Since considering the worst case might be rather conservative, in a second approach the average over the disturbed system behavior along the trajectories is taken into account. Again, this is based on approximations of the system’s behavior.

Robust economic MPC using stochastic information (Bayer et al., 2016b): In a third approach, we take linear systems into account and investigate how additional information about the disturbances in form of distributional information can be considered. We assume the disturbance to be equipped with a probability density function, propagate the disturbance distribution along the predictions, and consider the expected value within the optimal control problem.

For all of the three presented we investigate bounds on the asymptotic average performance and, furthermore, consider statements about the optimal operation of the presented approaches. Moreover, we apply all approaches to a numerical example in order to highlight the possible benefits of taking information of the disturbance into account when designing the underlying optimal control problem.

LITERATURE

1. *Angeli, D., R. Amrit, and J.B. Rawlings.* „Receding horizon cost optimization for overly constrained nonlinear plants.“ Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control. 2009. 7972-7977.

2. *Bayer, F.A., M.A. Müller, and F. Allgöwer.* „Min-max economic model predictive control approaches with guaranteed performance.“ Proceedings of the 55th IEEE Conference on Decision and Control. 2016a. 3210-3215.

3. *Bayer, F.A., M.A. Müller, and F. Allgöwer.* „Tube-based robust economic model predictive control.“ Journal of Process Control 24 (2014): 1237-1246.

4. *Bayer, F.A., M. Lorenzen, M.A. Müller, and F. Allgöwer.* „Robust economic model predictive control using stochastic information.“ Automatica 74 (2016b): 151-161.

5. *Ellis, M., H. Durand, and P.D. Christofides.* „A tutorial review of economic model predictive control methods.“ Journal of Process Control 24 (2014): 1156-1178.

6. *Grüne, L., and J. Pannek.* Nonlinear Model Predictive Control. Springer, 2011.

7. *Kouvaritakis, B., and M. Cannon.* Model Predictive Control: Classical, Robust and Stochastic. Springer, 2015.

8. *Magni, L., D.M. Raimondo, and F. Allgöwer,* Nonlinear Model Predictive Control: Towards New Challenging Applications. Springer, 2009.

9. *Mayne, D.Q., J.B. Rawlings, C.V. Rao, and P.O.M. Scokaert.* „Constrained model predictive control: Stability and optimality.“ Automatica 36 (2000): 789-814.

10. *Mayne, D.Q.* „Model predictive control: Recent developments and future promise.“ Automatica 50 (2014): 2967-2986.

11. *Müller, M.A., and F. Allgöwer.* „Economic and distributed model predictive control: Recent developments in optimization-based control.“ SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration 10 (2017): 39-52.

12. *Rawlings, J.B., and D.Q. Mayne.* Model Predictive Control: Theory and Design. Nob Hill, 2009.

ON NON-SMOOTH MACHINES

Friedrich Pfeiffer

*(Lehrstuhl fuer Angewandte Mechanik, TU-Muenchen Boltzmannstrasse 15,
D-85748 GARCHING, Germany)
e-mail: friedrich.pfeiffer@tum.de*

НЕГЛАДКИЕ МАШИНЫ

Фридрих Пфайфер

(Мюнхенский технический университет)

Keywords: nonsmooth machines and mechanisms, industrial examples, non-smooth multibody dynamics

”However omnipresent unilateral constraints are in machines, the place they receive in the books on Classical Mechanics is very modest. Here is the traditional approach of the situation” [17]. This statement was given by Jean Jaques Moreau during his famous CISM-course No. 302 in Udine, 1988. In the meantime the situation has very much improved, and quite a lot of books on classical mechanics include the fundamentals of non-smooth mechanics.

The number of practical applications, though, has certainly increased, but is still small. Industry treats most contact problems still by traditional methods and approaches, mainly by discretized contacts with some force laws. But also here, and due to many relevant activities of our community, the situation is going to improve, even on the side of commercial multibody dynamics codes. Nevertheless I want to focus on the first part of Moreau’s statement, namely that the world of machines and mechanisms, of biological and physical systems is as much unilateral as it is bilateral, keeping in mind, that both concepts are models, selected to achieve a best fit to the real world problem under consideration. The contribution will discuss practical examples, from gear rattling to CVT-belts [19], and it will give, at the end, a short survey of the underlying theory.

1 Introduction

Operation of machines and mechanisms is realized by constraints, which guarantee the prescribed performance. Establishing a set of constraints for a given machine results in the most abstract representation of its

functions, at least in the sense of kinematic requirements. We are accustomed to regard in most cases bilateral constraints, which as a matter of fact represent only one part of the mechanical world. But the technical world includes as much unilateral constraints in the form of contacts as there are bilateral ones. Therefore it makes sense to consider also this unilateral dynamical world of constraining connections.

Contacts may be closed, and the contact partners may detach again. Within a closed contact we might have sliding or stiction, both features connected with local friction. If two bodies come into contact, they usually penetrate into each other leading to local deformations. If contacts are accompanied by tangential forces and by tangential relative velocities within the contact plane, we get in addition to normal also tangential deformations. Depending on the dynamical (or statical) environment contacts may change their state, from closure to detachment, from sliding to stiction, and vice versa. We call a contact active, if it is closed or if we have stiction, otherwise we call a contact passive.

Active contacts always exhibit contact forces which in the general case of normal and tangential deformations follow from the local material properties of the colliding bodies, from the external (with respect to the contact) dynamics (statics) and from external forces. Considering contacts that way leads to complicated problems of continuum mechanics which as a rule must be solved by numerical algorithms. For the treatment of dynamical problems this approach is too costly and in many cases also not adequate. The rigid body approach gives quicker results and applies better to large dynamical systems.

Under rigid body approach we understand a contact behavior characterized at least in the local contact zone by no deformations and thus by rigid body properties. The contact process is then governed by certain contact laws like those of Newton and Poisson and appropriate extensions of them. A fundamental law with respect to rigid body models is the complementarity rule. It states that in contact dynamics either relative kinematic quantities are zero and the accompanying constraint forces or constraint force combinations are not zero, or vice versa.

If we deal with multibody systems including unilateral constraints the problem of multiple contacts and their interdependence arises. A straightforward solution of these processes would lead to a combinatorial problem of huge dimension. Therefore a formulation applying complementarity rules and the resulting inequalities is a must. The mathematical methods devel-

oped in that area the last twenty years assure nearly always an unambiguous solution even in the cases of mutually dependent contacts.

In the meantime literature in the field of non-smooth mechanics has become very large. We shall not give a survey of that, but some historical remarks together with some books, which contain all necessary details. With respect to the "old ones" we have to start with Leonardo da Vinci and his experiments on frictional effects resulting in two laws completely compatible with our knowledge, and this about 200 years before Newton and his force definition. Guillaume Amontons [3] rediscovered these laws, which a bit later were put in a form we use them today, by Charles August Coulomb [8]. Fourier [10] and Boltzmann [4] considered unilateral behavior within the framework of mechanical principles, and

Heinrich Hertz [15] developed some famous laws concerning impacts. But then a real revival of these early research efforts took place in the second half of the last century.

Since the beginning of the field in the seventies and the eighties of the last century, mainly pushed by scientists like Moreau [17] and Panagiotopoulos [18], very large progress has been made with respect to the theoretical and the mathematical formulation, but also with respect to large applications in industry. Good representations of these evolution processes may be found for example in the books of Acary [1], Brogliato [7], Fremond [11], Glocker [12], Leine [16], Pfeiffer [19] and Wriggers [26].

2 Non-smooth machinery

From the standpoint of mechanical sciences the problems of non-smooth mechanics were recognized very early but brought to an applicable theory not before the twentieth century. From the standpoint of real world applications we are amidst a process of using the now existing methods to technical and biological problems, but still very slowly. The unilateral methods are gaining ground for industrial problems, which cannot be demonstrated only by the following examples, but also by other cases considered by many colleagues and by us. There are two aspects reducing the speed of acceptance. Firstly, theory is complex, requires a lot of modern mathematics and is difficult to understand. Engineers do not like to work with such tools. So something has to be done. Secondly, for large problems computing time is extremely large prohibiting partly parameter studies as well as the inclusion of

optimization and control. Also here something has to be done, in spite of the fact that the prox-approach by Alart/Curnier brought a bit of a breakthrough [2]. But better numeric methods, possibly more efficient formulations, are still needed. The following examples are a selection from dozens of industry applications in the non-smooth area.

2.1 Gear rattling

Gear rattling is an old and well-known problem of changeover gear systems [21], sometimes still a research topic in spite of a broad knowledge of such systems. The toothings of the gear wheels possess backlash, and within this backlash the not loaded gear wheels generate rattling noise. This is typical for all machine components moving within backlashes, they produce noise and wear, depending largely on the size of the backlash and the load of the contact partners. Dynamically we model this problem by multibody dynamics with frictionless impacts allowing a point mapping solution from impact to impact. We get rich features, from bifurcation and chaos to strange attractors. Figure 1 gives an impression.

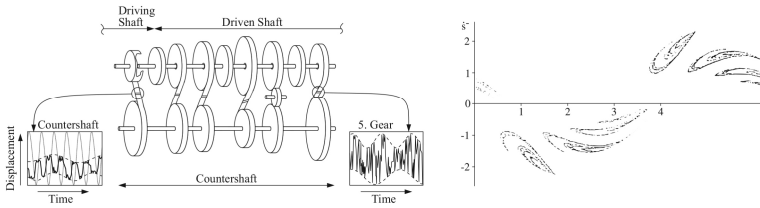


Figure 1. Left: Model of n_S Stage Gear Mechanism ($n_S = 5$ and Reverse Stage);
Right: Strange attractor for a certain gear combination [21]

2.2 Hydraulics

Hydraulics plays an important role in many machines and transport systems, from cars to airplanes. Modeling usually is based on the Navier-Stokes equations and corresponding numerical solution procedures, which are very time-consuming. Looking at hydraulic elements a bit closer reveals a considerable number of such hydraulic elements, which should be modeled unilaterally much more than in the classical way. Examples are check valves, servo valves and cavitation, to name a few. Typical cavitation characteristics represent a corner law with an excellent approximation.

Therefore non-smooth mechanics gives a convincing approach to all hydraulic modeling problems with a computing time reduction factor of about (10^3 to 10^4). Comparisons using classical methods and the non-smooth approach show no differences. As an example we consider the hydraulic safety brake system of a free fall tower with altogether nearly thousand hydraulic degrees of freedom and some hundred unilateral hydraulic constraints [19], [20]. The corresponding equations of motion possess multibody structure including bilateral and unilateral constraints. Hydraulic impact equations are written on a velocity level similar to mechanical impacts. Figure 2 illustrates one block (there might be up to ten blocks) of the hydraulic brake control and a comparison of simulation with measurements.

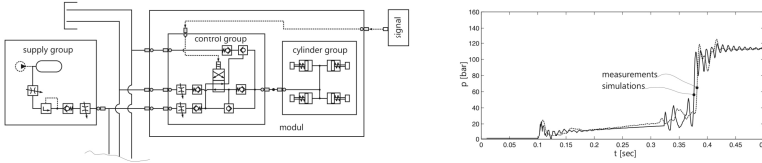


Figure 2. Left: Model of the Hydraulic Safety Brake System; middle: Comparison for a Hydraulic Supply Line

2.3 Chimney dampers

Chimney dampers are frequently used elements in civil engineering. Towerlike structures like steel chimneys may be excited to vibrations by vortex streets. Such a mechanism becomes dangerous if the first eigenfrequency of the structure is small enough to be excited by not too large wind velocities which appear frequently. Oscillations of that type are damped significantly by a simple idea (see Figure 3).

A pendulum is attached to the chimney top. Its mass and length is tuned to the chimney's first eigenfrequency by classical analysis, and additionally optimal viscous damping is also evaluated by classical formulas, given for example by Den Hartog's method. In a second step the thus determined ideal damping behavior is not realized by viscous means but by a package of circular plates which are moved by the end of the pendulum rod through internal circular holes of the plates. The approximate realization of

viscous damping by dry friction is accompanied by impacts of the pendulum rod in the plate holes and by stick-slip transitions between the plates. To achieve a best fit to the ideal viscous case an optimization of the complete pendulum-plate-system is carried through applying multibody theory with unilateral contacts [22].

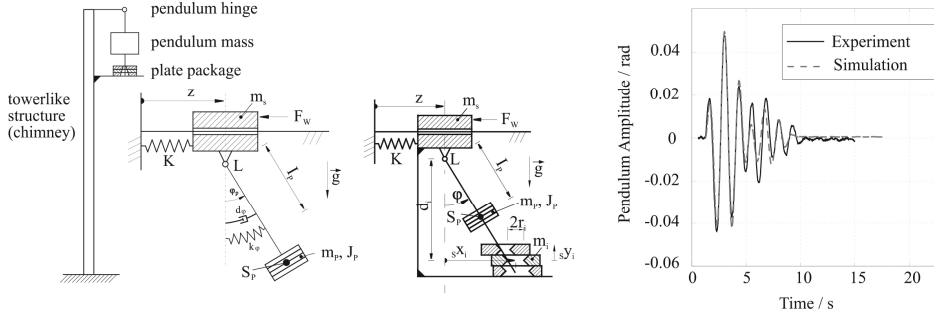


Figure 3. Left: principal configuration, viscous and plate model; Right: Comparison for a field test [22]

2.4 Roller coaster

One of the challenging practical examples concerning unilateral multibody theory are roller coasters. In Germany, we have amongst others a system called Wild Mouse. The trajectory configuration for this Wild Mouse is depicted in Fig. 4 together with the vehicle system. The track generates frequent and abrupt changes of the vehicle's course resulting in a special thrill for the passengers. Thereby, and due to the slackness of the wheel rail contact, sequences of impacts with friction take place producing a significant amount of load and stress to the wheels and the undercarriage system. Each carriage possesses four packages each with six wheels coming out with altogether 24 wheel-track-contacts of a spatial character.

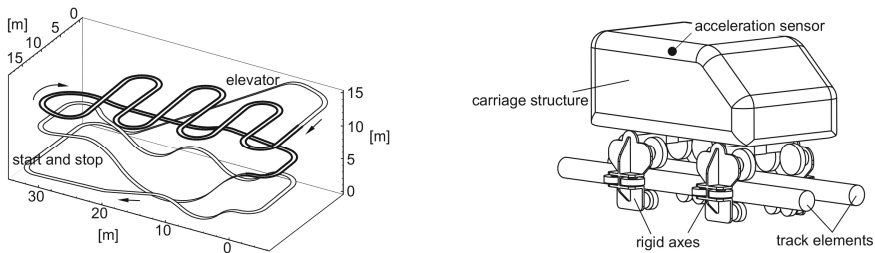


Figure 4. "Wild Mouse" and roller coaster carriage

The six carriage wheels per wheel-package are necessary to keep the carriage safely on the track for all possible accelerations, which means two wheels on three sides of the track, top, bottom, side. The model includes the vehicle body and the two axes, front and transaxle, and the four wheel packages, all considered to be rigid bodies, body and axes with six degrees of freedom each. Between vehicle body and the axes we have force laws in the form of a spring- damper-arrangement. Figure 5 illustrates the arrangement of the body-axes- and of the axis-wheel-configuration.

The wheels, manufactured from plastic materials, are modeled as sliding elements due to their very small masses in comparison with the mass of the axes. In addition we assume rolling without sliding, which is realistic for nearly all operation conditions. The wheel-track contact thus includes three contact possibilities, namely contact/detachment, stiction/sliding in lateral direction and rolling without sliding in trajectory direction (Fig. 5). For the first case impacts with friction are considered, for the second case the relevant complementarities, and for the third case we introduce rolling friction in the form of an empirical coefficient. The derivation of the equations of motion is straightforward by first modeling the bodies, connecting them either with smooth or set-valued force laws and by establishing the accompanying geometrical and kinematic algebraic equations.

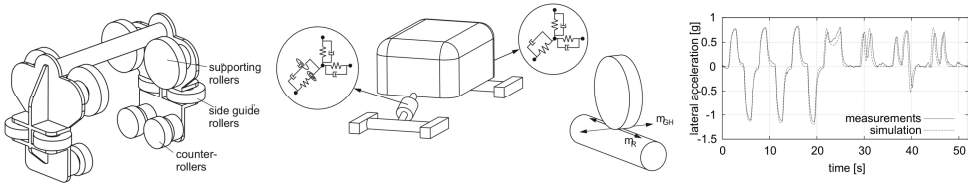


Figure 5. Models of axes and wheels

A model has been established with 18 DOF and 24 potential contacts. Direct measurements of the roller contacts are either impossible or very difficult. Therefore the vehicle has been simply equipped with acceleration sensors for measuring the lateral motion. Figure 4 depicts the location of the sensor, and Figure 5 compares these measurements with the simulation. The agreement is very good and validates the model of the overall dynamics. On the basis of the simulation model some improvements of the roller design could be performed [25].

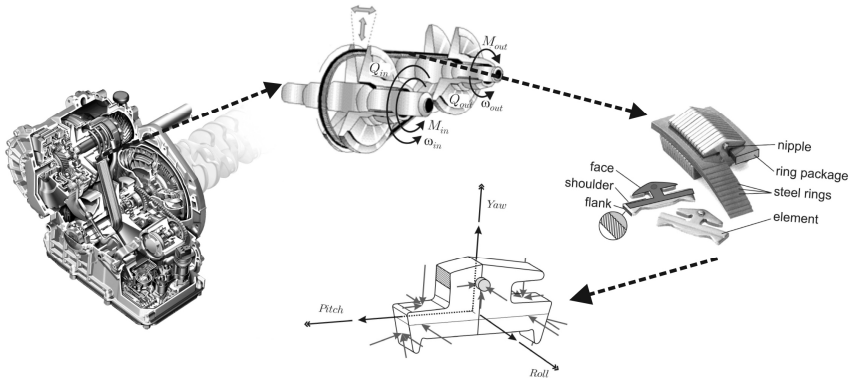


Figure 6. Push-belt configuration and its elements (courtesy Daimler and VDT-Bosch)

2.5 Pushbelt CVTs

Pushbelt CVTs are an efficient solution for continuous variable transmissions, because they run very smoothly, they can be used up to some hundred Nm torque with increasing tendency, and there exists already long-time experience with such transmission components. With the development of hybrid cars the market for pushbelts has increased significantly, especially in Japan. Figure 6 gives an impression of such devices. The B-class of Daimler for example can be equipped with such a pushbelt, which runs between two wheels each assembled by two conical discs of which one is able to move axially. This axial motion changes the distance between the discs and thus the contact radius of the belt between the two discs. Performing some corresponding control for the two wheels we easily can change the transmission ratio continuously.

The detailed belt structure is complicated consisting of some hundred small steel elements arranged along a pair of steel rings. Each element possesses 17 unilateral contact points. We have motion without and with impacts. The corresponding equations of motion include bilateral, unilateral and frictional constraints, all put into a prox-formulation.

Altogether we need some thousands degrees of freedom and also some thousands contacts. On the basis of a time- stepping algorithm with an Augmented Lagrange method and converting the prox-constraints into a point mapping the computing time is about 3-4 days for 15 sec realtime. At

the time being this is more or less a limit of what can be done with unilateral multibody theory [24], [9].

3 Non-smooth modeling

The main focus of this paper is more on applications. Therefore we shall give only an abridged presentation of the theory necessary for modeling the practical examples of chapter 2 or for related problems. For more details see [19].

3.1 Multibody dynamics

We consider a multibody system with f degrees of freedom which we later shall subdivide in “rigid” and “elastic” degrees of freedom (indices “R” and “E”) [5]. Applying the principle of virtual power (Jourdain) we get

$$\sum_{i=1}^f \int_{m_i} \left(\frac{\partial {}_R v}{\partial \dot{q}} \right)_i^T ({}_R adm_i - {}_R df)_i = 0, \quad (1)$$

where ${}_R v_i \in \mathbb{R}^3$, ${}_R a_i \in \mathbb{R}^3$ are the absolute velocity, acceleration of body dm_i in a body-fixed reference system, ${}_R df_i \in \mathbb{R}^3$ are all forces applied to body dm_i and $\dot{q} \in \mathbb{R}^f$ are the generalized velocities. m_i is the mass of body i . The velocity and acceleration vectors must be evaluated in a body-fixed frame which yields (see Figure 7)

$$\begin{aligned} {}_R v &= {}_R v_A + {}_R \tilde{\omega}_{IR} ({}_R x_0 + {}_R \bar{x}_{el}) + {}_R \dot{\bar{r}}_{el}, \\ {}_R a &= {}_R a_A + {}_R \tilde{\omega}_{IR} {}_R \tilde{\omega}_{IR} {}_R x_0 + {}_R \dot{\tilde{\omega}}_{IR} {}_R x_0 + {}_R \tilde{\omega}_{IR} {}_R \tilde{\omega}_{IR} {}_R \bar{r}_{el} + \\ &\quad {}_R \dot{\tilde{\omega}}_{IR} {}_R \bar{r}_{el} + 2 {}_R \tilde{\omega}_{IR} {}_R \dot{\bar{r}}_{el} + {}_R \ddot{\bar{r}}_{el}. \end{aligned} \quad (2)$$

The following abbreviations are used (index i always omitted): $v = {}_R v_A$ absolute velocity, $a = {}_R a_A$ acceleration of the reference base R expressed in the R -system; $\omega = {}_R \omega_{IR}$ angular velocity of the reference system expressed in the R -system; $x_0 = {}_R x_0$ vector from R to the mass element dm , in the undeformed configuration; $r = {}_R r_{el}$ displacement vector; $J_T = \left(\frac{\partial {}_R v_A}{\partial \dot{q}} \right)$ Jacobian of translation, $J_T \in \mathbb{R}^{3,f}$; $J_R = \left(\frac{\partial {}_R \omega_{IR}}{\partial \dot{q}} \right)$ Jacobian of rotation, $J_R \in \mathbb{R}^{3,f}$; $\tilde{\omega} r = \omega \times r$ definition of tilde tensor.

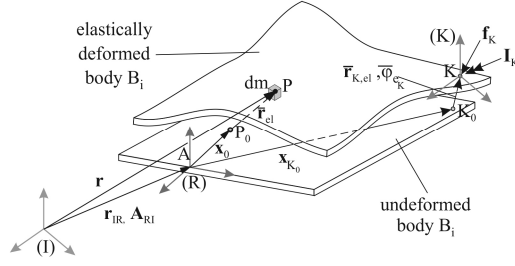


Figure 7. Coordinates for a deformed body

Combining the equations (1), (2) and the above abbreviations we come out with the following set of equations of motion

$$\sum \int_{m_i} \left[J_T^T + J_R^T (\tilde{x}_0 + \tilde{r}) + \left(\frac{\partial \dot{\tilde{r}}}{\partial \dot{q}} \right)^T \right] \times \left[\left(a + \tilde{\omega} \tilde{\omega} x_0 + \dot{\tilde{\omega}} x_0 + \tilde{\omega} \tilde{\omega} \bar{r} + \dot{\tilde{\omega}} \bar{r} + 2 \tilde{\omega} \dot{\tilde{r}} + \ddot{\tilde{r}} \right) dm_i - df_i \right] = 0, \quad (3)$$

where elastic influences are regarded as shown in Figure 7. The radius vector r from an inertial frame (I) to a mass element dm_i of the deformed body B_i can be written as

$$r = r_{IR} + x_0 + \bar{r}_{el}, \quad (4)$$

where r_{IR} is the vector from (I) to (R) , x_0 the vector to the mass element in the undeformed configuration and r_{el} the displacement vector. As in most cases of technical relevancy we assume that the elastic displacements of the components are very small compared to their geometric dimensions.

This allows the introduction of a Ritz-approach for the elastic deformation [5]

$$\bar{r}_i(x_0, t) = W_i(x_0) q_{el,i}(t), \quad W_i = (w_1, \dots, w_j \dots)_i = [\bar{r}_x^T, \bar{r}_y^T, \bar{r}_z^T]^T_i, \quad (5)$$

with $(q_{el} \in \mathbb{R}^{nel})_i$ and $(W \in \mathbb{R}^{3,nel})_i$. The shape functions might be evaluated by measurements, by FEM-calculations, by analytic approaches, or they might be approximated by cubic spline systems. Anyway, they must be in accordance with the elastic behavior of the system.

Putting the above equations together and performing some rearranging we always can generate the standard structure

$$M(q, t) \ddot{q} - h(q, \dot{q}, t) = \mathbf{0} \quad (q \in \mathbb{R}^f, h \in \mathbb{R}^f, M \in \mathbb{R}^{f,f}) \quad (6)$$

For details see [5]. Equations (6) include all bilateral constraints. They represent the maximum number of minimal (generalized) coordinates, and from this all unilateral contacts are in a state that they do not block any further degree of freedom. If some of the unilateral constraints become active, then the remaining number of degrees of freedom will be smaller than f .

3.2 Contact Kinematics

Geometry and kinematics are the fundamentals for establishing models of dynamical systems. In the case of unilateral contacts this is especially important, because magnitudes of relative kinematics serve as indicators for passive contacts and as constraints for active contacts (see chapter 1). As most of the applications require more or less arbitrary body contours it makes sense to derive the kinematic contact equations in a general form applying well-known rules of differential geometry of surfaces [12], [19].

We shall give here the example of spatial contact kinematics, which includes nonlinear complementarity, whereas the plane case comes out with linear complementarity [19]. We assume that the two approaching bodies are convex (Figure 8) at least in that area where contact points might occur. The two bodies are moving with $v_i, \Omega_i (i = 1, 2)$. For the description of a surface Σ we need two parameters s and t : $r\Sigma = r\Sigma(s, t)$. The tangents s and t , which span the tangent plane at a point of the surface, are defined as

$$s = \frac{\partial r_\Sigma}{\partial s}, \quad t = \frac{\partial r_\Sigma}{\partial t}. \quad (7)$$

From these basic vectors the fundamental magnitudes of the first order are calculated:

$$E = s^T s, \quad F = s^T t, \quad G = t^T t. \quad (8)$$

The normalized normal vector n is perpendicular to the tangent plane and pointing outwards:

$$n = \frac{s \times t}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (9)$$

We further need the fundamental magnitudes of the second order:

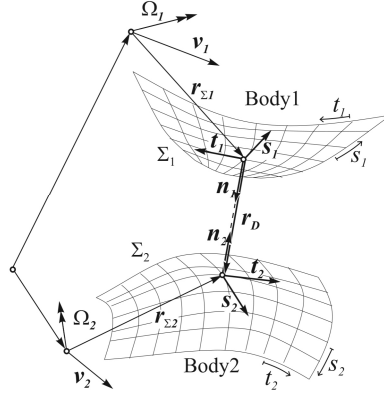


Figure 8. Contact geometry of two surfaces

$$L = n^T \frac{\partial^2 r_{\Sigma}}{\partial s^2}, \quad M = n^T \frac{\partial^2 r_{\Sigma}}{\partial s \partial t}, \quad N = n^T \frac{\partial^2 r_{\Sigma}}{\partial t^2}. \quad (10)$$

For a contact point we require, that the normal vector of body 1 (n_1) and the distance vector r_D are perpendicular to the tangent vectors of body 2 (s_2 and t_2). Thus we obtain four nonlinear equations:

$$n_1^T s_2 = 0, \quad r_D^T s_2 = 0, \quad n_1^T t_2 = 0, \quad r_D^T t_2 = 0. \quad (11)$$

This nonlinear problem has to be solved at every time step of the numerical integration. After the solution is found the distance g_N between the possible contact points can be calculated as

$$g_N = n_1^T r_D = -n_2^T r_D, \quad (12)$$

g_N is used as an indicator for the contact state. Its value is positive for ‘no contact’ and negative for penetration. The constraints are again formulated on velocity level, where in the spatial case we have three of them, one in normal direction $\dot{g}_N$ and two in the tangential directions $\dot{g}_S, \dot{g}_T$:

$$\begin{aligned} \dot{g}_N(q, \dot{q}, t) &= n_1^T (v_{\Sigma 2} - v_{\Sigma 1}), \quad \dot{g}_S(q, \dot{q}, t) = s_1^T (v_{\Sigma 2} - v_{\Sigma 1}), \\ \dot{g}_T(q, \dot{q}, t) &= t_1^T (v_{\Sigma 2} - v_{\Sigma 1}), \end{aligned} \quad (13)$$

To put this on an acceleration level we differentiate with respect to time using the differential geometric theories of Weingarten and Gauss. After long evaluations we get the result [19]:

$$\ddot{g}_N = w_N^T \ddot{q} + \bar{w}_N, \quad \ddot{g}_S = w_S^T \ddot{q} + \bar{w}_S, \quad \ddot{g}_T = w_T^T \ddot{q} + \bar{w}_T. \quad (14)$$

3.3 Multiple Unilateral Contacts

Machines include as a rule multiple contacts, which can only be treated by complementarities. For this purpose we must define the contact configuration by describing the contact sets, which are time-dependent. It is

$$\begin{aligned}
 I_A &= \{1, 2, \dots, n_A\} && \text{with } n_A \text{ elements} \\
 I_C(t) &= \{i \in I_A : g_{Ni} = 0\} && \text{with } n_C \text{ elements} \\
 I_N(t) &= \{i \in I_C : \dot{g}_{Ni} = 0\} && \text{with } n_N \text{ elements} \\
 I_T(t) &= \{i \in I_N : \dot{g}_{Ti} = 0\} && \text{with } n_T \text{ elements}
 \end{aligned} \tag{15}$$

These sets describe the kinematic state of each contact point. The set I_A consists of the n_A indices of all contact points. The elements of the set I_C are the n_C indices of the unilateral constraints with vanishing normal distance $g_{Ni} = 0$, but arbitrary relative velocity in the normal direction. In the index set I_N are the n_N indices of the potentially active normal constraints which fulfill the necessary conditions for continuous contact (vanishing normal distance $g_{Ni} = 0$ and no relative velocity $\dot{g}_{Ni}$ in the normal direction). The index set I_N includes for example all contact states with slipping. The n_T elements of the set I_T are the indices of the potentially active tangential constraints. The corresponding normal constraints are closed and the relative velocities $\dot{g}_{Ti}$ in the tangential direction are zero. The numbers of elements of the index sets I_C , I_N and I_T are not constant because there are variable states of constraints due to separation and stick-slip phenomena.

The corresponding complementarities in normal direction are

$$\ddot{g}_N \geq 0; \lambda_N \geq 0; \ddot{g}_N^T \lambda_N \geq 0, \tag{16}$$

and in tangential direction they write

$$\begin{aligned}
 |\lambda_{Ti}| &< \mu_{0i} \lambda_{Ni} \wedge \ddot{g}_{Ti} = 0 && (i \in I_T \text{ sticking}) \\
 \lambda_{Ti} &= +\mu_{0i} \lambda_{Ni} \wedge \ddot{g}_{Ti} \leq 0 && (i \in I_N \setminus I_T \text{ negative sticking}) \\
 \lambda_{Ti} &= -\mu_{0i} \lambda_{Ni} \wedge \ddot{g}_{Ti} \geq 0 && (i \in I_N \setminus I_T \text{ positive sticking})
 \end{aligned} \tag{17}$$

The $(g, \dot{g}, \ddot{g})$ are relative distances, velocities and accelerations as evaluated by kinematics. Equations (17) express the property, that for a passive tangential contact we have sliding friction (being placed on the friction cone) and that for an active tangential contact we have stiction within the fric-

tion cone. Active contacts produce constraint forces, which must be added to the equations of motion:

$$M\ddot{q} - h - \sum_{i \in I_N} (W_{Ni} \lambda_{Ni} + W_{Ti} \lambda_{Ti}) = 0. \quad (18)$$

For the index sets see eq. (15). The contact forces λ_{Ti} in equation (18) can be passive forces of sticking contacts or active forces of sliding contacts. We express the tangential forces of the $n_N - n_T$ sliding contacts by the corresponding normal forces using Coulomb's friction law by

$$W_{Ti} \lambda_{Ti} = -\mu_i (|\dot{g}_{Ti}|) W_{Ti} \frac{\dot{g}_{Ti}}{|\dot{g}_{Ti}|} \lambda_{Ni}; \quad i \in I_N \setminus I_T. \quad (19)$$

A substitution of these forces into equation (18) yields the equations of motion

$$M(q, t) \ddot{q}(t) - h(q, \dot{q}, t) - [W_N + H_R, W_T] \begin{pmatrix} \lambda_N(t) \\ \lambda_T(t) \end{pmatrix} = 0, \quad (20)$$

with the additional contact forces as Lagrange multipliers. The matrices W_N and W_T contain components from the eqs. (14). The matrix $H_R \in \mathbb{R}^{f, n_N}$ of the sliding contacts has the same dimension as the constraint matrix W_N . For $(n_T \leq n_N)$, H_R consists of the

$(n_N - n_T)$ columns $\left[-\mu_i W_{Ti} \frac{\dot{g}_{Ti}}{|\dot{g}_{Ti}|}; \quad i \in I_N \setminus I_T \right]$, while the other n_T columns

contain only zero-elements.

The relative accelerations of the active normal and tangential constraints in the equations (14) can be combined by means of the constraint matrices in the matrix notation. Together with equation (20) we get the system of equations

$$\begin{aligned} M\ddot{q} - h - [W_N + H_R, W_T] \begin{pmatrix} \lambda_N \\ \lambda_T \end{pmatrix} &= 0 \quad \in \mathbb{R}^f \\ \ddot{g}_N &= W_N^T \ddot{q} + \bar{w}_N \quad \in \mathbb{R}^{n_N} \\ \ddot{g}_T &= W_T^T \ddot{q} + \bar{w}_T \quad \in \mathbb{R}^{n_T} \end{aligned} \quad (21)$$

The unknown quantities are the generalized accelerations $\ddot{q} \in \mathbb{R}^f$, the contact forces in the normal direction $\lambda_N \in \mathbb{R}^{n_N}$ and in the tangential direction $\lambda_T \in \mathbb{R}^{n_T}$, as well as the corresponding relative accelerations

$\ddot{g}_N \in \mathbb{R}^{n_N}$ and $\ddot{g}_T \in \mathbb{R}^{2n_T}$. For the determination of the $f + 2(n_N + 2n_T)$ quantities, we have up to now $f + n_N + 2n_T$ equations. The system of equations (21) has to be completed by including the missing $n_N + 2n_T$ contact laws, the equations (16) and (17).

It should be noted, that in the last years a new formulation came up by applying the measure differential equation proposed by Moreau [17]

$$M(q, t)du - h(u, q, t)dt - W_N(q, t)d\Lambda_N - W_T(q, t)d\Lambda_T = 0, \quad (22)$$

where the measure for the $du = \dot{u}dt + (u^+ - u^-)d\eta$ velocities is split in a Lebesgue-measurable part $\dot{u}dt$, which is continuous, and the atomic parts which occur at the discontinuity points with the left and right limits u^+ and u^- and the Dirac point measure $d\eta$ (similarly, the measure for the impulses is defined as $d\Lambda = \lambda dt + \Lambda d\eta$), and by the introduction of set-theoretical elements by Alart/Curnier [2]

$$\lambda_N = \text{prox}_{C_N}(\lambda_N - r\dot{g}_N), \quad C_N(\lambda_N) = \{\lambda_N | \lambda_N \geq 0\}. \quad (23)$$

The magnitude g may as a matter of fact also be a velocity or an acceleration. In the same manner we can put Coulomb's friction law into the form

$$\lambda_N = \text{prox}_{C_T}(\lambda_T - r\dot{g}_T), \quad C_T(\lambda_N) = \{\lambda_T | |\lambda_{Ti}| \leq \mu_{0i}\lambda_{Ni}\}, \quad (24)$$

see also [16]. The equations of motion (21) take then the form

$$\begin{aligned} M(q, t)du - h(u, q, t)dt - W_N(q, t)d\Lambda_N - W_T(q, t)d\Lambda_T &= 0 \\ \lambda_N - \text{prox}_{C_N}(\lambda_N - r\ddot{g}_N) &= 0 \\ \lambda_T - \text{prox}_{C_T(\lambda_N)}(\lambda_T - r\ddot{g}_T) &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

which is convenient for applying the time stepping algorithm together with the Augmented Lagrange idea for a numerical solution [23].

Impacts with or without friction are included in the measure differential equations (22). For more details see for example the references [6], [21] or [19], the last ones following a classical approach, or [13], [14], which represent a very sophisticated reflection of the matter. Whatever approach will be used, everything starts with geometry and kinematics, which has to be written down for each individual contact and which as a matter of fact, is a really long-lasting and tedious task.

4 Summary

In industrial practice we have a large variety of mechanical systems operating with contacts of all kinds, combustion engines, drive trains, manufacturing equipment, CVT-gears or vibration conveyors, to name only a few. We have shown some typical industrial examples, and we have demonstrated the best way from the engineering point of view how to deal with such problems.

For giving an impression of the complexity of the relevant theory behind these applications, we have presented an abridged version of non-smooth multibody theory with the most important elements of relative kinematics and modern non-smooth formulations. The literature included allows a deeper step into these problems.

REFERENCES

1. *V. Acary, B. Brogliato*, Numerical Methods for Non-Smooth Dynamical Systems. Lecture Notes in Applied and Numerical Mechanics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008
2. *P. Alart, A. Curnier*, A Mixed Formulation for Frictional Contact Problems Prone to Newton Like Solution Methods. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 92, 1991, pp. 353-375
3. *G. Amontons*, On the resistance originating in machines (in French). Mem. Acad. Roy., pages 206-222, 1699
4. *L. Boltzmann*, Vorlesungen ber die Prinzipte der Mechanik. Verlag von Johann Ambrosius Barth, T I, T II, 1922
5. *H. Bremer*, Elastic Multibody Dynamics. Springer Science+Business Media, B.V., 2008
6. *B. Brogliato*, Nonsmooth Impact Dynamics. Springer Verlag, London, 1996
7. *B. Brogliato*, Nonsmooth Mechanics. Springer Verlag, London Berlin Heidelberg, 1999
8. *C.A. Coulomb*, The theory of simple machines (in French). Mem. Math. Phys. Acad. Sci., 10, pp. 161-331, 1785
9. *M. Foerg, Th. Geier, L. Neumann, H. Ulbrich*, r-factor strategies for the augmented Lagrangian approach in multibody contact mechanics.

III European Conference on Computational Mechanics; Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering, Ed. C. A. Mota Soares et al., 2006

10. *J.B. Fourier*, Mmoire sur la Statique, contenant la dmonstration du principe des vitesses virtuelles et la thorie des moments. Journal de l'Ecole polytechniques, Cahier 5, Tome II, 20-60, 1798

11. *M. Fremond*, Non-Smooth Thermomechanics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002

12. *Chr. Glocker*, Set-Valued Force Laws - Dynamics of Non-Smooth Systems. Springer Berlin, Heidelberg, New York, 2001

13. *Ch. Glocker*, Energetic Consistency Conditions for Standard Impacts, Part I: Newton-Type Inequality Impact Laws and Kane's Example. Multibody System Dynamics 29 (1) 29 (2013), S. 77–117

14. *Ch. Glocker*, Energetic Consistency Conditions for Standard Impacts, Part II: Poisson-Type Inequality Impact Laws. Multibody System Dynamics 32 (4) 32 (2014), S. 445–509

15. *H. Hertz*, Die Prinzipien der Mechanik, in: Gesammelte Werke, Band III. Verlag J. A. Barth, Leipzig, 1894

16. *R. Leine, H. Nijmeijer*, Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems. Springer Berlin, Heidelberg, New York, 2004

17. *J.J. Moreau*, Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics. Non-Smooth Mechanics and Applications, CISM Courses and Lectures, Vol. 302, Springer Verlag, Wien, 1988

18. *P.D. Panagiotopoulos*, Hemivariational Inequalities. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1993

19. *F. Pfeiffer*, Mechanical System Dynamics. Springer Berlin Heidelberg, 2008

20. *F. Pfeiffer, F. Borchsenius*, New Hydraulic System Modelling. Journal of Vibration and Control, 2004, vol. = 10, pp.1493-1515

21. *F. Pfeiffer, Chr. Glocker*, Multibody Dynamics with Unilateral Contacts. John Wiley & Sons, INC., New York, 1996 [22] *F. Pfeiffer, A. Stieglmeier*, Damping Towerlike Structures by Dry Friction. Proc. of DETC '97, ASME Design Eng. Techn. Conf., 1997

23. *F. Pfeiffer, M. Foerg, H. Ulbrich*, Numerical Aspects of non-smooth Multibody Dynamics. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 195 (2006) 6891-6908

24. *Th. Schindler, Th. Geier, H. Ulbrich, F. Pfeiffer, A. van der Velde, A. Brandsma*, Dynamics of Pushbelt CVTs. VDI-Verlag Düsseldorf, 2007

25. *A. Stieglmeyer, F. Pfeiffer*, Dynamics of the Wild Mouse. International Symposium on Impact and Friction of Solids, Structures and Machines, Ottawa, 27.-30. Juni, 1998

26. *P. Wriggers*, Computational Contact Mechanics. Springer Berlin Heidelberg New York, 2006

OPTIMAL CONTROL OF SYSTEMS WITH EVOLVING DYNAMICS

Yuri S. Ledyev

*Department of Mathematics Western Michigan University, Kalamazoo,
MI 49008, USA*

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С ЭВОЛЮЦИОНИРУЮЩЕЙ ДИНАМИКОЙ

Ю.С. Ледяев

E-mail: iouri.lediaev@wmich.edu

This talk is dedicated to new problems of optimal control systems under uncertainty.

We start with problems of optimal control of systems in which uncertainty is modeled in terms of some scenarios of evolution of system's dynamics. The main difficulty in study of such problems lies in the fact that bifurcating structure of possible scenarios requires an application of non-anticipating (causal) control procedures.

We describe optimization theory of characterization of such optimal non-anticipating strategies. Assuming that the set of possible evolution scenarios is finite and is known along with probabilities of realization of such scenarios, we derive necessary conditions for optimal non-anticipating strategies in terms of some non-standard maximum principle. The main feature of this maximum principle is new adjoint system which is significantly different from the one in classical Pontryagin maximum principle.

We demonstrate that these new optimality conditions can be used for a construction of optimal discontinuous feedback control. Robustness properties of this feedback with respect to small measurement errors of state vector and small perturbations of the dynamics are also studied.

We show that this approach can be used for study of a variety of more difficult control problems under uncertainty including some problems in differential games theory.

Доклад посвящён новым задачам оптимального управления в условиях неопределённости.

Первоначально мы рассматриваем задачи оптимального управления, в которых неопределенность моделируется в терминах некоторых сценариев эволюции динамики системы.

Основная трудность в изучении таких систем связана с тем фактом, что бифуркационная структура возможных сценариев эволюции требует применения непредсказывающих (каузальных) процедур управления.

Мы описываем оптимизационную теорию для характеристики таких оптимальных непредсказывающих стратегий. Предполагая конечность множества возможных сценариев эволюции конечно и известно наряду с вероятностями их реализации, мы получаем необходимые условия для оптимальных стратегий управления в форме некоторого нестандартного принципа максимума. Основная особенность этого принципа максимума состоит в новой сопряжённой системе уравнений, которая значительно отличается от классической системы в принципе максимума Понтрягина.

Мы демонстрируем, как эти новые условия могут быть использованы для построения оптимального разрывного синтеза управления. Свойства устойчивости этого синтеза по отношению к малым ошибкам измерения фазового вектора и малых возмущений динамики также изучены.

Мы показываем, что этот подход может быть использован для изучения более сложных задач управления в условиях неопределённости, включая некоторые задачи дифференциальных игр.

НОВЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛОКОМОЦИОННЫХ СИСТЕМ БЕЗ ВНЕШНИХ ДВИЖИТЕЛЕЙ

Н.Н. Болотник, Ф.Л. Черноусько

(ИПМех РАН, Россия, 119526, Москва, проспект Вернадского, 101, корпус 1; Московский физико-технический институт, Россия, 141701, Моск. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9)

E-mail: chern@ipmnet.ru, bolotnik@ipmnet.ru

NEW PROBLEMS OF DYNAMICS AND CONTROL FOR LIMB- LESS LOCOMOTION SYSTEMS

F.L. Chernousko, N.N. Bolotnik

(Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Vernadsky Ave 101, bld. 1, Moscow 119526, Russia; Moscow Institute of Physics and Technology, 9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russian Federation)

Keywords: limbless locomotion, dynamics, control, robotics.

Введение. Наиболее распространенные типы мобильных роботов обладают внешними движителями, такими как колеса, ноги, гусеницы и др. В то же время существуют мобильные системы, способные перемещаться без внешних движителей за счет внутренних сил, вызывающих относительные движения тел, составляющих данную систему, при наличии сопротивления среды. В качестве сил сопротивления могут выступать силы сухого трения, а также силы, зависящие линейно или квадратично от скорости движущегося тела. К изучению динамики таких систем и процессов управления их движением наблюдается значительный интерес российских и зарубежных ученых, см., например, [1, 3, 5, 6, 9, 10-12, 15, 16]. Мобильные системы без внешних движителей и с внутренними подвижными массами применяются для микророботов [7, 8, 14], для движения тел в трубах [2, 4, 13], они могут быть полезны для перемещения в ранимых или опасных средах; в ряде случаев эти системы могут быть сделаны герметичными.

В данной работе излагаются некоторые новые результаты по динамике и управлению движением локомоционных систем без внешних движителей.

1. Периодическое безреверсное движение системы двух тел вдоль прямой на горизонтальной плоскости. Рассмотрим простейшую локомоционную систему, состоящую из двух тел, взаимодействующих друг с другом и движущихся поступательно вдоль прямой на горизонтальной плоскости. Между каждым телом и плоскостью действует сухое кулоново трение. Найдем условия, при которых возможно движение описанной системы, в котором скорости тел и расстояние между ними изменяются периодически с одним и тем же периодом и при этом ни одно из тел не изменяет направления своего движения на противоположное. Движения описанного типа будем называть периодическими безреверсными движениями. Они обеспечивают минимальную работу сил сухого трения при перемещении системы на заданное расстояние и, как следствие, минимум затрат энергии на преодоление сопротивления среды движению системы.

Введем обозначения: m и M – массы тел; k_m и k_M – коэффициенты трения соответствующих тел о плоскость; x и y – координаты тел m и M , соответственно, на прямой, вдоль которой они движутся, в неподвижной (инерциальной) системе отсчета; F – сила взаимодействия, приложенная телом m к телу M ; g – ускорение силы тяжести. Движение системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \quad \dot{y} = V, \quad m\dot{v} = -F + F_m, \quad M\dot{V} = F + F_M, \\ F_m &= -k_m \operatorname{sign} v, \quad v \neq 0, \quad |F_m| \leq k_m mg, \quad v = 0, \\ F_M &= -k_M \operatorname{sign} V, \quad V \neq 0, \quad |F_M| \leq k_M Mg, \quad V = 0.\end{aligned}\tag{0.1}$$

Здесь F_m и F_M – силы сухого трения, действующие на тела m и M соответственно. Периодичность по времени величин $y(t) - x(t)$, $v(t)$ и $V(t)$ выражается краевыми условиями

$$y(0) - x(0) = y(T) - x(T),\tag{0.2}$$

$$v(0) = v(T), \quad V(0) = V(T).\tag{0.3}$$

а безреверсность – неравенствами

$$v(t) \geq 0, \quad V(t) \geq 0, \quad t \in [0, T].\tag{0.4}$$

Здесь T – период, который заранее не фиксируется. На управляющую силу F никаких ограничений не налагается. В частности допускается мгновенная передача импульса от одного тела к другому. Без ограничения общности можно полагать $x(0) = y(0)$, выбрав на прямой, вдоль которой движется система, соответствующие начала отсчета координат тел.

Будем предполагать, что $mk_m \neq Mk_M$. Если $mk_m = Mk_M$, система не может начать двигаться как целое из состояния покоя. Точнее, если $mk_m = Mk_M$, $v(0) = 0$ и $V(0) = 0$, то центр масс системы будет оставаться в начальном положении независимо от закона управления $F(t)$. Положим без ограничения общности $mk_m > Mk_M$.

Утверждение. Если $mk_m > Mk_M$, то периодическое безреверсное движение локомоторной системы двух тел возможно если и только если $m < M$.

Содержание этого утверждения состоит в том, что тело, сила трения скольжения которого о плоскость, по которой движется система, больше, должно иметь меньшую массу. Для доказательства утверждения ищутся максимум и минимум величины $\Delta = y(T) - x(T)$. Экстремумы ищутся среди решений уравнений (0.1), удовлетворяющих равенству $x(0) = y(0)$ и условиям периодичности (0.3), для всевозможных управлений $F(t)$. Установлено, что экстремальные значения величины Δ достигаются на решениях, для которых неравенства $v(t) > 0$ и $V(t) > 0$ не выполняются одновременно ни на каком интервале времени. После этого аналитически находятся экстремумы величины Δ среди движений, при которых тела движутся поочередно, мгновенно останавливаясь, передавая свой импульс другому телу. Периодическое безреверсное движение возможно если и только если $\min \Delta \leq 0$ и $\max \Delta \geq 0$. Из этих неравенств непосредственно следует утверждение.

Периодическое безреверсное движение может быть реализовано многими способами. Приведем простой пример такого движения. Положим $x(0) = y(0) = 0$, $v(0) = V(0) = 0$ и возьмем управление следующего вида:

$$F = \theta_1[H(t) - H(t - t_*)] - MV(t_*)\delta(t - t_*) + \theta_2 H(t - t_*), \quad t \in [0, T], \quad (0.5)$$

где θ_1 , θ_2 , t_* и T – постоянные параметры закона управления, $H(\cdot)$ – единичная функция Хевисайда. Подберем параметры θ_1 , θ_2 , t_* и T так, чтобы движение системы происходило следующим образом: на интервале $(0, t_*)$ тело M движется вперед ($V > 0$) с положительным ускорением $\theta_1 / M - k_M g$, а тело m неподвижно; в момент времени t_* тело M останавливается, передав свой импульс телу m ; на интервале (t_*, T) тело m движется вперед ($v > 0$), замедляясь с ускорением $-\theta_2 / m - k_m g$, а тело M неподвижно. В момент времени T должны быть выполнены равенства $x(T) = y(T)$ и $v(T) = V(T) = 0$. Перечисленные требования приводят к соотношениям

$$V(T) = 0, \quad x(T) = y(t_*), \quad Mk_M g < \theta_1 \leq mk_m g, \quad -Mk_M g < \theta_2 \leq Mk_M g. \quad (0.6)$$

Функции $x(t)$, $y(t)$, $v(t)$ и $V(t)$ находятся решением уравнений (0.1) при нулевых начальных условиях и управлении, определяемом выражением (0.5). Перечисленные функции как от параметров зависят от θ_1 , θ_2 , t_* и T . Разрешая два равенства (0.6) относительно параметров θ_2 и t_* , получим

$$\theta_2 = \frac{M}{m}(\theta_1 - Mk_M g) - mk_m g, \quad t_* = \frac{M}{M + m} T. \quad (0.7)$$

После этого неравенства (0.6) преобразуются к виду

$$1 + \frac{m}{M} \left(\frac{mk_m}{Mk_M} - 1 \right) \leq \frac{\theta_1}{Mk_M g} \leq \min \left[\frac{mk_m}{Mk_M}, 1 + \frac{m}{M} \left(\frac{mk_m}{Mk_M} + 1 \right) \right]. \quad (0.8)$$

Если $mk_m > Mk_M$ и $m < M$, то множество (0.8) непусто. Управление (0.5) при любых значениях параметров, удовлетворяющих соотношениям (0.7) и (0.8), реализует периодическое безреверсное движение системы.

2. Капсульный вибрационный робот с возвратной пружиной. Исследована динамика управляемого движения локомоторной системы (капсульного робота), которая относится к классу вибрационных роботов. Вибрационные роботы состоят из корпуса, взаимодействующего с внешней средой, и внутренних тел, взаимодействующих с корпусом, но не взаимодействующих со средой. Как правило, внутренние тела совершают колебательные движения относительно корпуса. Управление колебаниями внутренних тел позволяет изменять силу сопротивления

среды движению корпуса, управляя таким образом движением всей системы. В данной работе рассматривается робот, который состоит из жесткого корпуса и электромагнитного (соленоидного) привода, расположенного внутри (рис. 1).

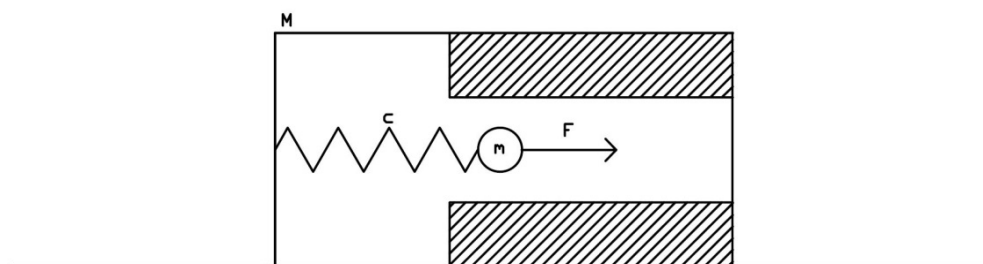


Рис. 1. Капсульный робот. M – масса корпуса, m – масса сердечника, c – жесткость пружины, F – управляющая сила

Привод состоит из электрической катушки (соленоида), жестко скрепленной с корпусом, и сердечника, который изготовлен из ферромагнитного материала и может перемещаться внутри соленоида вдоль оси последнего. Сердечник связан с корпусом пружиной, ось которой ориентирована вдоль оси соленоида. Ось соленоида параллельна оси корпуса. Корпус взаимодействует с внешней сопротивляющейся средой, в которой движется робот. Робот приводится в движение посредством силы, которая действует на сердечник при подаче электрического напряжения на соленоид. Привод устроен так, что эта сила направлена в одну сторону, стремясь втянуть сердечник в катушку. Движение сердечника в обратном направлении осуществляется за счет пружины. Построена математическая модель описанного робота, в которой управляющей переменной служит сила, приложенная соленоидом к сердечнику. Динамика электрической цепи соленоида не учитывается.

Исследовано движение робота вдоль прямой, параллельной оси его корпуса, по шероховатой горизонтальной плоскости при периодическом кусочно-постоянном режиме возбуждения. Каждый период состоит из двух интервалов; действующая на сердечник сила постоянна и не равна нулю на первом интервале и равна нулю на другом. Параметрами возбуждения являются величина силы на активном участке F_0 , период T и коэффициент заполнения τ , определяемый как отношение

продолжительности активного участка к длительности периода. Предполагается, что между корпусом робота и плоскостью действует сухое трение, подчиняющееся закону Кулона.

Основной эксплуатационной характеристикой робота является его средняя скорость V в установившемся режиме движения, когда сердечник периодически колеблется относительно корпуса, а корпус движется относительно плоскости с периодически изменяющейся скоростью. Исследована зависимость величины V от параметров T и τ . Монотонное изменение периода при постоянном коэффициенте заполнения влечет непрерывное изменение средней скорости робота в установившемся движении, причем при некоторых критических значениях периода скорость меняет знак. Изменение знака скорости связано с резонансными явлениями в колебательном звене системы. Изменение коэффициента заполнения при постоянном периоде также приводит к изменению величины и направления скорости движения робота, причем при коэффициентах заполнения, равных τ и $1 - \tau$, робот движется с одной и той же средней скоростью, но в противоположных направлениях; при $\tau = 0$, $\tau = 0,5$, $\tau = 1$ средняя скорость робота равна нулю. Таким образом, управлять системой можно как изменением периода, так и изменением коэффициента заполнения управляющего сигнала. Наиболее целесообразным представляется управление путем изменения коэффициента заполнения при фиксированном периоде, соответствующем абсолютному максимуму средней скорости движения робота. В этом случае варьирование коэффициента заполнения позволяет охватить весь диапазон возможных скоростей робота. Зависимость скорости корпуса робота относительно среды и скорости сердечника относительно корпуса от времени в установившемся режиме движения имеет различный характер при различных значениях параметров возбуждения. В частности, корпус робота может иметь или не иметь интервалы движения в направлении, противоположном средней скорости, а при наличии интервалов движения в обоих направлениях иметь или не иметь интервалы, в течение которых корпус покоится относительно среды.

Описанные выше характеристики поведения системы установлены теоретически или численным моделированием. Кроме того, построена физическая модель капсульного робота (рис. 2) и проведены экспериментальные исследования. Эксперименты подтвердили качест-

венное поведение системы, предсказанное теоретически. В частности, в экспериментах наблюдалось изменения величины и направления средней скорости робота при изменении периода и коэффициента заполнения управляющего сигнала.

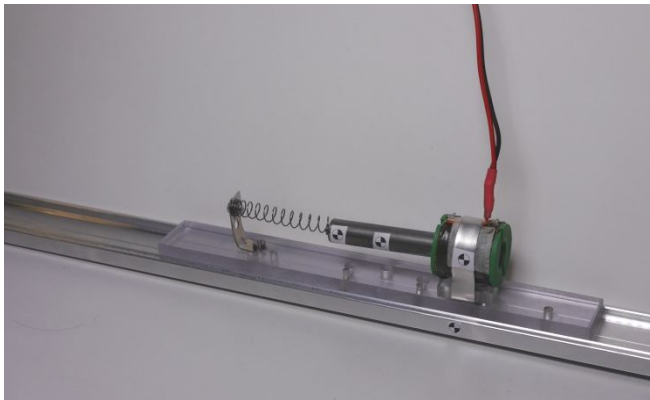


Рис. 2. Физическая модель вибродвигателя с возвратной пружиной

Капсульный робот рассматриваемого типа может быть использован в узких трубах для дефектоскопии их внутренних поверхностей и производства работ по устранению мелких дефектов, например, нарушения целостности защитного покрытия внутренней поверхности трубы.

Рассмотрим поступательное движение цепочки тел с периодически изменяющейся скоростью в сопротивляющейся среде. Рассматривается система в виде цепочки одинаковых твердых тел массы m , которые могут двигаться прямолинейно вдоль оси x (рис. 3). Тела пронумерованы справа налево.

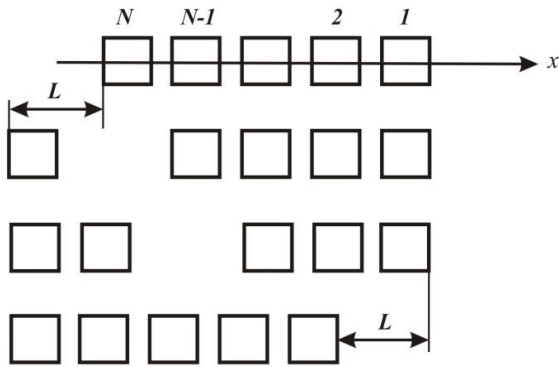


Рис. 3. Локомоционная система в виде цепочки тел

Между каждой парой соседних тел установлены актюаторы, которые могут сообщать соседним телам равные по величине и противоположно направленные импульсы. Расстояние между соседними телами может изменяться в пределах от 0 до заданного расстояния L .

Тела движутся в среде, действующей на них силами сопротивления, направленными против скорости тела и зависящими от ее величины. Рассматриваются два распространенных закона сопротивления: линейный и квадратичный, для которых силы сопротивления R_1 и R_2 определяются соответствующими формулами

$$R_1 = -bv, \quad R_2 = -cv|v|. \quad (3.1)$$

Коэффициенты b и c могут зависеть от направления движения. В общем (анизотропном) случае имеем

$$b = b_+ \text{ при } v > 0; \quad b = b_- \text{ при } v < 0 \quad (3.2)$$

в случае линейного сопротивления и

$$c = c_+ \text{ при } v > 0, \quad c = c_- \text{ при } v < 0 \quad (3.3)$$

в случае квадратичного сопротивления.

Предложен способ управления, обеспечивающий поступательное движение цепочки тел вдоль оси x в сопротивляющейся среде. Управление осуществляется актюаторами, воздействующими на соседние тела движущейся системы.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ все тела движутся со скоростью $V_0 > 0$ вдоль оси x , и расстояния между всеми соседними телами равны нулю. В этот момент $t = 0$ актюатор, установленный между телами $N-1$ и N , воздействует импульсом q_0 на цепочку первых $N-1$ тел и с импульсом $(-q_0)$ на тело N . В результате, количество движения (импульс) первых $N-1$ тел становится равным

$$Q_1 = (N-1)mV_0 + q_0, \quad (3.4)$$

а импульс тела N становится равным

$$Q_2 = mV_0 - q_0. \quad (3.5)$$

Потребуем, чтобы величина q_0 была достаточно большой, а именно, чтобы

$$q_0 > mV_0. \quad (3.6)$$

Тогда $Q_2 < 0$, и скорость тела N сразу после импульса (при $t = +0$) будет отрицательна и равна

$$v_1 = V_0 - q_0/m < 0. \quad (3.7)$$

Скорость остальных $N - 1$ тел при $t = +0$ равна

$$V_1 = Q_1[(N-1)m]^{-1} = V_0 + q_0[(N-1)m]^{-1}. \quad (3.8)$$

После импульса первые $N - 1$ тел и тело N в течение некоторого интервала времени $t \in (0, \theta)$ движутся без взаимодействия под влиянием только сил сопротивления. Начальные скорости на этом интервале даны соотношениями (3.7) и (3.8) для тела N и первых $N - 1$ тел, соответственно. Так как эти скорости имеют разные знаки, то расстояние между телами $N - 1$ и N растет и в какой-то момент $t = \theta$ станет равным L . Обозначим через v_2 и V_2 скорости в момент $t = \theta$ тела N и первых $N - 1$ тел, соответственно.

В момент $t = \theta$ актюатор, установленный между телами $N - 1$ и $N - 2$, воздействует импульсом q_2 на первые $N - 2$ тел, а актюатор, установленный между телами $N - 1$ и N , воздействует импульсом q_3 на тело N . Оба импульса положительны и выбираются такими, чтобы все тела, кроме тела $N - 1$, приобрели одинаковую скорость V_1 , определенную уравнением (3.8), а тело $N - 1$ приобрело скорость v_1 , определенную уравнением (3.7). Поскольку при импульсном (мгновенном) взаимодействии тел полный импульс системы сохраняется, имеем равенства

$$mv_2 + (N-1)mV_2 = mv_1 + (N-1)mV_1 = NmV_0, \quad (3.9)$$

из которых вытекает соотношение

$$(N-1)(V_1 - V_2) = v_2 - v_1. \quad (3.10)$$

После этого все тела опять движутся без взаимодействия друг с другом в течение интервала времени $t \in (\theta, 2\theta)$. В конце этого интервала скорость тела $N - 1$ станет равной v_2 , а скорости всех остальных тел будут равны V_2 . Этот процесс может повторяться: одно за другим, каждое тело будет получать импульс, направленный назад, и тем самым толкать вперед все остальные тела, находящиеся как впереди, так и сзади него. Вся цепочка тел продолжает поступательное движение, причем скорость тел, движущихся вперед, изменяется от V_1 до V_2 , а скорость одного тела, движущегося назад, изменяется от v_1 до v_2 .

Когда описанный процесс подойдет к концу в момент $t = N\theta$, первое тело закончит свое движение назад и будет иметь скорость v_2 , в то время как остальные тела будут иметь скорость V_2 . В соответствии с Ошибка! Закладка не определена. суммарный импульс системы при $t = N\theta$ будет равен ее начальному импульсу в момент $t = 0$, когда все тела имеют скорость V_0 . За счет мгновенного обмена импульсами между первым и всеми остальными телами скорость всех N тел может быть сделана равной начальной скорости V_0 при $t = 0$. В момент $t = N\theta$ описанное движение может начаться снова, так что получаем возможность циклического движения с периодически изменяющимися скоростями.

Равенство (3.10) представляет необходимое и достаточное условие осуществимости движения описанного типа. С учетом выражений (3.7) и (3.8) для v_1 и V_1 , а также определения величин v_2 и V_2 , равенство (3.10) обеспечивается подбором параметров V_0 , q_0 и θ . Для вычисления скоростей v_2 и V_2 надо решить уравнения движения соответствующих тел системы на интервале времени $(0, \theta)$ при начальных скоростях, равных v_1 и V_1 . Установлено, что равенство (3.10) не может быть выполнено для системы в среде с линейным изотропным сопротивлением при $V_0 > 0$ и может быть выполнено для системы в средах с линейным анизотропным сопротивлением и квадратичным (как изотропным, так и анизотропным) сопротивлением. Оценены средние скорости движения цепочки тел в таких средах.

Заключение. Решен ряд новых задач динамики и управления движением локомоционных систем без внешних движителей в средах с различными законами сопротивления. Для системы двух взаимодействующих тел, движущихся вдоль прямой по горизонтальной плоскости с сухим трением, получены необходимые и достаточные условия, гарантирующие возможность периодического безреверсного движения, при котором расстояние между телами и их скорости изменяются периодически и ни одно из тел не изменяет направления своего движения. Исследована динамика вибрационного робота с подвижным внутренним телом и возвратной пружиной при возбуждении движения силой взаимодействия внутреннего тела с корпусом, изменяющейся периодически в широтно-импульсном режиме. Движение робота происходит вдоль прямой на горизонтальной плоскости при наличии сухого трения меж-

ду плоскостью и корпусом робота. Обнаружены резонансные эффекты, позволяющие управлять системой путем изменения периода и коэффициента заполнения управляющего сигнала без изменения направления действия силы. Исследовано поступательное движение цепочки твердых тел в сопротивляющейся среде под воздействием актюаторов, установленных между каждой парой соседних тел. Рассмотрены случаи сред с линейным и квадратичным сопротивлением в изотропном и анизотропном случаях. Показано, что внутренние силы, производимые актюаторами, могут обеспечить поступательное движение цепочки с периодически изменяющейся скоростью. Найдены условия такого движения, оценена его средняя скорость. Полученные результаты могут найти приложения в биомеханике и робототехнике.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 17-01-00652).

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотник Н.Н., Фигурина Т.Ю., Черноусько Ф.Л. Оптимальные управление прямолинейным движением системы двух тел в сопротивляющейся среде // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. Вып. 1. С. 3-22.
2. Градецкий В.Г., Князьков М.М., Фомин Л.Ф., Чащухин В.Г. Механика миниатюрных роботов. М.: Наука, 2010.
3. Егоров А.Г., Захарова О.С. Оптимальное по энергетическим затратам движение виброробота в среде с сопротивлением // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74. Вып. 4. С. 620-632.
4. Чащухин В.Г. Моделирование динамики и определение управляющих параметров внутритрубногонинобота // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 5. С. 142-147.
5. Черноусько Ф.Л. Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 6. С. 915-941.
6. Черноусько Ф.Л. Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 202-215.
7. Breguet J.-M., Renaud P.A 4-degrees-of-freedom microrobot with nanometer resolution // Robotica 1996. Vol. 14. P. 199-203.

8. *Breguet J.-M., Clavel, R.* Stick and slip actuators: design, control, performances and applications // Proc. Int. Symp. on Micromechatronics and Human Science (MHS), P. 89-95. New York, IEEE (1998).

9. *DeSimone A., Guarnieri F., Noselli G., Tatone A.* Crawlers in viscous environments: Linear vs nonlinear rheology // International Journal of Non-linear Mechanics. 2013. Vol. 56. P/ 142-147.

10. *Fang H.-B., Xu J.* Controlled motion of a two-module vibration-driven system induced by internal acceleration-controlled masses // Archive of Applied Mechanics. 2012. Vol. 82. P. 461-477.

11. *Liu Y., Pavlovskaya E., Wiercigroch M., Peng Z.K.* Forward and backward motion control of a vibro-impact capsule system // International Journal of Nonlinear Mechanics. 2015. V. 70. P. 30-46.

12. *Steigenberger J., Behn C.* Worm-like Locomotion Systems: an Intermediate Theoretical Approach. Munich: Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2012.

13. *Sun L., Sun P., Qin X.* Study on micro robot in small pipe // UKACC International Conference "Control 98", Swansea, UK, 1--4 Sep. 1998. IET, 1998. P. 1212-1217.

14. *Vartholomeos P., Papadopoulos E.* Dynamics, design and simulation of a novel microrobotic platform employing vibration microactuators // Trans. ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. 2006. Vol. 128. No. 1. P. 122-133.

15. *Wagner G., Lauga E.* Crawling scallop: Friction-based locomotion with one degree of freedom // Journal of Theoretical Biology. 2013. Vol. 324. P. 42-51.

16. *Zimmermann K., Zeidis I., Behn C.* Mechanics of Terrestrial Locomotion with a Focus on Nonpedal Motion Systems. Heidelberg: Springer, 2010.

ДИНАМИКА И УПРАВЛЕНИЕ МОРСКИМИ ПОДВОДНЫМИ ОБЪЕКТАМИ В СЛОЖНЫХ ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

С.Н. Васильев

*(ИПУ РАН Россия, 117997, Москва ул. Профсоюзная, 65, МГУ
им. М.В. Ломоносова, 119991, Москва, Ленинские горы, 1),*

Ю.В. Гурьев, Ю.В. Разумеенко, Е.И. Якушенко

*(ВМПИ ВУНЦ ВМФ «Военно-морская академия», Россия, 196604,
Санкт-Петербург-Пушкин, Кадетский бульвар, 1)*

E-mail: uvgur@mail.ru

DYNAMICS AND CONTROL OF MARINE UNDERWATER OB- JECTS IN COMPLEX HYDROPHYSICAL CONDITIONS

S.N. Vassilyev

*(ICS RAS, Russia, 117997, Moscow, Profsoyuznaya Street, 65), Yu. V. Gur-
jev, Yu. V. Razumeenko, E. I. Yakushenko (NPI MESC RN “Naval Acad-
emy”, Russia, 196604, St. Petersburg-Pushkin, Cadet Boulevard, 1)*

Keywords: management of marine objects, mathematical mod-
els, safety of navigation, hydrophysical fields, field experiment,
pycnocline

Введение. Одной из актуальных научных и прикладных задач ко-
раблестроения является исследование влияния натуральных гидрофизиче-
ских условий на гидродинамику и динамику морских подводных объ-
ектов (МПО) различного назначения. В частности, это влияние важно
учитывать при создании оперативно-советующих систем поддержки
принятия решений в задачах обеспечения безопасности МПО [1].

Еще сравнительно недавно при их проектировании общеприня-
тым было представление о морской среде, как об однородной жидко-
сти, хотя уже в конце 19-го века норвежский исследователь и путеше-
ственник Ф. Нансен открыл явление, которое изменило это представле-
ние. Во время плавания в районе полуострова Таймыр судно экспеди-
ции Нансена «Фрам» без каких-либо внешних причин и при постоянной
скорости вращения гребного винта вдруг резко снизило ход. Пробы

морской воды показали, что в верхнем ее слое вода была практически пресной, а на глубине, больше, чем осадка судна – соленой. Соответственно отличалась и плотность воды – в нижнем слое она была больше. В этом случае на границе раздела слоев различной плотности (пикноклине) возникают внутренние гравитационные волны, которые являются причиной появления «внутреннего» волнового сопротивления движению корабля. Это дополнительное сопротивление и вызвало снижение скорости хода «Фрама».

Несмотря на этот эффект, который Нансен назвал эффектом «мертвой воды», до середины 20-го века кораблестроители и моряки обходились прежней гипотезой о постоянной плотности морской воды по глубине.

Начавшиеся в это время исследования показали, что в действительности морская среда имеет гораздо более сложную структуру по сравнению с описанной двухслойной моделью, и характеризуется существенной пространственно-временной изменчивостью гидрофизических полей (температуры, солености, плотности, скорости). Причиной такой изменчивости является неравномерность (суточная, месячная, сезонная, годовая) распределения солнечной радиации, турбулентный обмен теплом с атмосферой, приливообразующие силы, таяние айсбергов и ледников, впадение крупных рек в моря и океаны, а также динамические процессы в атмосфере и морской среде. Наибольшая степень неоднородности гидрофизических полей наблюдается в верхнем слое океана до глубин 200-300 м [2]. Поэтому, хотя неоднородность морской среды была открыта при плавании надводного судна, наибольшие проблемы она создает для подводных объектов.

Указанная изменчивость гидрофизических полей, проявляющаяся, в частности, в наличии слоев жидкости с сильными градиентами плотности, внутренних волнах и подводных течениях, может оказывать заметное влияние на управление МПО, вплоть до полной потери контроля над его движением, что подтверждается как опытом эксплуатации, так и научными исследованиями [3]. Так по одной из версий гибель американской подводной лодки «Трешер» связана с воздействием внутренней волны.

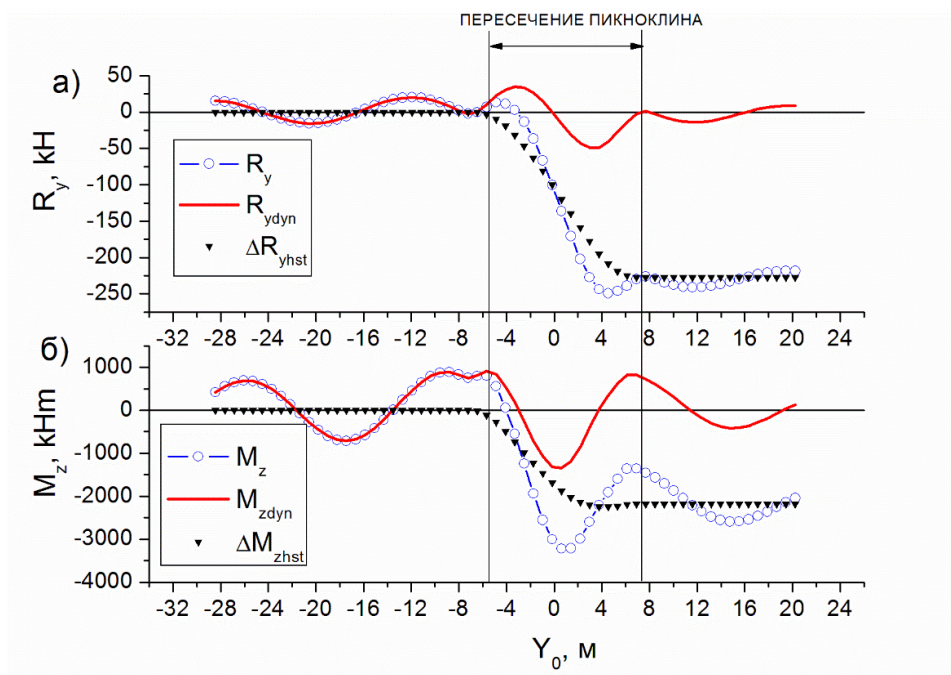


Рис. 1. Изменение гидродинамических (индекс «dyn»), гидростатических («hst») и суммарных сил и моментов при всплытии МПО с пересечением скачка плотности для $\Delta\rho = 3,0 \text{ кг/м}^3$

В подтверждение сказанного приведем некоторые результаты численного моделирования силового воздействия натуральных гидрофизических условий на МПО водоизмещением около 7700 м^3 [3,4]. На рис. 1 показаны зависимости суммарных значений вертикальной силы R_y и продольного момента M_z , а также двух их составляющих – гидростатической (hst) и гидродинамической (dyn) в зависимости от глубины погружения в процессе всплытия с пересечением скачка плотности мощностью $\Delta\rho = 3,0 \text{ кг/м}^3$ (разность плотностей верхнего и нижнего слоев). Расчеты показали, что гидродинамическая сила максимально изменяется на $49 \text{ кН} \approx 5 \text{ тс}$, а гидростатическая – почти на 23 тс , т.е. в 4,5 раза больше, а соответствующие моменты – в 1,6 раза. Такие быстротечные колебания внешнего силового воздействия могут создать серьезные проблемы для управления МПО.

Расчеты были выполнены на персональном компьютере с помощью математической модели, основанной на допущениях о том, что жидкость невязкая, ее плотность скачком изменяется на величину $\Delta\rho$ на

границе раздела слоев различной плотности, течение безвихревое (потенциальное), а влияние вязкости на гидродинамические реакции учитывается косвенно с помощью специально построенной вихревой системы [5, 6].

Эта относительно простая модель позволяет получать значимые для проектантов данные на ранних стадиях проектирования. Ее достоинством является оперативность расчетов, что позволяет рассматривать большое число вариантов проектных и конструктивных решений, получая ответ на вопрос: «А что будет, если ...?».

С помощью этой модели были получены и результаты, представленные на рис. 2, где показаны графики изменения вертикальной и боковой проекций гидродинамических реакций при движении МПО на циркуляции в условиях естественного внутреннего волнения. Такое волнение создается в стратифицированной по плотности жидкости под воздействием естественных факторов, например, поверхностного волнения. При этом внутренние волны могут иметь заметно большую высоту (десятки метров) и длину (километры), чем поверхностные.

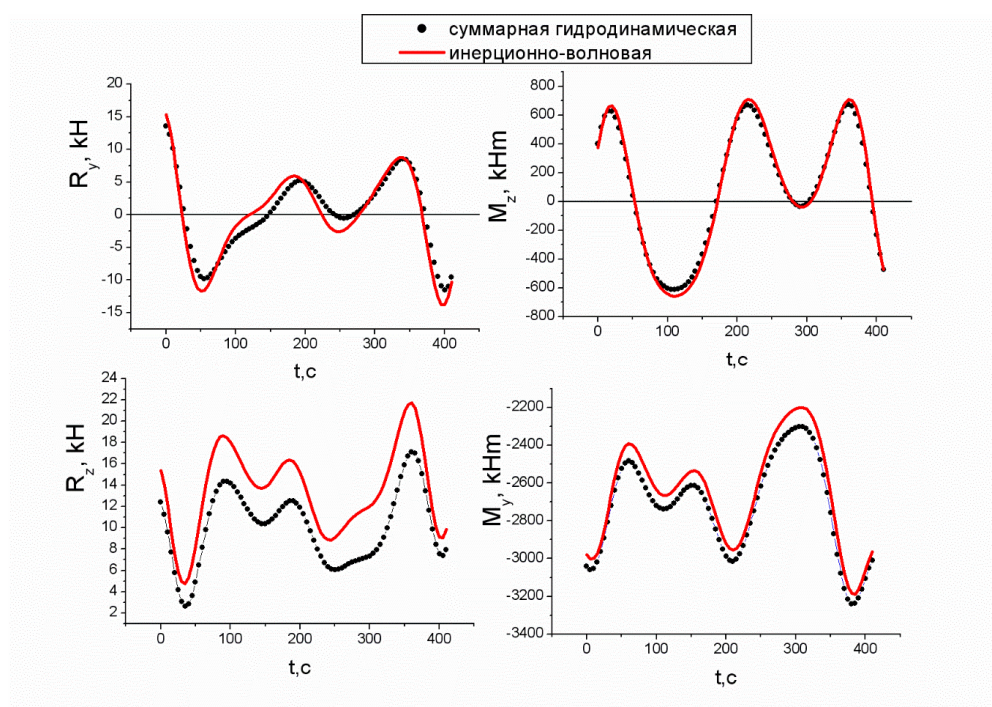


Рис. 2. Гидродинамические реакции при движении МПО на циркуляции

В вычислительном эксперименте объект маневрирует на глубине 20 м под пикноклином с $\Delta\rho = 2 \text{ кг/м}^3$, по которому распространяется внутренняя волна амплитудой 5 и длиной 400 м. При этих условиях ненулевыми являются уже не только вертикальная сила и момент дифферента, но боковая сила и момент рысканья. На графиках кроме суммарных гидродинамических реакций (дискретные точки) показаны и инерционно-волновые их составляющие (сплошные линии). Разница между ними позволяет оценить вклад в общий баланс вязких гидродинамических сил.

Представленные результаты позволяют сделать вывод о том, что при движении на циркуляции внутреннее волнение радикальным образом изменяет характер поведения гидродинамических реакций, которые становятся сложными функциями времени.

Математическая модель динамики МПО в сложных гидрофизических условиях. Для исследования влияния гидрофизических условий на управляемость МПО была разработана математическая модель и программный комплекс «Динамика» под руководством к.т.н. С.Л. Карлинского и д.т.н. профессора Ю.В. Разумеенко [2]. Динамика объекта описывается шестью дифференциальными уравнениями движения, которые при совпадении осей связанной системы x_1, y_1, z_1 с главными центральными осями инерции МПО принимают наиболее простой вид

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dV_{x1}}{dt} + m(\omega_{y1}V_{z1} - \omega_{z1}V_{y1}) &= R_{x1}; & m \frac{dV_{y1}}{dt} + m(\omega_{z1}V_{x1} - \omega_{x1}V_{z1}) &= R_{y1}; \\ m \frac{dV_{z1}}{dt} + m(\omega_{x1}V_{y1} - \omega_{y1}V_{x1}) &= R_{z1}; \\ J_{xx} \frac{d\omega_{x1}}{dt} + (J_{zz} - J_{yy})\omega_{z1}\omega_{x1} &= M_{x1}; & J_{yy} \frac{d\omega_{y1}}{dt} + (J_{xx} - J_{zz})\omega_{x1}\omega_{z1} &= M_{y1}; \\ J_{zz} \frac{d\omega_{z1}}{dt} + (J_{yy} - J_{xx})\omega_{x1}\omega_{y1} &= M_{z1}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где V_{x1}, V_{y1}, V_{z1} и $\omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1}$ – проекции поступательной и угловой скоростей МПО на оси связанной системы, m, J_{xx}, J_{yy} и J_{zz} – соответственно его масса и моменты инерции относительно продольной, вертикальной и поперечной осей, $R_{x1}, R_{y1}, R_{z1}, M_{x1}, M_{y1}, M_{z1}$ – проекции на эти

же оси главного вектора и главного момента внешних сил, действующих на МПО.

В число реакций в правых частях уравнений системы (1) входят все значимые силы, действующие на объект со стороны жидкости – вязкие, инерционные, волновые от поверхностного и внутреннего волнения, гидростатические. При этом учитывается переменный характер гидростатических сил, обусловленный изменением плотности воды, объемного водоизмещения и массы объекта. Гидродинамические силы находятся с использованием гипотезы о независимости их составляющих. Для определения вязких сил использовались данные физических экспериментов в аэродинамических трубах и опытовых бассейнах и гипотеза стационарности.

Для описания сил от внутренних волн применялась приближенная математическая модель, включающая две составляющие – модель внутреннего волнения и модель воздействия этого волнения на корпус объекта. Внутреннее волнение моделировалось плоской прогрессивной волной, в которой колебание жидкости описывается следующей зависимостью $y_{\text{вв}} = -A_{\text{вв}}^0 \varepsilon_{\text{вв}} \cos(k_{\text{вв}}x + \omega_{\text{вв}}t)$, где $k = 2\pi/\lambda_{\text{вв}}$ – волновое число, $\omega_{\text{вв}} = 2\pi/\tau_{\text{вв}}$ – частота внутренней волны, $\varepsilon_{\text{вв}} = \frac{shk(h_i - y_{i0})}{shkh_i}$ – ко-

эффициент ослабления амплитуды по мере удаления от оси слоя скачка на горизонте $\eta = h_1 - y_{i0}$, h_1 и h_2 – удаление оси пикноклина от поверхности и дна, y_{i0} – удаление рассматриваемой точки от самого пикноклина

($i = 1$ – вверх, $i = 2$ – вниз).

Модель определения силового воздействия со стороны внутреннего волнения основана на положениях линейной теории качки Крылова-Хаскинда, в соответствие с которой гидродинамические силы разделяются на три составляющие:

- главную часть возмущающих гидродинамических реакций, обусловленную действием давлений в неискаженном поле волны в предположении о проницаемости корпуса объекта;
- инерционно-демпфирующие реакции, обусловленные качкой тела на тихой воде;
- дифракционные реакции, обусловленные гидродинамическим взаимодействием тела с набегающими волнами, и разделяемыми в свою очередь на инерционные и демпфирующие компоненты.

В предлагаемой модели вводится упрощающее допущение о том, что подводный объект не создает собственных (вынужденных) внутренних волн. В этом случае можно пренебречь инерционно-демпфирующими компонентами гидродинамических реакций, точнее, считать равными нулю демпфирующие их части, обусловленные расходом энергии объекта на создание внутренних волн, а инерционные – принять равными их же значениям при движении в безграничной жидкости.

Главная часть возмущающих сил и моментов определяется по значениям давлений, создаваемых внутренней волной в отсутствие объекта.

Результаты моделирование движения подводных объектов. С помощью программного комплекса «Динамика» были проведены масштабные исследования по изучению влияния параметров пикноклина, подводных течений, внутреннего и поверхностного волнения на гидродинамику и динамику МПО. Исследования проводились в различных сочетаниях действия этих гидрофизических факторов и при различных значениях характеризующих их параметров. Было рассмотрено нескольких характерных типов подводных объектов различного назначения и соответственно формы и водоизмещения.

Приведем отдельные результаты выполненных исследований для схематизированного подводного объекта водоизмещением около 4000 тонн. Толщина скачка плотности была принята равной 20 мпри глубине залегания – 20 м. Другие гидрофизические условия изменялись в следующих пределах: поверхностное волнение от 0 до 5 баллов, высота внутренних волн от 2 до 10 метров, длина от 400 до 2400 метров, период от 670 до 3400 секунд. Гидрологический разрез плотности по глубине моря имел следующие параметры: 1024 т/м^3 от 0 до 20 м, линейное изменение до 1026 т/м^3 от 20 м до 40 м и, далее – постоянное значение. Была исследована динамика МПО для нескольких характерных режимов движения таких, например, как установившееся движение под и над скачком плотности, всплытие на заданную глубину с пересечением пикноклина и некоторые другие. Наиболее сложным для управления движением оказался маневр, связанный с пересечением скачка плотности с последующим удержанием объекта на заданной относительно небольшой глубине погружения.

Расчет этого маневра выполнялся в различных комбинациях гидрофизических условий. На рис. 3 показано изменение некоторых параметров движения (скорости и глубины) и управляющих воздействий при переходе объекта с 50 на 15 метровую глубину при наличии скачка плотности без волнения при скорости 8 узлов. Как видно из графиков, несущей способности рулей и корпуса достаточно, чтобы пройти пикноклин без каких-либо проблем. При автоматическом управлении всплытие осуществляется за 240 с.

На рис. 4 представлены результаты численного моделирования того же перехода, но при скорости 3 узла. При этой скорости несущей способности рулей и корпуса уже недостаточно для прохода пикноклина и после неоднократной остановки всплытия производится откачка балласта тремя порциями (всего $5,6 \text{ м}^3$). Многократная откачка требуется вследствие отсутствия информации об изменении плотности морской воды, что замедляет процесс всплытия, который занимает 1800 с (полчаса).

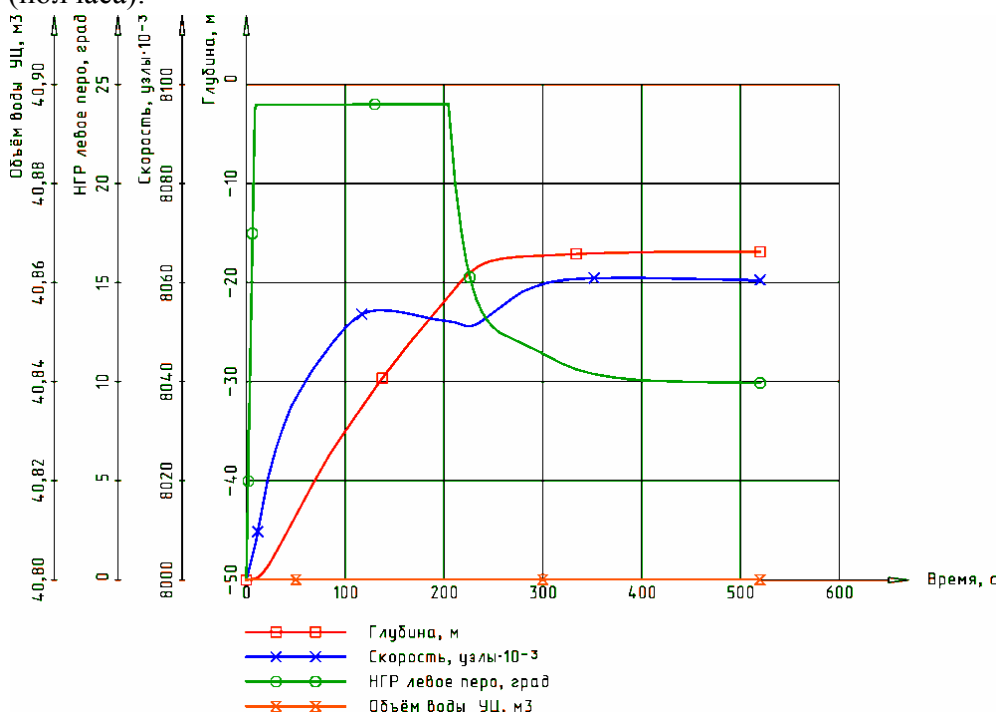


Рис. 3. Всплытие объекта при скорости 8 узлов с 50 на 15 м с пересечением скачка плотности в отсутствии поверхностного и внутреннего волнения

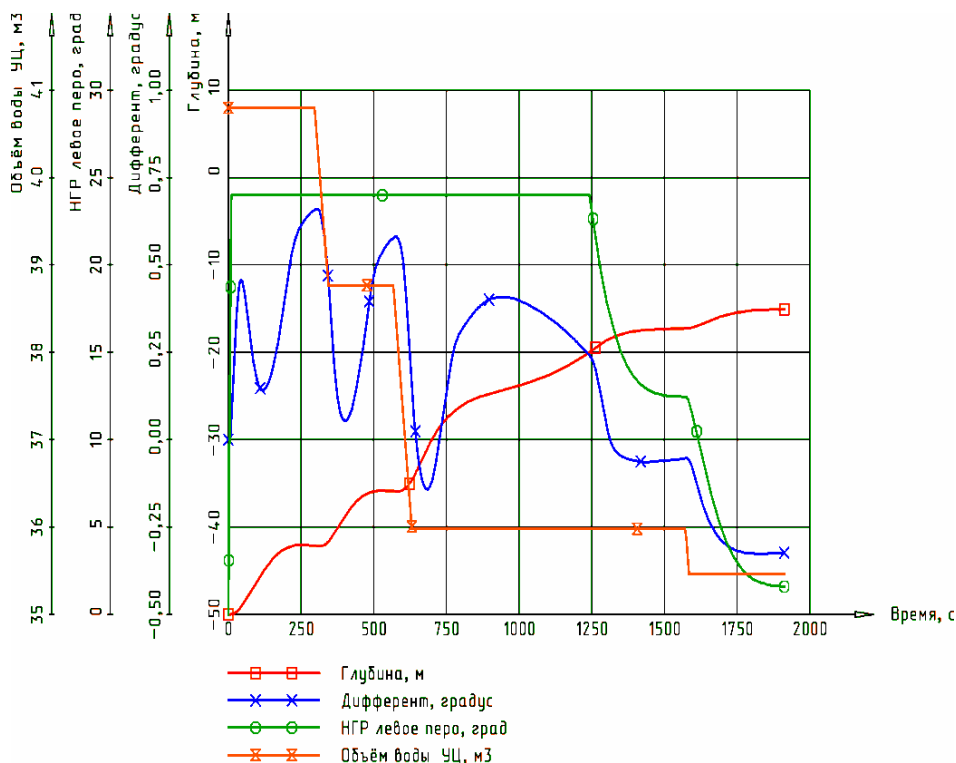


Рис. 4. Всплытие объекта при скорости 3 узла с 50 на 15 м с пересечением скачка плотности в отсутствии поверхностного и внутреннего волнения

Время всплытия при этих же условиях можно существенно сократить, имея информацию о гидрологическом разрезе плотности. Вычислительный эксперимент показал, что наличие такой информации позволяет произвести откачку балласта одной порцией и сократить время маневра в три раза.

Управление при всплытии усложняется при наличии поверхностных волн. На рис. 5 представлены данные о движении МПО при попытке всплытия через пикноклин при поверхностном волнении силой 5 баллов. В этом случае при скорости 3 узла не удастся удержать объект от несанкционированного выброса на поверхность моря. Указанный факт объясняется противоречивыми требованиями к управлению плавучестью при пересечении пикноклина (откачка балласта) и компенсации силы «подсоса» (прием балласта). В результате корректное управление при всплытии в условиях пикноклина, близкого к поверхности моря, и одновременного воздействия поверхностного волнения пред-

ставляет проблему, решение которой облегчается наличием оперативной информации о гидрологическом разрезе и параметрах волнения на поверхности моря. Следует отметить, что осуществление этого маневра еще более осложняется в случае силового воздействия внутренних волн, которое имеет знакопеременный характер.

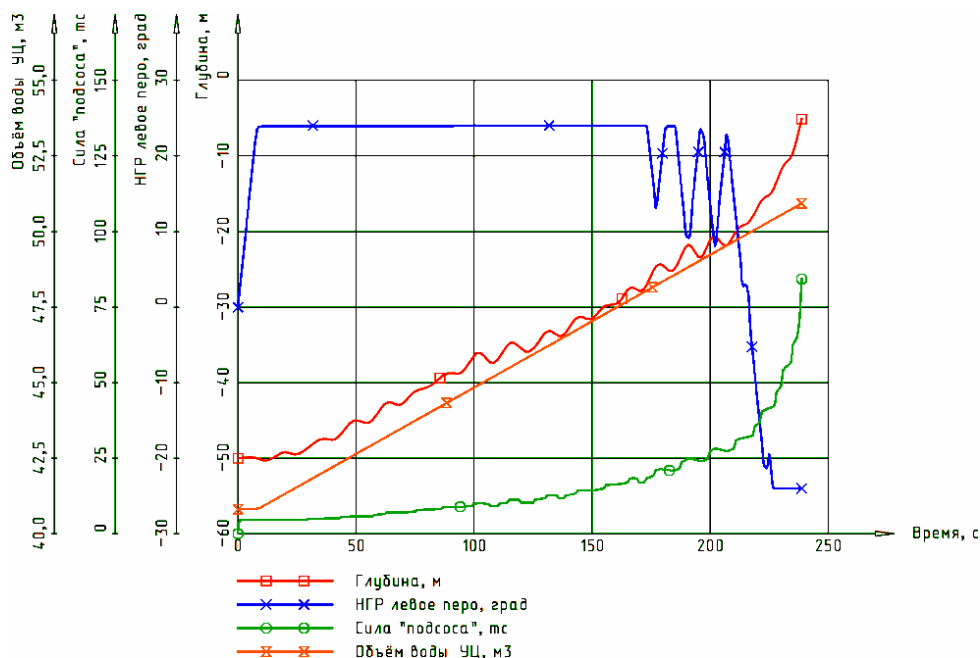


Рис. 5. Всплытие объекта на скорости 3 узла с 50 на 15 м с пересечением скачка плотности в условиях поверхностного волнения силой 5 баллов

Выводы:

Воздействие реально существующих гидрофизических факторов (пикноклин, течения, внутренние и поверхностные волны), особенно в их сочетании, создает серьезные проблемы в управлении при малых скоростях движения МПО.

Проектирование МПО (в том числе выбор управляющих органов и их характеристик) следует выполнять с учетом воздействия рассмотренных гидрофизических явлений и обеспечивать возможность парирования его неблагоприятных воздействий на динамику движения.

Качество управления движением и безопасность плавания могут быть существенно повышены за счет обеспечения на борту подводного объекта информации о гидрофизических параметрах моря.

Приведенные в докладе результаты необходимо учитывать при создании оперативно-советующих систем поддержки принятия решений в задачах обеспечения безопасности МПО.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурсук В.И., Васильев С.Н., Галяев А.А., Горкунов Э.С., Задворкин С.М., Якушенко Е.И. Методические основы создания тактических оперативно-советующих систем поддержки принятия решений в задачах обеспечения безопасности сложных технических объектов // X Международная конференция «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций», 16 – 20 мая 2016, Екатеринбург.

2. Отчет по НИР «Аномалия-НЦ» «Теоретические и лабораторные исследования по определению степени влияния аномальных природных факторов на подвижные морские объекты». // СПб., СПб НЦ РАН. 2006.

3. Гурьев Ю.В., Ткаченко И.В., Якушенко Е.И. Гидродинамика морских объектов в натуральных гидрофизических условиях/Монография – СПб. Изд-во ВМПИ ВУНЦ ВМФ «Военно-морская академия», 2013. – 213с.

4. Гурьев Ю.В., Ткаченко И.В., Слуцкая М.З., Якушенко Е.И. Компьютерное моделирование влияния реальных гидрофизических условий на гидродинамику подводных объектов // Труды XI Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». – СПб.: Наука, 2012 г. С. 242-245.

5. Гурьев Ю.В., Слуцкая М.З., Якушенко Е.И. Вычислительный эксперимент по исследованию воздействия внутренних волн на морские объекты// Проблемы развития политехнического образования и военной науки в ВМФ. Всероссийская НТК. Изд-во ВМПИ, 2013, часть 1, стр. 263-273.

6. Гурьев Ю.В., Слуцкая М.З. Прогнозирование гидродинамических реакций в задачах динамики подводных объектов с учетом гидрофизических полей океана // Труды VIII-ой Международной конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики», СПб., РАН, 2006.

МОДЕЛЬНЫЕ АНАЛОГИИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

С.Н. Васильев, А.Г. Кушнер

*(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Россия,
117997, ГСП-7, Москва, ул. Профсоюзная, 65, Московский государст-
венный университет им.М.В. Ломоносова, 119991, ГСП-1, Москва, Ле-
нинские горы, 1, стр. 2, Физический Факультет)*

E-mail: vassilyev_sn@mail.ru, kushner@physics.msu.ru

ANALOGIES OF MODELS AND DIFFERENTIAL INVARIANTS

S.N. Vassilyev, A.G. Kushner

*(Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Profsoyuznaya street, 65,
Moscow, 117997, Russia, Lomonosov Moscow State University, Leninskie-
Gory, Moscow, 119991, Russia)*

Keywords: differential equations, model analogies, qualitative properties, symmetry, shock waves.

1. Введение. В математике и ее приложениях изучение математических моделей часто ведется вместе с их попарными связями (обычно преобразованиями), так или иначе согласованными со структурами этих моделей. Например, такими связями в топологии обычно являются непрерывные отображения, в алгебре – морфизмы, в теории дифференциальных уравнений – гомоморфизмы и векторные функции сравнения, в теории упорядоченных множеств – изотонные отображения, в теории категорий – функторы.

Доклад посвящен вопросам использования межмодельных отношений связи для анализа переносимости качественных свойств моделей, отыскания точных решений дифференциальных уравнений и некоторых других задач.

Рассматриваются метод сравнения и вопросы алгоритмизации получения текстов теорем об аналогиях в свойствах математических моделей. Используемые средства формализации применимы также для автоматического доказательства получаемых теорем об аналогиях и для

автоматизации решения задач в конструктивной семантике (планирования действий и др.).

Обсуждаются некоторые результаты по развитию проблематики использования преобразований в групповом анализе дифференциальных уравнений, в том числе по использованию дифференциальных инвариантов для отыскания общих или частных точных решений уравнений. Рассматриваются результаты геометрической теории дифференциальных уравнений, применимые в задачах нелинейной акустики, теории фильтрации и других.

При использовании математических моделей, связанных друг с другом некоторым набором отношений связи, возникают вопросы переносимости исследуемого свойства хотя бы в одном требуемом направлении. Разумеется, чтобы говорить о переносимости, исследуемое свойство P одной модели M должно допускать аналогичную переформулировку P' в терминах второй модели M' . Это означает некоторое требование однотипности моделей (например, в алгебре это означает, что свойства представимы в пересечении возможно отличающихся сигнатур алгебраических систем M и M'). В этом – существенное уточнение более общего понимания термина «аналогия» даже в математике, не говоря уже о выводах по аналогии в общем случае, когда они зачастую лишь правдоподобны и правильность должна проверяться и не обязательно только математическими средствами.

Если все отношения связи функциональны (функции связи) и направлены в одну сторону – от M к M' , а переносимость свойства имеет место в том же (соответственно – обратном) направлении, то говорим о прямом (соответственно – обратном) сохранении свойства. Для краткости прямое или обратное сохранение свойства называем модельной аналогией. В случае переносимости свойства в обоих направлениях имеем эквивалентность моделей относительно свойства P (и его переформулировки P') как частный случай модельной аналогии.

Модельные аналогии обеспечиваются наложением на отношения связи подходящего набора условий. Довольно типичным из этих условий для разных моделей и их свойств является обычно априорное требование типа морфизма моделей. Например, в проблематике прямого сохранения свойств алгебраических систем часто используется требо-

вание гомоморфизма систем [1-4] как одно из условий так называемой устойчивости свойств алгебраических систем.

В динамике систем, в проблематике эквивалентности моделей таким требованием может быть является условие гомеоморфизма [5-9], а в проблематике переносимости свойств в одном, а именно в прямом направлении, например, условие гомоморфизма [5, 8]. Другого типа априорным условием в динамике систем, а именно в проблематике обратного сохранения динамических свойств, характерной для функций связи в форме т.н. вектор-функций сравнения (ВФС) [10] (и их частного случая вектор-функций Ляпунова (ВФЛ) в терминологии Р. Беллмана [11]), является по определению ВФС условие мажорирования значений ВФС вдоль процессов исследуемой модели соответствующими процессами системы сравнения (СС), привлекаемой как вспомогательной и более простой по замыслу.

2. Метод сравнения в математической теории систем. Ближайшим предшественником обсуждаемых далее результатов по модельным аналогиям, помимо работ самих авторов, является метод сравнения в динамике систем процессов [10] – сегодня метод сравнения Матросова, использующий ВФС в задачах обратного сохранения динамических свойств системы процессов. Рассмотрим кратко историю его возникновения (см. подробнее [5, 12, 13]).

Метод сравнения Матросова возник в развитие работ по методу функций Ляпунова (МФЛ) и теории дифференциальных неравенств типа Чаплыгина. Первые крупные шаги в развитии МФЛ были сделаны в работах в работах Н.Г. Четаева [14,15] и других казанских математиков и механиков. В работах четаевцев Н.Н. Красовского, В.В. Румянцева и многих других ученых МФЛ распространен на системы с последствием [16,17], уравнения в частных производных [18-20], стохастические, разрывные и другие системы.

Г.И. Мельниковым (1956), З. Опялем (1960), З.Б. Цалюком (1960) была замечена целесообразность применения в МФЛ теории дифференциальных неравенств типа Чаплыгина, которые были систематически использованы К. Кордуняну (1960, 1963), М.А. Красносельским и С.Г. Крейном (1956-1964), В. Лакшмикантамом (1962) и многими др. Наметилась тенденция к унификации доказательств в МФЛ с применением неравенств типа Чаплыгина для функционала Ляпунова.

В направлении ослабления требований к функциям Ляпунова предпринимались различные попытки, в т.ч. с использованием двух функций Ляпунова как в теореме Н.Г. Четаева о неустойчивости или в теоремах Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского (1952, 1954), П.А. Кузьмина (1954) об устойчивости, в т.ч. асимптотической.

В 1962 г. на базе теорем Т. Важевского о системах дифференциальных неравенств В.М. Матросовым [21] были предложены условия устойчивости движения с ВФЛ (более детально о связи работ [21] и [11] см. в [12]). Это расширило класс искомых функций типа Ляпунова: каждая компонента ВФЛ нагружается существенно менее жесткими условиями, чем в теоремах с одной скалярной функцией Ляпунова. В работах В.М. Матросова (1964-1969), В. Лакшмикантама (1965-1969), Ф. Хартмана (1967), С.К. Персидского (1971), Д. Шильяка (1971-1978), А.А. Мартынюка (1973), В.Д. Фурасова (1977), А.А. Толстоногова (1980-1981) и др. метод ВФЛ был распространен на другие модели свойства динамических систем.

В.М. Матросовым был предложен принцип сравнения (1966-1971) для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в банаховом пространстве (см. [13]), согласно которому из существования ВФЛ, удовлетворяющей подходящим условиям, зависящим от специфики изучаемого динамического свойства, это свойство исследуемой системы вытекает из аналогичного свойства системы сравнения (СС). При этом сама СС (ее правая часть) возникает как результат мажорирования полной производной по времени от ВФЛ в силу исходной системы. П. Хабетсом и К. Пейффером (1973) для конечномерных ОДУ и нескольких динамических свойств была выявлена единая структура доказательств теорем сравнения.

В.М. Матросовым и Л.Ю. Анапольским (1972) была введена концепция системы процессов, охватывающая многие аксиоматические конструкции динамических систем и их обобщений. В [10] для систем процессов и некоторого класса их динамических свойств В.М. Матросов предложил метод сравнения в алгоритмической форме в терминах ВФС. В предположении этого условия мажорирования метод сравнения Матросова позволил находить в алгоритмизированной форме остальные условия переносимости свойств.

В [5, 22-26] разработан метод сравнения в математической теории систем. Независимость от аксиом исследуемой системы была достигнута благодаря подъему метода на логический уровень. Однако в динамике систем, метод требует (как и в [10]) согласованности формульных структур определений свойств и условия мажорирования, что, вообще говоря, ограничивает разнообразие исследуемых свойств и повышает требования к осведомленности исследователя в методе и, в частности, в логических средствах формализации текстов.

Свое дальнейшее развитие метод сравнения получил в форме т.н. метода редукции [27], базирующегося на использовании логических уравнений более широкого класса, чем в [5], хотя требование обеспечения согласованности известных членов уравнения по-прежнему лежит на исследователе. В методе логико-алгебраических уравнений [28] это требование было исключено, но ценой сужения выразительных средств до языка многоосновных алгебраических систем, что требовало представления (в определениях свойств, изучаемых на переносимость) областей изменения кванторных переменных в виде некоторых обобщений ступеней Н. Бурбаки [29]. В [30] достигнуто освобождение от требования согласованности без ограничения языка определений свойств моделей M и M' , что рассматривается в пп. 3 и 4.

3. Модельные аналогии и связь с методом сравнения. В работе [30] определение свойства P модели M записывается в частично формализованном языке типовых кванторов как выражение, образованное из некоторых заключительных формул $P_1, \dots, P_m$ с помощью типовых кванторов $\forall Z_\alpha (Z_\alpha \rightarrow \dots)$, $\exists Z_\alpha (Z_\alpha \& \dots)$, $\alpha = 1, \dots, k$, и связок $\&$, $\vee$. Аналогично записывается P' в терминах модели M' .

Для каждой пары (Z_α, Z'_α) кванторных переменных из P, P' вводится связывающий их параметр(формульный предикат) $\Phi(Z_\alpha, Z'_\alpha, \dots)$, который может зависеть не только от Z_α, Z'_α , но, вообще говоря, и от других кванторных переменных из P, P' , квантифицированных ранее, чем Z_α или Z'_α . Эти предикаты и определяют набор связей моделей M и M' , интерпретируемую в общем случае как набор некоторых многоместных отношений связи на множествах значений переменных, фигурирующих в определениях свойств P и P' .

В тех или иных задачах обе модели и отношения их связи (модельные преобразования) могут быть заданы. Например, модель, описываемая системой уравнений, преобразована во вторую модель для целей отыскания точных решений. При этом может потребоваться выяснение неразрушения какого-то качественного свойства в том или ином направлении. Тогда, получив теорему об условиях сохранения этого свойства, останется проверить, что модельные связи (использованные преобразования) удовлетворяют условиям теоремы. Так, простейшим случаем связи моделей выступают замены зависимых и независимых переменных, используемые при изучении дифференциальных уравнений. При этом часто удается привести уравнения к более простым формам, а иногда и проинтегрировать их в квадратурах. Однако, если говорить о качественном анализе дифференциальных уравнений, то при таких заменах могут разрушаться полезные свойства решений. Например, преобразования вида

$$(t, x) \rightarrow (\tau(t), \sqrt{t}x)$$

где τ – дифференцируемая возрастающая функция, сохраняют класс стационарных уравнений Шрёдингера

$$\ddot{x} = W(t)x,$$

но они могут разрушить требуемое то или иное динамическое свойство нулевого решения уравнения.

В других случаях, когда стоит задача исследования некоторого свойства конкретной модели путем сведения этой задачи к анализу другой модели, более простой по замыслу, вначале получается теорема об аналогии, после чего надо построить вспомогательную модель и отношение связи обеих моделей, фигурирующие в теореме, а потом верифицировать их удовлетворение условиям теоремы. Такой случай имеет место в методе ВФЛ: после получения теоремы о сохранении изучаемого свойства надо построить ВФЛ и СС с последующей проверкой выполнения для них условий теоремы.

Проблема построения ВФЛ и СС для сложных (многосвязных) систем обычно решается с привлечением структурных особенностей исследуемой системы: Р. Беллман (1962), Ф.Н. Бейли (1965), А.С. Земляков и В.М. Матросов (1977), Д.Д. Шильяк (1978), Р.И. Козлов (1991)

и др. После декомпозиции системы для изолированных подсистем строятся скалярные функции, например, типа Ляпунова-Красовского [17] или сублинейных функций [31-35]. Построение ВФЛ требует использования программных средств, например, таких как «ВФЛ-РЕДУКТОР» [36]. Обобщением ВФЛ являются матричнозначные функции, применяемые в анализе динамических систем: нелинейных систем (Е.Ф. Сабаев, 1980), гибридных и переключаемых систем (А.И. Маликов, 2011), так называемых «динамических уравнений на временной шкале» (А.А. Мартынюк (2012) и др. Построение ВФЛ и СС, ввиду своей сложности, требует учета специфики описания моделей и дальнейших исследований в направлениях повышения алгоритмичности и расширения на другие классы систем.

4. Алгоритмизация синтеза теорем об аналогиях. В направлении развития результатов по п. 2 разработан метод синтеза теорем о модельных аналогиях [30] для произвольной пары математических моделей и их произвольных свойств. Так, в случае задач получения условий D прямого сохранения свойств $(P \rightarrow P')$ определение свойства P преобразуется подстановками вида

$$\begin{aligned} \forall Z_{\alpha} (Z_{\alpha} \rightarrow \dots) &\mapsto \forall Z'_{\alpha} (Z'_{\alpha} \rightarrow \exists Z_{\alpha} (Z_{\alpha} \& \Phi_{\alpha}(Z_{\alpha}, Z'_{\alpha}, \dots))), \\ \exists Z_{\alpha} (Z_{\alpha} \rightarrow \dots) &\mapsto \forall Z_{\alpha} (Z_{\alpha} \rightarrow \exists Z'_{\alpha} (Z'_{\alpha} \& \Phi_{\alpha}(Z_{\alpha}, Z'_{\alpha}, \dots))), \\ \forall &\mapsto \&, P_i \mapsto (P_i \rightarrow P'_i), (\alpha = 1, \dots, k; i = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

При этом не требуется априорного задания исследователем каких-то условий, что, в частности, освобождает его и от проверки согласованности априорных условий со свойствами P и P' . Вместо этого исследователю достаточно указать только некоторые формульные фрагменты $\Phi_{\alpha}(Z_{\alpha}, Z'_{\alpha}, \dots)$, т.е. указать частные отношения связи для кванторных переменных. Полученное указанными подстановками условие расщепляется на набор условий D , в совокупности достаточных для $(P \rightarrow P')$ (алгоритмы такого расщепления см. в [30]). При варьировании фрагментов $\Phi_{\alpha}(Z_{\alpha}, Z'_{\alpha}, \dots)$ алгоритмически получаются разные наборы искомых условий, эвристически оцениваемые по предпочтительности (в том числе могут получаться условия типа упомянутых априорных условий).

Эти алгоритмы можно рассматривать тоже как алгоритмы решения логических уравнений специального класса. Они превосходят известные (например, [27, 28]) существенным ослаблением в ряде случаев получаемых условий, а также общностью моделей и их свойств. Уровень абстракции алгоритмов соответствует исчислению предикатов первого порядка или описанному выше частично формализованному языку типовых кванторов как обобщению языка позитивно-образованных формул (ПОФ) [37]. Другие известные алгоритмы решения логических уравнений (например, G. Mints, T. Hoshi [38]) здесь неприменимы, поскольку в них не учитывается специфика постановки задач об аналогиях моделей.

Алгоритмы получения условий наличия модельных аналогий реализованы Н.Ю. Морозовым [39] в виде программного обеспечения для решения логических уравнений модельных аналогий (ЛУМА). Использован язык JavaScript с интерфейсом в виде web-страницы.

Рассмотрены примеры получения теорем о модельных аналогиях в динамике систем и алгебре (см., например, [30, 35, 40, 41]), в том числе применительно к динамическому анализу допустимых преобразований уравнений математической физики [41], а также сложных по своим определениям свойств ($m > 1$), характерных, например, для инспекционных миссий группы информационных роботов [35, 40]. Примером сложного свойства ($m = 4$) является свойство ε – попадания движений из некоторой начальной области в целевое множество при фазовых ограничениях и с положительной инвариантностью целевого множества относительно движений, стартующих из некоторого подмножества начальной области.

Благодаря возможности использования в качестве СС простых структур порядка с заведомо истинными свойствами P' , бывает возможным исключать этап анализа этого свойства, получая теоремы о свойствах исходной системы без ссылок на наличие аналогичного свойства в СС. Это проделано, например, для моделей, не укладывающихся в концепцию системы процессов, например, для полисистем Д.Д. Башо и квазифильтров на множестве многозначных отображений.

5. Автоматизация доказательства теорем об аналогиях и решения задач в конструктивной семантике. При некоторых дополнительных ограничениях на структуру формул (языка типовых кванторов, описан-

ного в п. 3), не сужающих его выразительной силы, получаем возможность применения к выражениям языка правил вывода из исчисления ПОФ J [37] и его расширения J^* [42].

Исчисление J использовано в [39] для доказательства теорем, получаемых с помощью программного обеспечения ЛУМА. В отличие от общего случая, благодаря возможности обоснования теорем $D \rightarrow (P \rightarrow P')$ индукцией по структуре формулы D , вывод этих теорем существенно упрощается.

Исчисление J^* применено в проблематике автоматизации планирования действий, например, в задачах группового управления беспилотных аппаратов, преследования группы целей (прокладка маршрута в оперативный район, распознавание и выбор группы целей) [42, 43].

6. Дифференциальные инварианты и геометрия дифференциальных уравнений. В соответствии с Эрлангенской программой (Ф. Клейн, 1872) каждой геометрии отвечает своя группа «движений» как преобразований, согласованных со структурой геометрии. Например, евклидовой геометрии отвечают преобразования, сохраняющие расстояние между точками. В специальной теории относительности к пространственным координатам добавляется время и в качестве движений рассматриваются преобразования, сохраняющие метрику Лоренца.

В каждой геометрии естественным образом возникает проблема классификации геометрических объектов – кривых, поверхностей и т.п. Классификация позволяет выделить из всего многообразия объектов только те, которые обладают нужными свойствами и изучать характеристики всех объектов класса, не привязываясь к конкретному объекту. Простейшим примером классификаций является классификация особых точек векторных полей относительно диффеоморфизмов плоскости.

Проблема классификации порождает проблему эквивалентности: можно или нельзя преобразованиями из заданной группы один объект из данного класса перевести в другой объект из этого же класса.

В случае, когда группа преобразований является непрерывной, её решение иногда удаётся найти с помощью дифференциальных инвариантов. Например, таким инвариантом кривой $y = f(x)$ на евклидовой плоскости является её кривизна $k(x) = f''(x) / (1 + f'(x)^2)^{3/2}$.

Пример построения псевдогруппы Ли допустимых преобразований для системы двух эволюционных дифференциальных уравнений, описывающих процессы нелинейной диффузии, а также и тепло- и массопереноса, приведен в [44].

С. Ли, основатель теории непрерывных групп преобразований (групп Ли), применял дифференциальные инварианты к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве группы выступали инфинитезимальные преобразования (преобразования, порожденные сдвигами вдоль траекторий векторных полей), не меняющие дифференциального уравнения, – так называемые симметрии. Оказалось, что если алгебра Ли соответствующей группы Ли симметрий разрешима и имеет нужную размерность, то дифференциальное уравнение может быть проинтегрировано в квадратурах (теорема Ли–Бьянки) [45].

В середине XX века дифференциальные инварианты были применены Л.В. Овсянниковым [46] к широкому классу уравнений в частных производных. Так возник «групповой анализ дифференциальных уравнений», нашедший ряд применений, в том числе в работах казанской школы В.Г. Павлова и К.Г. Гараева по математической теории управления с приложениями в аэромеханике (например, [47]).

Методы группового анализа позволяют строить точные решения уравнений в частных производных, в т.ч. нелинейных. Однако, в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, здесь получаются не общие, а частные решения.

После перевода книги Л.В. Овсянникова [46] на английский язык появилось множество работ зарубежных математиков по групповому анализу дифференциальных уравнений (G. Bluman, J. Cole, P. Olver и др.).

Вскоре возникла другая область математики, известная сейчас как «геометрия дифференциальных уравнений». Её основы были заложены в 1970-80-х гг. в работах А.М. Виноградова, И.С. Красильщика и В.В. Лычагина [48]. Основная идея геометрической теории дифференциальных уравнений состоит в их представлении «поверхностями» (подмногообразиями) в пространстве джетов соответствующих порядков. Понятие джета (jet – струя) было введено в 1950-х гг. Ш. Эресманом [49] для нужд дифференциальной геометрии. Простран-

ство джетов снабжено естественной геометрической структурой – распределением Картана. Была развита специальная техника символьных вычислений в пространствах джетов.

Размерность пространства джетов быстро возрастает с ростом порядка дифференциального уравнения и числом независимых и зависимых переменных. Поэтому объем вычислений в пространствах джетов достаточно велик. В связи с этим для символьных вычислений в области дифференциальной геометрии, в т.ч. геометрии пространств джетов, Й. Андерсон в начале 2000-х гг. на базе программы Maple создал пакеты – DifferentialGeometry и JetCalculus.

7. Контактная линеаризация уравнений Монжа-Ампера. Геометрический подход к дифференциальным уравнениям позволил решить многие классические задачи (классификации, построения точных модельных решений и т.п.).

Проблема классификации дифференциальных уравнений является одной из основных в теории дифференциальных уравнений. Выбор преобразований, относительно которых проводится классификация, диктуется выбором класса дифференциальных уравнений: преобразования должны сохранять этот класс. Такие преобразования образуют группу (или псевдогруппу) Ли, и задача классификации дифференциальных уравнений превращается в проблему описания орбит ее действия. Это описание дается в терминах дифференциальных инвариантов.

Рассмотрим, например, дифференциальные уравнения типа Монжа-Ампера:

$$Av_{xx} + 2Bv_{xy} + Cv_{yy} + D(v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2) + E = 0,$$

где коэффициенты A, B, C, D, E – функции от независимых переменных x, y , неизвестной функции v и ее первых производных v_x и v_y .

В.В. Лычагин [50] предложил бескоординатное описание уравнений Монжа-Ампера. Он показал, что такие уравнения можно рассматривать как дифференциальные 2-формы на пространстве 1-джетов, что позволило для их исследования применить методы дифференциальной геометрии.

Класс уравнений Монжа-Ампера содержит квазилинейные уравнения и выделяется из уравнений второго порядка тем, что он замкнут относительно контактных преобразований, т.е. преобразований не

только зависимых и независимых переменных, но и производных первого порядка. Этот факт был известен еще С. Ли, который поставил проблему контактной линеаризации таких уравнений: описать уравнения Монжа-Ампера, которые подходящим контактным преобразованием приводятся к линейным уравнениям.

В случае, когда уравнения (1) не вырождено и его коэффициенты не зависят от функции v , эта проблема решена в [51]. Полное решение проблемы для общего уравнения (1) было получено в [52].

Для уравнений Монжа-Ампера были построены инвариантные дифференциальные 2-формы λ_+ и λ_- , коэффициенты которых, вычисленные для линейных гиперболических уравнений

$$v_{xy} = a(x, y)v_x + b(x, y)v_y + c(x, y)v,$$

совпадают с инвариантами Лапласа $h = ab + c - a_x$ и $k = ab + c - b_y$ [53]. В терминах этих дифференциальных 2-форм, названных формами Лапласа, и формулируются необходимые и достаточные условия контактной линеаризации уравнений Монжа-Ампера [52].

В частности, гиперболическое уравнение Монжа-Ампера локально контактно эквивалентно волновому уравнению $v_{xy} = 0$ тогда и только тогда, когда обе формы Лапласа равны нулю. Аналогичные результаты получены и для эллиптических уравнений.

Контактная линеаризация уравнений Монжа-Ампера открывает новую возможность получения их точных решений, в частности, с помощью принципа нелинейной суперпозиции. Пусть L_1 и L_2 – два решения нелинейного уравнения. При контактной линеаризации уравнения эти решения переходят в решения $\tilde{L}_1$ и $\tilde{L}_2$ соответственно линейного уравнения. Их сумма $\tilde{L}_1 + \tilde{L}_2$, как известно, тоже является решением линейного однородного уравнения. Применив к этой сумме обратное преобразование, получается новое решение исходного нелинейного уравнения.

8. Инварианты управляемых гамильтоновых систем. Хорошо известно, что в окрестности регулярной точки все гамильтоновы системы одной размерности симплектически эквивалентны. Иначе обстоит дело, если в них присутствует управляющий параметр. Например, одномерные гамильтоновы системы

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

с гамильтонианом $H = H(p, q, u)$, зависящим от управляющего параметра u , имеют один дифференциальный инвариант второго порядка и четыре – третьего. Дифференциальные инварианты высших порядков получаются из них применением операции инвариантного дифференцирования. В терминах этих дифференциальных инвариантов формулируются необходимые и достаточные условия локальной эквивалентности гамильтоновых систем относительно симплектических преобразований обратной связи [54]. Это дает возможность с помощью замен переменных упрощать вид гамильтоновых систем с управляющими параметрами.

9. Ударные волны. Дальнейшее развитие геометрической теории дифференциальных уравнений было стимулировано ее практическими приложениями в нелинейной акустике, нелинейной термодинамике, гидродинамике, метеорологии и других областях естествознания.

В частности, была решена задача управления фокусировкой звукового пучка, распространяющегося в нелинейной среде [55]. Суть этого явления состоит в том, что при изменении параметров звука по определенному закону звуковой пучок фокусируется на некотором расстоянии от генератора (рис. 1). Это обеспечивает распространение звука в нелинейной среде в заданном направлении с относительно малым рассеиванием, что открывает возможность передачи сигналов под водой на значительные расстояния.

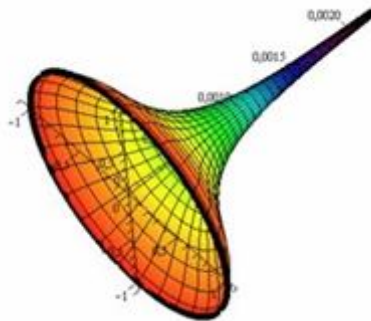


Рис. 1. Фокусировка нелинейного звукового пучка

Еще одно направление геометрии дифференциальных уравнений – построение разрывных решений дифференциальных уравнений. Это направление основано на теории многозначных решений. В отличие от классического решения, проекция многозначного решения на пространство независимых переменных может иметь геометрические особенности – каустики. При удалении из графика многозначного решения точек каустики он распадется на куски, каждый из которых является графиком классического решения (рис.2). Поэтому многозначные решения служат «заготовками» для построения разрывных решений.

В случае линейных уравнений всякому многозначному решению можно сопоставить обобщенное (в смысле С.Л. Соболева) решение. Таким образом, многозначные решения представляют собой естественное распространение теории обобщенных решений на нелинейные уравнения.

Отметим, что реальные разрывы решений не обязательно совпадают с геометрическими особенностями – за появление разрывов отвечают условия Гюгонио-Ренкина, которые записываются исходя из законов сохранения. Эти условия в простейшем случае представляют собой уравнения Гамильтона-Якоби, решения которых и определяют поверхность разрыва.

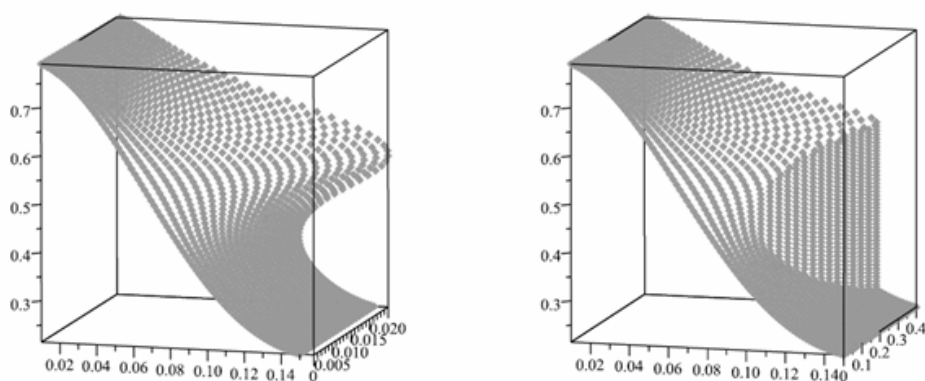


Рис. 2. Многозначное решение и соответствующее ему разрывное решение

10. Аттракторы и динамики эволюционных уравнений в частных производных. Одним из перспективных направлений является применение модельных аналогий в теории так называемых конечномерных динамик [56], которая является естественным развитием теории дина-

мических систем, но относится она к эволюционным уравнениям в частных производных вида

$$v_t = f(x, v, v_x, v_{xx}, \dots).$$

Методы этой теории позволяют выделять конечномерные подмногообразия в бесконечномерном пространстве решений эволюционных дифференциальных уравнений в частных производных. Эти подмногообразия состоят из решений обыкновенных дифференциальных уравнений и могут быть использованы для построения точных решений эволюционных уравнений даже в случае, когда уравнение не обладает достаточным запасом симметрий, а также для исследования устойчивости решений и построения новых численных методов.

Кроме того, конечномерные динамики позволяют получать решения эволюционных уравнений типа аттракторов Лоренца. Например, для обобщенного уравнения Рапопорта-Лиса

$$v_t = A(v)_x + B(v)_{xx},$$

которое описывает широкий круг физических процессов от фильтрации до ядерного взрыва, соответствующее инвариантное подмногообразие имеет вид, представленный на рис. 3 (см. [57]).

Синтез метода модельных аналогий и теории дифференциальных инвариантов аналогий позволяет исследовать поведение решений эволюционных уравнений при заменах координат, в частности, получать условия сохранения или разрушения аттракторов.

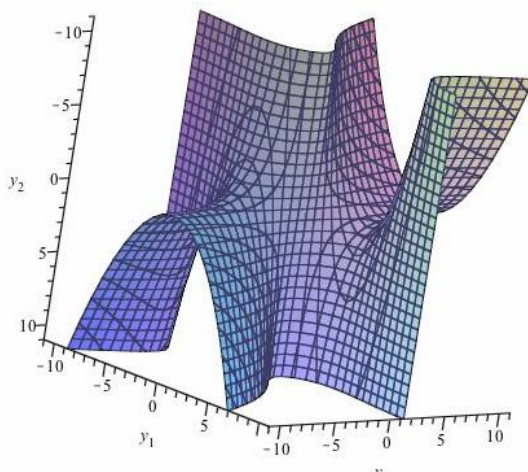


Рис. 3. Динамика обобщенного уравнения Рапопорта-Лиса

11. Заключение. Приведенный обзор современных результатов теории модельных аналогий, теории дифференциальных инвариантов и геометрии нелинейных дифференциальных уравнений не является полным и законченным. При его подготовке авторы руководствовались личными предпочтениями и наиболее перспективными (на их взгляд) направлениями исследований. Более подробную информацию можно получить из работ, указанных в списке литературы.

Работа выполнена при частичной поддержке РНФ (проект 15-19-00275) и РФФИ (проект 16-29-04415).

ЛИТЕРАТУРА

1. Lyndon R.C. Properties preserved under homomorphism // Pacific J. Math. – 1959, vol. 9. – P. 143–154.
2. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М.: Наука. – 1970. – 329 с.
3. Rossman B. Existential positive types and preservation under-homomorphisms // Proc. of the 20th Annual IEEE Symp. on Logic in Comput. Sci. – 2005. – P. 467 – 476.
4. Нагул Н.В. К лассы свойств, сохраняющихся при морфизмах обобщений многоосновных алгебраических систем // Труды ИММУРО РАН. – 2014, т. 20, № 1. – С. 185-200.
5. Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н. Метод сравнения в математической теории систем. – Новосибирск: Наука. – 1980. – 481 с.
6. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир. – 1964. – 480 с.
7. Thomas J. "Über die Invarianz der Stabilität" atbeieinem Phasenraum-Homöomorphismus // J. ReineAngew. Math. – 1964. – Bd. 213. – P. 147–150.
8. Сибирский К.С. Введение в топологическую динамику. – Кишинев: РИО АН МССР. – 1970. – 221 с.
9. Кавинов А.В., Крищенко А.П. Устойчивость решений в разных переменных // Дифференц. уравнения. – 2007, т. 43, № 11. – С. 1470–1473.

10. Матросов В.М. Метод сравнения в динамике систем. I, II // Дифференц. уравнения. – 1974, т. 10, № 9. – С. 1547–1559; 1975, т. 11, № 3. – С. 403 – 417.
11. Bellman R. Vector Lyapunov Function // SIAM J. Control. Ser. A. – 1962, № 1. – Р. 32–34.
12. Васильев С.Н. и др. Памяти академика Владимира Мефодьевича Матросова //Сб. "Проблемы устойчивости и управления". – М.: Физматлит. –2013. – С. 7-90.
13. Матросов В.М. Метод ВФЛ: анализ динамических свойств нелинейных систем. – М.: Физматлит. – 2001. –384 с.
14. Четаев Н.Г. Устойчивость движения.– М.: ГИТЛ. – 1955. – 207 с.
15. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. – М.: Изд. АН СССР. – 1962. – 535 с.
16. Красовский Н.Н. О применении метода функций Ляпунова для уравнений с запаздыванием // Прикл. мат. и мех.– 1956, т. 20, №2. – С. 255-265.
17. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз. – 1959. – 211 с.
18. Румянцев В.В. Устойчивость движения твердого тела с полосами, наполненными жидкостью // Труды Всесоюз. съезда по теор. и прикл. мех. – М.-Л.: Изд. АН СССР. – 1962. – С. 57 – 71.
19. Сиразетдинов Т.К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. – Казань. – 1971.
20. Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. – М.: Машиностроение. – 1986. – 216 с.
21. Матросов В.М. К теории устойчивости движения // Прикл. мат. и мех. – 1962, т. 26, вып. 6. – С. 992–1002.
22. Васильев С.Н., Матросов В.М. Принцип сравнения в математической теории систем // Тез.докл. V Казахстан. межвузов. науч. конф. по мат. и механике. – Алма-Ата.– 1974, ч.1. – С. 34-36.
23. Васильев С.Н. Обобщенные структуры и критерии сохранения при Ф-морфизмах // Труды КАИ. – 1975, вып. 180. – С. 4-13.
24. Матросов В.М., Васильев С.Н. Принцип сравнения для вывода теорем // Изв. АН СССР. Сер.техн. кибернетика. – 1978, № 2. – С. 60-69; 1978, №4. – С. 40 – 49.

25. Васильев С.Н. Метод сравнения в анализе систем. I-IV // Дифференц. уравнения. – 1981, т. 17, № 9. – С. 1562–1573; т. 17, № 11. – С. 1545–1554; 1982, т. 18, № 2. – С. 197 – 205; т. 18, № 6. – С. 938 – 947.
26. Матросов В.М., Васильев С.Н., Каратуев В.Г., Козлов Р.И. и др. Алгоритмы вывода теорем метода векторных функций Ляпунова. – Новосибирск: Наука. – 1981. – 271 с.
27. Васильев С.Н. Метод редукции и качественный анализ динамических систем, I-II // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. – 2006, № 1. – С. 21 – 29; № 2. – С. 5 – 17.
28. Нагул Н.В. Метод логико-алгебраических уравнений в динамике систем // Алгебра и анализ. – 2012, т. 24, № 4. – С. 156 – 181.
29. Бурбаки Н. Теория множеств. – М.: Мир. – 1965. – 455 с.
30. Васильев С.Н., Дружинин А.Э., Морозов Н.Ю. // Доклады Академии наук. – 2015, т. 465, № 1. – С. 14 – 19.
31. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости // Под ред.: А.А. Воронов, В.М. Матросов. – М.: Наука. – 1987. – 312 с.
32. Kozlov R.I. Sublinear VLF for Differential Equations in Banach Space // Differential Equations and Control. – London: Longman Scientific & Technical. – 1991. – P. 142 – 148.
33. Козлов Р.И. Теория систем сравнения в методе векторных функций Ляпунова. – Новосибирск: Наука. – 2001. – 137 с.
34. Матросов В.М., Козлов Р.И., Матросова Н.И. Теория устойчивости многокомпонентных нелинейных систем. – М.: Физматлит. – 2007. – 184 с.
35. Козлов Р.И., Максимкин Н.Н., Ульянов С.А., Киселев Л.В. Устойчивость конфигураций группового движения автономных подводных роботов в условиях неопределенности // Подводные исследования и робототехника. – 2010, № 1 (9). – С. 40 – 46.
36. Козлов Р.И., Ульянов С.А., Хмельнов А.Е. Программный модуль для качественного исследования непрерывных динамических систем ВФЛ-РЕДУКТОР-Н. // Свид. об офиц. регистр. программы для ЭВМ 2007613832 от 07.09.2007.
37. Васильев С.Н., Давыдов А.В. Интеллектуальное управление на основе логических выводов // Колл. моногр. под ред. С.Н. Васильева «Интеллектуальные системы управления». – М.: Машиностроение. – 2010. – 544 с.

38. Mints G., Tomohiro Hoshi. Logical Equations in Monadic Logic // J. Math. Sciences. – 2009, vol. 158 (5). – P. 741 – 752.

39. Васильев С.Н., Морозов Н.Ю. Компьютерное представление и обработка знаний на примере теорем об аналогиях математических моделей // Ученые записки физ. факультета МГУ. – 2016, № 3. – С. 163104-1 – 163104-3.

40. Васильев С.Н., Козлов Р.И., Ульянов С.А. Устойчивость многорежимных формаций // Доклады Академии наук. – 2014, т. 455, № 3. – С. 269 – 274.

41. Васильев С.Н., Кушнер А.Г., Морозов Н.Ю. Допустимые преобразования и динамический анализ уравнений математической физики // Ученые записки физ. факультета МГУ. – 2017 (в печати).

42. Васильев С.Н., Галяев А.А. Логико-оптимизационный подход в задачах преследования группы целей // Доклады Академии наук. – 2017. – Т. 474, № 6. – С. 1 – 7.

43. Бузиков М.Э., Васильев С.Н., Морозов Н.Ю. Автоматизация планирования действий группы мобильных роботов // Ученые записки физ. факультета МГУ (в печати).

44. Васильев С.Н., Кушнер А.Г. Инварианты дифференциальных уравнений и качественный анализ их решений // Ученые записки физ. факультета МГУ. – 2016, № 3. – С. 163104-1–163104-3.

45. Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N. Contact Geometry and Nonlinear Differential Equations. Encyclopedia of Mathematics and its Applications – 2007, vol. 101. – Cambridge: Cambridge University Press. – P. xxii+496.

46. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука. – 1978. – 399 с.

47. Гараев К.Г. Теория инвариантных вариационных задач в проблеме оптимального управления. – Казань: Изд-во КГТУ-КАИ. – 2005. – 152 с.

48. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука. – 1986. – 336 с.

49. Ehresmann C. Introduction a la Theorie des Structures Infinitesimales et des Pseudo-groupes de Lie // Coll. Geom. Differ. – Strasbourg, C.N.R.S. – 1953. – P. 97 – 110.

50. Лычагин В.В. Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка // ДАН СССР. – 1978, т. 238, № 5. – С. 273 – 276.

51. Лычагин В.В., Рубцов В.Н. О теоремах Софуса Ли для уравнений Монжа-Ампера // ДАН БССР. – 1983, т. 27, № 5. – С. 396 – 398.

52. Kushner A.G. A Contact Linearization Problem for Monge-Ampere Equations and Laplace Invariants // Acta Appl. Math. – 2008, vol. 101 (1 – 3). – P. 177 – 189.

53. Forsyth A.R. Theory of Differential Equations. Part 4. Partial Differential Equations. – 1906, vol. 6. – Cambridge University Press. – 596 p.

54. Кушнер А.Г., Лычагин В.В. Инварианты Петрова гамильтоновых систем с управляющим параметром // Автомат. и телемех. – 2013, № 3. – С. 83 – 102.

55. Lychagin V.V. Singularities of Multivalued Solutions of Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Phenomena // Acta Appl. Math. – 1985, vol. 3. – P. 135 – 173.

56. Lychagin V., Lychagina O. Finite Dimensional Dynamics for Evolutionary Equations // Nonlinear Dynamics. – 2007, vol. 48. – P. 29–48.

57. Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В. Аттракторы в моделях фильтрации // Доклады Академии наук. – 2017, т. 472, № 6. – С. 627 – 630.

ПЛАНИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ В КОНФЛИКТНОЙ СРЕДЕ

А.А. Галяев, Е.Я. Рубинович

*(ИПУ им. В.А.Трапезникова РАН, Россия, 117997, Москва,
Профсоюзная 65)*

E-mail: galaev@ipu.ru, rubinvch@ipu.ru

PATHPLANNING OF MOVING OBJECTS IN THREAT ENVIRONMENT

A.A.Galyaev, E.Y.Rubinovich

(ICS RAS, Russia, 117997, Moscow, Profsouznaya, str. 65)

Аннотация:

Дается краткий обзор постановкам и решениям задач планирования траекторий движения на плоскости управляемого объекта в конфликтной среде, т.е. в окружении совокупности объектов (мобильных и/или стационарных), сближение с которыми для управляемого объекта нежелательно в ходе выполнения им заданной миссии.

Введение. Широкое применение разнообразных беспилотных мобильных аппаратов привело к формированию новой области задач управления как подкласса задач поиска-уклонения, получивших в англоязычной литературе название "PathPlanningintheThreatEnvironment" [1-10]. В русскоязычной литературе эти задачи получили название задач управления подвижными объектами в конфликтной среде (следуя работе Воронина А.Н., [4], 2002). Целью управления объектом (объектом поиска), при движении его в конфликтной среде, является минимизация негативного воздействия конфликтующих объектов на управляемый объект путем выбора маршрута его движения, параметров движения и/или режимов работы его технических средств. В зависимости от существа конкретной задачи целями негативного воздействия могут считаться: обнаружение объекта, сближение с конфликтующим объектом до расстояний, с которых возможно его поражение и т.п. В настоящее время существует обширная литература, посвященная управлению

движением объектов в конфликтных средах (см. [1], [4], [8-12], [16-21] и библиографию к этим работам). Основной вклад в исследование данной тематики внесли Забаранкин М. (Zabarankin M.), Урясев С. (Uryasev S.), Пардалос П. (Pardalos P.), Патчер М. (Pachter M.), Уошбурн А. (Washburn A.), Кассета Л. (Cacceta L.), Лузен И. (Loosen I.), Ребок В. (Rehbock V.), Маслов Е.П. и др. Перечисленные задачи отличаются предположениями о количестве противодействующих объектов; о размерности пространства, в котором происходит противодействие (на плоскости или в трехмерном пространстве); о физических особенностях каналов поступления информации (пассивные и/или активные) и т.п. В частности, в одной из первых работ [8] приведено решение вариационной задачи о построении на плоскости оптимальной траектории уклонения объекта, движущегося равномерно, от обнаружения одиночным неподвижным наблюдателем (в [8] он назван сенсором).

В процессе планирования и выполнения основной миссии управляемый объект часто должен решать ряд вспомогательных задач, связанных, в частности, с топопривязкой и определением текущих координат и элементов движения противодействующих объектов, построением безопасной (в определенном смысле) траектории своего движения и т.п. Отдельного рассмотрения заслуживают задачи, в которых для дезинформации и отвлечения сил и средств конфликтующих сторон управляемый объект имеет возможность использовать мобильную ложную цель.

В данном кратком обзоре рассмотрены предложенные в ИПУ РАН постановки и решения ряда основных и вспомогательных задач, связанных с планированием движения управляемых объектов в конфликтных средах.

Проблема уклонения от обнаружения подвижных объектов. Различные военные и гражданские инженерные приложения, имеющие дело с нахождением оптимальной траектории для космических, воздушных, военно-морских и наземных транспортных средств, охватывают задачи управления с различными целевыми функционалами, ресурсными ограничениями и ограничениями на управление. Примерами подобных приложений являются задачи: сведения к минимуму риска обнаружения радаром для самолета; минимизации рисков обнаружения подводной лодки по различным гидроакустическим и физическим по-

лям; сведения к минимуму совокупного повреждения во время прохождения загрязненных районов и др. Несмотря на большое разнообразие управляемых подвижных объектов, связанные с ними задачи управления имеют общие характерные черты. Прежде всего, это традиционные задачи планирования миссий, включающие прокладку безопасного курса с учетом естественных и искусственных ограничений (рельеф местности, гидрология, погодные условия), а также удержание (стабилизация) на заданном курсе. Кроме того, характерными являются задачи оптимального маневрирования при нештатных ситуациях (резко меняющиеся погодные условия и т.п.). Как правило, успешность выполнения миссии оценивается значением некоторого функционала (критерия оптимальности), минимизация которого является основной задачей системы управления. Классические критерии оптимальности связаны с минимизацией расхода энергоресурса, времени (задачи быстрогодействия) или промаха. В последнее время проявляется интерес к нетрадиционным критериям, таким как повышение скрытности движения (при движении в конфликтной среде с учетом карты потенциальных угроз). Качество выполнения миссии напрямую зависит и от решения разного рода локальных вспомогательных задач оптимального управления. К числу таких задач, в частности, относятся задачи безопасности взлета и посадки ЛА в условиях внезапных ветровых нагрузок, посадка БПЛА на качающуюся палубу, стабилизация судна при ракетном залпе, автоматическая швартовка, траекторное управление наблюдениями с движущегося борта и т.п. Следует отметить, что проблемы управления многозвенными манипуляторами (оптимизация траекторий, гашение паразитных колебаний и т.п.) также можно отнести к проблемам управления подвижными объектами. Отдельный и практически не исследованный класс задач связан с групповым применением автономных подвижных объектов. Отметим, что при организации движения ключевыми являются проблемы навигации. Бортовые измерительно-информационные комплексы, как правило, включают различные информационные каналы, включая GPS-ГЛОНАСС приемники, системы инерциальной навигации, системы локальной навигации с топопривязкой к реперным точкам и/или маякам и т.п. При этом некоторые измерения, например, локационные, достаточно энергоемки. Оптимальное управление составом измерений, комплексирование измерений путем

переключения информационных каналов и/или изменения их коэффициентов усиления является неотъемлемой частью общей задачи управления любого подвижного объекта.

Как было отмечено выше, обнаружение объекта можно отнести к числу негативных воздействий. Основная особенность решаемых задач управления при планировании траектории движения подвижного объекта состоит в том, что уровень сигнала, излучаемого объектом управления, зависит от величины текущей скорости v объекта, а уровень сигнала I , поступающего на вход наблюдателя (систем наблюдателей), – от текущей дистанции r до объекта и особенностей среды распространения сигнала.

Для описания указанной зависимости в литературе широко используется степенная модель

$$I \sim \frac{v^m}{r^n}. \quad (1)$$

Величина показателя степени n является характеристикой физического поля, в котором осуществляется обнаружение [5, 6]. Величина показателя степени m характеризует зависимость уровня интенсивности излучаемого сигнала от скорости движения объекта. Такая зависимость имеет место, например, для сигналов первичного гидроакустического поля.

Отметим, что ряд задач уклонения от одиночного наблюдателя на плоскости удалось решить аналитически; для решения задач уклонения от группы наблюдателей разработаны численные алгоритмы [5], [6], [16], [20].

Для описания механизмов обнаружения в литературе наиболее часто применяются два подхода [6], [8]. Один из них состоит в оценке интегрального уровня сигнала, поступившего на вход пространственно распределенной информационно-наблюдательной системы за все время наблюдения. В литературе такую систему принято называть сенсором [13]. Оценка интегрального уровня сигнала на входе сенсора определяется с учетом решения задачи об оптимизации закона управления подвижным объектом, перемещающимся в течение заданного промежутка времени из фиксированной начальной точки в фиксированную конечную точку маршрута и уклоняющимся при этом от обнаружения наблюдателем (группой наблюдателей), расположенным в заданном рай-

оне. Этот механизм соответствует процессу обнаружения объекта по сигналам первичных физических полей. Постановки задач оптимизации закона уклонения подвижного объекта от обнаружения по излучаемым объектом сигналам первичных полей отличаются предположениями о характеристиках информационных полей, в которых происходит обнаружение, классами допустимых законов управления, видом критериев качества, числом обнаружителей, объемом и характером информации доступной конфликтующим.

По известным данным создается карта распределения уровней рисков (угроз), примерный вид которых приведен на Рис. 1 и Рис. 2.

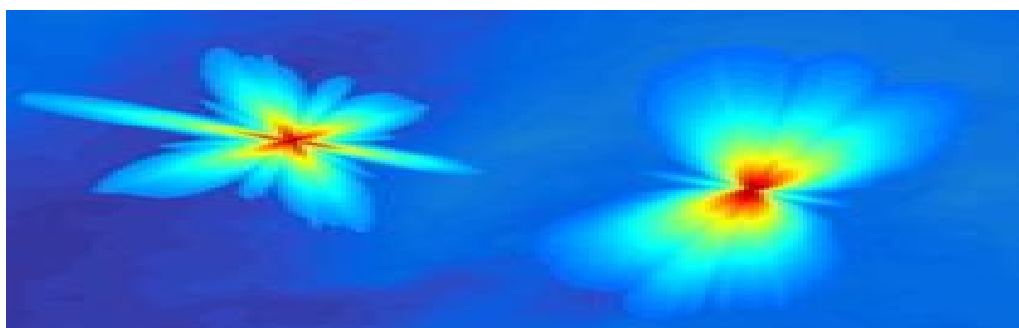


Рис. 1: Карта угроз, построенная относительно двух стационарных гидро-акустических станций, находящихся на разных глубинах

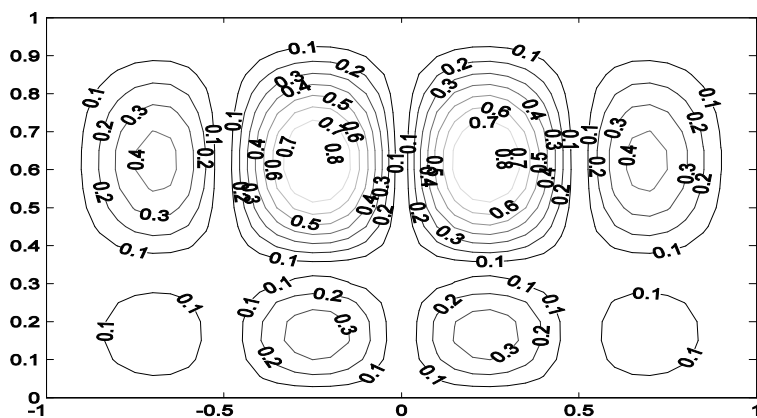


Рис. 2. Пример карты уровней функции нормированного риска

Карта распределения уровней рисков задает функцию риска $f(x, y)$, как функцию двух переменных в некоторой неподвижной декар-

товой системе координат XOY, начало O которой связано с точкой старта объекта, например БПЛА. Если обозначить через $\mathbf{r} = (x, y)$ радиус-вектор точки с координатами (x, y) , то функция риска $f(\mathbf{r})$ будет представлять собой скалярную функцию векторной переменной $\mathbf{r}$.

Перед планировщиком миссии на первом этапе стоит одна из двух задач:

минимизация интегрального риска при заданной длине траектории полета БПЛА;

минимизация длины траектории полета БПЛА при заданной величине интегрального риска.

В первом случае в качестве критерия качества предлагается рассматривать функционал интегрального риска вида

$$J_1 = \int_0^S f(\mathbf{r}(s)) ds \rightarrow \min, \quad (2)$$

который представляет собой криволинейный интеграл вдоль всей траектории движения БПЛА (ds —элемент длины траектории). Здесь S — заданная длина траектории БПЛА. В качестве терминальных могут быть выбраны, например, следующие условия.

$$\mathbf{r}(S) = \mathbf{r}_f, \quad (3)$$

где $\mathbf{r}_f$ — радиус-вектор заданной терминальной точки, или

$$\Phi(\mathbf{r}(S)) = 0, \quad (4)$$

где уравнение $\Phi(\mathbf{r}) = 0$ является уравнением границы заданного терминального множества.

Во втором случае в качестве критерия качества предлагается рассматривать терминальный функционал вида

$$J_2 = \int_0^S 1 ds = S \rightarrow \min, \quad (5)$$

который представляет собой полную длину траектории БПЛА от начальной до терминальной точек движения. Ограничения в этом случае имеют интегральный вид

$$\int_0^S f(\mathbf{r}(s)) ds \leq R, \quad (6)$$

где R — заданная величина интегрального риска. Терминальные условия также могут иметь вид (2) или (3).

В обоих случаях должно выполняться еще одно фазовое ограничение, математически выражающее запрет на "близкий пролет" около особо опасных объектов (стенки ущелья, дома на улице, заводские трубы, вышки, линии электропередач и т.п.):

$$f(\mathbf{r}) \leq C, \quad (7)$$

где C – заданная константа.

Сформулированные вариационные задачи с минимизируемыми функционалами (2) (при ограничении (7)) или (5) (при ограничениях (6) и (7)) и терминальными условиями (3) или (4) сводятся к стандартным задачам оптимального управления путем введения «уравнения движения»

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \boldsymbol{\tau}(s), \quad (8)$$

где $\boldsymbol{\tau}(s)$ – единичный вектор касательный к траектории. В проекциях на оси системы координат XOY орт $\boldsymbol{\tau}(s) = (\cos)\varphi(s), \sin\varphi(s)$, где угол наклона $\varphi(s)$ вектора $\boldsymbol{\tau}(s)$ к оси абсцисс играет роль управления, параметризованного длиной траектории s .

Для избежания крутых виражей можно ввести ограничение на кривизну траектории дополнив «уравнение движения» (8) еще одним:

$$\frac{d\varphi(s)}{ds} = k(s). \quad (9)$$

Здесь уже $\varphi(s)$ играет роль фазовой переменной, а управлением служит кривизна траектории $k(s)$, стесненная ограничениями

$$|k| \leq K, \quad (10)$$

где K – заданная константа.

Решение данных вариационных задач одним из стандартных численных методов задаст траекторию движения БПЛА в проекции на горизонтальную плоскость.

Использование карты рельефа местности для построения карты распределения уровней рисков зависит от конкретной миссии. Например, при полете по глубокому ущелью (каньону) или на небольшой высоте по городской улице стенки ущелья и дома на улице должны быть учтены в карте распределения уровней рисков. В то же время, может быть допустим перелет со сменой эшелона полета через невысокие строения, холмы и сопки. Оптимизация таких перелетов осуществляет-

ся при планировании траектории движения БПЛА в проекции на вертикальную плоскость.

Планирование траектории движения БПЛА в проекции на вертикальную плоскость осуществляется с помощью карты рельефа местности, по которой планировщик миссии в интерактивном режиме осуществляет «эшелонирование» траектории по высоте полета БПЛА, представляя опорные точки начала и конца полета в заданном эшелоне. Горизонтальный полет в заданном эшелоне осуществляется по плоской траектории, полученной из решения рассмотренных выше вариационных задач. Гладкое сопряжение концов траекторий в смежных эшелонах может осуществляться путем полиномиальной или сплайновой аппроксимации с учетом ограничения на кривизну. Возможна постановка и решение вариационных задач гладкого сопряжения концов траекторий в смежных эшелонах пространственной кривой. Тогда нужно

- построить кривую минимальной (по модулю) кривизны при ограничении на длину;
- построить кривую минимальной длины при ограничениях на кривизну.

На рис. 3 показан пример траектории полета со сменой эшелонов по высоте. Траектория синтезирована из четырех типовых маневров на следующих участках:

- 1 (вертикальный взлет),
- 2 (разворот в горизонтальной плоскости),
- 3 и 5 (горизонтальные полеты по прямой), а также одного сложного маневра на участке
- 4 (маневр смены эшелона по высоте).

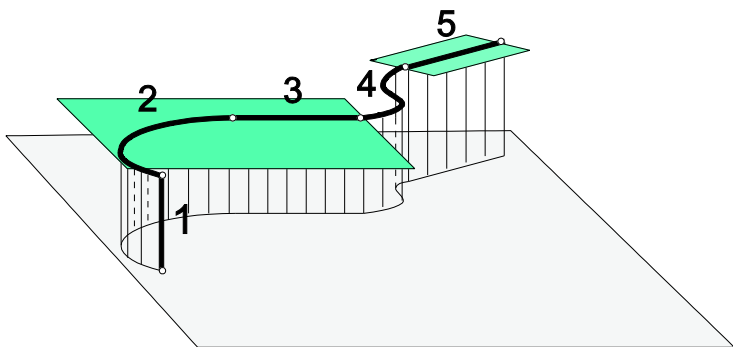


Рис. 3. Пример траектории полета со сменой эшелонов

Заметим, что типовые маневры на участках 1 и 2 могут быть, вообще говоря, заменены сложным маневром смены эшелона по высоте аналогично участку 4.

Описанная выше методика дает возможность планировщику миссий синтезировать желаемую траекторию полета БПЛА. Дальнейшая задача – задача программирования управлений БПЛА, позволяющих реализовать полет по траектории близкой, в определенном смысле, к желаемой.

Другой подход к описанию механизма обнаружения состоит в том, что наблюдатель отождествляется с точечным объектом, снабженным круговой зоной обнаружения фиксированного радиуса, центр которой совпадает с текущей позицией наблюдателя. В литературе такой наблюдатель принято называть информационным детектором (или просто детектором). Цели, попавшие внутрь круга, обнаруживаются достоверно; цели, не попавшие в круг, не обнаруживаются. Радиус этого круга для краткости будем называть радиусом детектора. Указанный подход описан, например, в [10], [18] и соответствует модели обнаружения объекта по вторичному (переизлученному им) полю.

Развитие постановок задач заключается в учете ограничений на траекторию уклонения и/или управление (скорость) уклоняющегося. Ограничения на траекторию имеют место, например, при решении задачи о форсировании канала [7] – физическими ограничениями служат границы канала; в [16] описано решение задачи об оптимизации закона уклонения от обнаружения при наличии прямолинейного координатного ограничения.

Задача об оптимизации закона управления подвижным объектом при наличии разнородных средств обнаружения трактуется как задача оптимизации при наличии ограничений на траекторию уклонения. Систему разнородных наблюдателей образуют сенсоры и детекторы – в том информационном смысле, который был им придан выше. Так как попадание подвижного объекта в круговую зону обнаружения детектора с неизбежностью приводит к его мгновенному обнаружению, то задача об оптимизации закона уклонения от обнаружения системой разнородных наблюдателей сводится к задаче уклонения от обнаружения сенсором (системой сенсоров), но при наличии круговых запретных зон

(круговых ограничений) – зон обнаружения детекторов [10], [15-17]. Пример построения траектории уклонения показан на рис. 4.

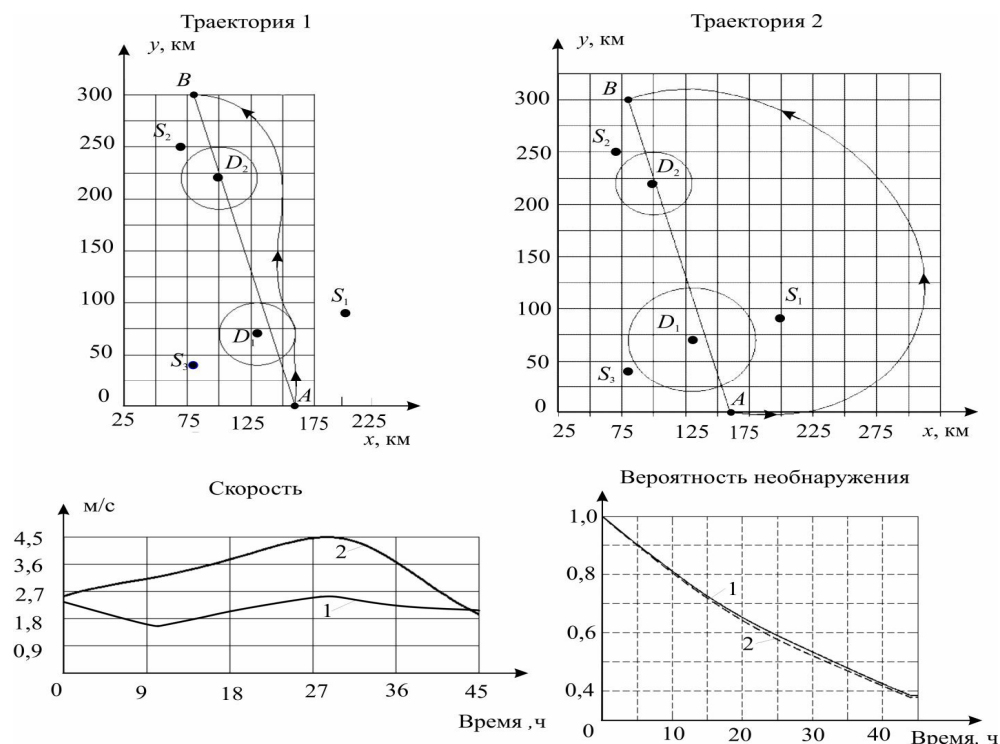


Рис. 4. Уклонение в системе разнородных наблюдателей (сенсоры-детекторы)

При моделировании эпизодов поиска подвижного объекта маневренными силами и средствами, как правило, считаются известными расположение и характеристики района, в котором происходит противодействие сторон, а также предположения о составе сил и средств обнаружения и тактике их применения. Основной характеристикой модели является интенсивность поиска $\gamma(t)$ – среднее число обнаружений объекта в районе поиска в единицу времени. В предположении о малости величины $\gamma(t)$ определяется вероятность обнаружения объекта маневренным средством хотя бы один раз за время поиска T (в литературе эта величина называется вероятностью обнаружения) [21]

$$P_{\text{обн}} = 1 - \exp\left(-\int_0^T \gamma(t) dt\right). \quad (11)$$

Стоящий в скобках интеграл получил название поискового потенциала.

Интенсивность поиска может зависеть от v – скорости движения подвижного объекта, r_i – расстояния от i -го обнаружителя до объекта, дальности обнаружения объекта, зависящая от скорости движения объекта; числа средств обнаружения в подрайоне, через который проходит объект; площади района, в котором осуществляется поиск, скорости патрулирования подвижного наблюдателя; средней скорости движения подвижного объекта относительно наблюдателя, алгоритма обработки информации.

С учетом (1) получено следующее выражение для критерия оптимизации (вероятности необнаружения)

$$P_{\text{необн}} = Q \exp \left\{ - \int_0^T \left[\sum_{i=1}^N Q_i \frac{v^m}{r_i^n} + \chi \gamma(t) \right] dt \right\}, \quad (13)$$

где χ – характеристическая функция координат подвижного объекта, принимающая значение 1 в случае, когда маршрут объекта проходит через район контролируемый соответствующим стационарным или маневренным средством обнаружения и 0 – в противном случае. Постоянный коэффициент Q_i является индивидуальной характеристикой обнаружителя.

Минимизация вероятности обнаружения или, что тоже самое, максимизация вероятности необнаружения сводится к минимизации интеграла

$$G(v, r) = \int_0^T \left[\sum_{i=1}^N Q_i \frac{v^m}{r_i^n} + \chi \gamma(t) \right] dt \rightarrow \min_{v(\cdot), r_i(\cdot)}. \quad (14)$$

В том случае, когда точное распределение средств обнаружения в районе действия объекта неизвестно, вероятность обнаружения вычисляется по формуле (14) с заменой действительного числа средств на математические ожидания их количества. Траектория движения показана на рис. 5

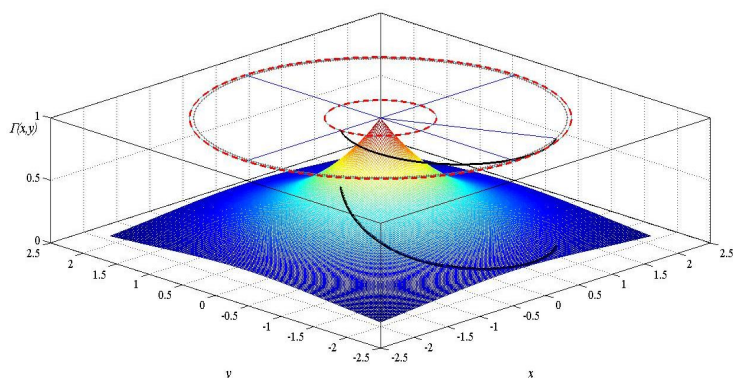


Рис. 5. Траектория движения подвижного объекта на плоскости (карта угроз вероятностная, по вертикали отложена вероятность обнаружения)

Использование мобильных ложных целей в задачах уклонения от поисковых систем. Мобильные ложные цели используются для дезинформации поисковых систем. Их применение позволяет отвлечь поисковую систему от реального объекта поиска, дав ему возможность совершить маневр уклонения и выхода из опасной зоны возможного обнаружения. Задачи, которые при этом возникают, связаны с расчетом рациональных траекторий совместного маневрирования объекта поиска и ложной цели, включая выбор оптимального момента пуска ложной цели. Дело в том, что ложная цель, как правило, движется программно, без каких-либо командных коррекций своей траектории со стороны объекта поиска. По этой причине преждевременный старт ложной цели в обстановке неполной информации о поисковой системе (элементах движения и т.п.) может значительно снизить эффективность ее применения.

В качестве первого примера рассмотрим поисковую систему P , состоящую из линейки отдельных подвижных детекторов $P_1, P_2, \dots$, с круговыми зонами обнаружения радиуса R , расположенных на расстояниях $\rho \leq 2R$ друг от друга. Пусть линейка совершает плоскопараллельное движение, галсируя случайным образом так, что проекция ее скорости на направление некоторого генерального курса (ГК), известного объекту поиска E_1 , есть величина постоянная.

Задача уклонения возникает тогда, когда E_1 находится в зоне, так называемого, критического угла, образованного пересечением касательных к зонам обнаружения крайних детекторов линейки и равного 2γ с $\sin \gamma = \beta$, где β – отношение скоростей E_1 и P [23]. Находясь в зоне критического угла, E_1 не может разойтись с P , не попав в зону обнаружения одного из детекторов. Если E_1 занимает такую позицию по отношению к P , что он не может попасть в зону обнаружения одного из крайних детекторов линейки, то возникает, так называемая, задача прорыва сквозь линейку (строй) детекторов. Если же E_1 занимает позицию, из которой он может попасть в зону обнаружения одного из крайних детекторов, то возникает рассматриваемая здесь задача уклонения.

Уклонение E_1 от линейки детекторов состоит из трех этапов (подзадач):

I – выбор E_1 позиции для пуска ложной цели E_2 .

II – ввод E_2 в зону обнаружения крайнего детектора линейки.

III – отвлечение P на E_2 .

Задача уклонения решается в обратном порядке, начиная с III этапа.

III этап отличается детерминированным характером движения объектов. Предполагается, что ложная цель E_2 , попав в зону обнаружения крайнего детектора, начинает отвлекать на себя этот детектор, заставляя его изменить курс. При этом E_1 совершает маневр уклонения, максимизируя опасное расстояние до детектора.

II этап характеризуется программным движением E_2 в расчетную точку зоны обнаружения крайнего детектора и движением E_1 в позицию, которая является исходной для III этапа. Критерием оптимальности решения задачи уклонения на II этапе служит математическое ожидание функционала – цены соответствующей дифференциальной игры преследования-уклонения, которую разыгрывают E_1 и E_2 против P на III этапе [24].

I этап характеризуется оптимальным выбором позиции E_1 для начала II этапа, т.е. позиции, в которой производится пуск E_2 . Эта позиция должна обеспечивать заданную дисперсию промаха по зоне обнаружения крайнего детектора с одной стороны и быть максимально близкой к границе зоны критического угла с другой стороны. Математическая формализация этих требований с учетом динамики E_1 и P и составляет математическую модель I этапа задачи уклонения.

Решение всех поставленных задач стохастической оптимизации ищется в классе условно-программных управлений.

Задача уклонения на III этапе. Начало III этапа соответствуем моменту $t_0 = 0$ попадания E_2 в зону обнаружения крайнего детектора линейки. Предполагается, что с этого момента детектор начинает преследование E_2 для того, чтобы сблизиться с E_2 до расстояния R за минимальное время. Здесь R – радиус зоны достоверной классификации, т.е. расстояние, с которого детектор может достоверно отличить истинную цель от ложной. Таким образом, E_1 решает задачу с критерием $G = T \rightarrow \min$ и терминальным условием

$$0 \leq |Z_2(T)| = R \leq |Z_2(t_0)|,$$

где $Z_2(t)$ – двумерный вектор, направленный от детектора к E_2 .

Коалиция E_1 и E_2 решает задачу с критерием

$$G_E = \min_{t \leq T} |Z_1(t)| \rightarrow \max,$$

где $Z_1(t)$ – двумерный вектор, направленный от детектора к E_1 .

При простых движениях игроков и программном управлении E_2 игроки должны двигаться по прямым с максимально допустимыми скоростями так, чтобы вектора скоростей детектора и E_1 образовывали угол γ с $\cos \gamma = \beta$. При этом максимум G_E равен значению $\rho \cos(\gamma - \delta)$, где $\rho = |Z_1(t_0)|$ и $\delta = \widehat{Z_1(t_0), Z_2(t_0)}$ – угол визирования целей детектором в начальный момент.

Задача уклонения на II этапе. II этап начинается с момента принятия решения о пуске E_2 . При этом E_2 движется по заданной программе, а оптимальное управление E_1 ищется в классе условно-программных управлений. Задача управления E_1 и E_2 состоит в максимизации математического ожидания функционала $J = \rho \cos(\gamma - \delta)$, с $\cos \gamma = \beta$, где ρ – дистанция от E_1 до детектора в момент попадания E_2 зону обнаружения детектора, δ – угол визирования E_1 и E_2 со стороны детектора. Функционал J является ценой детерминированной дифференциальной игры преследования-уклонения, которую разыгрывает коалиция E_1 и E_2 против P на III этапе – этапе отвлечения [24]. Специфика рассматриваемой здесь постановки состоит в учете случайного характера маневрирования P .

Задача уклонения на I этапе. I этап состоит в выборе позиции для пуска E_2 . Необходимость в I этапе появляется вследствие случайного характера движения P и в этом состоит принципиальное отличие от детерминированной постановки задачи уклонения. Действительно, пуск E_2 с больших начальных дистанций до P может привести к недопустимо большим дисперсиям промаха E_2 по зоне обнаружения детектора вследствие слишком большого времени его сближения с этой зоной. По этой причине имеет смысл задаться разумным допустимым значением дисперсии промаха и осуществлять пуск E_2 только из таких позиций, которые обеспечивают дисперсию промаха не выше заданного значения. Оказывается, что терминальная поверхность для I этапа представляет собой характерную окружность, уравнение которой выписывается в явном виде. В основу выбора критерия оптимальности для I этапа, т.е. критерия выбора точки пуска E_2 на терминальной поверхности положе-

ны следующие соображения. Будем считать желательным встречу E_2 с зоной обнаружения детектора в такой точке, чтобы отклонение математического ожидания случайного вектора $Z_2(\vartheta)$ (характеризующего прогнозируемое положение этой точки относительно детектора в момент ϑ попадания E_2 в зону обнаружения) от ГК поисковой системы было минимальным. Выбор такого критерия диктуется тактическими соображениями, так как при этом отклонение скорости детектора от ГК (при отвлечении на E_2) будет минимальным. Математически этот критерий выражается в максимизации косинуса прогнозируемого угла поворота критического угла (вследствие случайного характера галсирования поисковой системы).

В качестве второго примера рассмотрим перехват поисковой системы ложной целью по угломерной априорной информации. Математически, рассматривается задача уклонения на плоскости от поисковой системы P подвижного объекта поиска E_1 , который движется со скоростью $\beta_1 < 1$ с минимально допустимым радиусом разворота $r = 1$. Предполагается, что в начальный момент $t_0 = 0$ объект E_1 знает только пеленг на систему P , которая движется равномерно и прямолинейно с единичной скоростью. Направление вектора скорости поисковой системы P и дистанция до нее E_1 не известны. Специфика задачи состоит в том, что для уклонения от системы P и ее возможного перехвата E_1 использует с момента t_0 мобильную ложную цель E_2 , которая движется программно со скоростью $\beta_2 < 1$, «прикрывая», совершающий маневр уклонения, объект поиска E_1 ($\beta_1 < \beta_2 < 1$). Маневр уклонения состоит в циркуляции с минимально допустимым радиусом разворота на некоторый угол и последующим движением по касательной к окружности разворота.

Траектория движения ложной цели E_2 должна строиться таким образом, чтобы при измеренном начальном пеленге на поисковую систему P ее перехват (в смысле точечной встречи E_2 и P) осуществлялся независимо от действительного расстояния между P и объектом E_1 в худшем для него случае, когда система P движется в упрежденную точку, расположенную на криволинейной траектории движения объекта E_1 (где предположительно должна произойти его встреча с поисковой системой P).

Для этой задачи в параметрическом виде построена программная траектория ложной цели E_2 и аналитически получен угол крутого разворота объекта поиска E_1 .

Траекторное управление наблюдениями. При выполнении автономных миссий БПЛА или автономными необитаемыми подводными аппаратами (АНПА) часто ставится задача слежения по угломерной информации за мобильной целью. Однако точность оценки элементов движения цели (ЭДЦ) существенным образом зависит от траектории, по которой движется наблюдатель в процессе слежения, что связано с проблемой наблюдаемости цели [23].

В связи с этим естественно возникает задача построения в реальном времени рациональной (с точки зрения улучшения точности оценивания ЭДЦ) траектории движения БПЛА или АНПА. Иными словами – задача траекторного управления наблюдениями с борта подвижного наблюдателя.

Собственно процесс слежения состоит из двух связанных между собой процессов: процесса сбора информации о цели и процесса обработки этой информации. Управление процессом сбора информации называют управлением наблюдениями, а процесс ее обработки – фильтрацией [24].

Сложность построения оптимальных процедур сбора и обработки информации в режиме реального времени напрямую связана с нелинейностью как уравнений движения системы наблюдатель-цель, так и уравнений, описывающих угловые наблюдения (пеленг на цель и угол ее возвышения) [25].

В силу габаритных и энергетических ограничений, бортовые вычислители на БПЛА или АНПА относительно малопроизводительны, что требует достаточно простых (рекуррентных) алгоритмов фильтрации, построенных, например, на базе расширенного фильтра Калмана [26]. «Простота» подобных алгоритмов и, в частности, ошибки линеаризации компенсируются более качественной информацией о цели, получаемой за счет оптимизации процесса наблюдения. Численные эксперименты показывают, что линеаризованный фильтр Калмана с управляемым процессом траекторного наблюдения дает оценки ЭДЦ не хуже, а иногда и лучше сложных нелинейных алгоритмов фильтрации при интуитивно разумном, но неоптимальном движении наблюдателя [27].

Для АНПА рассмотрен сценарий траекторного управления азимутальными наблюдениями за равномерно и прямолинейно движущейся целью при одновременном решении основной (сближение с целью или уклонение от нее) и вспомогательной (оценка ЭДЦ) задач [28]. Для БПЛА рассмотрены различные способы определения координат подвижной цели с помощью как одного аппарата, наблюдающего углы азимута и возвышения, так и двух, наблюдающих углы азимута [28]. Программные траектории получены с помощью численного решения задачи оптимального управления в непрерывном времени. Наиболее целесообразным является применение одного БПЛА, осуществляющего наблюдения двух углов. Показано, что оптимальная траектория одного БПЛА, выполняющего угловые наблюдения азимута и возвышения, может быть с достаточной точностью аппроксимирована конечным гармоническим рядом Фурье с небольшим количеством коэффициентов. Это позволяет заменить поиск решения вариационной задачи на поиск минимума функции нескольких переменных (коэффициентов Фурье). Оказалось, что при использовании двух гармоник по углу рысканья и одной гармоники по углу тангажа можно обеспечить не более 2% потерь в значении платежного функционала. Предложенный подход к построению субоптимальных траекторий может использоваться на борту БПЛА в реальном масштабе времени. Использование двух БПЛА, стартующих из одной точки, ограничивает возможности получения точных оценок координат цели в первые секунды из-за ненаблюдаемости цели. Показано, что при одинаковой точности измерений углов азимута и возвышения применение одного БПЛА более целесообразно по сравнению с двумя, поскольку при достаточной начальной высоте отсутствует проблема наблюдаемости цели и, кроме того, значение платежного функционала в случае одного БПЛА уменьшается быстрее с ростом времени [27].

Заключение. В докладе обсуждены некоторые постановки и решения задачи планирования движения подвижных объектов. Можно констатировать, что при решении задачи планирования движения в конфликтной среде необходимы междисциплинарные обобщения и развитие методов исследования в известных и новых областях знаний, таких как:

- теория средств обнаружения, включая теорию оптимального оценивания сигналов;
- классические и параметрические методы оценивания;
- когерентные методы обработки информации;
- теории формирования и эволюции физических полей подвижных объектов с учетом неоднородной среды распространения сигналов;
- теорию формирования информационных признаков объектов при их маневрировании в среде;
- расширение теории управления динамическими объектами;
- логико-оптимизационные и многокритериальные модели и методы принятия решений, используемые при выработке оптимальных решений;
- групповые методы и модели взаимодействия разнородных объектов при выполнении коллективных миссий и ряд других.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cacceta L., Loosen I., Rehbock V.* Optimal transit path problem for submarines // Proceedings of the 4th International Conference on Engineering Applications and Computational Algorithms, DCDIS, Guelph, Canada, July 27-29, 2005.
2. *Cacceta L., Loosen I., Rehbock V.* Computational aspects of the optimal path problem // Journal of industrial and management optimization V. 4. No. 1. P. 1-11, 2008.
3. *Dogan A., Zengin U.* Unmanned Aerial Vehicle Dynamic-Target Pursuit by Using Probabilistic Threat Exposure Map // Journal of Guidance, Control and Dynamics. V. 29, № 4. P. 723-732, 2006.
4. *Воронин А.Н., Ясинский А.Г., Шворов С.А.* Синтез компромиссно-оптимальных траекторий мобильных роботов в конфликтной среде // Проблемы управления и информатики. № 2. С. 12-18, 2002.
5. *Галяев А.А., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я.* Об одной задаче управления движением объекта в конфликтной среде. Известия РАН. Теория и системы управления. № 3. С. 130-136, 2009.
6. *Галяев А.А., Маслов Е.П.* Оптимизация законов уклонения ПО от обнаружения // Известия РАН. Теория и системы управления. № 4. С. 52-62, 2010.

7. *Галяев А.А., Маслов Е.П.* О задаче патрулирования рубежа // Известия РАН. Теория и системы управления. № 5. С. 143-153, 2011.
8. *Zabarankin M., Uryasev S., Pardalos P.* Optimal Risk Path Algorithms //Chapter 1 in the Book "Cooperative Control and Optimizaton" (R. Murphey and P.Pardalos ed.). Kluwer Academic, Dordrecht. V. 66. P. 271-303, 2002.
9. *Zabarankin M., Uryasev S., Murphey R.* Aircraft Routing under the Risk of Detection. // Naval Research Logistics. V. 53. No. 8. P. 728-747, 2006.
10. *Маслов Е.П., Абрамянц Т.Г., Яхно В.П.* Уклонение подвижного объекта от обнаружения группой наблюдателей // Проблемы управления. № 5. С. 73-79, 2010.
11. *Rehbock V., Caccetta L., Hallam C.L. and O'Dowd R.* Optimal Submarine Transit Paths Through Sonar Fields, Research Report, Department of Mathematics and Statistics, Curtin University of Technology, Western Australia, 2000.
12. *Washburn A.R., Kress M.* Combat Modelling. N.Y.: Springer. 2010.
13. *Бурдик В.С.* Анализ гидроакустических систем. СПб: Наука, 1988.
14. *Якушенко Е.И. и др.* Бортовой комплекс управления скрытностью морских подводных объектов с оперативно–советующей системой // Вестник компьютерных и информационных технологий. № 10. С. 9–16, 2012.
15. *Szechtman R., Kress M., Lin R.* Models of Sensor operations for border Surveillance // Naval Research Logistic. Vol. 55, N 3. P. 27 – 41, 2008.
16. *Галяев А.А., Маслов Е.П.* Оптимизация закона уклонения подвижного объекта от обнаружения при наличии ограничений // Автоматика и телемеханика. № 6. С. 83 – 94, 2012.
17. *Галяев А.А.* Задача уклонения от подвижного одиночного наблюдателя на плоскости в конфликтной среде // Автоматика и Телемеханика. № 6. С. 28 – 37, 2014.
18. *Галяев А.А.* Задача уклонения от обнаружения системой разнородных наблюдателей: один сенсор – группа детекторов // Проблемы управления. № 3. С. 72-77, 2016.

19. *Васильев С.Н., Галяев А.А., Горкунов Э.С., Гурьев Ю.В., Перцев В.В., Якушенко Е.И.* Перспективы создания бортовых комплексов управления физическими полями подводных лодок // Сборник материалов конференции «Управление в морских и аэрокосмических системах (УМАС-2016), СПб.: Изд-во ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». С. 3-12, 2016.

20. *Абрамянц Т.Г., Галяев А.А., Маслов Е.П., Рудько И.М., Яхно В.П.* Уклонение подвижного объекта от обнаружения системой разнородных наблюдателей // Проблемы управления. № 2. С. 31-37, 2015.

21. *Абчук В.А., Суздаль В.Г.* Поиск объектов. М.: Советское радио, 1977. 360 с.

22. *Иванов М.Н., Маслов Е.П.* Об одной задаче уклонения // Автоматика и Телемеханика. № 8. С. 56-62, 1984.

23. *Nardone S.C. and Aidala V.J.* Optimization of Observer Trajectories for Bearings-only Target Localization // IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems. V. AES-17. No. 2. P. 162-166, 1981.

24. *Григорьев Ф.Н., Кузнецов Н.А., Серебровский А.П.* Управление наблюдениями в автоматических системах. М.: Наука, 1986.

25. *Koks Don.* Numerical Calculations for Passive Geolocation Scenarios / Defense Science and Technology Organization Research Report. DSTO-RR-0319. Australia, 2009. URL: http://www.dsto.defence.gov.au/publications/scientific/_record.php?record=4559.

26. *Miller A. and Miller B.* Tracking the UAV Trajectory on the Basis of Bearing-Only Observations // Proc. 53rd IEEE Conf. on Decision and Control. CDC2014. P. 4178-4184.

27. *Андреев К.В.* Траекторное управление наблюдениями с борта беспилотного летательного аппарата / Автореферат дисс. канд. техн. наук по спец. 05-13-01. М.: ИПУ РАН, 2016.

28. *Андреев К.В., Рубинович Е.Я.* Траекторное управление наблюдателем замобильной целью по угломерной информации // Автоматика и телемеханика. № 1. С. 134-162, 2016.

**О НАУЧНОМ НАСЛЕДИИ
ПРОФЕССОРА Т.К. СИРАЗЕТДИНОВА**

Г.Л. Дегтярев

(КНИТУ-КАИ им. А.Н. Туполева, Россия, 420111, Казань, К. Маркса, 10)

E-mail: gldegtyarev@mail.ru

**ABOUT SCIENTIFIC HERITAGE
OF PROFESSOR T.K. SIRAZETDINOV**

G.L. Degtyarev

(KNRTU named after A.N. Tupolev, 420111, Kazan, K.Marx str., 10)

Keywords: calculus of variations, maximum principle, dynamic programming, stability, control, optimal control.

Уважаемые участники международной Четаевской конференции, эта конференция проводится одиннадцатый раз, не всегда в КАИ, но учреждена она КАИ. Инициаторами ее стали непосредственные ученики Н.Г. Четаева и их ученики, уже повзрослевшие: П.А. Кузьмин, М.Ш. Аминов, В.Н. Матросов, Т.К. Сиразетдинов, В.Н. Скимель, Ю.В. Кожевников, В.Г. Павлов, И.И. Ахметгалеев

В 2017 году исполняется 90 лет со дня рождения яркого представителя Четаевской научной школы, профессора Сиразетдинова Талгата Касимовича.

Талгат Касимович закончил татарскую школу, не очень хорошо владел русским языком, но имел твердое желание заниматься наукой. И ему повезло. Его желание заниматься наукой было замечено учеником Н.Г. Четаева зав. кафедрой аэродинамики С.Г. Нужиным. Являясь членом (старостой) студенческого кружка он еще будучи студентом получил новые научные результаты по теории крыла конечного размаха.

После прохождения аспирантуры Талгат Касимович защитил кандидатскую диссертацию. Им разработан метод аэродинамического расчета стреловидных крыльев на больших углах атаки с учетом влияния близости земли.

После защиты кандидатской диссертации Талгат Касимович значительное время работал на кафедрах аэродинамики, сопротивления материалов и высшей математики.

Поэтому к началу 60-х годов прошлого века – времени бурного развития теории оптимального управления, в том числе систем с распределенными параметрами, Талгат Касимович подошел хорошо подготовленным. У него был богатый набор научных проблем и высочайший уровень математической подготовки.

К числу таких проблем относились:

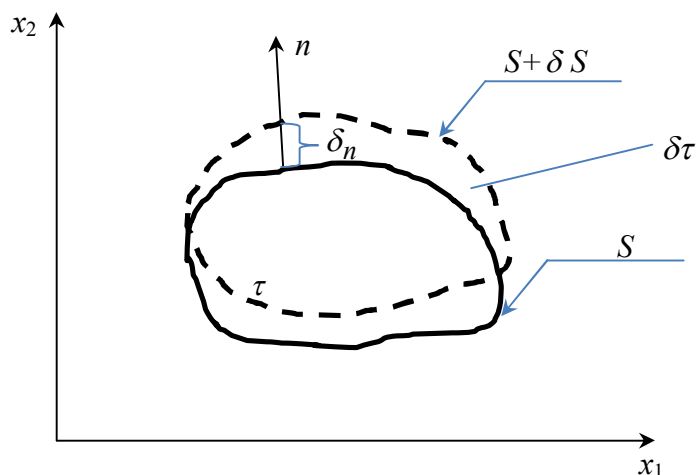
- оптимизация аэродинамических форм ЛА;
- оптимизация теплообмена в пограничном слое;
- управление упругими конструкциями, в том числе, с полостями, частично заполненными жидкостью;
- оптимизация конструкций и многое другие.

Вокруг Талгата Касимовича начала формироваться молодежь (аспиранты, преподаватели, сотрудники других вузов и предприятий). Формировалась научная школа профессора Сиразетдинова.

1. Вариационное исчисление.

Особенностью систем с распределенными параметрами (СРП) является то, что состояние их в каждый момент времени описывается функциями (вектор-функциями) пространственных координат и времени

Введем обозначение



$\varphi(x)$ – функция состояний

τ – область, в которой рассматривается процесс, $x \in \tau$.

s – граница области τ , $u(x, t)$ – управление.

Другой особенностью СРП является то, что управление может быть определено в области τ (или ее части), на границе s (или ее части).

Поэтому для СРП нельзя воспользоваться методами решения оптимальных задач, развитыми для систем с сосредоточенными параметрами. Требуется их развитие, адаптация, далеко не тривиальные.

Так для простейшего функционала

$$I = \int_{\tau} F(x, \varphi, \varphi_{xp}) dx, \quad \varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Талгат Касимовичем получено уравнение Эйлера-Остроградского

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \sum_{p=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_{xp}} \right) = 0, \quad x \in \tau$$

и условия трансверсальности

$$\sum_{p=1}^3 \frac{\partial F}{\partial \varphi_{xp}} \cos(n, x_p) \delta \varphi + \left[F - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \sum_{p=1}^3 \frac{\partial F}{\partial \varphi_{xp}} \cos(n, x_p) \right] \delta n = 0, \quad x \in S$$

Математическая задача значительно усложняется при рассмотрении поверхностных функционалов при негладкой границе.

$$I = \int_S \sum_{p=1}^3 P_p(x, \varphi, x_{px}) \cos(n, x_p) ds$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in S$, $x_{px} \equiv (x_{p\alpha}, x_{p\beta})$,

$$x_{p\alpha\alpha} \equiv \frac{\partial x_p}{\partial x_{\alpha}}, \quad x_{p\alpha\beta} \equiv \frac{\partial x_p}{\partial x_{\beta}}, \quad p\alpha\beta = 1, 2, 3,$$

$$\alpha \neq p, \beta \neq p, \alpha \neq \beta,$$

где n – внешняя нормаль, s – гладкая варируемая поверхность. Особо интересными были работы Талгата Касимовича, выполненные с учениками:

- Диваковым О.Г. по оптимальному управлению пограничным слоем, в том числе над перистой поверхностью;
- Балоевым А.А. по оптимизации формы стабилизатора;
- Афанасьевым А.А. – по управлению пограничным слоем путем выдува инородной жидкости;
- Елизаровым В.И. – по оптимизации течения неньютоновских жидкостей,
- Ультриновым И.П. – по управлению плазмой.

По существу, Т.К.Сиразетдиновым был предложен новый подход к решению вариационных задач газовой динамики, который получил название метода Гудерлея-Армитейджа-Сиразетдинова, высоко оцененный в научном сообществе.

2. Принцип максимума

Развитие ракетно-космической техники стимулировало лучшие умы математики к поиску более эффективных методов поиска оптимального управления.

Имена Л.С. Понтрягина, А.А. Фельдбаума, Л.И.Розонеэра, Р. Беллмана, Д.Е.Охотимского известны всему миру.

Группа ученых во главе с академиком Л.С. Понтягиным в 1962 году была удостоена высшей награды СССР – Ленинской премии.

Не миновала эта волна и Казань, КАИ, где были разработаны оригинальные и эффективные методы решения оптимальных задач.

В частности, интенсивно начала развиваться теория оптимального управления системами с распределенными параметрами.

В шестидесятых годах в СССР сформировалось три научных центра:

- Московский при лидерстве А.Г.Бутковского [1] – [9],
- Казанский, возглавляемый Т.К.Сиразетдиновым [10] – [18],
- в г.Фрунзе, возглавляемый А.И. Егоровым [19], [20], [21].

Талгат Касимович сосредоточил свое внимание на доказательстве принципа максимума для одномерных динамических процессов, описываемых дифференциальными уравнениями

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x, t, \varphi) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} - f_i(x, t, \varphi)$$

$$x \in [0L], \quad t \in [0t_1]$$

с начальными и граничными условиями

$$\varphi_i(x, 0) = \varphi_i'(x), \quad x \in [0L]$$

$$\varphi_i(0, t) = \varphi_i''(t), \quad t \in [0t_1]$$

$$\varphi_i'(0) = \varphi_i''(0).$$

Предполагается, что для каждой заданной совокупности (x, t, φ) , характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = 0$$

имеет различные и вещественные корни.

В частности, доказан принцип максимума для полилинейных систем

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = f_i(x, t, \varphi, u) \quad i = 1 \dots n$$

$(\varphi_i)_{t=0} = b_i(x)$ – заданы

$(\varphi_i)_{x=0} = \vartheta(t)$ – граничное управление

$u(x, t) \in U$

$$I = \int_0^{t_1} \int_0^L F_1(x, t, \varphi(x, t), u(x, t)) \, dx dt + \int_0^{t_1} F_2(t, \varphi(L, t), v(t)) \, dt \\ + \int_0^n F_3(x, \varphi(t_1, x)) \, dx \\ F_2(t, \varphi(L, t), v(t)) = F_2^I(t, v(t)) + F_2^{II}(t, \varphi(L, t))$$

Вводятся вспомогательные функции

$$H = -F_1 + \sum_{i=1}^n \psi_i f_i$$

$$h = -F_2^I + \sum_{ij} a_{ij}(0, t) \psi_i(0, t) v_j(t),$$

где $\psi_i(x, t)$ удовлетворяют системе сопряженных уравнений

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} \psi_i = \frac{\partial H}{\partial \varphi_j}$$

с конечными и граничными условиями

$$(\psi_i)_{t=t_1} = -\frac{\partial F_3}{\partial \varphi_i(t, x)},$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \psi_i \right)_{x=L} = -\frac{\partial F_2''}{\partial \varphi_j(L, t)}.$$

Если $u(x, t)$, $\vartheta(t)$ – оптимальное управлению, то оно удовлетворяет условию максимум

$$H[\varphi(x, t), \psi(x, t), u(x, t)] (=) \max_{u \in U} H(\varphi(x, t), \psi(x, t), u), \quad \frac{\partial h}{\partial v_i} \Delta v_i \leq 0.$$

Учитывая, что вдоль характеристик исходная система может быть представлена в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, используя технологию доказательства принципа максимума, предложенную Розоноэром, можно доказать сформулированное утверждение.

На основе полученных результатов решена задача оптимизации химического реактора, в котором протекают экзотермические реакции [22]

$$A(\varphi_1) \frac{B(\varphi_2)}{C}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + (a + bx) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = -(k_1 + k_2) \varphi_1$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + (a + bx) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = k_2 \varphi_1, \quad k_i = k_i^0 \exp \left(-\frac{E_i}{uR} \right)$$

E_i – энергия активации,

R – универсальная газовая постоянная,

u – абсолютная температура в реакторе,

$(a + bx)$ – скорость движения газовой смеси,

$$I = \int_0^{t_2} \varphi_2(L, t) dt$$

Решение удастся провести аналитически для различных значений $p > 0$

$$p = E_1/E_2 > 0, \quad (p < 1, p = 1, p > 1).$$

Далее принцип максимума доказан для:

– квазилинейных систем

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + a_i(x, t, \varphi) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = f_i(x, t, \varphi, u)$$

$$f_i(x, t, \varphi, u) = f_i'(x, t, \varphi) + f_i''(x, t)u(x, t)$$

- систем с запаздывающим аргументом,
- стохастических систем.

Отмеченные результаты были положены в основу диссертационных исследований аспирантов: Г.Л. Дегтярева и В.Н. Куршева.

Принцип максимума доказан Т.К. Сиразетдиновым, его учениками и для некоторых видов многомерных систем, хотя оптимизацией многомерных систем активно занимались и А.Г. Бутковский, и А.И. Егоров. В частности, Т.К. Сиразетдиновым и его учениками доказан принцип максимума

- как необходимое и достаточное условие для многомерных линейных систем;
- для процессов, описываемых интегральными уравнениями, второго порядка.

3. Метод динамического программирования

Как известно, основное управление метода динамического программирования имеет вид:

$$\min_{u \in U} \left(\frac{dV}{dt} + W \right) = \left(\frac{dV}{dt} + W \right)_{u_0} = 0 \quad (31)$$

$$V[\varphi(x, t_1)] = W_0$$

где

$$V[\varphi(x, t), t] = \min \left[\int_t^{t_1} W dt + W_0 \right] \quad (32)$$

$$W = W[\varphi(x, t), u(x, t), t],$$

$W, W_0[\varphi(x, t_1)]$ – заданные положительные функционалы, определяющие целевой функционал

$$I = \int_0^{t_1} W dt + W_0.$$

Теорема. Для оптимальности управляемого процесса необходимо и достаточно существование оптимального функционала $I[\varphi(x, t), t]$, удовлетворяющего условиям (3.1), (3.2).

Если при этом:

функционал $I[\varphi(x, t), t]$ является равномерно непрерывным и определенно положительным по мере ρ , функционал $I[\varphi(x, t), t]$ удовлетворяет условию (3.1), при $t \in (0, \infty)$, функционал $W[\varphi(x, t), t]$ – определенно положительный по мере ρ , то процесс $[\varphi(x, t) \equiv 0]$ является асимптотически устойчивым по мере ρ .

Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов для линейных СРП.

Пусть процесс описывается системой уравнений

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = L_{x_i}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) + B(x, t)u(x, t),$$

где

$$Lx_i(\varphi_1, \varphi_n) \equiv \sum_{j=1}^n \left[a_{ij} \varphi_j + \sum_{p=1}^3 a_{ij}^p \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_p} + \sum_{p,q=1}^3 a_{ij}^{pq} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_p \partial x_q} \right],$$

$$I = \int_0^{t_1} W dt + W_0.$$

$u(x, t)$ – управление,

W, W_0 – квадратичные функционалы

$$W = \int_{\tau_x} \int_{\tau_\xi} [\varphi^T(x, t) \omega_1(x, \xi) \varphi(\xi, t) + u^T(x, t) \omega_2(x, \xi) u(\xi, t)] d\tau_x d\tau_\xi$$

$$W_0 = \int_{\tau_x} \int_{\tau_\xi} \varphi^T(x, t_1) \omega_0(x, \xi) \varphi(\xi, t_1) d\tau_x d\tau_\xi.$$

Отыскивая функционал $V(t)$ в виде интегральной квадратичной формы

$$V = \int_{\tau_x} \int_{\tau_\xi} \varphi^T(x, t) F(x, \xi, t) \varphi(\xi, t) d\tau_x d\tau_\xi,$$

можно получить оптимальный закон управления и матрицу $F(x, \xi, t)$, определяющую параметры этого закона.

Эти результаты были использованы аспирантами И.Х. Халитовым, А.Г. Аузяком, И.П. Ультриновым, Е.Г. Павловым, Н.Ф. Дегтяревой при решении прикладных задач оптимального управления.

4. Исследование устойчивости СРП

При исследовании устойчивости тривиального решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = L_{x_i}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

с однородными граничными условиями, где

$$L_{x_i}(\varphi) = \sum_{j=1}^m \left[\alpha_{ij} \varphi_j + \sum_{p=1}^m b_{ij}^p(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_p} + \sum_{p,q=1}^m c_{ij}^{pq}(x) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_p \partial x_q} \right], \quad x \in \tau \quad (4.2)$$

функции Ляпунова строятся в виде интегральных квадратичных форм:

$$V = \int_{\tau_x} \int_{\tau_\xi} \sum_{i,j=1}^n f_{ij}(x, \xi) \varphi_i(x, t) \varphi_j(\xi, t) d\tau_x d\tau_\xi \quad (4.3)$$

В настоящее время отсутствуют конструктивные методы проверки их знакоопределенности, что затрудняет применение этих форм к решению прикладных задач. Но в случае систем первого порядка по всем координатам решение этой задачи значительно облегчается. Тогда естественно преобразовать уравнения высокого порядка в систему уравнений первого порядка, как по времени, так и по пространственным координатам. То есть свести к виду:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{k=1}^m \left(A_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + B_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) + A_0 \varphi + B_0 \psi \quad (4.4)$$

$$\sum_{k=1}^m \left(C_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + D_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) + C_0 \varphi + D_0 \psi = 0 \quad (4.5)$$

где $x \in X \subset R^m$; $t \in (t_0, \infty)$, $\varphi = \varphi(x, t)$, $\psi = \psi(x, t)$ – векторы фазовых функций, причем производная ψ по времени в систему (4.4), (4.5) не входит;

$A_i(x, t), B_i(x, t), C_i(x, t), D_i(x, t)$ – матрицы коэффициентов.

Граничные условия задаются по некоторой части ∂s границы s области τ в виде

$$\Gamma_1 \varphi(x, t) + \Gamma_2 \psi(x, t) = 0 \quad x \in S \quad (4.6)$$

где $\Gamma_1(x), \Gamma_2(x)$ – матрицы.

Система (4.4), (4.5) – уникальная форма записи любого линейного уравнения в частных производных высокого порядка в виде системы первого порядка и является аналогом системы обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши. Но в отличие систем обыкновенных дифференциальных уравнений здесь не все уравнения системы

первого порядка разрешаются относительно производных по времени. Имеются уравнения, не содержащие производные по времени.

Учитывая это, для системы (4.4) – (4.6) разработан метод построения функционала Ляпунова в виде интегральной формы

$$V = \int_{\tau} \varphi^T(x, t) F(x) \varphi(x, t) dx \quad (4.7)$$

Построение функций Ляпунова связано с решением уравнения

$$\frac{dV}{dt} = -W \quad (4.8)$$

где

$$W = \int_{\tau} \varphi^T(x, t) \omega(x) \varphi(x, t) dx \quad (4.9)$$

$\omega(x)$ – заданная симметричная матрица; dV/dt – производная формы (4.7) в силу системы (4.4) – (4.6). При вычислении производной dV/dt разработан метод учета уравнений, не содержащих производные по времени.

Вычислив производную dV/dt в силу уравнения (4), далее к этой производной прибавим выражение

$$\begin{aligned} & \int_{\tau} \{ (\varphi^T P_1 + \psi^T p_2) \left[\sum_{k=1}^m \left(C_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + D_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) + C_0 \varphi + D_0 \psi \right] + \right. \\ & \left. + \left[\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \varphi^T}{\partial x_k} C_k^T + \frac{\partial \psi^T}{\partial x_k} D_k^T \right) + \varphi^T C_0^T + \psi^T D_0^T \right] (p_1^T \varphi + p_2^T \psi) \right\} dx \end{aligned}$$

равное нулю в силу уравнения (4.5). Здесь $P_1 = P_1(x)$, $P_2 = P_2(x)$ – пока произвольные матрицы. Это аналогично методу множителей Лагранжа в вариационном исчислении.

Выполняя интегрирование по частям, и требуя, чтобы матрицы F , P_1 , P_2 удовлетворяли уравнениям

$$\begin{aligned} FA_k + P_1 C_k &= A^T F + C_k^T P_1^T, & P_2 D_k &= D_k^T P_2^T \\ FB_k + P_1 D_k &= (C_k^T P_2^T + P_2^T D_k^T) + \gamma^T P_2^T - \sum_{k=1}^m \frac{\partial (P_2^T D_k)}{\partial x_k} \\ FB_0 + P_1 D_0 + C_0^T P_2^T &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial (FB_k + P_1 D_k)}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (4.10)$$

и граничным условиям

$$\sum_{k=1}^m [\varphi^T (FA_k + P_1 C_k) \varphi + \psi^T P_2 D_k \psi + \psi^T (FB_k + P_1 D_k) \psi + \\ + \psi^T (B_k^T F + D_k^T P_1^T) \varphi] \cos(n, x_k) = 0 \quad x \in S \quad (4.11)$$

где n – внешняя нормаль к S , для производной dV/dt в силу системы (4.4) – (4.6) получим интегральную квадратичную форму того же вида, что и для V :

$$\frac{dV}{dt} = - \int_{\tau} \varphi^T(x, t) N(x, t) \varphi(x, t) dx \quad (4.12)$$

где

$$N = \sum_{k=1}^m \frac{\partial (FA_k + P_1 C_k)}{\partial x_k} - FA_0 - A_0^T F^T - P_1 C_0 - C_0^T P_1^T. \quad (4.13)$$

Подставляя (4.9), (4.12) в уравнение (15), получим

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial (FA_k + P_1 C_k)}{\partial x_k} - FA_0 - A_0^T F^T - P_1 C_0 - C_0^T P_1^T = W, \quad x \in \tau \quad (4.14)$$

Таким образом, для построения интегральной формы (7) по заданной форме (4.9) следует решить уравнения (4.10), (4.14) относительно матриц F , P_1 , P_2 при граничных условиях, вытекающих из выражений (4.6), (4.11). Однако в отличие от задачи построения квадратичных форм в случае обыкновенных дифференциальных уравнений здесь не всегда все элементы матрицы W могут быть заданы произвольно. Эта проблема подробно рассмотрена для линейного гиперболического уравнения второго порядка.

Если матрицы $F(x)$ и $\omega(x)$ определено положительны почти при всех $x \in \tau$, то интегральные формы (4.7), (4.9) определено положительны по мере ρ

$$\rho = \int \varphi^T(x, t) \varphi(x, t) dx$$

и решение $\varphi = \psi \equiv 0$ системы (4.4) – (4.6) является асимптотически устойчивой по этой мере. При исследовании на устойчивость условие определенной положительности матрицы $\omega(x)$ заменяется условием ее не отрицательности.

Этот подход развит для исследования устойчивости в большом и целом и при постоянно действующих возмущениях. Разработан метод динамического программирования и для синтеза оптимального управления. Используя этот подход, разработан метод исследования устойчивости и

стабилизации изгибно-крутильных колебаний упругого стреловидного крыла под действием аэродинамических сил и сил упругости двумя рулевыми поверхностями, расположенными у передней и задней кромок свободного конца крыла, получим достаточные условия устойчивости номинального режима работы ветроэнергоустановки (ВЭУ) с учетом упругости вала, передающего механическую энергию ВЭУ к рабочему агрегату (генератору) (аспиранты: Ф.Д. Байрамов, Ю.М. Зайцев).

5. Синтез оптимального управления при неполном измерении состояния

Остановимся на исследовании линейных процессов уравнения возмущенного движения которых записываются в следующем векторно-матричном виде:

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = A_x \varphi(x, t) + B(x, t)u(x, t) + C(x, t)\omega(x, t) \quad (5.1)$$

с условиями на границе области X

$$\alpha_s \varphi(x, t) = 0, \quad s = x \in S. \quad (5.2)$$

Здесь $\varphi(x, t)$, $u(x, t)$, $\omega(x, t)$ – векторы, состояния, управления и возмущения, A_x , α_s – матрицы линейных дифференциальных или интегро-дифференциальных операторов, характеризующих объект и его взаимодействие с окружающей средой.

Характерной особенностью СРП является то, что управляющие и возмущающие воздействия могут быть распределены не по всей области X , а по некоторым ее подобластям, по границе S или ее части. На современном этапе развития техники управления управляющие воздействия представляют собой, как правило, сосредоточенные, функции, т.е. функции, не зависящих от пространственных координат. Например, углы отклонения рулей, управляющие силы и моменты, приложенные к летательному аппарату, управляющие напряжения в двигателях-маховиках являются функциями только времени. Область $X_u(X_\omega)$, где приложено управляющее (возмущающее) воздействие, будет называть пространственной базой управляющего устройства (возмущающего воздействия). Математически $X_u(X_\omega)$ вводится следующим образом [23, 24]:

$$x_u = \{x: x \in X, \quad B(x, t) \neq 0\}$$

$$X_{\omega} = \{x: x \in X, \quad C(x; t) \neq 0\} \quad (5.3)$$

Базы $X_{\omega}(X_{\omega})$, могут состоять из изолированных точек, линий, поверхностей, быть подобластью X или совпадать с ней. Функциональные матрицы $B(x, t)$, $C(x, t)$ могут содержать обобщенные функции (δ -функции и их производные, сосредоточенные в точках и на границе области X). Это позволяет рассматривать точечные и граничные управляющие и возмущающие воздействия и ограничиться при этом однородными граничными условиями. Следует различать подвижные и неподвижные базы управления и возмущения.

Если на структуру регулятора не наложено никаких ограничений, то для синтеза оптимального управления по принципу обратной связи необходима полная информация о состоянии системы $\varphi(x, t)$ в каждой точке области X . Однако полное измерение состояния СРП в принципе невозможно. Невозможно, например, точно измерить температурное поле или деформации упругой конструкции в каждой точке области. В реальной ситуации наблюдаемые переменные $z(t)$ являются некоторыми функционалами, определенными на состоянии системы [25, 26, 27]. Кроме полезного сигнала наблюдаемые переменные могут содержать и погрешности измерения. При наличии аддитивной погрешности измерения $\vartheta(t)$ уравнение измерения представим в виде

$$z(t) = \int_X N(x, t) \varphi(x, t) dx + \vartheta(x). \quad (5.4)$$

Матрица $N(x, t)$ характеризует способ измерения. Элементами ее могут быть обобщенные функции и их производные.

Под задачей синтеза управления при неполном измерении состояния понимается задача построения управления, являющегося функцией или функционалом (оператором) наблюдаемых переменных и обеспечивающего выполнение требований к управляемому процессу. Если при этом требуется, чтобы искомое управление доставляло минимум некоторому функционалу, то говорят о синтезе оптимального управления. В качестве критерия оптимальности обычно рассматривается квадратичный функционал [27]

$$I = \int_{t_0}^{t_1} W(t) dt + W_1, \quad (5.5)$$

где $W(t)$, W_1 – интегральные квадратичные функционалы

$$W(t) = \int_X \int_{X^1} \varphi^T(x, t) G_1(x, x', t) \varphi(x', t) dx dx' + \\ + \int_X u^T(x, t) G_2(x, t) u(x, t) dx$$

$$W_1 = \int_X \int_{X^1} \varphi^T(x, t) G_3(x, x', t) \varphi(x', t_1) dx dx'. \quad (5.6)$$

Здесь $G_1(x, x', t_1)$, $G_3(x, x', t_1)$ – симметричные неотрицательно-определенные матрицы, $G_2(x, t)$ – симметричная положительно-определенная матрица, t_1 – фиксированный момент времени.

Оптимальное по квадратичному критерию (5.5), (5.6) управление имеет вид

$$u(x, t) = G_2^{-1}(x, t) B^T(x, t) \int_{X^1} F(x, x', t) \varphi(x', t) dx'$$

Матрица $F(x, x', t)$ отыскивается как решение нелинейного уравнения

$$\frac{\partial F(x, x', t)}{\partial t} - A_x^* F(x, x', t) - F(x, x', t) A_{x'}^{*T} - G_1(x, x', t) + \\ + \int_{X''} F(x, x'', t) B(x'', t) G_2^{-1}(x'', t) B^T(x'', t) F^T(x, x'', t) dx'' \quad (5.7)$$

с конечными и граничными условиями

$$F(x, x', t_1) = G_3(x, x', t_1),$$

$$\alpha_s^* F(s, x', t) = \alpha_x^* F(s', x, t) = 0. \quad (5.8)$$

Здесь α_s^* , A_x^* – сопряженные α_s , A_x операторы.

Отыскивая решение уравнения метода динамического программирования в виде квадратичной формы наблюдаемых переменных, найден следующий оптимальный закон обратной связи при квадратичном критерии качества

$$u(x, t) = -G_2^{-1}(x, t) B^T(x, t) N^T(x, t) f(t) Z(t). \quad (5.9)$$

Здесь матрица $f(t)$ определяется из решения краевой задачи (5.7), (5.8), где $F(x, x', t) = N^T(x, t)f(t)N(x', t)$. Вдается решение этой задачи для сосредоточенного управления. В этом случае

$$u(t) = G_2^{-1}(t) \int_x B^T(x, t) B^T(x, t) dx f(t) Z(t). \quad (5.10)$$

Рассмотрим выражение (5.9), (5.10) для определения оптимального управления. Пусть отыскивается распределенное управление. Из (5.9) следует, что для ограниченности оптимального управления элементами матриц $B(x, t)$ и $N(x, t)$ могут быть только ограниченные функции. Это накладывает определенное ограничение на способ измерения. В частности, нельзя синтезировать оптимальное, распределенное по области X управление, являющееся функцией наблюдаемых переменных, если последними являются значения состояния системы в фиксированных точках, так как в этом случае элементами матрицы $N(x, t)$ являются обобщенные функции. Кроме того, из выражения (5.9) следует, что найденное управление будет торжественно равно нулю, если пространственные базы управления и измерения не пересекаются. Если же отыскивается сосредоточенное оптимальное управления, то элементами матрицы $B(x, t)$ и $N(x, t)$ могут быть обобщенные функции, однако для ограниченности оптимального управления необходимо, чтобы была ограниченной матрица

$$Q(t) = \int_x N(x, t) B(x, t) dx$$

Если пространственные базы управления и измерения не пересекаются, то $Q(t) \equiv 0$ и оптимальное управления торжественно равно нулю. Из этого следует, что для существования оптимального управления, являющегося функцией наблюдаемых переменных и неравного тождественно нулю, необходимо, чтобы пространственные базы управляющего и измерительного устройства пересекались[28]:

$$X_u \cap X_N \neq \emptyset.$$

6. Управление, оптимальное по быстродействию

Пусть задан набор функций

$$K_i = K_i(\xi, t'; x, t) \quad x \in \tau_{x_i} \quad t' \in (0, t_1)$$

$$t \in (0t_1), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и функции $u = u(\xi, t')$, $\xi \in \tau_\xi$, $t' \in (0t)$. Выражения

$$\int_{\tau_\xi} \int_0^{t_1} K_i(\xi, t'; x, t) u(\xi, t') d\tau_\xi dt' = \alpha_i(x, t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.1)$$

называются распределенными моментами функций $u = u(\xi, t')$. Задача определения функции $u(\xi, t) \in L_2$, удовлетворяющей равенствам (6.1) и условию $\|u\|_{L_2} \leq l$, где l – заданное положительное число, $\|u\|_{L_2}$ – норма в пространстве L_2 , называется l проблемой моментов.

Обширный класс процессов, описываемых линейными дифференциальными уравнениями в частных производных, допускают представление решения $\varphi = \varphi(x, t)$, в виде

$$\varphi(x, t) = \int_{\tau_\xi} \int_0^t G(x, t; \xi, t') u(\xi, t') d\tau_\xi dt' + \int_{\tau_\xi} G_0(x, t; \xi, 0) \varphi(\xi, 0) d\tau_\xi \quad (6.2)$$

где $G(x, t; \xi, t')$, $G_0(x, t; \xi, 0)$ – матричные функции Грина краевой задачи. Выражение (6.2) для каждого фиксированного t является моментом.

Зависимость (6.2) можно рассматривать как интегральное уравнение относительно управления $u(\xi, t')$, если вектор-функция $\varphi(x, t)$, является заданной.

Будем рассматривать управляемые объекты, поведение которых описывается системой интегральных уравнений

$$\varphi_i(x, t) = \int_{\tau_\xi} K_i^*(\xi, t'), x, t) u(\xi, t') d\tau_\xi dt'$$

Здесь $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$, $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ – две различные точки конечной связной области τ , где протекает процесс, $\tau\xi$ означает область τ при интегрировании по ξ , t, t' – различные моменты времени, функции $\varphi_i(x, t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) – фазовые координаторы, $K_i^*(\xi, t', x, t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) – заданные вещественные функции, $u(\xi, t')$ – детерминированная вещественная управляющая функция. Причем

$$u(\xi, t') \in L_2 \quad \text{и} \quad \|u\| = \left\{ \int_{\tau_\xi} \int_0^{t_1} u^2(x, t) dt d\xi \right\}^{1/2}$$

Рассмотрим следующий частный случай системы

$$\alpha_i(x) = \int_{\tau_x} \int_0^{t_1} u(\xi, t') K_i(\xi, t', x, t) d\tau_\xi dt',$$

где $\alpha_i(x)$ и $K_i(\xi, t', x, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ – заданные функции, такие, что система

$$\int_{\tau_x} \sum_{i=1}^n \psi_i(x) K_{ij}(x, y, t_1) d\tau_x = \alpha_j(y)$$

где

$$K_{ij}(x, y, t_1) = \int_{\tau_\xi} \int_0^{t_1} K_i(\xi, t', x, t_1) K_j(\xi, t', y, t_1) d\tau_\xi dt'$$

разрешима относительно $\psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon(x) \in L_2$ при каждом фиксированном $t_1 \in (0, \infty)$. Функция $u(\xi, t') \in L_2(U)$ – управление, удовлетворяющее, кроме системы (6.1), неравенству $\|u\| \leq l$, где l – заданное положительное число.

Задача о быстродействии решается в два этапа. Сначала приводятся необходимые и достаточные условия существования решения системы моментных уравнений (6.1) при фиксированном $t_1 \in (0, \infty)$. Затем – условие для определения $\min t_1$, при котором выполняются моментные равенства (6.1).

Теорема 1. Для того, чтобы существовало решение $u(\xi, t') \in L_2$ системы (6.1) и было $\|u\| \leq l$, где $l > 0$ при некотором заданном $t_1 \in (0, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы для всевозможного набора вектор-функций $\varphi(x) \equiv (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)) \in L_2$ выполнялось неравенство

$$\left| \int_{\tau_x} \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \alpha_i(x) d\tau_x \right| \leq l F[\varphi],$$

где

$$F[\varphi] = \left\{ \int_{\tau_{\xi}} \int_0^{\tau_1} \left[\left(\int_{\tau_x} \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) K_i(\xi, t', x, t_1) \right)^2 d\tau_{\xi} dt' \right] \right\}^{1/2}.$$

Тогда наименьшее t_1 , при котором выполняются условия теоремы и будет оптимальным быстродействием [29-33].

Теоретические результаты были успешно использованы аспирантами Е.А. Клецовым и Э.Т. Смирновой для решения прикладных задач, проведении диссертационных исследований.

7. Управление экономическими системами

Т.К.Сиразетдиновым разработаны методы и алгоритмы построения математических моделей экономических (производственных) процессов, для чего введены необходимые понятия и переменные состояния, таких как:

- производственная мощность,
- мгновения трудоемкость основных фондов,
- продукция в единицу времени,
- поток поступающих основных фондов и др.

Введены понятия работы и мощности для экономического объекта.

Используя эти понятия, Талгат Касимович сформулировал аналог второго закона механики для экономических объектов, используя который можно строить модели объектов разного уровня сложности.

Параметры же этой математической модели можно определить, используя статистические данные реально работающих объектов.

Используя предложенные подходы, были разработаны математические модели функционирования малых и средних предприятий с учетом их специфики.

Далее работы вышли на муниципальный и отраслевой уровни. Была создана отраслевая лаборатория министерства электронной промышленности «Динамика и управление экономическими объектами», сформировался, я бы сказал, мощный творческий коллектив (С.К. Джаксыбаев, Ю.И. Батраков, Ю.П. Шургин, А.А. Афанасьев, В.В. Родионов, И.С. Иваненко, М.М. Рафиков, П.К. Семенов).

Результаты их работы были внедрены в авиационной промышленности СССР, были использованы при разработке системы прогнозирования развития экономики Татарстана и получили высокую оценку [34, 38].

ОЗУ – основная задача управления.

Очень продуктивной в прикладном плане оказалась идея Талгата Касимовича решение основной задачи управления – задача определения управления, при котором управляемый процесс удовлетворяет совокупности требований, которые могут быть представлены в виде

$$I_i[u] \leq 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда условие

$$\min_u \max_i I_i \leq 0.$$

Будет необходимым достаточным условием разрешимости ОЗУ.

Этот подход был широко использован учениками Т.К.Сиразетдинова при решении применяющих задач: Богомольным М.А., Сиразетдиновым Р.Т., Файзутдиновым Р.Н., Старостиним Б.А. и многими другими.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бутковский А.Г., Лернер А.Я.* Об оптимальном управлении системами с распределенными параметрами. – ДАН СССР, Кибернетика и теория регулирования, т. 134, № 4, 1960.
2. *Бутковский А.Г.* Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами. – Автоматика и телемеханика, т. XXII, № 1, 1961.
3. *Бутковский А.Г.* Принцип максимума для оптимальных систем с распределенными параметрами. – Автоматика и телемеханика, т. XXII, № 10, 1961.
4. *Бутковский А.Г.* Некоторые приближенные методы решения задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. – Автоматика и телемеханика, т. XXII, № 12, 1961.
5. *Бутковский А.Г.* О моделировании некоторых объектов с распределенными параметрами. – Сб. «Автоматическое управление». Изд-во АН СССР. М., 1961.

6. *Бутковский А.Г.* О необходимых и достаточных условиях оптимальности в импульсных системах управления. – Автоматики и телемеханика, т. XXIV, 3 8, 1963.

7. *Бутковский А.Г.* Метод моментов в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами. – Автоматика и телемеханика, т. 24, № 9, 1963.

8. *Бутковский А.Г.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. – Труды II Международного конгресса ИФАК, Изд-во АН СССР, 1963.

9. *Бутковский А.Г.* Расширенный принцип максимума для задач оптимального управления. – Автоматики и телемеханика, т. XXIV, № 3, 1963.

10. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимальные задачи газодинамики. – Изв. вузов, Авиационная техника, № 2, 1963.

11. *Сиразетдинов Т.К.* К теории оптимальных процессов с распределенными параметрами. – Автоматика и телемеханика, т. 25, № 4, 1964.

12. *Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* Об одной задаче оптимального управления системами с распределенными параметрами. – Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, 1967.

13. *Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* Об оптимальном управлении одномерными процессами с распределенными параметрами. – Автоматика и телемеханика, т. XXVIII, № 11, 1967

14. *Балоев А.А., Сиразетдинов Т.К.* К вопросу о выборе стабилизатора оптимальной формы в плане. – Изв. вузов, авиационная техника, № 4, 1968.

15. *Диваков О.Г., Сиразетдинов Т.К.* Оптимальное управление пограничным слоем. – Изв. вузов, Авиационная техника, № 3, 1969.

16. *Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* Оптимальное управления одномерными процессами с запаздывающим аргументом. – Автоматики и телемеханика, т. 21, № 1, 1970.

17. *Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* Об оптимальном управлении одномерными газодинамическими процессами. – Изв. вузов, Авиационная техника, № 1, 1970.

18. *Куришев В.Н., Сиразетдинов Т.К.* Об оптимальном управлении одномерными стохастическими процессами с распределенными параметрами. – Автоматика и телемеханика, № 1, 1972.

19. *Егоров А.Н.* Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами. – Автоматика и телемеханика, т. 25, № 5, 1964.

20. *Егоров А.И.* Об оптимальных процессах в системах, содержащих объекты с распределенными параметрами. – I. II, Автоматика и телемеханика, т. 26, № 6, 7, 1965.

21. *Егоров А.И.* Необходимые условия оптимальности для систем с распределенными параметрами. – Математический сборник, новая серия, т. 69 (111), вып. 3, 1966.

22. *Девятков Б.Н.* Теория переходных процессов в технологических аппаратах с точки зрения задач управления. – СО АН СССР, Новосибирск, 1964.

23. *Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* Оптимальное управление процессами с распределенными параметрами при неполном измерении. – Автоматика и телемеханика, 1977, № 5.

24. *Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* К задаче синтеза оптимального управления в распределенных системах при неполном измерении. – Изв. ВУЗов, Авиационная техника, 1977, № 2.

25. *Сиразетдинов Т.К.* Синтез управления систем с распределенными параметрами при неполном измерении их состояний. – Изв. ВУЗов, Авиационная техника, 1971, № 3.

26. *Сиразетдинов Т.К.* Вопросы измерения устойчивости и оптимизации систем с распределенными параметрами. – Preprints of Papers for IFAC Symposium on the Control of Distributed Parameter Systems. Banff, Canada, 1971.

27. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977.

28. *Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* Синтез оптимального управления в системах с распределенными параметрами при неполном измерении состояния (обзор). – Изд. АН СССР. Техн. кибернетика, 1983, № 2.

29. *Клестов Е.А.* Метод распределенных моментов в задачах оптимального быстрогодействия. – труды КАИ, вып. 107, 1968.

30. Клестов Е.А., Сиразетдинов Т.К. К задаче оптимального быстрогодействия в системах со случайными свойствами. – Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 3, 1969.

31. Клестов Е.А., Сиразетдинов Т.К. К задаче оптимального быстрогодействия в распределенных системах со случайными свойствами. – Автоматика и телемеханика, № 3, 1972.

32. Клестов Е.А., Сиразетдинов Т.К. Оптимальное по быстроддействию управление угловыми движениями и крутильными колебаниями упругого летающего крыла. – Автоматики и телемеханика, № 10, 1972.

33. Клестов Е.А., Сиразетдинов Т.К. Метод распределенных параметров в задачах оптимального быстрогодействия. – Труды КАИ, вып. 130, 1971.

34. Сиразетдинов Т.К. Динамическая модель прогнозирования и оптимальное управление экономическим объектом. – ИЗВУЗ. Авиационная техника, 1972, № 4, с. 25-30.

35. Сиразетдинов Т.К., Джаксыбаев С.К. Динамическая модель взаимодействующих экономических объектов. – ИЗВУЗ. Авиационная техника, 1974, № 1, с. 25-30.

36. Методические показания по применению динамических моделей в перспективном планировании развития объединении (предприятии) машиностроительных отраслей /ЦНИИ «Электроника – М.: 1981. – 161 с.

37. Агрегирование динамических моделей Ленътевского типа и многоуровневая процедура планирования. Тезисы докладов совещания «Теория и практика использования методов агрегирования в планировании и управлении. Казань, 1982: Изд-во АН Арм. ССР, Ереван, 1983, с. 61-65.

38. Сиразетдинов Т.К. Динамическая модель системы научно-исследовательских и производственных объектов. – ИЗВУЗ. Авиационная техника, 1977, № 2, с. 112-117.

РАСПРЕДЕЛЕННАЯ СИСТЕМА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ГРУППОЙ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ: МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ

В.Н. Евдокименков

(МАИ (НИУ), Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4)

E-mail: evn@netland.ru

М.Н. Красильщиков

(МАИ (НИУ), Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4)

E-mail: mnkr@mail.ru

DISTRIBUTED INTELLECTUAL CONTROL SYSTEM FOR THE GROUP OF UNMANNED AERIAL VEHICLES: METHODS AND ALGORITHMMS

V.N. Evdokimenkov

(MAI (NRU), 125993, Moscow, Volokolamskoe shosse 4).

M.N. Krasilshchikov

(MAI(NRU), 125993, Moscow, Volokolamskoe shosse 4).

Keywords: unmanned flying vehicles, distributed intellectual control system, pre-flight group mission scheduling, Delaunay's triangulation, algorithms of both tactical situations recognition and decision making, PID-regulator.

Введение. Достигнутый к настоящему моменту уровень развития беспилотной авиации позволяет рассматривать группы беспилотных летательных аппаратов (БЛА) в качестве эффективного средства решения разнообразных целевых задач. В связи с этим остро актуальной становится проблема управления подобными группами. К сожалению, в современной литературе исследование этой проблемы представлено лишь отдельными примерами решения частных задач, связанных в основном с индивидуальными действиями БЛА, что не создает целостных представлений о достигнутом уровне исследований в данной области.

Настоящая статья представляет собой попытку отчасти заполнить отмеченный научно-методический пробел путем систематизированного анализа проблемы управления группами беспилотных ЛА на основе обобщения известных отечественных и зарубежных работ в данной

предметной области с учетом результатов собственных исследований авторов.

В работе сформирован облик распределенной системы интеллектуального управления группой ударно-разведывательных беспилотных летательных аппаратов (БЛА), включающей внебортовую и бортовую компоненты. Рассмотрены современные подходы к разработке алгоритмов, составляющих основу внебортовой компоненты. Эти подходы различаются сценариями целевого применения групп БЛА, требованиями к информационному обмену между ними, а также математическим аппаратом, составляющим основу планирования.

Изложены методы и алгоритмы распознавания тактических ситуаций и выработки управляющих решений, реализованные в составе бортовой компоненты. С учетом особенностей их реализации эти алгоритмы объединены в две группы:

1) алгоритмы распознавания тактических ситуаций и принятия решений, использующие элементы искусственного интеллекта, применение которых целесообразно для типовых ситуаций, характеризующихся высокой степенью неопределенности в оценке текущих условий применения группы БЛА;

2) алгоритмы распознавания тактических ситуаций и принятия решений на основе формализованных математических моделей и методов оптимизации. Данная группа алгоритмов особенно эффективна при управлении действиями группы БЛА на этапах, предшествующих непосредственным контактам с противником.

1. Архитектура распределенной системы интеллектуального управления группой беспилотных летательных аппаратов. В настоящее время к беспилотным летательным аппаратам (БЛА) гражданского и военного назначения проявляется все более устойчивый интерес, что подтверждается разнообразием их существующих образцов. В максимальной степени достоинства БЛА проявляются в условиях их группового применения в интересах решения ударно-разведывательных задач. Решение подобных задач осложняется наличием факторов неопределенности и организованного противодействия со стороны противника, что указывает на необходимость разработки соответствующего интеллектуального комплекса управления, обеспечивающего коорди-

нированное траекторное, информационное и огневое взаимодействие БЛА в процессе коллективных действий.

Анализ подобного класса задач показывает, что их уникальность и новизна обусловлена тем, что для их решения необходимо создание принципиально нового класса интеллектуальных управляющих комплексов, объединяющих две взаимодействующие компоненты: внеборттовую и бортовую.

Внеборттовая компонента обеспечивает планирование группового применения БЛА и подготовку для каждого из участников группы полетного задания. В процессе предполетного планирования проводится:

сбор, обработка и отображение на электронной карте данных о местности, над которой пролегает маршрут БЛА, метеоусловиях в районе целевого применения, наличии источников потенциальной угрозы (зенитно-ракетных комплексов противника);

определение потребного состава группы для решения поставленной целевой задачи, распределение БЛА по задачам и целям;

построение оптимальных в смысле выбранного критерия маршрутов для каждого БЛА в составе группы.

В результате формируется план и полетные данные, обеспечивающие согласованные в пространстве и во времени действия всех БЛА, участвующих в решении целевой задачи.

Бортовая компонента интеллектуального комплекса обеспечения групповых действий размещается на борту каждого БЛА и выполняет оценку сложившейся в полете ситуации, а также выработку управляющих команд на всех этапах полета. Способ конкретной реализации бортовой компоненты во многом зависит от выбранной стратегии управления и реализующей ее схемы информационного обмена.

Дальнейший материал содержит обзор и сравнительный анализ конкретных методов и алгоритмов, составляющих формализованную основу перечисленных выше компонент интеллектуального комплекса обеспечения групповых действий ударно-разведывательных БЛА.

2. Методы и алгоритмы предполетного планирования групповых действий БЛА. Решение задач, реализуемых на этапе предполетного планирования групповых действий ударно-разведывательных БЛА, начинается с определения потребного состава группы для поиска и уничтожения объектов, располагающихся в районе целевого приме-

нения. Это предполагает выбор числа и типов БЛА, привлекаемых к операции, с учетом возможностей их бортовых оптико-электронных средств наблюдения и средств поражения.

Очевидно, что наиболее точная оценка эффективности действий группы БЛА может быть получена при использовании комплекса математических моделей, максимально адекватно описывающих пространственно-временное состояние всех БЛА, условия и результаты применения средств поражения, помеховую обстановку, средства радиоэлектронного и огневого противодействия противника. При этом ясно, что анализ даже одного варианта действий группы БЛА в операции поиска и уничтожения наземных целей с помощью комплекса математических моделей подобной сложности и объема потребует недопустимо больших вычислительных и временных затрат.

Это обстоятельство указывает на необходимость использования достаточно простых в реализации моделей, позволяющих с приемлемой точностью оперативно получать оценки эффективности групповых действий БЛА с учетом числа привлекаемых БЛА, возможностей средств наблюдения и поражения, располагаемых на их бортах. Рассмотрим один из возможных вариантов реализации подобной модели, опираясь на следующий сценарий совместного применения БЛА в операции поиска и нанесения ударов по наземным целям: предполагается, что группа образована N однотипными ударно-разведывательными БЛА, осуществляющими поиск и нанесения ударов по наземным целям в заданном районе целевого применения. При этом полагается, что БЛА, обнаружив цель, наносит удар, после чего его участие в операции завершается. Вероятность P того, что целевой объект будет уничтожен в результате атаки, предполагается заданной. Известно, что в районе целевого применения сосредоточено T целевых объектов. Предполагается, что момент времени t_1 , в течение которого БЛА сохраняет работоспособность, момент t_2 обнаружения целевого объекта, а также продолжительность его атаки t_3 являются случайными величинами, имеющими экспоненциальное распределение с параметрами $\theta = 1/t_1$, $\lambda = 1/t_2$, $\mu = 1/t_3$ соответственно.

В [1] показано, что в рамках сделанных предположений можно получить аналитические зависимости, определяющие:

1) вероятность потери БЛА (либо вследствие отказа, либо в результате действий противника) к моменту времени t :

$$P_1(t) = \frac{\lambda\theta}{\mu + \theta} \int_0^t e^{-(\lambda+\theta)s} (1 - e^{-(\mu+\theta)(t-s)}) ds + \theta \int_0^t e^{-(\lambda+\theta)s} ds \quad (1)$$

2) вероятность того, что БЛА к моменту времени t успешно завершит свою миссию, то есть произведет атаку цели:

$$P_2(t) = \frac{\lambda\mu}{\mu + \theta} \int_0^t e^{-(\lambda+\theta)s} (1 - e^{-(\mu+\theta)(t-s)}) ds \quad (2)$$

Использование соотношений (1) и (2), в свою очередь, позволяет рассчитать оценки эффективности групповых действий БЛА, а именно:

– вероятность того, что к моменту времени t все N БЛА завершат свое участие в операции либо вследствие их повреждения, либо вследствие успешной атаки цели

$$P_3(t) = (P_1(t) + P_2(t))^N; \quad (3)$$

– математическое ожидание числа целевых объектов, уничтоженных к моменту времени t :

$$M_T(t) = T \left(1 - \left(1 - \frac{P_2(t)p}{T} \right)^N \right) \quad (4)$$

На основе оценок (3) и (4) на этапе предполетного планирования можно оперативно определить для заданной гарантированной вероятности с учетом состава группы БЛА, характеристик используемых оптико-электронных средств наблюдения (λ), характеристик средств поражения (p , μ) и показателя надежности функционирования БЛА (θ), в частности, следующие характеристики:

продолжительность операции;

необходимое число БЛА для уничтожения в течение заданного времени требуемого числа целевых объектов;

требования к средствам наблюдения и поражения, при которых обеспечивается уничтожение требуемого числа целевых объектов за минимальное время и т.д.

Следующей etapом предполетного планирования групповых действий БЛА является решение задач целераспределения и формирования маршрутов выхода БЛА на намеченные цели. Заметим, что в настоящее время наблюдается значительный интерес, прежде всего, со стороны зарубежных специалистов, к проблеме алгоритмической поддержки процесса предполетного планирования групповых действий авиации. Например, в работе [2] развивается подход, использующий аппарат математического программирования для решения задач планирования групповых действий БЛА. Различные алгоритмы в рамках подобного подхода объединяет то, что задача целераспределения, то есть назначения для каждого БЛА в составе группы наиболее предпочтительного целевого объекта, в конечном итоге, интерпретируется как задача математического программирования. В [3] предлагается использование сети Петри для решения задач предполетного планирования маршрутов выхода БЛА на целевые объекты и последующей коррекции первоначального плана с учетом фактически сложившейся ситуации. В качестве модели, описывающей сценарий группового применения БЛА, в упомянутых работах используется ориентированный граф. В [4] изложен метод построения маршрутов БЛА применительно к задаче обнаружения наземных объектов. В основе метода лежит использование математического ожидания информационной энтропии для оценки оптимальности альтернативных вариантов маршрута.

В последние годы появилось большое число работ, основу которых составляет использование триангуляции диаграммы Вороного и триангуляции Делоне [5] для решения задачи предполетного планирования групповых действий БЛА. В этом случае маршрут формируется в виде набора промежуточных пунктов маршрута (ППМ), прохождение которых является обязательным. На характер маршрута движения БЛА между ППМ жестких ограничений не накладывается, что позволяет строить траектории, максимально учитывающие динамические возможности БЛА (рис. 1). Использование в составе внебортовой компоненты системы управления группой БЛА алгоритмов, основанных на триангуляции Делоне, представляется предпочтительным, так как позволяет добиться приемлемого компромисса между вычислительной сложностью алгоритмов планирования и возможностью получения оптимальных решений. Кроме того, использование подобных алгоритмов

позволяет получать решение как задачи целераспределения, так и задачи формирования маршрутов выхода БЛА на назначенные цели.

Однако, известные методы предполетного планирования, базирующиеся на триангуляции Делоне, требуют дальнейшего совершенствования, так как не учитывают следующие важные особенности применения групп БЛА:

- наличие неопределенности в расположении источников потенциальной угрозы (средств противовоздушной обороны противника);
- наличие в составе группы БЛА различных типов, что предполагает их ранжирование по степени важности;
- неоднородность состава наземных целевых объектов, являющихся областью применения группы БЛА, требующая в процессе планирования учета степени важности каждого из них.

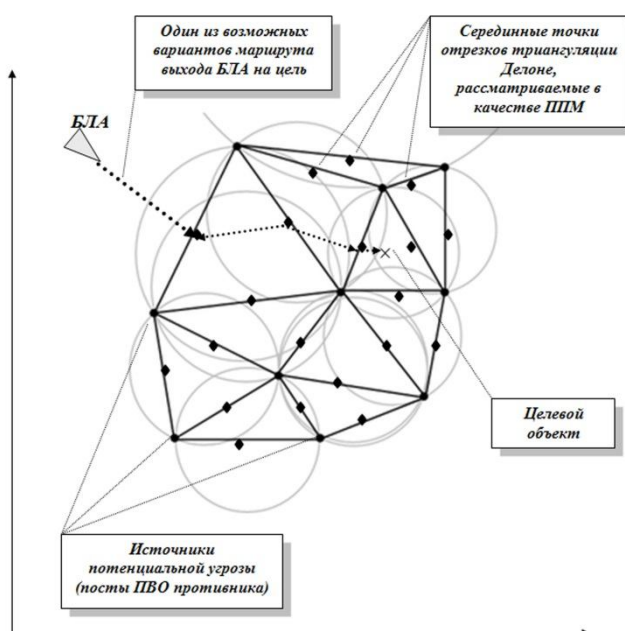


Рис. 1. Использование триангуляции Делоне в задаче планирования маршрутов БЛА

Учитывая это, авторами предложен альтернативный метод предполетного планирования действий группы БЛА, развивающий известные подходы на основе триангуляции Делоне с учетом вышеперечис-

ленных особенностей группового применения ударно-разведывательных БЛА [6].

В качестве исходных данных для работы алгоритма [6] используется следующая информация:

1) состав группы БЛА, привлекаемой для решения задачи поражения (разведки) группы наземных объектов;

2) координаты, определяющие положение каждого БЛА в момент выхода в район целевого применения в инерциальной системе координат, начало которой совмещено с аэродромом вылета;

3) заданная высота (эшелон) движения каждого БЛА;

4) заданная постоянная скорость каждого БЛА;

5) весовые коэффициенты, определяющие ценность каждого из БЛА с учетом его типа, статуса (ведущий – ведомый), боевого оснащения и т.д.;

6) множество наземных целевых объектов;

7) известные координаты местоположения каждого из целевых объектов; 8) весовые коэффициенты, определяющие значимость каждого из целевых объектов, как объекта атаки;

9) множество комплексов ПВО, располагаемых в районе целевого применения группы БЛА;

10) функции плотности вероятности, характеризующие статистику данных о координатах местоположения комплексов ПВО противника.

Результатом работы алгоритма являются матрицы, определяющие оптимальный вариант распределения БЛА по целевым объектам с учетом их значимостей и схемы маршрутов выхода БЛА на назначенную цель.

3. Методы и алгоритмы, составляющие основу бортовой компоненты системы интеллектуального управления группой БЛА. Алгоритмы распознавания тактических ситуаций и принятия решений, составляющие основу бортовой компоненты системы интеллектуального управления группой БЛА, можно объединить в две группы [6]:

1) алгоритмы распознавания тактических ситуаций и принятия решений, использующие элементы искусственного интеллекта;

2) алгоритмы распознавания тактических ситуаций и принятия решений на основе математических моделей и методов оптимизации .

В качестве наиболее предпочтительных подходов к разработке алгоритмов распознавания тактических ситуаций и принятия решений в системах с искусственным интеллектом выделим следующие:

алгоритм на основе продукционных систем с нечеткой логикой, алгоритм принятия решений нейросетевого типа,

алгоритм управления типа «ситуация-действие», основанный на прецедентах, алгоритм принятия решений на основе многозначной логики.

Конкретные методы и алгоритмы оперативного управления группами ударно-разведывательных БЛА, использующие элементы искусственного интеллекта подробно изложены в работе авторов [6], где приведено решение задачи распознавания текущей тактической ситуации (ТС), формируемой с учетом совокупности собственных БЛА, объектов противника, средств обеспечения и условий выполнения целевой задачи в определенный момент времени. Модель тактической обстановки представляется в виде последовательности тактических ситуаций, распознавание которых выполняется на основе продукционной системы с нечеткой логикой. В основу нечеткой модели управления «ситуация-действие» положен принцип определения по набору продукций, необходимых при данной входной ситуации управляющих решений [6].

В системе интеллектуального управления группой разведывательно-ударных БЛА нейросетевого типа для принятия оперативных решений используется распределенная система нейросетевого типа, состоящая из конечного набора нейронных сетей, настроенных на различные типы целевых объектов, уровни информированности, факторы наличия средств противодействия в районе целевого применения.

Процесс функционирования нейронной сети при решении задачи траекторного управления реализует схему директорного управления вида: «ситуация-действие» [6]. При этом до начала обучения сети формируется набор рекомендаций, на основании которых каждой ситуации в пространстве входных признаков приписывается соответствующий алгоритм управления. Разница между результатом функционирования сети и заданным набором рекомендаций зависит только от точности обучения нейронной сети.

Перечисленные выше алгоритмы особенно эффективны в ситуациях, когда достижение целей управления осложняется недостаточной ситуационной осведомленностью. Однако, в некоторых случаях разработка алгоритмов, обеспечивающих управление группой БЛА, может быть достигнута с использованием традиционных подходов, основу которых составляют математические модели объектов управления и методы оптимизации. В частности, это касается такого важнейшего этапа выполнения целевой задачи, как полет строем в район боевого применения. Оказывается, что управление полетом БЛА в групповых порядках может быть достигнуто за счет использования комплекса пропорционально-интегральных регуляторов (ПИ-регуляторов), реализованных в системах управления БЛА. В качестве примера на рис. 2 приведена структурная схема системы управления БЛА, процесс синтеза которой подробно описан в [6], обеспечивающая полет БЛА в строю с соблюдением заданных значений интервала и дистанции.

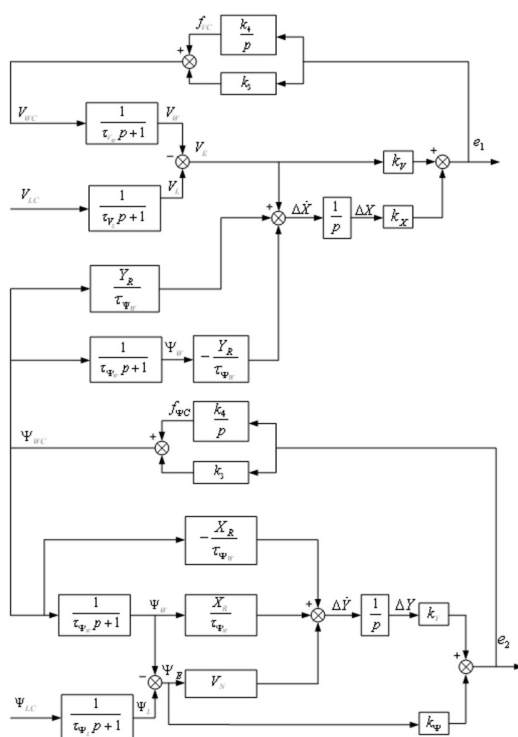


Рис. 2. Структурная схема системы управления движением БЛА в строю на основе ПИ-регуляторов

Система управления БЛА на рис. 2 объединяет два независимых канала. Управляющим сигналом во втором канале является командное значение курсового угла Ψ_{WC} , за счет которого обеспечивается устранение рассогласования по интервалу ΔY и курсовому углу Ψ_E . В качестве возмущающего сигнала в этом контуре выступает командное значение курсового угла ведущего БЛА Ψ_{LC} .

Первый канал управления имеет один основной управляющий сигнал – командное значение скорости V_{WC} и командное значение курсового угла Ψ_{WC} , синтезированное во втором канале. За счет этих сигналов обеспечивается устранение рассогласования по дистанции ΔX и скорости ΔV относительно требуемых значений.

Для компенсации ошибок в указанных выше каналах использованы традиционные ПИ-регуляторы.

Заключение. В работе рассмотрена архитектура распределенной системы управления групповыми действиями беспилотных летательных и перечень алгоритмов, составляющих основу внебортовой и бортовой компонент описанной системы. Выбор того или иного конкретного алгоритма зависит от содержания конкретных целевых задач, возлагаемых на группу БЛА, особенностей их бортового радиоэлектронного оборудования и размещенных на них авиационных средств поражения. Это указывает на необходимость проведения дальнейших исследований с целью создания программного прототипа описанной распределенной системы, реализующего управление группой БЛА на всех этапах её применения от взлета до возвращения на аэродром базирования во взаимодействии с элементами автоматизированной системы управления войсками.

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Kress, A. Bagessen, E. Cofer. Probabikity Modeling of Autonomous Unmanned Combat Aerial Vehicles (UCAVS) // Military Operations Research, 2006, Vol. 11. No. 4. P.5-24.*
2. *C. Schumacher, P. Chandler, M. Pachter, L.S. Pachter: UAV task assignment with timing constraints, AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, August, Austin, Texas, 2003, AIAA 2003-5664.*

3. *T. Murata*, 'Petri nets : properties, analysis and applications', in IEEE, pp. 77(4), 541–580, DCSD ONERA, 'http://www.cert.fr/dcsd/cd/procosa'.

4. Kamrani, Farzad & Lozano, Marianela Garcia & Ayani, Rassul. (2006). Path planning for UAVs using symbiotic simulation. Proceedings of the 20th annual European Simulation and Modelling Conference, ESM'2006, pp. 215 – 238, Toulouse, France, October 2006

5. *Guibas L.J., Knuth D.E., Sharir M.* Randomized Incremental Construction of Delanay and Voronoi Diagrams. // *Algoritmica*, Vol 7. No 4 1992.

6. *Евдокименков В.Н., Красильщиков М.Н., Оркин С.Д.* Управление смешанными группами пилотируемых и беспилотных летательных аппаратов в условиях единого информационно-управляющего поля. – М.: Изд-во МАИ, 2015. – 272 с.: ил.

ПЕРСПЕКТИВЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛИЗАЦИИ СОВРЕМЕННЫХ АВИАЦИОННЫХ КОМПЛЕКСОВ

С.Ю. Желтов, В.В. Косьянчук, Н.И. Сельвесюк

(ФГУП «ГосНИИАС», Россия, 125319, Москва, Викторенко, 7)

E-mail: niselvesuk@2100.gosniias.ru

INTELLECTUALIZATION HORIZONS OF MODERN AVIATION COMPLEXES

S.Yu. Zheltov, V.V. Kosyanchuk, N.I. Selvesuk

(GosNIAS, Russia, 125319, Moscow, Victorenko str., 7)

Keywords: Intellectualization, situation awareness, pilot's associate, 4D flightpath, reconfiguration, wireless sensor networks, human-computer interface, virtual simulation.

Введение. В докладе анализируются тенденции и основные проблемы интеллектуализации современных авиационных комплексов (АК) и рассматриваются новые функциональные задачи АК на ближайшую перспективу. В качестве ключевых аспектов интеллектуализации АК выделены задачи получения и интеллектуальной обработки разнородной информации, интеллектуального управления, «самоочувствления» воздушного судна (ВС), а также интеллектуального взаимодействия в контуре «пилот-машина». Результаты проведенных исследований свидетельствуют о том, что интеллектуализация современных АК позволит существенно снизить нагрузку на экипаж, повысить уровень безопасности полетов (БП), а также существенно увеличить эффективность применения ВС.

Постановка задачи. Развитие авиационной техники (АТ), как в военной, так и в гражданской авиации неразрывно связано с удовлетворением двух ключевых требований – безопасности и эффективности полетов ВС.

Возможности человека по удовлетворению этим требованиям на сегодняшний день практически исчерпаны. Все большее количество выполняемых функций пилота передается машине. Происходит так называемая интеллектуализация комплекса бортового оборудования

(КБО) или поэтапное внедрение компонентов, обладающих интеллектуальными свойствами, которые позволяют обеспечить самоуправляемость за счет искусственных интеллектуальных структур. Происходит разделение задач принятия решения между пилотом и бортовой вычислительной машиной на уровне.

Ключевым моментом в развитии КБО стал переход от федеративной архитектуры, в которой каждая отдельная функция ВС была реализована на своем отдельном блоке, к архитектуре, построенной на принципах интегрированной модульной авионики (ИМА), предложенной в нашей стране в ГосНИИАС в конце 90-х годов. Работы проводились под руководством академика РАН Е.А. Федосова. В концепции ИМА аппаратные функции оборудования трансформируются в программное обеспечение (ПО), а структура КБО превращается в структуру бортовой вычислительной сети. Переход к ИМА обусловлен существенным увеличением сложности бортовых систем, а также существенным перераспределением стоимости разработки ПО и аппаратуры [1,2].

Интеллектуализация современных АК сопоставима с автоматизацией, однако в данном случае речь идет об управлении, прежде всего, информационными потоками, их обработкой и использованием в интересах обеспечения БП и эффективности ВС.

Решение задачи.

Интеллектуальная обработка разнородной информации.

Улучшение ситуационной осведомленности экипажа.

Эффективность применения и перспективы развития авиационных систем определяются возможностью выполнения безопасных полетов днем и ночью, в сложных и быстро изменяющихся метеорологических условиях, в условиях недостаточной видимости.

Создание нового поколения датчиков и вычислительной техники вывело на новый качественный уровень создание автоматических и автоматизированных систем непрерывного визуального представления внешнего пространства. Использование в современных автоматических системах цифровых видеодатчиков с высоким разрешением позволило существенно приблизить информативность искусственных зрительных устройств к соответствующим характеристикам человеческого глаза [3].

Система улучшенного видения (EVS – Enhanced Vision Systems) – это аппаратно-программная система, которая формирует и выводит на

систему индикации визуальное улучшенное изображение закабинного пространства по информации от датчиков технического зрения. Сформированная системой EVS оперативная графическая информация далее представляется пилоту в реальном времени на соответствующем устройстве отображения.

Под системой синтезированного видения (SVS – Synthetic Vision Systems) понимают систему, формирующую в бортовом вычислителе и выводящую на систему индикации изображение топографического участка, наблюдаемого из кабины экипажа, по ориентации ВС в пространстве, высоте, географическим координатам ВС и бортовой базе данных (рис. 1).

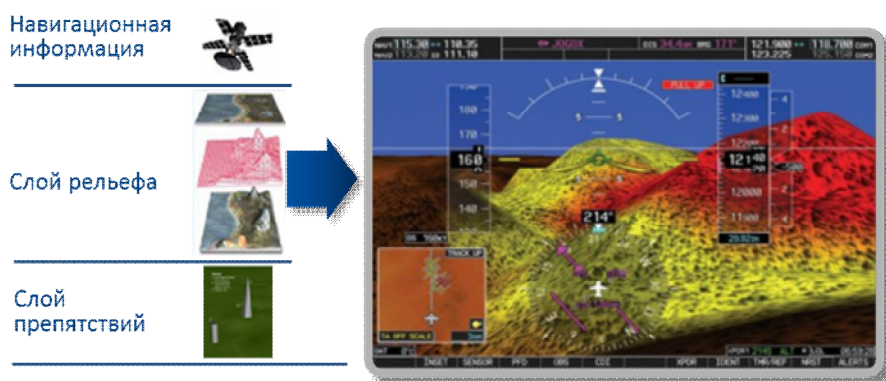


Рис. 1. Пример синтезированного изображения

В состав бортовых средств SVS должны входить: базы данных подстилающей поверхности, препятствий, объектов аэродромной инфраструктуры, вычислитель, подготавливающий SVS кадр для индикации, индикаторы с виртуальными органами управления функцией SVS для экипажа, ИЛС (опционально).

Наиболее перспективным направлением является использование на борту ВС системы комбинированного видения (CVS – Combined Vision System), которая объединяет в себе лучшие свойства и функциональные характеристики двух систем.

Перспективная CVS должна решать следующие задачи:

предварительная обработка EVS изображений (изменение диапазона яркостей, выделение границ объектов, формирование связанных фрагментов, скелетизация и векторизация фрагментов);

геометрическое совмещение EVS и SVS изображений в реальном масштабе времени;

совместная визуализация EVS и SVS изображений в зависимости от достижимой погрешности их совмещения.

Одной из центральных задач является разработка алгоритмов обнаружения объектов на изображении, слабо чувствительных к разнообразным видам изменчивости (искажения оптических сенсоров, блики, затенения, загораживания, искажения формы, ракурсные искажения, шумовые компоненты и т.д.). В зависимости от специфики конкретной задачи система автоматического управления предъявляет к подсистеме анализа изображений такие требования, как робастность, локализация и вычислительная реализуемость в рамках заданной аппаратной архитектуры.

Информационные системы «в помощь летчику»

Интеллектуальные информационные системы «в помощь летчику» предназначены для [4, 5]:

непрерывного представления экипажу точного, достоверного и целостного образа окружающей обстановки, независимо от погодных условий и времени суток;

распознавания в реальном времени опасных сочетаний факторов внешней обстановки и внутреннего состояния ВС, могущих привести к возникновению особой ситуации, ранжирование выявленных сочетаний факторов по степени опасности и их наглядное аудиовизуальное представление экипажу;

прогнозирования будущих опасных сочетаний факторов с учетом плана полета (траектории ВС) и оценки изменения внешней обстановки и внутреннего состояния ВС;

выработки рекомендаций для экипажа ВС по выходу из особых ситуаций, снижению их опасности или их предотвращению;

самостоятельного принятия решений и выполнения в автоматическом режиме действий по выходу из особых ситуаций, снижению их опасности или их предотвращению, а также блокировку действий пилотов, приводящих к возникновению особой ситуации или увеличивающих степень ее опасности.

Реализация алгоритмов интеллектуальных информационных систем «в помощь летчику» в перспективном КБО может осуществляться

как с использованием общих вычислительных ресурсов, так и путем создания собственной вычислительной платформы ИМА. Вариант реализации системы приведен на рис. 2.

Создание и применение различных технологий анализа изображений требуют сегодня формирование системы сбора информации на базе космических, авиационных и беспилотных носителей, системы подготовки полётных заданий, системы высокоточной геопространственной привязки, системы автономного управления высокоточных беспилотных ВС и летающих робототехнических комплексов. Все перечисленные направления могут быть реализованы на платформе ИМА.

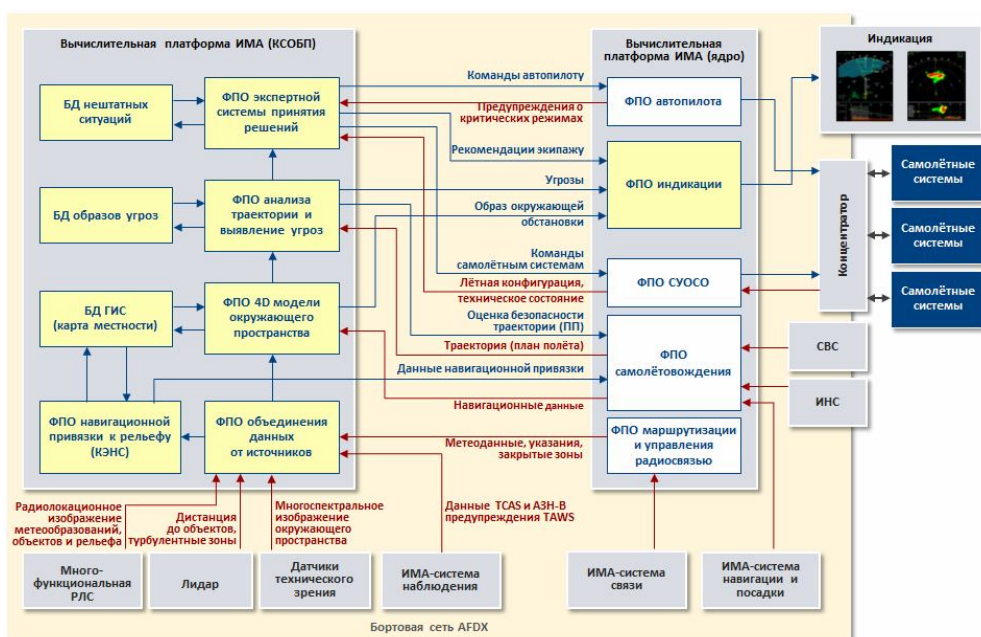


Рис. 2. Пример реализации системы «в помощь летчику»

Интеллектуальное управление ВС

Управление 4D траекторией полета

В области интеллектуализации управления ключевым направлением является реализации траекторий полета с учетом времени прибытия в конечную точку (4D траектории полета), которые станут существенным элементом системы УВД следующего поколения. Предполагается, что самолеты будут летать по точным четырехмерным 4D траек-

ториям, где четвертым измерением является время, что потребует согласовывать 4D траекторию полета от взлета до посадки.

Реализация такого подхода требует оптимизации летно-технических характеристик полета по индексу стоимости с учетом всех ограничений и с учетом расширенной модели атмосферы (многоэшелонный ветер и температура) и построения 4D траектории одновременно для каждого типа полетного плана (активного, измененного, дополнительного). Одновременно на борту ВС должны решаться задачи комплексной обработки информации, идентификации характеристик ВС, оценки возмущающих факторов, прогнозирования и управления.

Реализация данного подхода позволит добиться существенного снижения стоимости полетов.

Управление вычислительным процессом

Задача управления вычислительным процессом становится наиболее актуальной вследствие того, что перспективный КБО имеет открытую сетевую отказоустойчивую функционально-ориентированную архитектуру на базе масштабируемой ИМА с использованием единой вычислительной среды (платформы). Функции систем комплекса в этом случае выполняют программные приложения, разделяющие общие вычислительные и информационные ресурсы. Важной особенностью такой архитектуры является отсутствие «жестких» раз и навсегда установленных связей между датчиками бортового оборудования (информационными каналами) и вычислительными средствами. Это позволяет реализовать динамическую реконфигурацию структуры КБО с соответствующим перераспределением ресурсов. Внутри вычислительной среды формируются (с подключением к необходимым информационным каналам комплекса) структуры для оптимального выполнения каждой функции. Каждая возникающая при этом структура формируется только на время выполнения заданной функции. Таким образом, общая конфигурация вычислительной среды динамически перестраивается в процессе функционирования комплекса. При отказах это свойство становится ключевым. Функциональное ПО реконфигурируется внутри вычислительной платформы, в результате чего снижается влияние отказов вычислительной платформы на общий уровень БП.

Структура КБО реализуется с использованием минимальной номенклатуры унифицированных взаимозаменяемых открытых стандартных изделий (модулей, систем) с высокой производительностью и энергетической эффективностью. В данную структуру могут внедряться высокоинтегрированные multifункциональные системы основных функций, например, единая программно-управляемая радиосистема связи, навигации и наблюдения.

Реконфигурация систем управления

Системы управления (СУ) современных ВС – это сложные, высоконадежные, многократно резервированные системы. Тем не менее, в условиях действия непредвиденных факторов последствия отказов зачастую не удастся ликвидировать за счет резервирования, поэтому их относят к критическим отказам. Для обеспечения отказоустойчивости при возникновении этой группы отказов в СУ перспективных ЛА закладывается возможность реконфигурации СУ.

Реконфигурация СУ позволяет путем перераспределения функций отказавших или поврежденных органов управления между оставшимися исправными органами управления обеспечить управляемость ВС. Например, отказ элерона можно парировать дифференциальным отклонением рулей высоты, а отказ стабилизатора – за счет элеронов и рулей высоты [6].

Для реализации алгоритмов реконфигурации в СУ вводится дополнительный блок – блок реконфигурации (рис. 3).

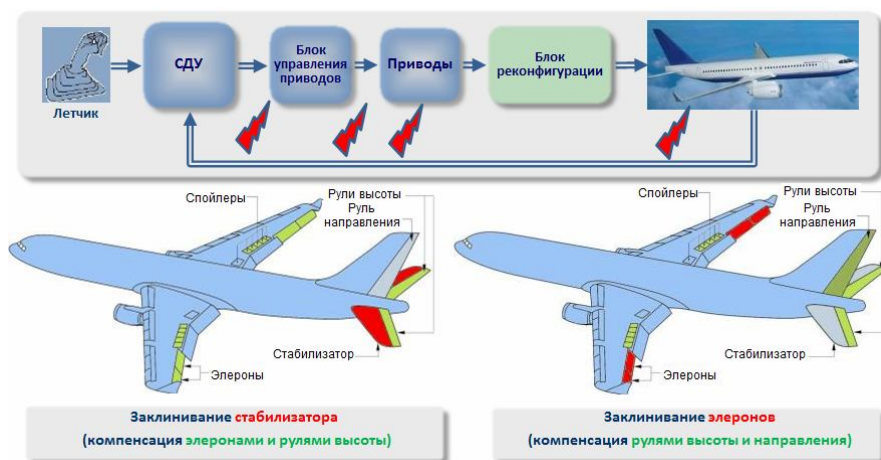


Рис. 3. Пример реконфигурации СУ

Блок реконфигурации закона управления формирует новый закон управления, парирующий последствия отказа. На вход блока реконфигурации поступают управляющие сигналы, позволяющие отклонять управляющие поверхности в соответствии с логикой штатной СУ. С выхода блока реконфигурации снимаются сигналы управления исправными рулевыми поверхностями, сформированные в соответствии с алгоритмом перераспределения управления между исправными управляющими поверхностями. Это позволяет обеспечить управляемость самолетом в случае неработоспособности одного из органов управления.

Интеллектуальное «самоочувствление» ВС

Беспроводные сенсорные сети

Существенное расширение функциональности КБО перспективных ВС происходит за счет внедрения бортовых беспроводных распределенных систем наблюдения и управления ресурсами и процессами, построенных с использованием низко энергозатратных технологий. Такие системы могут включать в себя десятки тысяч относительно близкорасположенных миниатюрных интеллектуальных узлов, соединенных в сеть, которые способны измерять и регулировать различные физические параметры, осуществлять предварительную обработку и передачу информации.

Системы, построенные на основе беспроводных сенсорных и управляющих сетей, предназначены для решения следующих задач на борту ВС:

- контроль технического состояния элементов ВС;
- контроль аутентичности элементов ВС;
- контроль доступа на борт ВС;
- контроль психофизиологического состояния экипажа и пассажиров;
- контроль микроклимата кабины экипажа и салона;
- контроль нагрузок на конструкцию и элементы ВС, груз, пассажиров и экипаж;
- контроль и управление обтеканием элементов ВС;
- управление распределенными исполнительными устройствами СУ ВС.

Технологическую основу таких систем составляют низко энергозатратные необслуживаемые и не требующие специальной установки датчики (вибрационные, инфракрасные, электрохимические, электро-механические, акустические, волоконно-оптические), актуаторы (микро- и наноэлектромеханические), генераторы (термоэлектрические, вибрационные, кинетические, тензочувствительные, электромагнитные), накопители электроэнергии (суперконденсаторы). Построение таких распределённых самоорганизующихся отказоустойчивых систем сбора, обработки и передачи большого объема информации, образующих «нервную» систему ВС, осуществляется с помощью различных технологий передачи данных с динамически перестраиваемой топологией и низким энергопотреблением.

Этот объем информации обрабатывается с использованием методов технологии BigData.

Техническая аутентификация

Автоматическая идентификация изделий

Решение проблемных вопросов обеспечения безопасной эксплуатации ВС, во многом, определяется получением достоверной информации о техническом состоянии парка ВС и его компонентах, и особенно, актуализации данной информации применительно ко времени принятия решения о продолжении эксплуатации. Важным условием успешного решения данной задачи является использование технологий автоматизированных информационных систем, включающих автоматизацию процедур сбора текущей информации для оценки аутентичности жизненного цикла компонентов ВС, организацию полностью безбумажной модели документооборота, полномасштабный удаленный контроль летной годности компонентов ВС и пр.

Решение видится в разработке и внедрении специальных электронных средств, которые могут быть размещены непосредственно на компоненте ВС и содержать основные данные для однозначной идентификации компонента, располагать возможностями для записи и хранения данных, формируемых в процессе его эксплуатации. Подобными средствами могут быть, например, радиочастотные метки. Функционирование таких средств обеспечивается соответствующим комплексом средств радиочастотной идентификации (RFID – Radio Frequency

Identification), включающего в себя необходимые аппаратные и программные составляющие.

Это технология, позволяющая передавать и получать информацию от идентифицируемых объектов по радиоканалу, не требующая наличия прямой видимости или физического контакта между считывателем и идентификатором. Благодаря наличию этих двух преимуществ перед другими технологиями, RFID постепенно вытесняет такие «отмирающие» технологии идентификации, как штрих-кодирование и магнитные карты. RFID-идентификаторы не только более удобны в применении, но и могут хранить в себе больше информации, позволяют использовать различные системы кодирования данных для защиты от копирования и фальсификации.

По принципу действия технологии RFID можно разделить на интерактивные (активные) и пассивные. Интерактивные системы имеют бортовой источник питания и характеризуются памятью большой емкости, что позволяет их многократно использовать. Пассивные системы не содержат источник питания (так как они получают мощность от антенны), ограничивают возможности чтения/записи и не предназначены для многократного использования.

Принципы применения радиочастотных меток предполагают их фиксацию на компонентах ВС и сопровождающей документации в рамках типовой схемы технологического процесса движения агрегатов ВС. В радиочастотные метки в автоматизированном режиме вводится закодированная информация о текущем состоянии компонентов ВС, они допускают ее чтение при процедурах контроля аутентичности агрегата и повторную перезапись. Дальнейшая обработка потоков поступающей информации, их систематизация, хранение в течение заданного времени, аналитическая обработка и формирование отчетов по запросам контролирующих органов обеспечивается применением современных технологий баз данных, средств анализа и телекоммуникаций.

Интеллектуальное взаимодействие в контуре пилот-ВС

Развитие бортового оборудования ВС неразрывно связано с расширением его функциональности. Это, с одной стороны, увеличивает объем информации, поступающей к пилоту, упрощает пилотирование

и способствует повышению уровня БП, а, с другой стороны, существенно увеличивает нагрузку на экипаж.

Ведущей тенденцией является переход к широкоформатным сенсорным дисплеям, позволяющим отображать информацию в наиболее приемлемом для пилота виде.

В вопросах интеллектуального взаимодействия в контуре пилот-ВС выделяются два аспекта:

- представление необходимой пилоту информации;
- управление информацией.

В вопросах представления информации ключевой проблемой является оптимальное представление разнородной информации, воспринимаемой с использованием слуховых, зрительных и осязательных рецепторов, с учетом психофизиологического состояния экипажа. Решение проблемы видится в интеллектуальном взаимодействии в контуре пилот-ВС, придании человеко-машинному интерфейсу новых свойств, основанных на интеграции ситуационной осведомленности и выработке рекомендаций на основе анализа множества факторов полета (рис. 4).



Рис. 4. Интеграция ситуационной осведомленности и рекомендаций

При управлении информационным полем все большее значение приобретают подходы, позволяющие адаптироваться к потребностям пилота, его психофизиологическому состоянию, особенностям выполняемой задачи (рис. 5).



Рис. 5. Пример управления информационным полем

Для управления могут быть использованы как традиционные органы управления, так и новые подходы, основанные на речевом управлении, глазодвигательной активности, тактильности.

Возможно применение систем виртуальной реальности, однако данные подходы должны быть оценены как на виртуальных стендах, так и опробованы в реальных условиях полета.

Выводы. Представленный материал не претендует на полноту осязания всех аспектов интеллектуализации, он лишь затрагивает ключевые проблемы, решение которых в области авиации позволит существенно снизить нагрузку на экипаж и повысить уровень БП.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федосов Е.А. Проект создания нового поколения интегрированной модульной авионики с открытой архитектурой // *Авиационные системы*. 2016. № 5. С. 24 – 29.
2. Федосов Е.А., Косьянчук В.В., Сельвесюк Н.И. Интегрированная модульная авионика // *Радиоэлектронные технологии*. 2015. № 1. С. 66–71.
3. Желтов С.Ю., Выголов О.В., Визильтер Ю.В. Авиационные системы улучшенного и синтезированного видения закабинного пространства // *Полет*. 2013. № 1. С. 33 – 39.
4. Федосов Е.А., Чуянов Г.А., Косьянчук В.В., Сельвесюк Н.И. Перспективный облик и технологии разработки комплексов бортового оборудования воздушных судов // *Полет*. 2013. № 8. С. 41 – 52.

5. *Чуянов Г.А., Косьянчук В.В., Сельвесюк Н.И.* Перспективы развития комплексов бортового оборудования на базе интегрированной модульной авионики // Известия ЮФУ. 2013. № 3. С. 55 – 62.

6. *Зыбин Е.Ю., Косьянчук В.В., Кульчак А.М.* Аналитическое решение задачи оптимальной реконфигурации системы управления летательного аппарата при отказе нескольких органов управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 7. С. 59– 66.

ПРИОРИТЕТНЫЕ ЗАДАЧИ ПОДВОДНОЙ РОБОТОТЕХНИКИ В ОБЛАСТИ МОРСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

Л.В. Киселев

(ФГБУН Институт проблем морских технологий ДВО РАН,
г. Владивосток, Россия)

E-mail: kiselev@marine.febras.ru

FOREGROUND TASKS OF UNDERWATER ROBOTICS IN THE FIELD OF MARINE GEODESY

L.V. Kiselev

(IMTP FED RAS)

Рассматриваются перспективы применения автономных подводных роботов для решения задач морской геодезии (batimетрии, магнитометрии, гравиметрии). Автономный подводный робот, представляющий собой хорошо стабилизированную платформу, дает новые дополнительные возможности для прецизионных измерений и картографирования локальных физических полей и их аномалий. Имеющиеся экспериментальные данные, позволяют оценить точность измерений с учетом навигационных и динамических ошибок. Полученные данные используются для исследования процедуры измерений путем покрытия локального поля сетью траекторий. С помощью компьютерной модели производится анализ результатов траекторных измерений и таким путем восстанавливается карта аномального поля. Для модельных процессов приводятся оценки точности картографирования и информативности рассматриваемой методики производства геодезических измерений и точности навигации по карте геофизического поля.

Ключевые слова: автономный подводный робот, морская геодезия, траекторные измерения, навигация по геофизическим полям.

Проблемы повышения эффективности геодезических измерений с использованием аэрокосмических, наземных и морских средств актуальны как для целей высокоточной навигации движущихся объектов, так и для изучения геологического строения Земли. Особое значение придается детальному исследованию аномальных полей в различных регионах

земной поверхности, в том числе в морских акваториях, представляющих интерес в геодезическом отношении. Исследование и картографирование физических полей океана относится к числу традиционных задач океанографии. Особое значение имеют задачи измерения характеристик полей с точной навигационной привязкой, трехмерной визуализации результатов съемки, батиметрии, магнитометрии и гравиметрии различных морских акваторий. Перспективы использования АНПА для производства геодезических измерений на море неоднократно служили предметом исследований и разработок в течение ряда предшествующих лет. Впервые эта тема была затронута в монографии [1] и касалась оценки преимуществ, которые могли бы быть реализованы с помощью АНПА. В дальнейшем аналогичные вопросы обсуждались в работах [2-8] и в работах зарубежных специалистов [9-11]. Применение автономных необитаемых подводных аппаратов-роботов (АНПА/АПР) для выполнения данного класса работ имеет ряд преимуществ, в особенности при выполнении комплексных измерений на больших глубинах и в экстремальных условиях среды. Показательными являются примеры построения батиметрической карты и карты поля температур, полученные с помощью АНПА «Клавесин-1Р» при обследовании участка хребта Ломоносова в Российской полярной экспедиции «Арктика-2007» (рис. 1). В ходе экспедиции производились батиметрические, гидрологические и другие измерения при следовании по заданному маршруту вблизи дна с привязкой измерений к географическим координатам с точностью, которую обеспечивают средства навигации АНПА.

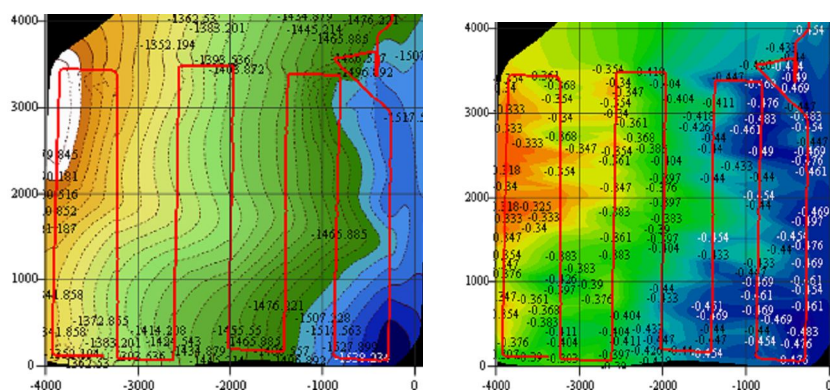


Рис. 1. Фрагменты построения батиметрической карты (слева) и карты поля температур (справа) при обследовании хребта Ломоносова в Арктике с использованием АНПА «Клавесин-1Р»

Большое значение имеет построение имитационной вычислительной модели, позволяющей выявить основные проблемы, связанные с картографированием полей. Основной процесс модельного сценария работы подводного аппарата состоит в восстановлении карты поля по сети дискретных измерений, полученных путем покрытия области сетью прямолинейных траекторий (галсов). По данным измерений в узлах неравномерной сетки производится интерполяция с шагом, зависящим от величины градиента поля в узловых точках. На основе полученных данных строятся изолинии с заданными значениями уровня поля. Одновременно осуществляется навигационная привязка измерений с использованием численных координат.

В работе рассматриваются различные примеры, сценарии съемки и восстановления трехмерной картины рельефа дна и представления фрагментов батиметрических и гравиметрических карт для выделенных участков морского дна. Заключительная процедура модельного процесса состоит в оконтуривании области, имеющей характерные свойства. В качестве границы этой области принимается замкнутая изолиния с заданным значением уровня восстановленного поля. В модельном эксперименте рассматриваются два варианта движения: покрытие области прямолинейными галсами по равномерно распределенным координатам и движение с регулированием курса при отслеживании изолинии

Разнообразные применения АНПА для решения поисковых и исследовательских задач, топографической съемки и картографирования дна, мониторинга водной среды могут быть рассмотрены с общих позиций. Так, например, задача выбора трассы в условиях сложного рельефа дна является частным случаем более общей задачи траекторного обследования поля рельефа и ориентирования по батиметрической карте. Аналогичная задача возникает при организации траекторного обследования полей, обладающих характерными свойствами: изменчивостью, аномальным уровнем, наличием корреляции в геометрии поля и т.п.

Практический интерес представляют следующие взаимосвязанные задачи.

Задача 1 заключается в восстановлении карты поля путем покрытия заданной области сетью траекторий и измерения параметров поля с привязкой к навигационным данным. Как правило, управление сводит-

ся к заданию и коррекции курсовой программы $\varphi_{k+1} = \varphi_k + \Delta\varphi_k$ в характерных точках траектории

$$\{X_k, Z_k\} \leftrightarrow \{\xi = \xi_{\max}, \xi = \xi_{\min}, |\Delta\xi| = |\Delta\xi|_{\max}\}.$$

Задача 2 состоит в организации поисковых движений с целью обнаружения и оконтуривания аномалии по уровню $\xi(t)$ и изменчивости $|\Delta\xi(t)|$ сигнала измерителя поля при маскирующем влиянии внешних помех. Поиск координат с характерными (в частности, экстремальными) значениями параметров поля необходим для определения ориентиров целенаправленного движения. Процедура поиска может быть организована на основе ортогонального или градиентного спуска с ориентированием на выбранную цель, в частности источник аномалии. Накопление данных об экстремальных значениях поля позволяет наметить аномальную или фоновую границу.

Задача 3 связана с отслеживанием заданной изолинии $\xi = \text{const}$ ($\nabla\nabla\xi = 0$), определяющей границу аномалии. Движение организуется путем ориентирования вектора скорости в соответствие с «кривизной» изменения поля по величине $\nabla\xi_x/\nabla\xi_z$.

В общем случае указанные задачи могут быть объединены одним общим сценарием. Покрытие заданной области сетью траекторий (галсов) осуществляется с помощью жестких или корректируемых программ со стабилизацией скорости, курса, глубины (или расстояния до дна). Параметры движения должны соответствовать характеристикам изменчивости поля вдоль траекторий. Точность и подробность восстановления карты поля зависят от многих факторов, в том числе и от динамических свойств аппарата при осуществлении поисковых траекторий.

Отмеченный выше сценарий поисковой программы исследовался на имитационной модели с помощью пакета MATLAB Simulink со следующими инструментами:

DEE toolbox (решатель систем дифференциальных уравнений);

State Flow (инструмент для событийного описания функционирования систем);

Real TimeWork Shop Embedded Code (использование встроенного кода в модели).

Функциональная схема имитационной вычислительной модели, реализованной средствами пакета, представлена на рис. 2.

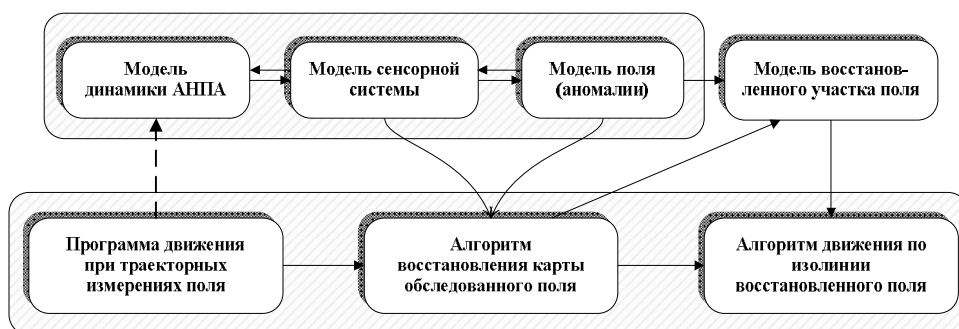


Рис. 2. Функциональная схема имитационной вычислительной модели

В общем случае сценарий поисковой программной миссии включает следующие процессы:

выход в область с заданным уровнем поля с помощью ортогональных траекторий и курсовой коррекцией по изменению знака градиента поля;

покрытие найденной области сетью прямолинейных траекторий (галсов) типа «меандр» с измерением параметров поля и привязкой их к навигационным данным для последующего восстановлению карты поля;

осуществление поисковых движений методом ортогонального спуска для определения вероятного положения точки экстремума;

отслеживанием заданной изолинии, определяющей границу аномалии, путем ориентирования вектора скорости в соответствие с «кривизной» изменения поля или движением по счисленным координатам, соответствующим заданному уровню поля.

Основной процесс сценария состоит в восстановлении карты поля по сети дискретных измерений, полученных путем покрытия области сетью прямолинейных траекторий (галсов). По данным измерений в узлах неравномерной сетки производится интерполяция с шагом, зависящим от величины градиента поля в узловых точках. На основе полученных данных строятся изолинии с заданными значениями уровня поля (рис. 3).

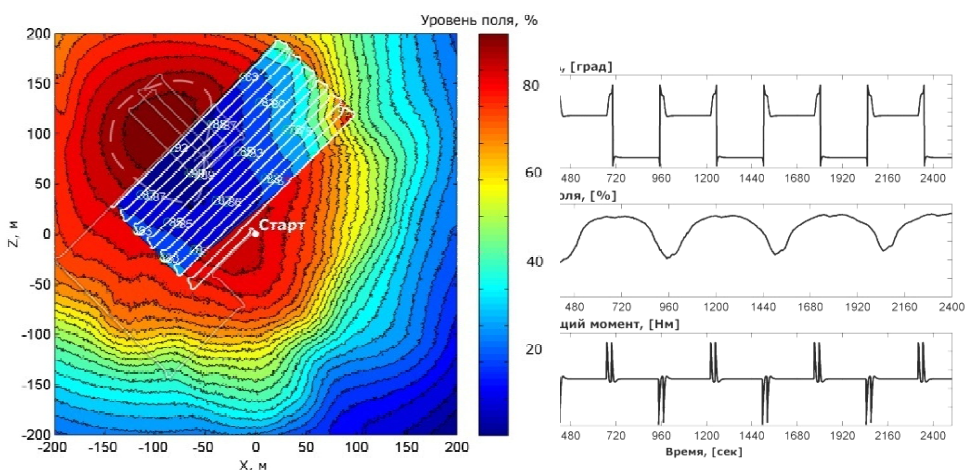


Рис. 3. Фрагмент восстановления карты поля и параметры движения «меандром»

Одновременно осуществляется навигационная привязка измерений с использованием численных координат. В данном примере ширина покрытия составляла 250 м, длина галса 100 м, расстояние между галсами 10 м.

Задача батиметрии

Рассмотрим в качестве практического примера траекторного обследования поля с помощью АНПА задачу организации батиметрических измерений с управлением по рельефу дна. Представим рельеф дна полем, характеризующим глубину моря $H_m(X, Z)$ и, соответственно, изобаты $H_m(X, Z) = \text{const}$. Имеет место очевидное равенство: $H_m(X, Z) = H(X, Z) + h(X, Z)$, где $H(X, Z)$ – рабочая глубина аппарата, $h(X, Z)$ – высота над грунтом.

Практический интерес представляют два варианта построения батиметрической модели:

- восстановление карты поля путем траекторных измерений при неизвестном рельефе дна,
- организация движения АНПА по характерным элементам (изолиниям или аномальным точкам) поля при известной (или восстановленной) карте поля рельефа дна.

В первом случае задача состоит в построении трехмерной картины рельефа дна и разбиении ее на участки для покрытия их сетью траекто-

рий с целью восстановления батиметрической карты. На рис. 4 приведен пример такой модельной картины, масштаб которой выбран произвольно исходя из общих представлений о неоднородном характере рельефа дна. На изображении выделен участок рельефа, покрытый сетью траекторий в виде «циклоиды» с постоянным смещением в заданном направлении вдоль обследуемого участка рельефа дна. На рисунке показаны точки, в которых с периодом 20 с производились измерения глубины погружения аппарата и дальномерные измерения при скорости движения аппарата, равной 1 м/с.

Сканирование выделенного участка рельефа дна путем покрытия его сетью траекторий дает необходимую информацию для восстановления трехмерной модели рельефа этого участка с разными ракурсами и построения соответствующего фрагмента батиметрической карты (рис. 4).

Далее в задачу входит анализ полученной картины, выделение на ней характерных особенностей и организация движения по изобатам, например, с целью оконтуривания тех или иных аномальных областей. Для этого могут быть рассмотрены и другие участки рельефа, которые могут иметь какие-либо неоднородности или аномалии. На рис. 5 приведен пример траекторного сканирования одного из участков дна, изображенного на рис. 4 и имеющего некоторые особенности, отличные от рассмотренного выше. Сканирование дна производилось путем покрытия области траекторией типа «меандр».

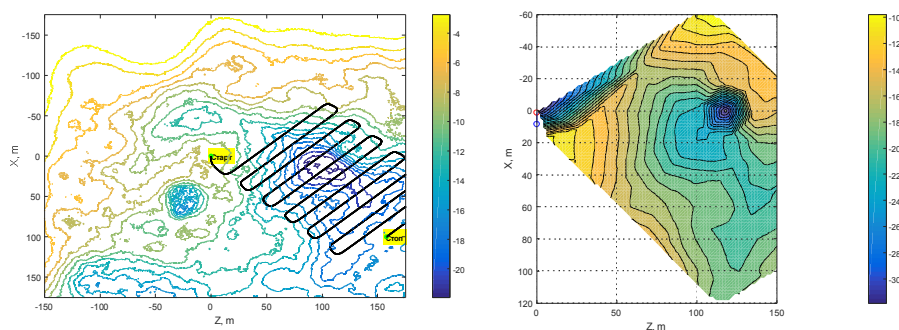


Рис. 4. Траекторное сканирование участка рельефа дна «меандро» и фрагменты его трехмерного восстановления и представления в виде батиметрической карты

Следующий этап вычислительной процедуры заключался в оконтуривании характерной особенности рельефа при движении по заданной изобате [5,6]. На рис. 5 приведен пример выбора маршрута АНПА при движении по изобате 20 м, оконтуривающей область с максимальным значением глубины моря в акватории. Особенностью данной изобаты является то, что она проходит через районы с разным уровнем градиента рельефа дна. Движение по изобате организуется путем задания «трубки», ширина которой изменяется в зависимости от величины градиента. На рис. 5 показаны точки, по которым должен перемещаться аппарат в «трубке», планируя свой маршрут в зависимости от ширины «трубки», т.е. величины градиента рельефа дна. При достаточно большом градиенте и малой ширине «трубки» точки маршрута распределены равномерно вдоль изобаты. При увеличении ширины «трубки» (уменьшении градиента) точки маршрута распределяются неравномерно, и осуществляется движение по изобате «в среднем».

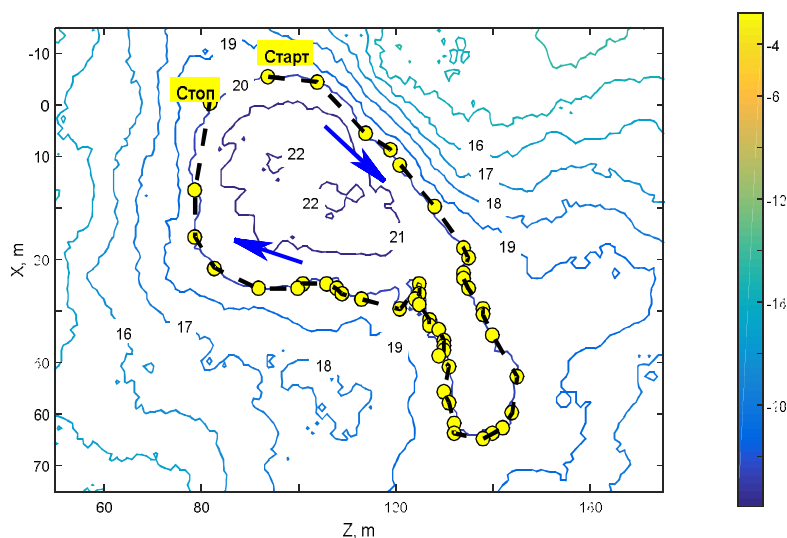


Рис. 5. Оконтуривающей характерную область рельефа дна при движении по изобате

Задачи гравиметрии

Морские гравиметрические измерения осуществляются с надводных судов, подводных лодок и донных станций с помощью сильно

демпфированных гравиметров. Одно из основных требований к измерениям состоит в обеспечении минимума возмущающих и инерционных ускорений, которым подвержено основание гравиметра. «Вредные» ускорения у надводных судов могут составлять десятки Гал (1 Гал = 1 см/с²) при частоте волновой качки примерно 0,1...0,3 с⁻¹. При проведении измерений с подводной лодки морское волнение оказывает меньшее влияние, но остаются динамические возмущения самого носителя.

Идея использования для морской гравиметрии и геодезии автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА) возникла на самых ранних этапах их создания. Первый в нашей стране АНПА «Скат-гео» (1976 г.) предназначался для решения именно таких задач. В дальнейшем в ИПМТ ДВО РАН был создан АНПА «Комплекс-АН» (1988 г.), при проектировании которого ставилась основная задача обеспечения гравиметрических измерений в Арктическом бассейне. В процессе испытаний модернизированного аппарата (АНПА «Тифлонус») проводились экспериментальные гравиметрические измерения с помощью серийного прибора, разработанного в ЦНИИ «Дельфин».

Каковы преимущества АНПА для гравиметрических измерений? В методическом отношении измерения с борта АНПА не представляют особенностей. Очевидные преимущества АНПА состоят в значительном снижении ускорений по сравнению с судовыми условиями. Автономный подводный аппарат является хорошо стабилизированной платформой, компенсирующей действие внешних возмущений. Аппарат, уравновешенный по плавучести, эквивалентен поплавковому гироскопу. Например, на глубине 100 м измерения вертикальных ускорений с АНПА составляют не более 50 мГал. Это в 1000 с лишним раз меньше, чем величина ускорений при бортовой качке судна. Подобный факт был практически подтвержден результатами измерений спектра ускорений, полученных с помощью АНПА «Тифлонус» при работе на глубине погружения 70 м.

В принципе, задачи гравиметрических измерений и измерений положения с помощью инерциальных навигационных систем (ИНС) отражают две стороны одного общего явления. В его основе лежит обработка сигнала трехмерного акселерометра со значением, определенным в инерциальном пространстве.

Основное соотношение гравиметрии может быть выражено в виде уравнения, связывающего задачи гравиметрии и инерциальной навигации. Это уравнение содержит функцию коррекции показаний гравиметра, выраженную через географические координаты и отклонения от нормального уровня моря, их скорости и ускорения. Задача заключается в выборе функции коррекции, позволяющей разделить информацию гравиметрическую и навигационную. Поскольку полезный сигнал и помеха в виде внешних ускорений отличаются по частоте, могут быть использованы стандартные методы фильтрации или комплексирование доступной информации.

Остановимся на задачах, связанных с оцениванием функциональных и параметрических характеристик АНПА, удовлетворяющих требованиям гравиметрии.

Первая задача относится к построению модели локального гравитационного поля, позволяющей оценить точностные параметры измерений с борта АНПА с учетом навигационных и динамических ошибок при покрытии заданного района сетью траекторий с последующим восстановлением карты поля по результатам измерений.

Другая задача состоит в оценке влияния параметров измерений аномального гравитационного поля на точность результирующей карты поля. К таким параметрам относятся:

- параметры модели поля, принятой при решении первой задачи;
- точностные характеристики интегрированной навигационной системы, включающей инерциальную навигационную систему и гидроакустическую систему навигации АНПА;
- параметры движения АНПА при гравиметрической съемке путем покрытия области сетью траекторий.

Необходимым этапом является идентификация параметров модели поля, которая может быть проведена, например, методами адаптивной нелинейной фильтрации.

Рассмотрим модель сечения локального гравитационного поля $g(x, y)$ в виде модельной карты в системе координат, связанной с навигационным комплексом АНПА. Поле зададим изолиниями, характеризующими отклонения (аномалию) величины g от некоторого опорного значения в заданной области обследования. Пример построения такой карты показан на рис. 6.

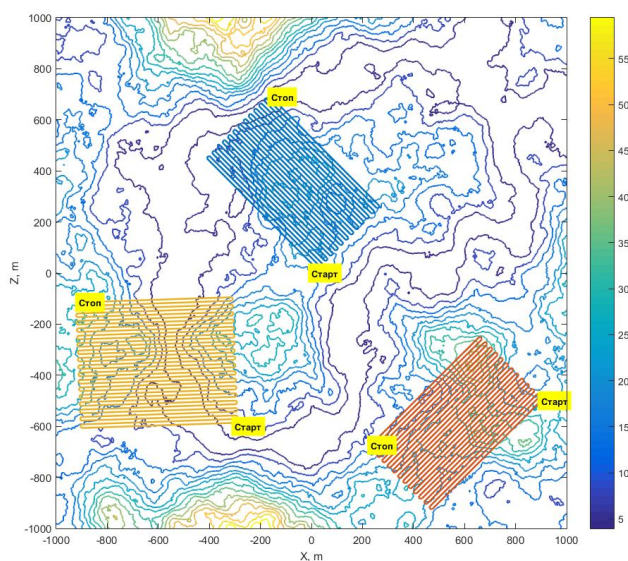


Рис. 6. Модель карты гравитационного поля.
Характер изолиний поля соответствует цветовой шкале в мГал.

На карте размером 2000×2000 м. выделены три участка, для исследования которых осуществлялась программа движения ортогональными галсами 700 м и 20 м при скорости 1 м/с. (программа «меандр»). Траектории, ориентированные в соответствии с выделенными участками поля, строились с учетом собственной динамики АНПА в режимах стабилизации глубины и курса. Параметры программы в данном представлении являются постоянными, но в общем случае предусматривается их адаптивная настройка в зависимости от градиента изменения поля. При обработке цифровых данных учитывались случайные ошибки интегрированной навигационной системы и ошибки измерений, представленные нормальными распределениями с СКО, равными соответственно 5 м. и 3 мГал. Полученные в цифровом виде данные далее используются для восстановления карты поля с помощью скриптов матричных преобразований и функций интерполяции для 2D и 3D-изображений. На рис. 7 приведен фрагмент восстановления карты и его 3D-представление, соответствующий одному из выделенных участков рис. 6. Величина среднеквадратического отклонения ошибки восста-

новления карты, соответствующего выделенным трем участкам рис. 6, в среднем составила 2,35 мГал.

Построенная выше карта поля аномалий силы тяжести вместе с вычисленным уровнем ошибок картографии, моделью измерений и моделью ошибок инерциальной навигационной системы позволяет получить оценку точности коррекции навигационных ошибок с помощью решения задачи корреляционно-экстремальной навигации по геофизическому полю. Рассматривается случай коррекции ошибок по положению движущегося объекта. Оценку точности коррекции (информативности поля) можно получить методом статистического имитационного моделирования процессов, включающих многократное формирование последовательности измерений и их привязку к эталонному изображению поля. Сотрудниками ИММ УрО РАН было проведено моделирование по карте, изображенной на рис. 6 для прямолинейных трасс длиной 1 км, направленных вдоль оси X. Величина СКО ошибки статистического оценивания координат точки старта составила 30 м. По методике [12] была также получена теоретическая приближенная граница точности оценивания. Эта методика опирается на усредненные оценки модуля градиента поля и априорные сведения о статистических характеристиках ошибок измерения значений поля и ошибок картографирования. При условии нормальности и независимости ошибок измерений эти оценки совпадают с нижней границей точности из неравенства Рао-Крамера [13]. В результате проведенных вычислений теоретическая нижняя граница точности оценивания (СКО ошибки) составила 25 м.

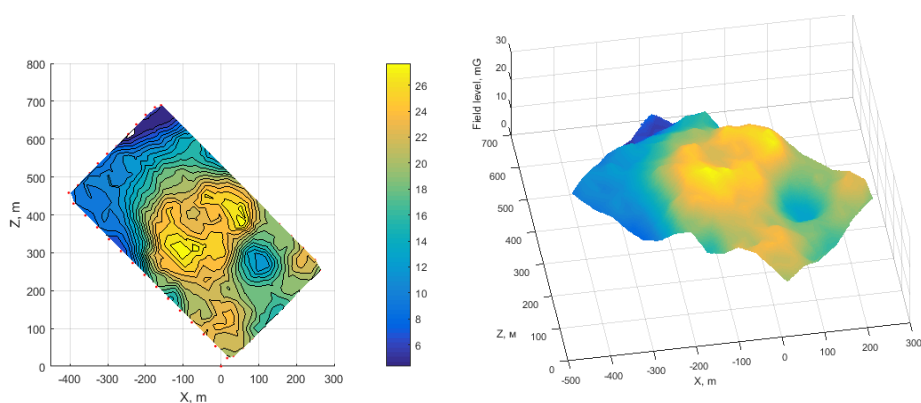


Рис. 3. Восстановленный участок карты поля (участок 1) и его 3D-представление

В заключение данного раздела можно отметить, что автономный подводный робот как хорошо стабилизированная платформа позволяет производить морские гравитационные измерения с точностью порядка единиц мГал и точностью навигационной привязки порядка единиц метров. При этом компьютерное моделирование гравиметрических процедур с использованием динамической модели подводного робота дает результаты, согласующиеся с данными экспериментальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агеев М.Д., Касаткин Б.А., Киселев Л.В., Молоков Ю.Г., Никифоров В.В., Рылов Н.И. Автоматические подводные аппараты. Л.: Судостроение, 1981, 223 с.
2. Агеев М.Д., Киселев Л.В., Матвиенко Ю.В. и др. Автономные подводные роботы. Системы и технологии / под общей ред. М.Д. Агеева. М.: Наука, 2005. 400 с.
3. Агеев М.Д. Автономный подводный аппарат – идеальная прецизионная платформа для подводных гравиметрических измерений // Подводные исследования и робототехника. 2009. № 1 (7). С. 4-8.
4. Ageev M.D. AUV-a precise platform for underwater gravity measurement//Proc.of IEEE OCEANS '94. V.1. Brest, 1994.
5. Киселев Л.В. Управление движением автономного подводного робота при тракторном обследовании физических полей океана // Автоматика и телемеханика, №4, 2009. С. 141-148.
6. Киселев Л.В., Медведев А.В. Модели динамики и алгоритмы управления движением автономного подводного робота при тракторном обследовании аномальных физических полей // Подводные исследования и робототехника, №1(11), 2011. С. 24-31.
7. Киселев Л.В. Код глубины / Владивосток. Дальнаука. 2011. 331 с.
8. Железняк Л.К., Конешов В.Н. Изучение гравитационного поля Мирового океана//Вестник РАН, 2007, т. 77, № 5.
9. Zumberge M.A., Hildebrand J.A., Stevenson J.M. Submarine measurements of the Newtonian gravitational constant // Physical review letters. 1991. V. 67. № 22.
10. James C. Kinsey, Maurice A. Tivey and Dana R. Yoerger. Toward High-Spatial Resolution Gravity Surveying of the Mid-Ocean Ridges with

Autonomous Underwater Vehicles. WHOI Deep Ocean Exploration Institute and a WHOI Green Innovation Technology Award. 2009.

11. *Zumberge M.A., Sasagawa G., Zimmerman R., Ridgway J.* Autonomous Underwater Vehicles Borne Gravity Meter. Patent Application Pub.No.: US 2010/0153050 A1, Jun.17, 2010.

12. *Аверин В.А., Костоусов В.Б.* Новый метод оценки информативности геофизического поля //Материалы XXVIII конференции памяти Н.Н.Острякова. – СПб.-ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2012. С. 47.

13. *Степанов О.А., Торопов А.Б.* Методы нелинейной фильтрации в задаче навигации по геофизическим полям. Ч.1. Обзор алгоритмов//Гироскопия и навигация, 2015, №3(90). С.102-125.

ПРИНЦИПЫ ДИНАМИКИ И СЕРВОСВЯЗИ

В.В. Козлов

(РАН, Москва, Россия,) E-mail: kozlov@pran.ru

PRINCIPLES OF DYNAMICS AND SERVOCONSTRAINTS

V.V. Kozlov

(RAS, Moscow, Russian Federation)

Доклад посвящён кругу вопросов, связанных с описанием динамики систем с сервосвязями. Автор разделяет сервосвязи на три типа. К первому типу относятся сервосвязи (открытые Бегеном), которые реализуются посредством подходящим образом выбираемых силовых воздействий. Сервосвязи второго типа реализуются при помощи изменения инерционных свойств системы. Третий (смешанный) тип составляют сервосвязи, реализуемые одновременно с помощью управления внешними силами и инерционными характеристиками системы.

Развивается аналитическая динамика систем с сервосвязями всех типов: даются определения возможных перемещений, формулируется принцип освобождаемости, а также вариационные принципы Даламбера-Лагранжа и Гаусса.

Обсуждается динамика систем с сервосвязями указанных трёх типов. Особое внимание уделено случаю, когда конфигурационное пространство системы является группой Ли, а кинетическая энергия и сервосвязи инвариантны при левых сдвигах на этой группе. Результаты общего характера проиллюстрированы конкретными примерами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беген П.* Теория гироскопических компасов Аншютса и Сперри и общая теория систем с сервосвязями. М.: Наука. 1967.
2. *Козлов В.В.* Принципы динамики и сервосвязи. // Вести. Моск. Университета. Сер.1. Математика. Механика. 1989. №5. С.59-66.
3. *Kozlov V.V.* The Dynamics of Systems with Servoconstraints. 1, II // Reg. and Chaotic Dyn. 2015. Vol. 20. № 3. P.P. 205-224; 2015. Vol. 20. № 4. Pp. 401-427.

ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕННЫМИ КООРДИНАТАМИ И УПРАВЛЕНИЯМИ

В.Н. Козлов

(СПбПУ, Россия, 195251, Санкт-Петербург,

Политехническая ул. д. 29)

E-mail: saiu@ftk.spbstu.ru

PROJECTIVE METHOD FOR SYNTHESIS OF OPTIMAL SYSTEMS WITH RESTRICTED COORDINATES AND CONTROL ACTIONS

Vladimir N. Kozlov

(Peter the great St. Petersburg Polytechnic University, Politechnicheskaja str., 29, 195251, St-Petersburg)

Keywords: projective method, stability, nonlinear control synthesis

Введение. Синтезированы управления и приведены условия устойчивости разностных операторов нелинейных динамических систем с управлениями на основе методов математического программирования [1-2]. Локально допустимые (ЛДУ) и оптимальные (ЛОУ) управления представлены операторами допустимых решений (ОДР) и конечномерной оптимизации (ОКО), задающими обратные связи с учетом смешанных ограничений, дополняющих результаты [3].

Постановки задач. Рассматриваются системы, управляемые на основе проекционных ОДР или ОКО, учитывающие целевые векторы, модели объектов и ограничения на переменные. Требуется исследовать устойчивость на основе сжатия операторов систем ЛДУ и ЛОУ [4, 8].

Проекционные операторы конечномерной оптимизации. Операторы заданы проекторами на пересечение линейного многообразия и шара, учитывающего смешанные ограничения на основе «принципа граничных экстремумов» [5 – 8]. На основе этого принципа определены формы, инварианты и параметры ОДР и ОКО для минимизации линейных и квад-

ратичных функционалов, преобразующие целевые векторы в оптимальные решения на «сужении» в виде отрезка допустимой области.

Определение. Проекционные ОКО для задач: вычислить векторы

$$X_* = \Phi(p_\varphi, p_D) = \arg \min \{ \varphi(X) \mid X \in D = D^0 \cap D^1 \subset \mathbb{R}^n \} \in \mathbb{R}^n,$$

$$X^* = \Phi(p_\varphi, p_D) = \arg \max \{ \varphi(X) \mid X \in D = D^0 \cap D^1 \subset \mathbb{R}^n \} \in \mathbb{R}^n,$$

действующие из пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, отображают целевой вектор $C \in \mathbb{R}^n$ линейного функционала $\varphi(X) = C^T X$ в оптимальные решения $X_* \in D$ или $X^* \in D$ на непустом пересечении линейного многообразия $D^0 \in \mathbb{R}^n$ и шара $D^1 \subset \mathbb{R}^n$ с учетом параметров p_D – множества D .

Утверждение 1. Пусть невырожденные задачи условной минимизации линейных функционалов определены выше. Тогда для оптимальности решений необходимо и достаточно, чтобы ОКО имели вид

$$\begin{aligned} X_*(\lambda_*) &= \arg \min \{ \varphi(X) = C^T X \mid AX = b, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \text{rang } A = m, X^T X \leq r^2 \} = \\ &= P_A b - 0,5 \bar{P}^0 C \alpha^{1/2} \in D \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^*(\lambda^*) &= \arg \max \{ \varphi(X) = C^T X \mid AX = b, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \text{rang } A = m, X^T X \leq r^2 \} = \\ &= P_A b + 0,5 \bar{P}^0 C \alpha^{1/2} \in D \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^0 &= E_n - P_A A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \bar{P}^0 = P^0 \|P^0\|^{-1}, \quad P_A = A^T (A A^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ \text{rang } A^T c &= m + 1. \end{aligned}$$

Множители Лагранжа $\lambda_* = +(\rho/\alpha)^{1/2}$, $\lambda^* = -(\rho/\alpha)^{1/2}$ – следуют из уравнения: $\alpha \lambda^2 + \rho = 0$, $\alpha = 4 \left[b^T (A A^T)^{-1} b - r^2 \right]$, $\rho = C^T P^0 C$, а совместность ограничений определена неравенством $\alpha \geq 0$.

Следствие. Оператор допустимых решений на основе операторов утверждения 1 имеет вид:

$$\bar{X} = \theta X_*(\lambda_*) + (1 - \theta) X^*(\lambda^*), \quad \theta \in [0, 1].$$

Операторы классической минимизации нормы определены далее.

Определение классических ОКО. Операторы минимизации или максимизации функционала типа нормы – это проекционные операторы в евклидовом пространстве, задающие решения задач: вычислить векторы

$$X_* = \operatorname{argmin} \left\{ \varphi(X) = \|X - C\|^2 \mid AX = b, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \operatorname{rang} A = m, X^T X = r^2 \right\} \in \mathbb{R}^n,$$

$$X^* = \operatorname{argmax} \left\{ \varphi(X) = \|X - C\|^2 \mid AX = b, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \operatorname{rang} A = m, X^T X = r^2 \right\} \in \mathbb{R}^n,$$

Отображающие $C \in \mathbb{R}^n$ в оптимальные решения на допустимом множестве.

Соответствующие ОДР определены в утверждении.

Утверждение 2. Пусть ОДР формулированы на основе классических решений задач минимизации X_* и максимизации X^* нормы. Тогда справедливы утверждения:

1) Векторы ОДР $\bar{X}_i = X_{i*}(-1 + \sigma)$, $i = 1, 2, 3$, на пересечение многообразия и сферы имеют три эквивалентные формы

$$\bar{X}_i = \theta X_{i*}(-1 + \sigma) + (1 - \theta) X_i^*(-1 - \sigma), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\begin{aligned} X_{1*}(-1 + \sigma) &= P^0(C)\sigma + P_A b(1 - \sigma), & X_1^*(-1 - \sigma) &= -P^0(C)\sigma + P_A b(1 + \sigma), \\ X_{2*}(-1 + \sigma) &= P^0(C) + P^0 C(-1 + \sigma), & X_2^*(-1 - \sigma) &= P^0(C) + P^0 C(-1 - \sigma), \\ X_{3*}(-1 + \sigma) &= P_A b + P^0 C\sigma, & X_3^*(-1 - \sigma) &= P_A b - P^0 C\sigma. \end{aligned}$$

2) Вектор, задающий ОДР, равный:

$$\bar{X}_3(\theta) = \theta X_{3*} + (1 - \theta) X_3^*, \quad \theta \in [0, 1],$$

где $X_{3*} = P_A b + P^0 C\eta$, $X_3^* = P_A b - P^0 C\eta$, $\eta^{-1} = \sigma = \rho^{1/2} \alpha^{-1/2}$, отображает векторы пространства на «сужение» выпуклой допустимой области.

3) Квадратное уравнение: $\alpha \lambda^2 + 2\alpha \lambda + (\alpha - \rho) = 0$, где $\alpha = r^2 - b^T (AA^T)^{-1} b$, $\rho = C^T P^0 C \neq 0$, определяет параметры оптималь-

ности ОКО – множители Лагранжа: $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sigma$, $\sigma = (\rho/\alpha)^{1/2}$, как *инварианты* для трех форм ОДР.

4) Ограничения задач совместны при условии $\alpha = r^2 - b^T (AA^T)^{-1} b \geq 0$.

Утверждение 3 об ОКО для неклассической задачи. Пусть задача минимизации корректна и справедливо утверждение:

1) Тогда для неклассической задачи оператор минимизации нормы имеет вид

$$X_* = (1 - \theta_*) X_{3*} + \theta_* X_3^* = P_A b + (1 - 2\theta_*) P^0 C \eta, \quad \eta = (\alpha/\rho)^{1/2} = \sigma^{-1},$$

где $X_{3*} = P_A b + P^0 C \eta$, $X_3^* = P_A b - P^0 C \eta$ – граничные экстремальные векторы;

параметр $\theta_* = p(\theta_0) = 0,5(|\theta_0| - |\theta_0 - 1| + 1) \in [0, 1]$, $\theta_0 = 0,5(1 - \eta^{-1})$, задан на основе

$$\theta_0 = 0,5(1 - \eta^{-1}), \quad \eta^{-1} = \sigma = (\rho/\alpha)^{1/2}, \quad \alpha = r^2 - b^T (AA^T)^{-1} b > 0, \quad \rho = C^T P^0 C.$$

Устойчивость нелинейных операторов систем ЛДУ. Пусть нелинейный разностный оператор систем ЛДУ имеет вид

$$x_{k+1} = \bar{H} x_k + \gamma F_u T \bar{\theta} P^0 C \eta_k \in \mathbb{R}^n, \quad y_k = c x_k \in \mathbb{R}^{n_y}, \quad x_{k0} = x^0, \quad (1.a)$$

где параметр $\bar{\theta} = 1 - 2\theta$, $\theta \in [0, 1]$. В силу утверждения 2 вектор ЛДУ равен

$$\begin{aligned} u_{k*} &= \gamma T \arg \min \left\{ \varphi = \|z_k - C\|_2^2, \quad z_k = (y_{k+1} | u_k) \middle| Az_k = b_k = c H x_k, \quad \|z_k\|_2^2 \leq r^2 \right\} = \\ &= \gamma T (P_A b_k + \bar{\theta} T P^0 C \eta_k), \quad T = (0_{n_y \times n_u} | E_{n_u \times n_u}), \quad \eta_k = \left(r^2 - \|P_A c H x_k\|_2^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Условия устойчивости системы ЛДУ со смешанными ограничениями на координаты выхода и управления даны ниже [8, 9].

Утверждение 4 об устойчивости систем ЛДУ. Пусть выполнены условия:

1) Оператор (1) имеет управляемую по Р. Калману пару $(\bar{H}, F_u)$.

2) Параметр $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ определяет линейный устойчивый оператор линейной подсистемы с минимально-фазовым объектом и линейным проекционным управлением: $\bar{H} = (E_n + \gamma_1 F_u T P_A c) H$, $\|H\| < 1$, для которого выполнены условия устойчивости запасом в виде $\|\Delta H\| = 1 - \|\bar{H}\|$ [3].

3) Нелинейная часть управления $u_{k*} = \gamma T \tilde{\theta} P^0 C \eta_k$ в (1.б) учитывает ограничения на координаты и управления.

4) Оператор (1.а), (1.б) имеет единственную стационарную точку.

5) Справедливы оценки инвариантного множества в виде шара радиуса r_1 с центром в нуле:

$$S(0, r_1), \quad r_1 = r \left(\|c\| \cdot \|H\| \cdot \|\bar{A}\| \right)^{-1}, \quad (2)$$

где $\|P^0 C_0\| = 1$, $\|T\| = 1$. 6) Условие $\theta \in [0, 1]$ обеспечивается проектором

$$p_1(\theta) = 0, 5 \left(|\theta| - |\theta - 1| - 1 \right) \in [0, 1] \in \mathbb{R}, \quad |p_1(a) - p_1(b)| \leq L_1 |a - b|, \quad L_1 \leq 1. \quad (3)$$

6) Кусочно-линейный проектор p_2 с постоянной Липшица $L_2 = 1$, который обеспечивает корректность счетных условий совместности ограничений $\alpha_k = r^2 - p_2 \left(\|P_A c H x_k\|^2 \right) \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$, имеет вид

$$p_2(q_k) = 0, 5 \left(|q_k^T q_k - \varepsilon^2| - |q_k^T q_k - (r - \varepsilon)^2| + \varepsilon^2 + (r - \varepsilon)^2 \right) \in [\varepsilon^2, (r - \varepsilon)^2] \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Тогда, если выполнено ограничение на параметр обратной связи

$$|\gamma| < \left[1 - \|\bar{H}(\gamma)\| \right] \times \left[\|F_u\| \cdot \|P_A\| \cdot \|c\| \cdot \|H\| L_0 L_1 L_2 \left(1 + 2L |\tilde{\theta}| r \right) \right]^{-1}, \quad (5)$$

то оператор (1.а), (1.б), (3), (4) является устойчивым в шаре (2) как в инвариантном множестве, содержащем векторы x_{k0}, x_k, x_* , $C \in S(0_n, r_1)$. Здесь и далее использованы спектральные нормы матричных операторов.

Утверждение 5 об устойчивости линейного оператора системы ЛОУ. Пусть выполнены условия:

1) Уравнения возмущенного движения линейной системы ЛОУ по состоянию представлены оператором (1.а), где матрицы

$$H = \begin{bmatrix} 0_{(n_x-1) \times 1} & E_{(n_x-1) \times (n_x-1)} \\ p_1 & \dots & \dots & p_n \end{bmatrix}, \quad F_u = \begin{bmatrix} 0_{(n_x-1) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix},$$

соответствуют фробениусовой форме, а целевые программные управления определены оператором, следующим из (1.6) при условии $C = 0_{(n_x+1)}$.

2) Пара матриц (H, F_u) – управляема, т. е. выполнен ранговый критерий Р. Калмана для объекта $\text{rang}(H^{n-1}F_u | H^{n-2}F_u | \dots | HF_u | F_u) = n = \dim \mathbb{R}^{n_x}$.

3) Локальный функционал для скалярных управлений определен равенством $\Phi = \|x_{k+1}\|^2 + \|u_k\|^2$.

4) Характеристический полином

$$\chi(\lambda) = \det(\lambda E_n - H) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \dots + p_i \lambda^{n-i} + \dots + p_n, \quad (6)$$

соответствует фробениусовой форме матрицы объекта.

5) Скалярное управление, следующее из (1.6) для линейных уравнений, равно

$$u_{k*} = \gamma_0 T_u z_{k*} = \gamma_0 T_u P_A H x_k \in \mathbb{R}^1, \quad P_A = A^T (A A^T)^{-1}. \quad (7)$$

Тогда имеют место утверждения, обобщающие результаты [7]:

1) Динамика линейной замкнутой системы ЛОУ описывается разностными линейными уравнениями с числовыми матрицами

$$x_{k+1} = \bar{H} x_k, \quad \bar{H} = (E_n + \gamma_0 F_u T_u P_A) H, \quad x_{k_0} = x^0, \quad (8)$$

определенными в (1.a), (1.6), где оператор системы задан матрицей, имеющей структуру

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} & E_{n-1} \\ \rho p_1 & \dots & \dots & \rho p_n \end{bmatrix}.$$

2) При условии $n \geq 2$ линейный оператор ЛОУ в утверждении 4 равен

$$u_{k*} = \gamma_0 T_u P_A H x_k, \quad T_u = \begin{bmatrix} 0_{1 \times n_x} & 1 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где матрица оператора определена равенством

$$P_A = \begin{bmatrix} E_{(n_x-1) \times (n_x-1)} & 0_{(n_x-1) \times 1} \\ 0_{1 \times (n_x-1)}^T & 0,5 \\ 0_{1 \times (n_x-1)}^T & -0,5 \end{bmatrix}.$$

3) Характеристическое уравнение системы ЛОУ имеет вид

$$\chi(\lambda) = \det(\lambda E_n - \bar{H}) =$$

$$= \lambda^n + \rho(p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \dots + p_i \lambda^{n-i} + \dots + p_n) = 0, \quad (10)$$

где $\bar{H} = (E_{n_x \times n_x} + \gamma_0 F_u T_u P_A) H$, $P_A = A^T (A A^T)^{-1}$, $T_u = (0_{n_x \times n_x} \mid E_{n_x \times 1})$,
а параметр $\rho = 1 - \gamma_0 / 2$ для ЛОУ с обратной связью по состоянию.

Тогда условие устойчивости матрицы оператора линейной системы ЛОУ имеет вид: $|\lambda_j(\lambda E_{n_x} - \bar{H})| < 1$, $j = 1, \dots, n$.

Далее исследованы модели нелинейных систем, отличающихся свойствами оптимальности и интервалами прогноза.

1) Модель системы локально допустимого управления (ЛДУ) в виде вектора $\bar{u}(x_k)$ представляется как задача Коши

$$x_{k+1} = G_1(x_k) = H\Phi_x(x_k) + F_u \Gamma \bar{u}_k(x_k) = H\Phi_x(x_k) +$$

$$+ F_u \Gamma T_u [P_A c H \Phi_x(x_k) + \bar{\theta} P^0 C_k \rho^{-1/2} \alpha^{1/2}(x_k)], \quad y_k = c x_k, \quad x_{k0} = x^0 \in D. \quad (11)$$

Оператор ЛДУ в (11) учитывает нелинейности объекта, параметр $\bar{\theta} = (1 - 2\theta) \in [-1, +1]$, «ограничивающий параметр» $\alpha^{1/2}(x_k)$. Этот оператор как комбинация «граничных векторов» z_{k*} и z_k^* с параметром «допустимости» (11) и «фильтрующей» матрицей T_u задает вектор ЛДУ

$$\bar{u}(x_k) = T_u \bar{z}_k = T_u [(1 - \bar{\theta}) z_{k*} + \bar{\theta} z_k^*] =$$

$$= T_u [P_A b_k^i + (1 - 2\bar{\theta}) P^0 C \rho^{-1/2} \alpha^{1/2}(x_k)], \quad \theta \in [0, 1],$$

$$b_k^1 = c H x_k, \quad b_k^2 = c H \Phi_x(x_k),$$

где

$$z_{k*} = P_A b_k^i + P^0 C \rho^{-1/2} \alpha^{1/2} (x_k),$$

$$z_k^* = P_A b_k^i - P^0 C \rho^{-1/2} \alpha^{1/2} (x_k), T_u = (0_{n_y \times n_m} | E_m).$$

Вектор $\bar{u} (x_k)$ в (11) задает управления с учетом допустимости отклонений переменных от *целевого программного воздействия* $C = (C_y | C_u)^T$, а «параметр допустимости» учитывает смешанные ограничения

$$\alpha(x_k) = r^2 - (b_k^i)^T (AA^T)^{-1} b_k^i, \quad \rho^{1/2} = \|P^0 C\|, \quad C \neq 0_{n_x+n_u}.$$

2) Модель системы ЛОУ как задача Коши с «параметром оптимальности» $\tilde{\theta}(x_k)$, реализующая минимальные отклонения переменных от целевых программных воздействий $C = (C_y | C_u)^T$ в виде

$$x_{k+1} = G_2(x_k) = H\Phi_x(x_k) + F_u u_{k*}(x_k) = H\Phi_x(x_k) +$$

$$+ F_u \Gamma T_u \left[P_A c H \Phi_x(x_k) + (1 - 2\tilde{\theta}(x_k)) P^0 C \rho^{-1/2} \alpha^{1/2}(x_k) \right],$$

$$y_k = c x_k, \quad x_{k0} = x^0. \quad (12)$$

Функциональный «параметр оптимальности» системы ЛОУ (12), равный

$\tilde{\theta}(x_k) = 1 - 2p_\theta(\theta_{0k}) \in [0, 1]$, $\theta_{0k} = \arg \min \left\{ \varphi(\theta) = \left\| (1 - \theta) z_{*k} + \theta z_k^* - C \right\|_2^2 \right\} \in \mathbb{R}$, определен проекцией на $[0, 1]$. Параметр допустимости ЛОУ задает одношаговый прогноз смешанных ограничений на координаты и управления.

3) Модель системы управления с линейным объектом и « p – интервально допустимыми» $U(x_k) = \bar{U}(x_k)$ или « p – интервально оптимальными» $U(x_k) = \tilde{U}(x_k)$ управлениями имеет вид задачи Коши

$$x_{k+1} = G_3(x_k) = Hx_k + F_u U(x_k), \quad y_k = c x_k, \quad x_{k0} = x^0 \in D, \quad (13)$$

где управления $\bar{U}(x_k)$ или $\tilde{U}(x_k)$ определяются операторами. Для корректности управлений в (11) требуется отделимость от нуля для: $C \neq 0_n$.

Общие свойства нелинейных функциональных параметров систем с операторами (11) – (13) даны ниже.

Лемма 1. Функциональный параметр для ЛДУ и ЛОУ, равный

$$\alpha^{1/2}(q^T P q) = (r^2 - q^T P q)^{1/2} = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \alpha_3(q^T P q), \quad (14)$$

заданный в операторах (11),(12) *суперпозициями* квадратного корня $\alpha_1(\alpha_2) = \alpha_2^{1/2} : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, аффинного преобразования вида $\alpha_2(\alpha_3) = r^2 - \alpha_3$, квадратичной формы $\alpha_3 = q^T P q$, $P = P^T$, обладает свойствами:

1. Функциональный параметр $\alpha^{1/2}(x_k)$ корректно задан в области

$$D_q = \{q^T P q \mid \varepsilon^2 \leq q^T P q \leq (r^2 - \varepsilon^2), \ 0 < \varepsilon < r\}, \quad (15.a)$$

$$\partial \alpha(q^T P q) / \partial q = -P q (r^2 - q^T P q)^{-1/2}, \quad q^T P q \in D_q.$$

2. С учетом (15.a) ункциональный параметр с регуляризацией

$$\alpha_p^{1/2}(q^T P q) = [r^2 - p_\alpha(q^T P q)]^{1/2} = [\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ p_\alpha \circ q^T P q]^{1/2}$$

ограничивает квадратичную форму интервалом с помощью проектора

$$p_\alpha(a) = 0, 5 \left(|a - \varepsilon^2| - |a - (r^2 - \varepsilon^2)| + r^2 \right) \subset [\varepsilon^2, r^2 - \varepsilon^2] \subset \mathbb{R},$$

$$a = q^T P q, \quad (15.б)$$

который гарантирует корректность вычисления квадратного корня.

Доказательство следует из аппроксимации по Тейлору, т.к. производная Фреше: $\partial \alpha / \partial q = -P q (r^2 - q^T P q)^{-1/2}$, $q^T P q \in D_q$, в области определения функция $\alpha^{1/2}(q^T P q)$, аппроксимируемой по лемме 1. Тогда для $C^T P C \in D_q$ значение $\partial \alpha / \partial C = -P C (r^2 - C^T P C)^{-1/2}$, $C^T P C \in D_q$.

Производная Фреше: $\alpha^{1/2}(C^T PC)$ имеет предельное свойство $\partial\alpha/\partial(C) \rightarrow 0_n$, $C^T PC \rightarrow 0$, и является ограниченным в области D_q .

Таким образом, лемма 1 для (11), (12), определяет свойства систем, имеющих смешанные ограничения на координаты и управления.

Лемма 2. Параметр с регуляризацией $\eta_p(x_k) = \rho^{-1/2} \alpha_p^{1/2}(x_k)$ операторов систем ЛДУ (11) и ЛОУ (12) обладает свойствами:

1) Пусть уравнения стационарных состояний систем имеют вид

$$\begin{aligned} x_* &= H\Phi_x(x_*) + F_u \Gamma T_u \left[P_A c H \Phi_x(x_*) + \bar{\theta} P^0 C \rho^{-1/2} \alpha^{1/2}(x_*) \right], \\ x_* &= H\Phi_x(x_*) + F_u \Gamma T_u \left[P_A c H \Phi_x(x_*) + (1 - 2\tilde{\theta}(x_*)) P^0 C \rho^{-1/2} \alpha^{1/2}(x_*) \right]. \end{aligned}$$

Тогда для нелинейной функции $\alpha_p^{1/2}(x_k) = \left[r^2 - p(q_k^T q_k) \right]^{1/2}$, $q_k = P_A c H x_k$, систем (11) и (12) с учетом стационарных состояний x_* верны оценки

$$\left| \alpha_p^{1/2}(x_k) - \alpha_p^{1/2}(x_*) \right| \leq 2 L_\alpha L_{p\alpha} r \beta^2 \|x_k - x_*\|, \quad \beta = \|P_A\| \cdot \|c\| \cdot \|H\|, \quad (16.a)$$

$$\left| \alpha_p^{1/2}(x_k) - \alpha_p^{1/2}(x_*) \right| \leq 2 L_\alpha L_{p\alpha} r \|\bar{A}\| \cdot \|c\|^2 \|H\|^2 \|x_k - x_*\|,$$

$$\bar{A} = P_A^T P_A = (A A^T)^{-1}. \quad (16.б)$$

2) Операторы систем (11) и (12) определяют множества в виде шаров

$$S_x(0_{n_x}, r_\varepsilon^2) = \left\{ x_k \mid \|x_k\|^2 \leq \beta^{-2} r_\varepsilon^2 \right\}, \quad S_y(0_{n_y}, r_\varepsilon^2) = \left\{ y_k \mid \|y_k\|^2 \leq \|c\| \beta^{-2} r_\varepsilon^2 \right\}, \quad (16.в)$$

ограничивающих состояния и выходы (11) и (12). Тогда операторы ЛДУ и ЛОУ корректны в шарах (16.в) после регуляризации. Устойчивость систем далее исследована для начальных состояний из области притяжения.

Доказательство п. 1. Оценки левой части (16.a) имеют вид

$$\begin{aligned} \left| \alpha_p^{1/2}(x_k) - \alpha_p^{1/2}(x_*) \right| &\leq L_\alpha \left| p_\alpha(q_k^T q_k) - p_\alpha(q_*^T q_*) \right| = \\ &= L_\alpha L_{p\alpha} \left| q_k^T q_k - q_*^T q_* \right| = L_\alpha L_{p\alpha} \left| q_k^T q_k - q_k^T q_* + q_k^T q_* - q_*^T q_* \right| = \\ &= L_\alpha L_{p\alpha} \left| q_k^T (q_k - q_*) + (q_k^T - q_*^T) q_* \right| = L_\alpha L_{p\alpha} \left| (q_k^T + q_*^T) (q_k - q_*) \right|, \end{aligned}$$

где $L_{p\alpha} = 1$. Тогда с учетом обозначений п. 2 оценки примут вид

$$\begin{aligned} \left| \alpha_p^{1/2}(x_k) - \alpha_p^{1/2}(x_*) \right| &\leq L_\alpha L_{p\alpha} \|q_k + q_*\| \cdot \|q_k - q_*\| \leq 2L_\alpha L_{p\alpha} r \|q_k - q_*\| \leq \\ &\leq 2L_\alpha L_{p\alpha} r \|P_A\|^2 \cdot \|c\|^2 \cdot \|H\|^2 \cdot \|x_k - x_*\| = 2L_\alpha L_{p\alpha} r \beta^2 \|x_k - x_*\|, \end{aligned}$$

где $q_k = P_A c H x_k$, $q_* = P_A c H x_*$, а следующие оценки

$$\begin{aligned} \|q_k + q_*\| &\leq \|P_A c H x_k\| + \|P_A c H x_*\| \leq 2\|P_A\| \cdot \|c\| \cdot \|H\| r \leq 2\beta r, \\ \|q_k - q_*\| &= \|P_A c H (x_k - x_*)\| \leq \|P_A\| \cdot \|c\| \cdot \|H\| \cdot \|x_k - x_*\| = \beta \|x_k - x_*\| \end{aligned}$$

вытекают из неравенств треугольника и Коши-Буняковского.

3. Условия устойчивости нелинейных дискретных систем ЛОУ. На первом этапе анализа определен оператор ЛОУ.

Определение. Оператор ЛОУ с регуляризацией параметра $\tilde{\theta}_p = \tilde{\theta}_p(x_k)$ и «функции ограничения» $\alpha_p^{1/2}(x_k)$ определяет вектор

$$\tilde{u}(x_k) = T_u P_A b_k + \tilde{\theta}_p(x_k) T_u P^0 C \rho^{-1/2} \alpha_p^{1/2}(x_k), \quad (17)$$

где указанные параметры обладают свойствами: 1). Функциональный «параметр оптимальности» с регуляризацией равен

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_p(x_k) &= 1 - 2p_\theta(\theta_0(x_k)), \quad \theta_0(x_k) = \arg \min \left\{ \varphi(\theta) = \|(1-\theta)z_{k*} + \theta z_k^* - C\|^2 \right\} = \\ &= 0,5(1 - \eta_k^{-1}) = 0,5(1 - \alpha_p^{-1/2}(x_k) \rho^{1/2}), \quad \rho^{1/2} = \|C^T P^0 C\|^{1/2} = \|P^0 C\|. \end{aligned}$$

Функция $p_\theta(\theta_0(x_k)) \in [0, 1]$ – образ липшицевого проектора

$$p_\theta(a) = 0,5(|a| - |a-1| + 1) \in [0, 1], \quad |p_\theta(a) - p_\theta(b)| \leq L_{p\theta} |a - b|, \quad L_{p\theta} = 1.$$

2) В силу леммы 1 «функция ограничения» $\alpha_p^{1/2}(x_k) = \left[r^2 - p_\alpha(q_k^T q_k) \right]^{1/2}$ включает липшицевый кусочно-линейный проектор

$$\begin{aligned} p_\alpha(a) &= 0,5(|a - \varepsilon^2| - |a - (r^2 - \varepsilon^2)| + r^2) \in [\varepsilon^2, r^2 - \varepsilon^2] \subset \\ &\subset \mathbb{R}, \quad |p_\alpha(c) - p_\alpha(d)| \leq L_{p\alpha} |c - d|. \end{aligned}$$

Функция $\alpha_p^{1/2}(x_k)$ в силу p_α реализует корректность квадратного корня, т.к. $q_k^T q_k$ ограничено интервалом $[\varepsilon^2, r^2 - \varepsilon^2]$, а постоянная $L_{p\alpha} = 1$.

Таким образом, операторы систем ЛОУ и ЛДУ имеют общую структуру, т.к. совпадают «функции ограничений» $\alpha_p^{1/2}(x_k)$, где $\|q_k\| = \|P_A c H x_k\|$. Для ЛДУ «параметр допустимости» $\bar{\theta}_p \in [0, 1]$ – числовой, а для ЛОУ «параметр оптимальности» $\tilde{\theta}_p(x_k) = 1 - 2p_\theta [\theta_0(x_k)] \in [-1, 1]$ зависит от координат состояния. Условия устойчивости системы с оператором ЛОУ определены в утверждении.

Утверждение 6. Пусть выполнены условия: 1). Разностный оператор (12) с линейным объектом, оператором ЛОУ (17) и начальным состоянием из области притяжения имеет вид

$$x_{k+1} = G_2(x_k) = Hx_k + F_u \gamma T_u (P_A c H x_k + \tilde{\theta}_p(x_k) P^0 C \eta_k),$$

$$y_k = c x_k, \quad x_{k0} \in D_n, \quad (18)$$

где «параметр оптимальности» с регуляризацией равен $\tilde{\theta}_p(x_k) = 1 - 2p_\theta [0, 5(1 - \eta_k^{-1})]$.

2) Выходы объекта в (18) управляемы, в силу леммы 2 прогнозы вектора $z_k = (y_{k+1} | u_k)^T \in S(0_{n_z}, r_\varepsilon^2)$ принадлежат шару (16.в)

$$\|z_{k+1}\|^2 \leq r^2, \quad z_k = (y_{k+1} | u_k)^T,$$

$$\|y_k\|^2 = \|c x_k\|^2 \leq \|c\|^2 \|x_k\|^2, \quad \|y_{k+1}\|^2 \leq r_y^2, \quad \|u_k\|^2 \leq r_u^2,$$

где параметры шаров определены моделью объекта управления.

3) «Параметр оптимальности» $\tilde{\theta}_p(x_k)$ с регуляризацией оператора (18) вычислен из условия проецирования точки безусловного минимума $\theta_0(x_k) = 0, 5(1 - \eta_k^{-1})$, $\eta_k = \rho^{-1/2} \alpha_p^{1/2}(x_k)$, на интервал $[0, 1]$ проектором

$$\tilde{\theta}_p(x_k) = 1 - 2p_\theta(\theta_0(x_k)) = 1 - (|\theta_{0k}| - |\theta_{0k} - 1| + 1) \in [-1, 1], L_{p\theta} = 1.$$

Тогда из условия сжатия оператора (18) для устойчивости системы ЛОУ при программном целевом векторе $C = (C_y | C_u)^T$ требуется, чтобы параметр статической обратной связи удовлетворял неравенству

$$|\gamma| < (1 - \|H\|) \times [\|F_u\| \cdot \|T_u\| (\beta + K)]^{-1}, \quad (19)$$

где $K = 3L_\alpha L_{p\alpha} r \beta^2$, $L_{p\alpha} = 1$, $\|P^0 C\| \rho^{-1/2} = \|p_C^0\| = 1$. Оператор (18) при выполнении условия (19) обеспечивает принадлежность состояний ограниченному множеству – шару (16.в). При этом начальные состояния оператора системы ЛОУ из множества притяжения D_n в (18) стремятся в окрестность программного вектора $C_x \in S(0_{n_x}, r_x^2)$.

В докладе приведены также условия устойчивости, полученные методом А.М. Ляпунова, обсуждены вопросы преобразования необходимых условий оптимальности Р. Беллмана на основе проекционных операторов для решения задач синтеза. Полученные результаты использованы при управлении энергетическими системами [4], при передаче углеводородов по магистральным трубопроводам, в теплофизике, в задачах управления движением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Первозванский А.А., Гайцгори В.Г. Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. М. Наука. 1979.
2. Kirk D. Optimal Control. Theorie and Introduction. Mineola, New York. 1998. 452 p.
3. Далецкий Ю.А., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука. 1979. 534 с.
4. Черноусько Ф.Л. Задачи оптимального быстрогодействия при смешанных ограничениях // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1995. – № 4. – С. 103 – 113.
5. Козлов В.Н. К аналитическому решению систем линейных алгебраических неравенств // Автоматика и телемеханика, 1989. № 4. с. 101–104.

6. *Kozlov V.N.* The Method of Minimization of Linear Functionals. Based on Kompakt Sets. Proceedings of the 12th international workshop on computer science and information technologies (CSIT 2010), Russia, Moscow-Saint-Petersburg, Russia, 2010. Volume 2. pp. 157–159.

7. *Козлов В.Н.* Негладкие системы, операторы оптимизации, и устойчивость энергообъединений. Изд-во Политехн. ун-та. СПб.:2012.- 180 с.

8. *Козлов В.Н.* О сжимающих свойствах операторов систем с проекционными локально оптимальными методами управления // Материалы международной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов, гармонического анализа и их приложения – V» в г. Ростове-на-Дону. Изд. центр ДГТУ, Ростов н/Д. 2015. – 211 с. ISBN: 978-5-7890-101-6.

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

Г.А. Леонов, Н.В. Кузнецов, М.В. Юлдашев, Р.В. Юлдашев

*(Санкт-Петербургский государственный университет, Россия,
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр. 28)*

E-mail: g.leonov@spbu.ru

STABILITY OF PHASE-LOCKED LOOPS

G.A. Leonov, N.V. Kuznetsov, M.V. Yuldashev, R.V. Yuldashev

(Saint-Petersburg State University, Russia, 198504, Saint-Petersburg, University pr. 28)

Keywords: phase-locked loop, Costas loop, nonlinear analysis, stability SPICE simulation.

Схема фазовой автоподстройки (ФАП, Phase-LockedLoop) была предложена в 1932 г. французским инженером Анри де Беллисцизе для подстройки частоты управляемого генератора колебаний к частоте входного сигнала [1]. Различные схемы ФАП быстро получили широкое распространение в телевидении, радиотехнике, радиолокации. Возможность нелинейного анализа простейших двумерных математических моделей ФАП была показана в работе 1933 года Ф. Трикоми [2], в которой проводился анализ качественного поведения двумерных систем маятникового типа и который затем развивался в работах А.А. Андропова [3] и его последователей (М.В. Капранов, Н.А. Губарь, Б.И. Шахтарин, Л.Н. Белюстина, В.Д. Шалфеев и другие [4-8]). В 50-е годы появились первые работы Ю.Н. Бакаева по применению прямого метода Ляпунова для анализа ФАП [9] и исследования В.И. Тихонова по оценке влияния шумов на работу ФАП [10].

В 1966 году были опубликованы первые фундаментальные монографии, содержащие накопленный американскими и советскими инженерами всесторонний опыт по анализу и синтезу систем ФАП (Ф. Гарднер, А. Витерби, В.В. Шахгильдян и А.А. Ляховкин [11-13]). При этом основные монографии американских авторов были переведены на русский, а на западе следили за работами советской школы [14]. В дальнейшем основными направлениями исследований по тематике ФАП на западе стало развитие новых технологий на их основе, а в СССР – раз-

витие строгих методов анализа ФАП и создание общей математической теории для нелинейного анализа ФАП. Однако эти направления редко пересекались, так многие новые схемы ФАП и постановки задач остались не замеченными советскими учеными, а результаты строгого нелинейного анализа ФАП остались неизвестными на западе [15, 16].

Общие подходы к нелинейному анализу ФАП, в которых были преодолены трудности связанные с обобщением классических результатов теории устойчивости на системы с цилиндрическим фазовым пространством и разрывными нелинейностями, были разработаны Г.А. Леоновым и отражены в монографии 1978 года [17].

В последнее десятилетие двадцатого века началось активное внедрение систем ФАП в новые информационные технологии. Достаточно отметить, что синтезаторы частот, имеющиеся в каждом современном компьютере, имеют в своей конструкции такие системы синхронизации. Различные модификации этих систем обеспечивают синхронизацию в суперкомпьютерах и используются для передачи цифровых данных в спутниковых системах ГЛОНАСС и GPS. Для этих новых систем фазовой синхронизации потребовалось создание новых математических методов анализа и синтеза дифференциальных, интегральных, интегродифференциальных уравнений и дискретных динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством [16, 18]. Также в докладе отражены результаты сотрудничества [19-21] с известным инженером из Швейцарии Р. Бестом (Roland Best, основатель компании Best Engineering, автор бестселлера по ФАП [22], выдержавшего 6 переизданий) и известным инженером Д. Бианчи (Giovanni Bianchi, инженер компании Advantest Europe GmbH, автор монографий по моделированию ФАП [23]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bellescize H. La reception synchrone. L'onde Électrique, 11, 1932, 230-340.
2. Tricomi F. Integrazione di unequazione differenziale presentatasi in elettrotecnica, Annalidella Roma Schuola Normale Superiore de Pisa, 2(2), 1933, 1-20.
3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. Первое издание. 1937

4. *Капранов М.В.* Полоса захвата при фазовой автоподстройке частоты, Радиотехника, 11(12), 1956.
5. *Губарь Н.А.* Исследование одной кусочно-линейной динамической системы с тремя параметрами, Прикладная Математика и Механика, 25(6), 1961, 1011-1023.
6. *Белюстина Л.Н., Быков В.В., Кивелева К.Г., Шалфеев В.Д.* О величине полосы захвата системы ФАПЧ с пропорционально-интегрирующим фильтром, Изв. вузов. Радиофизика, 13(4), 1970, 561-567.
7. *Шахтарин Б.И.* Исследование кусочно-линейной системы ФАП, Радиотехника и электроника, 14(8), 1969, 1415-1424.
8. *Шалфеев В.Д., Матросов В.В.* Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Изд.-во Нижегородского университета, 2013.
9. *Бакаев Ю.Н.* Устойчивость и динамические свойства астатической системы ФАПЧ, Радиотехника и электроника, 8(3), 1963, 513-516.
10. *Тихонов В.И.* Влияние шумов на работу схемы фазовой автоподстройки частоты, Автоматика и телемеханика, 20(9), 1959, 1188-1196.
11. *Gardner, F.* Phaselock techniques, John Wiley & Sons, New York, 1966.
12. *Viterbi, A.* Principles of coherent communications, McGraw-Hill, New York, 1966.
13. *Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.* Фазовая автоподстройка частоты, Связь, 1966
14. *Lindsey W. and Tausworthe R.* A bibliography of the theory and application of the phase-lock principle, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, JPL Tech. Rep., 1973
15. *Abramovitch D.* Phase-locked loops: A control centric tutorial, Proc. IEEE Amer. Control Conf., vol. 1, 2002, 1-15.
16. *Leonov G., Kuznetsov N., Yuldashev M. and Yuldashev R.,* Hold-in, pull-in, and lock-in ranges of PLL circuits: rigorous mathematical definitions and limitations of classical theory, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Regular Papers, 62(10), 2015, 2454-2464.
17. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.

18. *Leonov G.A., Kuznetsov N.V.* Nonlinear mathematical models of phase-locked loops. Stability and oscillations, Cambridge scientific publishers, 2014.

19. *Best R., Kuznetsov N., Leonov G., Yuldashev M., Yuldashev R.*, Tutorial on dynamic analysis of the Costas loop, Annual Reviews in Control, 42, 2016, 27-49.

20. *Best R.R., Kuznetsov N.V., Kuznetsova O.A., Leonov G.A., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V.* A short survey on nonlinear models of the classic Costas loop: rigorous derivation and limitations of the classic analysis. Proc. of American Control Conference (ACC), 2015, 1296-1302.

21. *Bianchi G., Kuznetsov N., Leonov G., Yuldashev M., Yuldashev R.*, Limitations of PLL simulation: hidden oscillations in MATLAB and SPICE, International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT 2015) 2016-January, 2016, 79-84, doi:10.1109/ICUMT.2015.7382409.

22. *Best R.E.*, Phase-Locked Loops: Design, Simulation and Application, McGraw-Hill, 6th ed., 2007.

23. *Bianchi G.* Phase-locked loop synthesizer simulation. McGraw-Hill, Inc., 2005.

ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ 2D-СИСТЕМ

П.В. Пакишин

(АПИ НГТУ им. Р.Е. Алексеева, Россия, 607227, г. Арзамас,
ул. Калинина, 19)

E-mail: pakshinpv@gmail.com

THEORY AND APPLICATIONS OF 2D SYSTEMS

P.V. Pakshin

(Arzamas Polytechnic Institute of R.E. Alekseev Nizhny Novgorod State
Technical University, 607227, Nizhny Novgorod, Kalinina str., 19)

Keywords: iterative learning control, multi-agent systems, networked control, vector Lyapunov function, stability consensus

Математические модели динамических систем, получившие название 2D-систем, появились в поле зрения теории управления в середине 70-х годов прошлого века. Они были связаны с задачами обработки изображений (модели Роессера) и построения сложных электрических фильтров (модели Форназини-Маркезини). Позднее такие модели и их модификации, в форме так называемых повторяющихся процессов, появились в связи с задачами повышения точности портальных роботов и другими техническими задачами.

В последние годы заметно усилился интерес к исследованию устойчивости и стабилизации нелинейных 2D-систем. Научный коллектив, который представляет автор, является одним из лидеров в этом направлении. Коллективом впервые была предложена новая концепция использования векторных функций Ляпунова для исследования устойчивости 2D-систем без использования систем сравнения. Для решения задач стабилизации 2D-систем коллективом впервые были опубликованы работы по развитию теории пассивности для рассматриваемого класса систем с использованием векторных функций накопления.

В докладе дается обзор современного состояния теории 2D-систем с акцентом на задачи устойчивости и стабилизации. В области приложений особое внимание уделяется вопросам управления с итеративным обучением, которое является простейшим типом интеллекту-

ального управления и активно используется для обеспечения высокой точности повторяющихся процессов в различных областях. Здесь теория устойчивости и стабилизации 2D-систем оказывается наиболее эффективной. Отмечаются открытые области исследований и оцениваются перспективы дальнейшего развития данного научного направления.

УПРАВЛЯЕМЫЕ ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ ВЫМЕТАНИЯ

А.А. Толстоногов

*(ФБГУН Институт динамики систем и теории управления
им. В.М. Матросова СО РАН, Россия, 664033, Иркутск, Лермонтова, 134)*

E-mail: aatol@icc.ru

CONTROL POLYHEDRAL SWEEPING PROCESSES

A.A. Tolstonogov

*(Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS,
664033, Irkutsk, Lermontov str., 134)*

Keywords: sweeping processes, polyhedron, normal cone.

Пусть $T = [0, 1]$ – отрезок числовой прямой R , X – конечномерное евклидовое пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Многозначное отображение $\Gamma : T \rightarrow X$ называется полиэдральным, если для каждого $t \in T$ его значениями являются полиэдры. Полиэдр определяется как пересечение конечного числа замкнутых полупространств, т.е. существуют ненулевые элементы $\phi_i(t) \in X$ и $b_i(t) \in R$, $1 \leq i \leq m$ такие, что

$$\Gamma(t) = \{x \in X; \langle x, \phi_i(t) \rangle \leq b_i(t); \quad 1 \leq i \leq m\}.$$

Пусть $(\phi(\cdot), b(\cdot)) = \{\phi_i(\cdot), b_i(\cdot); \quad 1 \leq i \leq m\}$. Мы скажем, что система $(\phi(\cdot), b(\cdot))$ совместна, если для каждого $t \in T$ множество $\Gamma(t)$ не пусто. В этом случае мы говорим, что система порождает полиэдральное многозначное отображение $\Gamma(t)$, а число $m \geq 1$ называется порядком системы.

Нормальный конус $N_{\Gamma(t)}(x)$ к выпуклому множеству $\Gamma(t)$ в точке $x \in \Gamma(t)$ определяется следующим образом:

$$N_{\Gamma(t)}(x) = \{v \in X; \langle v, y - x \rangle \leq 0, \quad \forall y \in \Gamma(t)\}.$$

Так как полиэдральное многозначное отображение определяется системой $p(\cdot) = (\phi(\cdot), b(\cdot))$, то в дальнейшем эту зависимость будем обозначать $\Gamma(p)(t)$.

Рассмотрим пространство $Y = (X \times R)^m$, $m \geq 1$ с евклидовой нормой $\|\cdot\|_Y$. Через $W^{1,2}(T, Y)$ обозначим пространство абсолютно непрерывных функций $v: T \rightarrow Y$ с нормой

$$\|v\|_W = \|v(0)\|_Y + \left(\int_T \|\dot{v}(t)\|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Для евклидовых пространств X и Z пространства $W^{1,2}(T, X)$ и $W^{1,2}(T, Y)$ вводятся аналогично.

Дифференциальные включения, в правых частях которых стоят нормальные конусы к замкнутым множествам, называются процессами выметания [1].

Пусть $f: T \times X \times Z \rightarrow X$. Рассмотрим управляемый полиэдральный процесс выметания

$$\begin{aligned} -\dot{x}(t) &\in N_{\Gamma(p)(t)}(x(t) + f(t, x(t), u(t))), \\ x(0) &= x_0(p) \in \Gamma(p)(0). \end{aligned} \quad (1)$$

В качестве управлений мы рассмотрим функции $p(\cdot) \in W^{1,2}(T, Y)$ и $u(\cdot) \in W^{1,2}(T, Z)$. При фиксированных $p(\cdot) \in W^{1,2}(T, Y)$, $u(\cdot) \in W^{1,2}(T, Z)$ под решением процесса выметания (1) понимается функция $x(\cdot) \in W^{1,2}(T, X)$, $x(0) = x_0(p)$, такая что $x(t) \in \Gamma(p)(t)$, $t \in T$ и почти всюду на T имеет место включение (1).

Управления $p(\cdot)$ и $u(\cdot)$ подчинены ограничениям

$$p(\cdot) \in \Pi \subset W^{1,2}(T, Y), \quad (2)$$

$$u(\cdot) \in U \subset W^{1,2}(T, Z). \quad (3)$$

Рассматриваются следующие вопросы:

существование решений;

зависимость решений от управлений $p(\cdot)$ и $u(\cdot)$;

описание множеств Π и U допустимых управлений $p(\cdot)$ и $u(\cdot)$;

исследование задачи минимизации функционала

$$J(x, p, u) = \int_T g(t, x(t), p(t)u(t), \dot{p}(t), \dot{u}(t)) dt$$

на решениях системы (1) с ограничениями (2), (3) на управления, где $g: T \times X \times Y \times Z \times Y \times Z \rightarrow R$

Полученные результаты иллюстрируются на примере задачи управления движением потока автомобилей, в которой в качестве одного из управлений берется расстояние между соседними автомобилями.

Работа представляет продолжение исследований, начатых в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Moreau J.J.* Evolution problem associated with a moving convex set in Hilbert space. J. Diff. Equat., 26 (1977), 347-374.
2. *Tolstonogov A.A.* Control sweeping processes. J. Convex Analysis, v. 23 (2016), № 4, 1099-1123.

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ МНОЖЕСТВА РАЗРЕШИМОСТИ В ЗАДАЧЕ О СБЛИЖЕНИИ СТАЦИОНАРНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

В.Н. Ушаков

(ИММ УрО РАН им. Н.Н. Красовского, Россия, 620990, Екатеринбург,
С. Ковалевской, 16) E-mail: ushak@imm.uran.ru,

В.И. Ухоботов

(ЧелГУ, Россия, 454001, Челябинск, ул. Бр. Кашириных, 129)
E-mail: ukh@csu.ru,

А.В. Ушаков

(ИММ УрО РАН им. Н.Н.Красовского, Россия, 620990, Екатеринбург,
С. Ковалевской, 16) E-mail: aushakov.pk@gmail.com,

Г.В. Паришков

(ИММ УрО РАН им. Н.Н.Красовского, Россия, 620990, Екатеринбург,
С.Ковалевской, 16) E-mail: grigory.parshikov@uran.ru

ON APPROXIMATE CALCULATION OF SOLVABILITY SET IN GUIDANCE PROBLEM FOR TIME-INVARIANT CONTROL SYSTEM

*V.N. Ushakov (IMM UB RAS named after N.N. Krasovskii, 16 S.
Kovalevskaya str., 620990, Ekaterinburg, Russia), V.I. Ukhobotov
(CSU, 129 Bratiev Kashirinykh st., 454001 Chelyabinsk, Russia),*

*A.V. Ushakov (IMM UB RAS named after N.N. Krasovskii, 16
S.Kovalevskaya str., 620990, Ekaterinburg, Russia),*

*G.V. Parshikov (IMM UB RAS named after N.N. Krasovskii, 16
S.Kovalevskaya str., 620990, Ekaterinburg, Russia)*

Keywords: exponential stability, nonlinear control synthesis.

Рассматривается стационарная управляемая система в пространстве $\mathbb{R}^n$ на конечном промежутке времени. Изучается задача о сближении на заданном промежутке с компактным целевым множеством. Из имеющихся подходов к решению этой задачи [1-5] выделим тот, который основан на выделении в пространстве позиций множества разре-

шимости (см. [2, 3, 5]). Множество разрешимости есть множество всех позиций системы, из которых разрешима задача о сближении. Конструирование его – самостоятельная сложная задача, которую удастся точно решить лишь в редких случаях. Доклад посвящен теме приближенного конструирования множества разрешимости. Рассматриваемая задача сопряжена с задачами конструирования и оценки интегральных воронок и трубок траекторий управляемых систем (см. [6-10]). Управляемые воронки можно вычислять приближенно по (временным) шагам как наборы множеств достижимости, отвечающих некоторым конечным наборам моментов времени. В докладе описана разрешающая конструкция задачи о сближении, в которой центральную роль играют множества достижимости. Предлагается схема приближенного вычисления множества разрешимости, основу которой составляет сведение к приближенному вычислению множеств разрешимости конечного числа более простых задач – задач о сближении с целевым множеством в фиксированные моменты времени из некоторого разбиения заданного промежутка времени.

На промежутке $[t_0; \vartheta]$, $t_0 < \vartheta < \infty$ задана управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad u \in P \subset \text{comp}(\mathbb{R}^r); \quad (11)$$

Здесь t – время, $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор, u – вектор управления, $\text{comp}(\mathbb{R}^r)$ – пространство компактов в $\mathbb{R}^r$ с хаусдорфовой метрикой $d(\cdot, \cdot)$.

Предполагается, что на систему (11) наложены условия:

Условие 1. $f(x, u): \mathbb{R}^n \times P \rightarrow \mathbb{R}^n$ определена, непрерывна и для любой ограниченной замкнутой области $D \subset \mathbb{R}^n$ найдется постоянная $L \in (0, \infty)$, удовлетворяющая

$$\|f(x_*, u) - f(x^*, u)\| \leq L \|x_* - x^*\|, \quad x_* \text{ и } x^* \text{ из } D, u \in P. \quad (12)$$

Условие 2. Существует постоянная $\gamma \in (0, \infty)$, удовлетворяющая

$$\|f(x, u)\| \leq (1 + \gamma \|x\|), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times P. \quad (13)$$

Условие 3. Множество $F(x) = f(x, P) = \{f(x, u): u \in P\}$ выпукло при любых $x \in \mathbb{R}^n$.

Под допустимым управлением $u(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ понимаем измеримую по Лебегу вектор-функцию $u(t) \in P$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Полагаем $X(t^*, t_*, x_*) \subset \mathbb{R}^n$ ($t_0 \leq t_* < t^* \leq \vartheta$, $x_* \in \mathbb{R}^n$) – множество достижимости системы (11) в момент времени t^* , отвечающее начальному состоянию $x(t_*) = x_*$; $X(t^*, t_*, X_*) = \bigcup_{x_* \in X_*} X(t^*, t_*, x_*) \subset \mathbb{R}^n$ – множество достижимости системы (1) в момент t^* , отвечающее исходному множеству $X_* \subset \mathbb{R}^n$.

При условиях 1-3 и $X_* \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ множество $X(t^*, t_*, X_*)$ есть в то же время и множество достижимости дифференциального включения (д.в.)

$$\frac{dx}{dt} \in F(x), \quad x(t_*) = x_* \in X_*. \quad (14)$$

При этом справедливы $X(t^*, t_*, X_*) \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ и $X(t_*, X_*) \in \text{comp}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Задано также целевое множество $M \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ для системы (11). Сформулируем задачу о сближении системы (1) с M на промежутке $[t_0, \vartheta]$.

Задача 1. Требуется выделить в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ множество W всех позиций (t_*, x_*) системы (1), для каждой из которых найдется допустимое управление на $[t_0, \vartheta]$, порождающее движение $x(t)$, $x(t_*) = x_*$ системы (1), удовлетворяющее $x(t^*) \in M$ при некотором $t^* \in [t_*, \vartheta]$.

Назовем W множеством разрешимости задачи 1.

Каждому $t^* \in [t_*, \vartheta]$ сопоставим $W^{t^*} \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ – множество разрешимости в задаче о сближении системы (1) с M в момент t^* (см., например [5]). Согласно определению, W^{t^*} – множество всех $(t_*, x_*) \in [t_0, t^*] \times \mathbb{R}^n$, из которых возможно приведение системы (1) на M в момент t^* . Имеет место представление

$$W = \bigcup_{t^* \in [t_*, \vartheta]} W^{t^*}. \quad (15)$$

В силу ряда причин осуществить точное вычисление W в соответствии с (15) невозможно. Возникает необходимость в приближенном вычислении W . Один из первых шагов в этом направлении – подмена несчетной совокупности $\{W^{t^*} : t^* \in [t_*, \vartheta]\}$ некоторой входящей в нее конечной совокупностью, достаточно хорошо аппроксимирующей $\{W^{t^*} : t^* \in [t_*, \vartheta]\}$.

Опишем подробнее подмену: на первом шаге подмены дискретизируем промежуток $[t_0, \vartheta]$, выбрав разбиение $\Gamma = \{t_0, t_1, \dots, t_j, \dots, t_N = \vartheta\}$, где $t_{j+1} - t_j = \Delta = N^{-1}(\vartheta - t_0)$.

Введем конечное подсемейство $\{W^{t_j} : j = \overline{0, N}\}$ семейства $W^{t^*} \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ и отвечающее этому подсемейству множество

$$W_\Gamma = \bigcup_{j=\overline{0, N}} W^{t_j} \subset [t_0, t^*] \times \mathbb{R}^n. \quad (11)$$

Имеет место $W_\Gamma \neq \emptyset$ и $W_\Gamma \subset W$.

Учитывая условие 2 и компактность M можем указать такую ограниченную и замкнутую область $D \subset \mathbb{R}^n$, содержащую M , что в $D^* = [t_0, \vartheta] \times D$ будут содержаться все составляющие разрешающей конструкции задачи 1.

Полагаем, что такая область D выбрана и введем число $K = \max\{\|f(x, u)\| : (x, u) \in D \times P\}$.

Введем также множества $W^{t_j, \Gamma} = \{(t, x) \in [t_0, t_j] \times \mathbb{R}^n : X(t_j, t, x) \cap M_{K\Delta} \neq \emptyset\}$, $t_j \in \Gamma$ и

$$W^\Gamma = \bigcup_{j=\overline{0, N}} W^{t_j, \Gamma}. \quad (12)$$

Из определения множеств W , W_Γ , W^Γ , следует

$$W_\Gamma \subset W \subset W^\Gamma, \quad (18)$$

$$d(W_\Gamma, W^\Gamma) \leq \max_{j=\overline{0, N}} d(W^{t_j}, W^{t_j, \Gamma}) \leq e^{L(\vartheta - t_0)} K\Delta; \quad (19)$$

здесь $d(W_\Gamma, W^\Gamma)$ – хаусдорфово расстояние между W_Γ и W^Γ .

Из (18) и (19) следует

$$d(W_\Gamma, W) \leq e^{L(\vartheta - t_0)} K\Delta. \quad (20)$$

Согласно (10) множество разрешимости W совпадает с W_Γ с точностью до величины $e^{L(\vartheta - t_0)} K\Delta$. Ясно, что чем меньше $\Delta = \Delta(\Gamma)$, тем ближе W_Γ к W .

Учитывая это, обратимся к описанию конструкций, относящихся к вычислению W_Γ . А именно, обратимся к описанию схем и алгоритмов приближенного вычисления множеств W^{t_j} , $j = \overline{0, N}$. Для этого, зафиксировав некоторый $t_j \in \Gamma$, рассмотрим задачу о приближенном вычислении W^{t_j} .

Введем «обратное» время $\tau = t_0 + t_j - t \in [t_0, t_j]$, $t \in [t_0, t_j]$ и отвечающую ему управляемую систему

$$\frac{dz}{d\tau} = f^*(z, v), \quad \tau \in [t_0, t_f]; \quad (21)$$

здесь $f^*(z, v) = -f(z, v)$, $(z, v) \in D \times P$.

Обозначим $Z^{ij}(t_0, z^{(0)})$, $Z^{ij} = Z^{ij}(t_0, M)$ соответствующие интегральные воронки системы (21).

Временные сечения $W^{ij}(\tau) = \{x \in \mathbb{R}^n: (\tau, x) \in W^{ij}\}$ и $Z^{ij}(\tau) = \{z \in \mathbb{R}^n: (\tau, z) \in Z^{ij}\}$ множеств W^{ij} и Z^{ij} связаны равенством $W^{ij}(\tau) = Z^{ij}(\tau) \subset \mathbb{R}^n$, $\tau = t_0 + t_j - \tau$, $\tau \in [t_0, t_j]$. (22)

Согласно определению D^* , компакты Z^{ij} и W^{ij} содержатся в D^* .

Учитывая (22), будем приближенно вычислять множества W^{ij} как множества Z^{ij} , точнее, – как некоторые конечные наборы из совокупности $\{Z^{ij}(\tau): \tau \in [t_0, t_j]\}$. При этом каждое множество из набора будем формировать как конечное множество в $\mathbb{R}^n$.

Для этого на оси τ введем разбиение $\Gamma^{ij} = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_j = t_j\}$ промежутка $[t_0, t_j]$ с шагами $\Delta^{(i)} = \tau_{i+1} - \tau_i = \Delta$, $i = \overline{0, j-1}$, где $\Delta^{(i)} = \Delta = \Delta(\Gamma)$.

Разбиению Γ^{ij} поставим в соответствие конечный набор $\{Z^{ij}(\tau_i) \subset \mathbb{R}^n: i = \overline{0, j}\}$ сечений интегральной воронки Z^{ij} системы (11). Набор $\{Z^{ij}(\tau_i): i = \overline{0, j}\}$ стеснен соотношениями

$$Z^{ij}(\tau_i) = Z(\tau_i, \tau_{i-1}, Z^{ij}(\tau_{i-1})), \quad i = \overline{0, j}; Z^{ij}(\tau_0) = M; \quad (23)$$

здесь обозначено $Z(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ – множество достижимости системы (22) в момент $\tau^* \in [\tau_*, t_j]$ с исходным множеством $(\tau_*, Z_*) \subset [t_0, t_j] \times \mathbb{R}^n$.

Множество $Z(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ является в то же время множеством достижимости д.в.

$$\frac{dz}{d\tau} \in F^*(z) = f^*(z, P) \quad (24)$$

с исходным множеством Z_* ; здесь $f^*(z, P) = \{f^*(z, v): v \in P\}$.

Не умея точно вычислять множества $Z^{ij}(\tau_i)$, $i = \overline{1, j}$, будем вычислять некоторые аппроксимации этих множеств как конечные множества $\tilde{Z}^{ij}(\tau_i)$ в $\mathbb{R}^n$.

Описание схемы формирования множеств $\tilde{Z}^{ij}(\tau_i)$ начнем с описания схемы формирования некоторых предварительных конечных множеств $\tilde{Z}^{ij}(\tau_i)$. В случае, если эти множества имеют мощность, не препятствующую эффективным вычислениям, полагаем $\tilde{Z}^{ij}(\tau_i) = Z^{ij}(\tau_i)$.

В противном случае мы должны провести коррекцию множеств $\tilde{Z}^{t_j}(\tau_i)$ в направлении уменьшения их мощности.

Следуя [5, 11], зададим конечнозначное отображение

$$(\tau^*, \tau_*, Z_*) \mapsto Z^{(\delta)}(\tau^*, \tau_*, Z_*) = \bigcup_{z_* \in Z_*} Z^{(\delta)}(\tau^*, \tau_*, z_*), \quad (25)$$

$t_0 \leq \tau_* < \tau^* \leq t_j$, $\delta = \tau^* - \tau_* > 0$, Z_* – конечное множество в $\mathbb{R}^n$.

Здесь $Z^{(\delta)}(\tau^*, \tau_*, z_*) = z_* + \delta F^{(\delta)}(\tau_*) = \{z_* + \delta f^{(\delta)} : f^{(\delta)} \in F^{(\delta)}(z_*)\}$, $(\tau_*, z_*) \in D^*$; многозначное отображение $z_* \mapsto F^{(\delta)}(z_*)$, $z_* \in D$ определено как конечнозначная аппроксимация отображения $z_* \mapsto F^*(z_*)$, $z_* \in D$, стесненная ограничением

$$\sup_{z_* \in D} d(F^{(\delta)}(z_*), F^*(z_*)) \leq \xi^*(\delta), \quad \delta > 0, \quad (26)$$

где функция $\xi^*(\delta)$ выбрана из условия $\xi^*(\delta) \downarrow 0$, $\delta \downarrow 0$.

Один из вариантов задания отображения $z_* \mapsto F^{(\delta)}(z_*)$ имеет вид

$$F^{(\delta)}(z_*) = f^*(z_*, P^{(\delta)}), \quad z_* \in D, \quad (27)$$

где $P^{(\delta)} \subset P$ – конечное множество.

При таком варианте задания отображения $F^{(\delta)}(z_*)$ оценку (26) можно записать в виде

$$\sup_{z_* \in D} h(F^*(z_*), F^{(\delta)}(z_*)) \leq \xi^*(\delta), \quad \delta > 0,$$

где $h(F_*, F^*)$ – хаусдорфово отклонение $F_* \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ от $F^* \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$.

В процедуре формирования набора $\{\tilde{Z}^{t_j}(\tau_i) : i = \overline{0, j}\}$ зададим сначала стартовое конечное (т.е. состоящее из конечного числа точек) множество $\tilde{Z}^{t_j}(\tau_0) \subset \mathbb{R}^n$, наложив на него ограничение

$$d(Z^{t_j}(\tau_0), \tilde{Z}^{t_j}(\tau_0)) = d(M, \tilde{Z}^{t_j}(\tau_0)) \leq \sigma^*(\Delta), \quad (28)$$

где $\sigma^*(\Delta) \downarrow 0$, $\Delta \downarrow 0$.

Зададим множества $\tilde{Z}^{t_j}(\tau_i)$, $i = \overline{1, j}$ рекуррентно в форме, копирующей в определенном смысле соотношения (23)

$$\tilde{Z}^{t_j}(\tau_i) = Z^{(\Delta)}(\tau_i, \tau_{i-1}, \tilde{Z}^{t_j}(\tau_{i-1})). \quad (29)$$

При условиях 1-3 множества $Z^{t_j}(\tau_i)$ и $\tilde{Z}^{t_j}(\tau_i)$ удовлетворяют неравенству

$$d(Z^{t_j}(\tau_i), \tilde{Z}^{t_j}(\tau_i)) \leq e^{L(\delta - t_0)}(\sigma^*(\Delta) + (\tau_i - t_0)(\xi^*(\Delta) + LK\Delta)),$$

$$t_j \in \Gamma, \tau_j \in \Gamma^{t_j}. \quad (30)$$

Принимая во внимание (30) и $\sigma^*(\delta) \downarrow 0$, $\xi^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$ получаем, что справедливо утверждение.

Теорема. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\Delta^0 = \Delta^0(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$ ($\Delta = \Delta(\Gamma) \leq \Delta^0$) и любых $t_j \in \Gamma$, $\tau_i \in \Gamma^{t_j}$, $j = \overline{0, N}$, верно $d(Z^{t_j}(\tau_i), \tilde{Z}^{t_j}(\tau_i)) \leq \varepsilon$.

Из теоремы следует соотношение

$$\max_{t_j \in \Gamma, \tau_i \in \Gamma^{t_j}} d(Z^{t_j}(\tau_i), \tilde{Z}^{t_j}(\tau_i)) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0. \quad (31)$$

Принимая во внимание (31), можем трактовать $\tilde{Z}^{t_j}(\tau_i), i = \overline{0, j}$ как конечные аппроксимации множеств $\tilde{Z}^{t_j}(\tau_i): i = \overline{0, j}$ – сечений интегральной воронки $\tilde{Z}^{t_j}$ системы (21) отвечающей моментам $\tau_i \in \Gamma^{t_j}$.

В некоторых задачах о сближении мощность некоторых множеств $\tilde{Z}^{t_j}(\tau_i)$ может оказаться чрезмерно большой. В таких задачах возникает необходимость корректировки вычисляемых множеств, осуществляемой в форме прореживания множества.

К процедуре $Z \mapsto H^{(\Delta)}(Z) \subset \mathbb{R}^n$ прореживания конечных множеств $Z \subset \mathbb{R}^n$, зависящей от параметра $\Delta = \Delta(\Gamma)$, предъявляем следующие требования:

Процедура $Z \mapsto H^{(\Delta)}(Z)$, переводит конечные множества $Z \subset \mathbb{R}^n$ в конечные множества $H^{(\Delta)}(Z) \subset \mathbb{R}^n$ мощности $m(H^{(\Delta)}(Z))$ меньшей, чем мощность $m(Z)$ множеств Z .

Справедлива оценка

$$d(H^{(\Delta)}(Z), Z) \leq \kappa(\Delta) \quad (32)$$

здесь функция $\kappa(\delta)$, $\delta > 0$ выбрана удовлетворяющей $\kappa^*(\delta) = \delta^{-1} \kappa(\delta) \downarrow 0$, $\delta \downarrow 0$.

Некоторые варианты процедуры $Z \mapsto H^{(\Delta)}(Z)$ приведены в [5, 11]. Они применялись при решении конкретных задач управления.

Считая, что выбрана процедура $Z \mapsto H^{(\Delta)}(Z)$, определим в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ системы (21) множества $\tilde{Z}^{t_j}(\tau_i), i = \overline{0, j}$:

$$\tilde{Z}^{t_j}(\tau_0) = H^{(\Delta)}(\tilde{Z}^{t_j}(\tau_0)), \quad \tilde{Z}^{t_j}(\tau_i) = H^{(\Delta)}\left(Z^{(\Delta)}\left(\tau_i, \tau_{i-1}, \tilde{Z}^{t_j}(\tau_{i-1})\right)\right), \quad (33) \\ i = \overline{1, j}.$$

При достаточно малых Δ (т.е. при $0 < \Delta < L^{-1} \ln 2$) множества $\tilde{Z}^{t_j}(\tau_i)$ удовлетворяют соотношению

$$d\left(\bar{Z}^{t_j}(\tau_i), \bar{Z}^{t_j}(\tau_i)\right) \leq 2L^{-1}e^{L(\tau_i - t_0)}\mathcal{H}^*(\Delta), \quad i = \overline{0, j}. \quad (34)$$

Полагаем $\tilde{W}^{t_j}(t_m) = \bar{Z}^{t_j}(t_m)$, $\tilde{W}^{t_j}(\tau_i) = \bar{Z}^{t_j}(\tau_i)$, $t_m + \tau_i = t_0 + t_j$, $i = \overline{0, j}$.

Множества $\tilde{W}^{t_j}(t_m)$ и $\tilde{W}^{t_j}(\tau_i)$ есть аппроксимации сечений $W^{t_j}(t_m)$ множества разрешимости $W^{t_j} \subset [t_0, t_j] \times \mathbb{R}^n$ в задаче о сближении системы (11) с M в момент $t_j, j = \overline{0, N}$.

Запишем оценки (30) и (31) в терминах множеств $W^{t_j}(t_m)$, $\tilde{W}^{t_j}(t_m)$, $\tilde{W}^{t_j}(\tau_i)$:

$$d\left(W^{t_j}(t_m), \tilde{W}^{t_j}(t_m)\right) \leq e^{L(t_j - t_m)}\left(\sigma^*(\Delta) + (t_j - t_m)(\xi^*(\Delta) + LK\Delta)\right), \quad (35)$$

$$d\left(\tilde{W}^{t_j}(\tau_i), \tilde{W}^{t_j}(\tau_i)\right) \leq 2L^{-1}e^{L(\tau_i - t_m)}\mathcal{H}^*(\Delta), \quad m = \overline{0, j} \quad (36)$$

Из (35), (36) следует оценка

$$d\left(W^{t_j}(t_m), \tilde{W}^{t_j}(\tau_i)\right) \leq \varphi(\Delta), \quad (37)$$

где функция

$$\varphi(\Delta) = e^{L(\vartheta - t_0)}\left(2L^{-1}\mathcal{H}^*(\Delta) + \sigma^*(\Delta) + (\vartheta - t_0)(\xi^*(\Delta) + LK\Delta)\right)$$

монотонно убывает к нулю при $\Delta \downarrow 0$, что влечет предельное соотношение

$$\lim_{\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0} \max_{t_j \in \Gamma, t_m \in \Gamma^{t_j}} d\left((t_m, \tilde{W}^{t_j}(t_m)), (t_m, W^{t_j}(t_m))\right) = 0. \quad (38)$$

Введем в рассмотрение конечные множества в $[t_0, t_j] \times \mathbb{R}^n$, $t_j \in \Gamma$:

$$\tilde{W}^{t_j} = \bigcup_{t_m \in \Gamma^{t_j}} (t_m, \tilde{W}^{t_j}(t_m)), \quad \tilde{W}_\Gamma = \bigcup_{t_j \in \Gamma} \tilde{W}^{t_j}.$$

Учитывая, что $\tilde{W}_\Gamma = \bigcup_{t_j \in \Gamma, t_m \in \Gamma^{t_j}} (t_m, \tilde{W}^{t_j}(t_m))$ и $W_\Gamma = \bigcup_{t_j \in \Gamma, t \in [t_0, t_j]} (t, W^{t_j}(t)) = \bigcup_{t_j \in \Gamma, t_m \in \Gamma^{t_j}, m = \overline{0, N-1}} \bigcup_{t \in [t_m, t_{m+1}]} (t, W^{t_j}(t))$, а также, $d\left(\tilde{W}^{t_j}(t_m), W^{t_j}(t)\right) \rightarrow 0$ при $t \in [t_m, t_{m+1}]$, $\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0$, получаем

$$d(\tilde{W}_\Gamma, W_\Gamma) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0. \quad (39)$$

Принимая во внимание (39) и соотношение $d(W_\Gamma, W) \rightarrow 0$, $\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0$, получаем

$$d(\tilde{W}_\Gamma, W) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0. \quad (40)$$

Соотношение (40) обосновывает тот факт, что конечные множества $\mathcal{W}_T \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ являются аппроксимациями множества W .

Заключение. В статье описана схема конструирования множеств W_T , аппроксимирующих множество разрешимости W в задаче 1 о сближении системы (11) с компактным целевым множеством $M \subset \mathbb{R}^n$. Это аппроксимирующие множества конструируются как конечные множества в $\mathbb{R}^{n+1}$ и их построение может быть реализовано, согласно схеме, при помощи рекуррентной процедуры.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №17-01-00749 и при поддержке проекта УрО РАН №15-16-1-13.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Н.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе М.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974, 456 с.
3. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
4. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006, 328 с.
5. Ушаков В.Н., Ухоботов В.И. Ушаков А.В., Паршиков Г.В. К решению задач о сближении управляемых систем //Труды Математического института имени ВА Стеклова. – 2015. – Т. 291. – №. 0. – С. 276-291.
6. Kurzhanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal Calculus for Dynamics and Control. Birkhauser, Boston, 1997.
7. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука. 1988.
8. Гусев М.И. Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями //Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2009. – Т. 15. – №. 4. – С. 82-94.
9. Филиппова Т.Ф. Построение многозначных оценок множеств достижимости некоторых нелинейных динамических систем с им-

пульсным управлением // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2009. – Т. 15. – №. 4. – С. 262-269.

10. *Lempio F., Veliov V.* Discrete approximations of differential inclusions // Bayreuther Mathematische Schriften. – 1998. – Т. 54. – С. 149-232.

11. *Ушаков А.В.* Об одном варианте приближенного построения разрешающих управлений в задаче о сближении // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2012. – №. 4. – С. 94-107.

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

А.Л. Фрадков

(ИПМаш РАН, 199178, Россия, Санкт-Петербург, Большой пр. ВО, 61)

E-mail: fradkov@mail.ru

Р.Э. Сейфуллаев

(ИПМаш РАН, 199178, Россия, Санкт-Петербург, Большой пр. ВО, 61)

E-mail: ruslan.seifullaev@yandex.ru

DISCRETIZATION OF CONTROL SYSTEMS

A.L. Fradkov

(IPME RAS, 199178, St. Petersburg, Bolshoy pr. VO, 61),

R.E. Seifullaev

(IPME RAS, 199178, St. Petersburg, Bolshoy pr. VO, 61)

Keywords: discretization, control system, input-delay approach

Введение. Современные системы управления, как правило, реализуются на компьютерах и, следовательно, переменные в них меняются дискретно во времени. При расчете и реализации таких систем возникает важная задача выбора шага (интервала) дискретизации, а также алгоритма управления так, чтобы обеспечить устойчивость и приемлемое качество системы. Даже для линейных систем эта задача не является тривиальной, если требуется не просто доказать, что при достаточно малом шаге дискретности система сохраняет свойства непрерывной, а найти достаточно хорошие, «неконсервативные» оценки предельно допустимой величины шага дискретизации. Для нелинейных непрерывно-дискретных (гибридных) систем эта задача, несмотря на ее важность, изучена недостаточно.

В последние годы в мировой литературе проявляется значительный интерес к новому подходу, основанному на преобразовании дискретно-непрерывного описания системы к виду непрерывной системы с переменным (пилообразным) запаздыванием. Сама идея не нова: впервые, по-видимому, она рассматривалась в [1, 2, 3], а метод функционалов Ляпунова-Красовского давно и широко применяется для анализа систем с запаздыванием (например, см. [4, 5]). Однако в сочетании с

предложенными Э.М. Фридман обобщенным функционалом Ляпунова–Красовского [6] и так называемым дескрипторным методом исследования систем с запаздыванием [7] идея приобрела эффективную расчетную составляющую, основанную на численных процедурах решения линейных матричных неравенств (LMI) и превратилась в мощный метод расчета, позволяющий существенно снизить консервативность оценок. Таким образом, можно говорить о фридмановских оценках шага дискретизации систем. Эти оценки приобрели в последние годы большую популярность, а соответствующие работы Э.М. Фридман стали высокоцитируемыми. Метод был распространен на системы с существенным коммуникационным запаздыванием и нетривиальными сетевыми протоколами, системы с событийной дискретизацией и т.п. В статьях авторов доклада [8, 9] метод Фридман был распространен на класс нелинейных систем с произвольным количеством секторных нелинейностей, так называемых систем Лурье.

В настоящем докладе дается обзор методов дискретизации и оценок, полученных по методу Фридман, а также смежные результаты. Излагаются результаты [8, 9], а также их обобщения [10, 11, 18, 19, 20] и примеры. Предполагается, что система замкнута дискретизованной по времени обратной связью. Задача состоит в оценивании границы шага дискретизации, ниже которой система абсолютно устойчива. Эффект квантования моделируется как пилообразное запаздывание с последующим построением и применением функционала Ляпунова–Красовского [6]. На основании метода S-процедуры [9] задача оценивания границы шага дискретизации сводится к анализу разрешимости системы линейных матричных неравенств. Рассматривается также задача синтеза: определения параметров регулятора, обеспечивающих для шага дискретизации наибольшую границу.

Представлены также обзор результатов по анализу дискретных и гибридных стохастических систем на основе их аппроксимации при помощи непрерывной детерминированной модели [12, 13]. Результаты иллюстрируются примерами применения полученных результатов для расчета сетевых систем управления.

Метод Фридман для линейных систем. Рассмотрим линейную систему:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояний, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ – управление, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – постоянные матрицы. Поскольку большинство современных систем управления реализуют алгоритмы с помощью цифровых процессоров, предположим, что управляющий сигнал генерируется в виде кусочно-постоянной функции

$$u(t) = u_d(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}$$

вместе с бесконечной последовательностью $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$ моментов переключения, причем интервалы дискретизации могут быть как постоянными $t_{k+1} - t_k \equiv h$, так и переменными $t_{k+1} - t_k$. Во втором случае накладывается следующее предположение $t_{k+1} - t_k < h \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$

Пусть закон управления задан в виде линейной обратной связи по состоянию

$$u(t) = Kx(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}.$$

Целью является анализ устойчивости (в зависимости от границы h) замкнутой системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad A_1 = BK. \quad (2)$$

Одним из способов исследования является классический переход к дискретной системе путем интегрирования модели (2). В случае интервалов дискретизации постоянной длины получим в результате линейную дискретную систему

$$x(t_{k+1}) = Dx(t_k), \quad D = e^{Ah} + \int_0^h e^{As} ds A_1, \quad (3)$$

которая является устойчивой, если спектральный радиус матрицы D строго меньше 1. Данный подход привлекателен простотой условия устойчивости, однако главным его недостатком является потеря информации о системе в промежутках между узлами t_k . Также возникают сложности при наличии неопределенностей в матрицах системы или при переменных интервалах дискретизации.

Другим подходом к данной задаче, который был предложен в работах [15, 16], является представление системы в виде гибридной (импульсной). Вводится новый вектор состояний $r = [x^T(t) \quad u^T(t)]$, и принимается во внимание следующее:

$$\dot{u}(t) = 0, \quad t \neq t_k, \quad u(t_k) = Kx(t_k^-),$$

в результате чего исходную систему можно представить в импульсной форме

$$\begin{aligned}\dot{r}(t) &= \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} r(t), \quad t \neq t_k, \\ r(t_k) &= \begin{bmatrix} x(t_k^-) \\ Kx(t_k^-) \end{bmatrix}, \quad t = t_k.\end{aligned}\quad (4)$$

Устойчивость системы (4) исследуется с помощью сложной техники работы с гибридными и импульсными моделями (см., например, [17]).

Наиболее эффективным является подход, предложенный Э.М. Фридман и ее соавторами [1-3], при котором система (2) представляется как система с переменным (пилообразным) запаздыванием

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t - \tau(t)), \quad \tau(t) = t - t_k, \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (5)$$

Далее для исследования устойчивости системы с запаздыванием (5) применяется метод функционалов Ляпунова–Красовского, при котором простейший функционал имеет следующий вид:

$$V(x, \dot{x}) = x^T(t)Px(t) + \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)dsd\theta, \quad P, R > 0.$$

Затем вычисляется производная $\dot{V}$ по времени, и с помощью интегрального неравенства Йенсена условие $\dot{V} < 0$ выписывается в виде системы линейных матричных неравенств (LMI), анализ разрешимости которых позволяет судить об устойчивости исходной системы.

В работе Э.М.Фридман [6] был сделан значительный прорыв в данном подходе, а именно предложен новый вид функционала:

$$\begin{aligned}V(t, x_t, \dot{x}_t) &= x(t)^T Px(t) + (h - \tau(t)) \int_{-\tau(t)}^0 e^{2\alpha s} \dot{x}^T(t+s) Q \dot{x}(t+s) ds \\ &+ (h - \tau(t)) \zeta^T \begin{bmatrix} \frac{X + X^T}{2} & -X + X_1 \\ * & -X_1 - X_1^T + \frac{X + X^T}{2} \end{bmatrix} \zeta,\end{aligned}$$

где $\zeta = [x(t); x(t - \tau(t))]^T$, матрицы $P, Q > 0$, а X, X_1 – произвольные матрицы соответствующих размерностей. Для анализа $\dot{V}$ используются дескрипторный метод, неравенство Йенсена, метод свободных матричных переменных, дополнения Шура. Полученные линейные матричные

неравенства позволяют получить достаточно хорошие оценки (превосходящие полученные другими методами) на максимальную длину интервалов дискретизации, при которой система сохраняет устойчивость. Например, для системы $\dot{x}(t) = -x(t_k)$, $t_k \leq t < t_{k+1}$ с помощью данного подхода установлено, что устойчивость сохраняется вплоть до $h < 1,99$ (аналитическая граница устойчивости $h = 2$), в то время как другие методы гарантировали устойчивость только для $h < 1,57$.

В работах [18, 19] данный подход был применен для систем, заданных уравнениями в частных производных с распределенными параметрами, где для уменьшения количества передаваемой информации использовался событийный регулятор.

В работе [20] метод был улучшен с помощью неравномерного разбиения интервала дискретизации на два интервала: $[t_k, t_k + \alpha(t_{k+1} - t_k)]$ и $[t_k + \alpha(t_{k+1} - t_k), t_{k+1}]$, где α играет роль настроечного параметра, что приводит к улучшению точности оценок.

Дискретизация нелинейных систем. В работах [8-9] метод Фридман был распространен на класс нелинейных систем с секторными нелинейностями:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \sum_{i=1}^N q_i \xi_i(t) + (B + B_0 \xi_0(t))u(t), \\ \sigma_0(t) &= r_0^T x(t), \quad \xi_0(t) = \varphi_0(\sigma_0(t), t), \\ \sigma_i(t) &= r_i^T x(t), \quad \xi_i(t) = \varphi_i(\sigma_i(t), t), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (6)$$

где нелинейности $\varphi_i(t)$ являются секторными, а $\varphi_0(t)$ – ограниченной.

Для анализа устойчивости использовался вид функционалов, предложенный в [6]. Основной идеей учета присутствия нелинейностей в системе являлся метод S-процедуры В.А. Якубовича (которая неуязвима в случае одной нелинейности). Полученные LMI позволяют оценить максимальную границу шага квантования, при которой система (6) является экспоненциально устойчивой с регулятором $u(t) = Kx(t_k)$. Например, для задачи стабилизации маятника в вертикальном положении

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \sin \varphi(t) + \frac{1}{ml^2} Kx(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad t_{k+1} - t_k = h,$$

с параметрами $g = 9,8$, $l = 1$, $m = 2$, $K = [-23,6 \ -6]$ было установлено, что система является экспоненциально устойчивой при $h \leq 0,302$, в то время как компьютерное моделирование определило оценку $h < 0,42$, что в

условиях присутствия в системе нелинейности является достаточно хорошим результатом.

В работе [11] подход расширен для класса нелинейных систем с неопределенностями в матрицах системы (робастная устойчивость).

В работе [10] предлагается использовать событийное (event-triggered) управление нелинейными системами, при котором сокращается количество передаваемой информации через сетевой канал связи. С использованием метода Фридман определяется максимально возможное время отсутствия управляющего воздействия на систему, при котором она сохраняет устойчивость. Подход продемонстрирован на примере задачи синхронизации [14] двух хаотических систем Чуа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мухеев Ю.В., Соболев В.А., Фридман Э.М.* Асимптотический анализ цифровых систем управления // *АиТ*. 1988. № 9. С. 83-88.
2. *Micheev Yu., Sobolev V., Fridman E.* Asymptotic Analysis of Digital Control Systems // *Autom. Remote Control*. 1988. V. 49. No. 9. P. 1175-1180.
3. *Фридман Э.М.* Использование моделей с последействием в задаче синтеза оптимальных цифровых систем управления // *АиТ*. 1992. № 10. С. 55-60.
4. *Fridman E.* Use of Models with Aftereffect in the Problem of Design of Optimal Digital Control // *Autom. Remote Control*. 1992. V. 53. No. 10. P. 1523-1528.
5. *Fridman E., Seuret A., Richard J.P.* Robust Sampled-Data Stabilization of Linear Systems: an Input Delay Approach // *Automatica*. 2004. V. 40. No. 8. P. 1441-1446.
6. *Kharitonov V.L., Zhabko A.P.* Lyapunov-Krasovskii Approach to the Robust Stability Analysis of Time-Delay Systems // *Automatica*. 2003. V. 39. No. 1. P. 15-20.
7. *Гелиг А.Х., Зубер И.Е.* Инвариантная стабилизация некоторых классов неопределенных систем с запаздывающим аргументом // *АиТ*. 2011. № 9. С. 161-172.
8. *Gelig A.H., Zuber I.E.* Invariant Stabilization of Classes of Uncertain Systems with Delays // *Autom. Remote Control*. 2011. V. 72. No. 9. P. 1941-1950.

9. *Fridman E.A* Refined Input Delay Approach to Sampled-Data Control // *Automatica*. 2010. V. 46. No. 2. P. 421-427.
10. *Fridman E.* New Lyapunov-Krasovskii Functionals for Stability of Linear Retarded and Neutral Type Systems // *Systems & Control Letters*. 2001. V. 43. No. 4. P. 309-319.
11. *Seifullaev R.E., Fradkov A.L.* Sampled-Data Control of Nonlinear Oscillations Based on LMIs and Fridman's Method // 5th IFAC Int. Workshop on Periodic Control Syst. P. 95-100. Caen, France. 2013.
12. *Seifullaev R.E., Fradkov A.L.* Linear matrix inequality-based analysis of the discrete-continuous nonlinear multivariable systems. *Automation and Remote Control*, June 2015, V. 76, Is. 6, pp. 989-1004.
13. *Seifullaev R.E., Fradkov A.L.* Event-Triggered Control of Sampled-Data Nonlinear Systems. *IFAC-PapersOnLine*, 2016, Vol. 48, Is. 14, pp. 12-17. Preprints, 6th IFAC International Workshop on Periodic Control Systems June 29 – July 1, 2016. Eindhoven, The Netherlands.
14. *Seifullaev R.E. and Fradkov A.L.* Robust nonlinear sampled-data system analysis based on Fridman's method and S-procedure. *Intern. Journal of Robust and Nonlinear Control*, V. 26, Is. 2, 2016, pp.201-217.
15. *Fradkov A.L.* Continuous-Time Averaged Models of Discrete-Time Stochastic Systems: Survey and Open Problems. *Proc. 50th IEEE Conf.Dec. Contr. Orlando*, 2011, pp.2076-2081.
16. *Fradkov A.L.* Averaged Continuous-Time Models in Identification and Control. *Proc. Europ. Contr. Conf.* 2014, Strasbourg, pp. 2822-2826.
17. *Фрадков А.Л.* Кибернетическая физика: принципы и примеры. СПб.: Наука, 2003. С. 208.
18. *Sivashankar N., Khargonekar P.* Characterization of the L_2 -induced Norm for Linear Systems with Jumps with Applications to Sampled-Data Systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, V.32, Is.4, 1994, pp. 1128-1250.
15. *Basar T., Bernard P.* H-infinity Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamic Game Approach. Birkhäuser, Boston, MA, 1995.
15. *Naghshtabrizi P., Hespanha J., Teel A.* Exponential stability of impulsive systems with application to uncertain sampled-data systems. *Systems & Control Letters*, V. 57, 2008, pp. 378-385.

15. *Selivanov A., Fridman E.* Distributed event-triggered control of diffusion semilinear PDEs. *Automatica*, V. 68, 2016, pp. 344-351.

15. *Selivanov A., Fridman E.* Distributed event-triggered control of transportreaction systems. In 1st IFAC conference on modelling, identification and control of nonlinear systems, 2015, pp. 597-601.

15. *Tae H. Lee, Ju H. Park.* Improved criteria for sampled-data synchronization of chaotic Lur'e systems using two new approaches. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, V. 24, 2017, pp. 132-145.

ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОГРАММНЫЕ КОНСТРУКЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

А.Г. Ченцов

(ИММ УрО РАН, Россия, 620990, Екатеринбург, С.Ковалевской, 16)

E-mail: chentsov@imm.uran.ru

THE ITERATED PROGRAMMED CONSTRUCTIONS FOR SOLUTION OF DIFFERENTIAL GAMES

A.G. Chentsov

(IMM UB RAS 16 S.Kovalevsky str., Yekaterinburg, Russia, 620990)

Keywords: theorem about alternative, method of programmed iterations, quasi-strategy.

Введение. В рамках теории дифференциальных игр (ДИ) исследуются различные задачи управления в условиях неопределённости, непредсказуемых факторов, помех. Фундаментальными фактами данной теории являются теорема об альтернативе [1, 2] в ДИ сближения-уклонения, установленная Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным, и связанное с этой теоремой положение о существовании седловой точки в соответствующих классах позиционных стратегий. Важное обобщение теоремы об альтернативе было получено А.В. Кряжимским, распространившим её утверждение на случай управляемых систем, не удовлетворяющих условию Липшица по фазовой переменной. В работах Н.Н. Красовского и его учеников для решения ДИ широко использовались вспомогательные программные конструкции (имеется в виду теория регулярных дифференциальных игр) с элементами расширений в классе управлений-мер; см. [2, 4, 5]. Естественным развитием подхода, связанного с применением игровых задач программного управления для решения позиционных ДИ, является метод программных итераций (МПИ); см. [6-10] и др. Общая логика данного метода связана с применением (для построения решения ДИ) игровых задач программного управления. Каждый вариант МПИ характеризуется своей специальной задачей программного управления, зависящей от некоторого параметра. После решения соответствующей программной задачи производится замена параметра результатом, достигаемым посредством решения

упомянутой задачи; возникает рекуррентная процедура. Известны три варианта МПИ:

процедура построения функции цены ДИ (как правило применяется в случае ДИ с фиксированным временем окончания);

процедура построения множества успешной разрешимости задачи сближения (максимального стабильного моста в смысле Н.Н. Красовского);

процедура построения многозначной квазистратегии, разрешающей задачу сближения, либо аналогичную по смыслу абстрактную задачу.

Определённый итог ранних исследований по МПИ был подведён в монографии [11] (см. главы IV-VI). В связи с продолжением работ автора по МПИ отметим также [12-14], где, в частности, была отмечена возможность применения МПИ для решения задачи уклонения с ограничением на число переключений. Логика решения последней задачи соответствует известному в инженерной практике подходу, связанному с управлением по функционалу (имеется в виду вопрос о выборе очередного момента переключения формируемого управления).

Постановка задачи. Рассмотрим на идейном уровне подход к решению ДИ сближения-уклонения, связанный с применением МПИ. У нас имеется управляемая система, находящаяся под воздействием управления и помехи и описываемая нелинейным векторным дифференциальным уравнением. Полагаем, что управление формирует игрок I, а помеху – игрок II. Цель игрока I состоит в приведении траектории системы на целевое множество M в пределах множества N , сечения которого определяют фазовые ограничения (ФО); цель игрока II противоположна. Предполагаем выполненным условие седловой точки в так называемой маленькой игре (см. [1]), что позволяет [2-5] ограничиться использованием чистых позиционных стратегий (напомним, что в [1,2] ограничения на выбор управления и помехи предполагались геометрическими и определялись парой непустых конечномерных компактов; ДИ сближения-уклонения в [1-3] рассматривалась на конечном промежутке времени, а каждое из множеств M , N предполагалось замкнутым в пространстве позиций с оснащением стандартной топологией координатной сходимости). Упомянутые стратегии соответствуют законам управления по принципу обратной связи.

Согласно альтернативе Н.Н. Красовского, А.И. Субботина множество N допускает разбиение в дизъюнктивную сумму двух подмножеств (п/м), одно из которых является множеством успешной разрешимости игрока I, а второе – множеством успешной разрешимости игрока II (элементами обоих множеств являются позиции игры). Первое из упомянутых множеств – множество позиционного поглощения (МПП) – является стабильным в смысле Н.Н. Красовского мостом, упирающимся в M и являющимся п/м N . Для позиций из МПП конкретная стратегия, разрешающая задачу игрока I, определяется [1,2] правилом экстремального сдвига на данное МПП. Таким образом, построение МПП полностью определяет решение ДИ сближения-уклонения. Отметим, что данное «позиционное» решение эквивалентно решению ДИ в классе квазистратегий, так как совпадают соответствующие альтернативные разбиения N .

Естественный способ применения МПИ для построения МПП сводится по сути дела к «копированию» исходной позиционной задачи сближения в классе обобщённых программных управлений-мер. Получающаяся игровая задача программного управления зависит от множеств M и N , играющих роль параметров. Множество успешной разрешимости данной задачи предлагается использовать вместо N , получая новую задачу программного управления. Далее упомянутая процедура, связанная с заменой множества, определяющего ФО, неограниченно (в общем случае) повторяется. Итак, сама процедура на основе данной версии МПИ сводится к последовательному сжатию ФО. Особенности применяемого варианта МПИ в сравнении с [7] состоит в следующем:

1) рассматривается конфликтно-управляемая система, удовлетворяющая условиям обобщённой единственности и равномерной ограниченности траекторий, предложенным А.В. Кряжимским;

2) множество N не предполагается замкнутым в топологии поординатной сходимости; предполагается только, что его сечения замкнуты в фазовом пространстве системы.

Реализуемый в виде пересечения всех множеств-итераций предел оказывается неподвижной точкой оператора сжатия фазовых ограничений и, как множество в пространстве позиций, обладает свойством 2). Более того, данное предельное множество является наибольшей, в упорядоченности по включению, неподвижной точкой упомянутого опера-

тора на семействе всех п/м N . Таким образом, получающееся предельное множество обладает всеми основными свойствами МПП Н.Н. Красовского, А.И. Субботина, то есть является аналогом максимального стабильного моста в «стандартной» ДИ сближения-уклонения. С учётом этого упомянутое предельное множество, построенное при более общих (в сравнении с [7]) условиях 1), 2), будем именовать МПП.

Важно то, что при построении данного МПП посредством итерационной процедуры могут использоваться различные, вообще говоря, модификации оператора, реализующего сжатие ФО и доставляющего всякий раз множество успешной разрешимости игровой задачи программного управления. Дело в том, что в основе конструкции упомянутого оператора находится принцип реагирования скользящим режимом на то или иное управление игрока II, выбираемое из некоторого наперёд заданного множества. Отметим сейчас только два крайних случая: а) игрок II может выбирать любое обобщённое управление-меру, отвечающее оставшемуся промежутку управления; б) игроку II разрешается выбирать только постоянное обычное управление из конечномерного компакта, участвующего в определении геометрических ограничений в варианте Л.С. Понтрягина. В случае а) оператор, реализующий последовательное сжатие ФО, называем оператором программного поглощения. В случае б) используем следующий термин: оператор стабильности. Каждый из вариантов а), б) реализует в пределе (одно и то же) МПП.

Случай а) удобен с точки зрения построения решения задачи сближения в классе обобщённых многозначных контрстратегий (см. [15, 16]). При этом МПП совпадает с множеством успешной разрешимости задачи сближения в классе квазистратегий (сами квазистратегии определяются в виде неупреждающих откликов на помеховые реализации). Если начальная позиция содержится в МПП, то разрешающая (задачу сближения) квазистратегия определяется в терминах «программной реакции» на обобщённое управление игрока II, построенной из соображений, связанных с достижением M при ФО, определяемых сечениями МПП. Так построенная квазистратегия именуется квазипрограммой и является наибольшим в упорядоченности, определяемой поточно по включению, элементом множества всех квазистратегий, разрешающих задачу сближения из данной позиции (содержащейся в

МПП). Отметим, что реализация разрешающих квазистратегий может осуществляться в схеме управления с поводырём (моделью); данный вариант изложен в [17] (процедура управления с поводырём предложена Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным, см. [2]).

Вариант б), то есть процедура [12] на основе оператора стабильности (реализующая, как и в случае а), в пределе МПП), представляет интерес с точки зрения решения игровой задачи уклонения при ограничении на число переключений формируемого управления. В частности, на каждом этапе итерационной процедуры дополнение до N получившегося на данном этапе множества исчерпывает возможности игрока Π (уклони́ста) в смысле совокупности позиций, успешных для игрока Π в упомянутой игровой задаче. При этом осуществимость (в условиях ограничения на число переключений) «обычного» (M, N) -уклонения эквивалентна осуществимости строгого уклонения, то есть уклонения при замене множеств M и N некоторыми окрестностями.

В каждом из вариантов а), б) реализация итерационной процедуры осуществляется (для замкнутого множества M и множества N , имеющего замкнутые сечения) в семействе всех п/м N , замкнутых в (относительной) топологии покоординатной сходимости N , рассматриваемого как подпространство исходного пространства позиций. В итоге получаем следующий общий факт: в топологии покоординатной сходимости МПП не замкнуто ровно настолько, насколько не замкнуто N (МПП есть пересечение N и некоторого замкнутого множества). Аналогичным свойством обладают множества-итерации. Если же N замкнуто, то обе итерационные процедуры реализуются в семействе замкнутых (в обычном покоординатном смысле) п/м пространства позиций; аналогичным свойством замкнутости обладает и МПП, что согласуется с альтернативой Н.Н. Красовского, А.И. Субботина.

В связи с реализацией итерационных процедур а), б) отметим работу [18], где рассматривались некоторые классы линейных задач управления с фиксированным моментом окончания. К задачам, рассматриваемым в [18], сводятся постановки, в которых исследуется задача наведения на открытое целевое множество в фиксированный момент времени. В основе построения итерационной процедуры [18] в пространстве множеств находится идея скалярной параметризации, намеченная в [11, гл. V] и в [12]: устанавливается, что множества-

итерации имеют «одну и ту же форму», но зависят при этом от числового параметра; итерационная процедура «переносится» в числовую прямую, что и позволяет быстро найти МПП и построить все итерации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Альтернатива для игровой задачи сближения// Прикладная математика и механика. 1970. Т. 34, № 6. С. 1005-1022.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
3. Кряжмский А.В. К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения// Доклады АН СССР. 1978. Т. 239, № 4. С. 779-782.
4. Красовский Н.Н. Дифференциальная игра сближения-уклонения, I// Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973. № 2. С. 3-18.
5. Красовский Н.Н. Дифференциальная игра сближения-уклонения, II// Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973. № 3. С. 22-42.
6. Ченцов А.Г. О структуре одной игровой задачи сближения //Доклады АН СССР. 1975. Т. 224, № 6. С. 1272-1275.
7. Ченцов А.Г. К игровой задаче наведения// Доклады АН СССР. 1976. Т. 226, № 1. С. 73-76.
8. Ченцов А.Г. Об игровой задаче сближения в заданный момент времени// Мат. сб. 1976. Т. 99. № 3. С. 394-420.
9. Чистяков С.В. К решению игровых задач преследования // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41, № 5. С. 825-832.
10. Ухоботов В.И. Построение стабильного моста для одного класса линейных игр// Прикладная математика и механика. 1977. Т.41, № 2. С. 358-364.
11. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 286 с.
12. Ченцов А.Г. Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения-уклонения/ Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР. Деп. в ВИНТИ, 04.06.79, № 1933-79, 103 с.
13. Ченцов А.Г. О задаче управления с ограниченным числом переключений/ Свердловск: УПИ им. С.М. Кирова, 1987, Деп. в ВИНТИ, № 4942-B87, 44 с.

14. *Ченцов А.Г.* О дифференциальных играх с ограничением на число коррекций, 2/ Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР, 1980, Деп. в ВИНТИ, № 5406-80, 55 с.

15. *Ченцов А.Г.* Метод программных итераций в игровой задаче наведения// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 304-321.

16. *Ченцов А.Г.* Метод программных итераций в игровой задаче наведения// Вестник УдГУ. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. № 2. С. 271- 282.

17. *Кряжиский А.В., Ченцов А.Г.* О структуре игрового управления в задачах сближения и уклонения/ Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР. Деп. в ВИНТИ, № 1729-80, 1779. 72 с.

18. *Дятлов В.П., Ченцов А.Г.* Об одном классе линейных дифференциальных игр с ограниченным числом коррекций/ В сб. Управление и оценивание в динамических системах. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. С. 9-16.

НИКОЛАЙ ГУРЬЕВИЧ ЧЕТАЕВ

К.Е. Якимова

(МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, пр-т Вернадского, 93-1-153)

E-mail: keyakimova@yandex.ru,

Ефимов, Г.Б.

(Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша)

E-mail: efimov@keldysh.ru

NIKOLAY GURIEVICH CHETAEV

Yakimova K.E.

(MSU), Efimov G.B. (Keldysh Institute of Applied Mathematics)

В этом году исполняется 115 лет со дня рождения Николая Гурьевича Четаева – большого ученого и замечательного человека.

Он родился 6 декабря, 1902 года, в себе Карадули Лаишевского уезда Казанской губернии (ныне республика Татарстан), в семье сельского дьячка Гурия Ивановича Четаева и Веры Всеволодовны Четаевой-Кедровой. В 1904 году у них родился второй сын – Аркадий. В 1929 году отец сложил с себя сан и судя по листкам учета кадров Николая Гурьевича, числился чернорабочим.

К этому времени семья переехала в Казань и Николай Гурьевич учился последовательно: в начальной школе № 28 города Казани, в третьей гимназии, ставшей затем, в советское время школой № 3 второй ступени, которую он закончил в 1919 году. Некоторое время он работал в военкомате (Чепчуги, под Казанью), а в 1920 году поступил на математическое отделение физико-математического факультета Казанского университета.

По воспоминаниям его друга профессора С.В. Жданова, с которым Николай Гурьевич учился вместе в школе, лекции в университете они стали посещать еще будучи школьниками. Будучи очень увлеченным студентом, он становится председателем студенческого кружка им. Н.И. Лобачевского и вскоре публикует свою первую научную работу «Дифракция света в непрозрачных средах».

В 1924 году Николай Гурьевич заканчивает университет и осенью женится на Марии Васильевне Ждановой, с семьей которой он был зна-

ком с детства. В 1936 году Мария Васильевна скончалась от туберкулеза. У них был сын Дмитрий. До января 1926 года, когда Николай Гурьевич был зачислен в аспирантуру, он, занимаясь репетиторством, продолжал занятия наукой.

Будучи аспирантом профессора Дмитрия Николаевича Зейлигера по кафедре механики, Николай Гурьевич выполнил и опубликовал ряд серьезных исследований по устойчивости и аналитической механике. Его работы связаны с именем А.М. Ляпунова, на труды которого его внимание обратил академик В.А. Стеклов, с которым он состоял в переписке со студенческих лет, и А. Пуанкаре, работы которого им были изучены досконально. Эти два имени были названы им в аспирантском плане, автограф, которого, к сожалению, не сохранился.

По окончании аспирантуры за научные успехи ему была предоставлена ВСНХ СССР годичная командировка в Германию для работы в Аэрогидродинамическом институте Гёттингентского университета. Здесь он занимался в передовой для того времени аэродинамической школе Прантля.

Командировке предшествовала полемика в газете «Красная Татария» (№ 47 от 28.02. 1929): обсуждалось, почему вместо того, чтобы выдвигать «новых советских работников», за границу посылают «поповича». На этот выпад ответил научный руководитель Николая Гурьевича (№ 50 от 03.03. 1929):

...«Тов. Четаев за 3 года своего аспирантства успел выполнить 9 (девять) исследований, посвященных серьезнейшей проблеме – устойчивости движения. О высокой ценности этих работ можно судить хотя бы по тому, что 4 из них опубликованы в «Записках» 2-х Академий наук Всесоюзной и Парижской. Таковы факты. Профессор механики Казанского университета Д. Зейлигер».

Сразу после командировки Николай Гурьевич Четаев становится доцентом (03.09.1930 г.), а вскоре и профессором Казанского университета. На последней должности он оставался вплоть до перевода в Москву в 1940 году. О своей деятельности по возвращении в Казань Николай Гурьевич впоследствии вспоминал: «Из командировки я вернулся в начале 30-го года и должен был продолжать дело Дмитрия Николаевича самостоятельно, так как он перевелся в другой город».

В 1930 году Николай Гурьевич организует в Казанском университете аэродинамическое отделение, а также поднимает вопрос о необходимости открытия аэродинамической лаборатории. В 1932 году в Казани начинается строительство авиационного завода. Четаев принимал в этом самое активное участие: по воспоминаниям казанцев, Николай Гурьевич вместе с членами комиссии по строительству верхом на лошадях, по бездорожью объезжали окрестности Казани в поисках подходящей строительной площадки. В связи с необходимостью обеспечения этого завода квалифицированными кадрами в начале 1939 года, на базе аэродинамического отделения КГУ организуется Казанский авиационный институт (КАИ), ныне – Казанский научно-исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева (КНИТУ-КАИ).

В КАИ в первые годы было два отделения: самолетостроительное и аэродинамическое. Аэродинамическим отделением фактически руководил Николай Гурьевич. Основная работа по организации учебного процесса, обеспечение института кадрами, учебной литературой, выполнялись под его руководством. Он активно участвовал в разработке программ основных курсов КАИ и КГУ по различным механическим дисциплинам, некоторые из которых читал сам (аэромеханика, гидродинамика, теория крыла, устойчивость движения и др.). До 1934 года Четаев исполнял обязанности зам. директора КАИ по научной и учебной части. С целью подготовки кадров среднего звена для авиационных заводов, по его инициативе в 1932 г. был открыт авиационный техникум.

Таким образом, основа для развития авиации в Казани была создана именно благодаря энергии Николая Гурьевича. В то время как в Москве такая основа была создана Д.М. Рябушинским, построившим аэродинамическую лабораторию в Кучино еще до революции, и Н.Е. Жуковский начинал свою работу там. Николай Гурьевич в Казани начинал все с чистого листа. И это в 28-30 лет. На I-й Четаевской конференции память о Николае Гурьевиче была увековечена мемориальной доской на КАИ. Сейчас этой доски почему-то нет.

В 30-е годы по инициативе НГ начинает работать научный семинар (*Vermutungsseminar*), объединяющий всех научных работников Казани. В семинаре кроме молодых ученых (И.Г. Малкин, К.П. Персидский, Г.В. Каменков, математик Н.Г. Чеботарев), принимали участие ученики Четаева и члены его научной школы, благодаря которым и их

последователям, традиции заложенные семинаром, сохраняются в КАИ и в университете до сих пор. Кафедрой теоретической механики в авиационном институте заведовал ученик Четаева П.А. Кузьмин, а кафедрой аэромеханики – его ученик С.Г. Нужин.

В отзыве на научные труды Четаева (1958 г., архив кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ) этот период характеризуется так:

«... в Казани в эти годы образовалась группа ученых, поставивших своей целью глубокое изучение и развитие научного наследия великого русского ученого А.М. Ляпунова, создавшего основы теории устойчивости движения. Так возникла казанская школа механиков, широко известная работами по развитию второго метода Ляпунова ...».

Как высоко ценил Николай Гурьевич Ляпунова, видно из его письма академику В.И. Смирнову (08.10.1949 г.):

«Меня очень радует, что Вы добились от С.И. Вавилова принципиального разрешения издать полное собрание сочинений Ляпунова. Это очень большое дело. Я несколько раз безрезультатно пытался ставить этот вопрос в среде механиков. В моих глазах Ляпунов является в теоретической механике ... гигантской фигурой ... В прикладной механике, где допускается вносить гипотезы и упрощения, нашей гордостью являются Н.Е. Жуковский и С.А. Чаплыгин. Сочинения последних издаются уже вторым изданием, а сочинения Ляпунова, к нашему стыду, не были изданы ни разу».

В 1940 году Николай Гурьевич переводится на работу в Москву по инициативе академиков Л.С. Лейбензона и С.А. Чаплыгина. Вот представление Лейбензона:

« Ак.-секретарю Отд. Техн. Наук АН СССР, Василию Петровичу Никитину. Рекомендую на должность заведующего отделом общей механики Института Механики АН профессора, доктора физико-математических наук Н.Г. Четаева, являющегося по моему и академика С.А. Чаплыгина мнению, крупнейшим специалистом в области общей механики в СССР. Л.С. Лейбензон, 22.08.1940 года».

С октября 1940 года Николай Гурьевич становится заведующим отделом общей механики Института механики АН СССР и остается на этой должности до кончины. В том же 40-м году, Л.С. Лейбензон ходатайствует о принятии Николая Гурьевича на должность профессора

кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ. Обращаясь с «Заявлением» Ученый Совет мех-мата (17.09.40 г.), он писал:

«Механика в МГУ в настоящее время находится в тяжелом положении. Совершенно не преподается теория устойчивости равновесия и движения, получившая снова крупнейшее значение. МГУ попал в трудное положение, так как очень важные проблемы устойчивости тонкостенных конструкций, играющие центральную роль в самолетостроении, упираются в неотложную необходимость разработки общей теории устойчивости. Но некому у нас вести этой важной работы. Начав теперь же работу в нашем университете, профессор Четаев Н.Г. создаст новую школу работников по вопросам устойчивости. Новым избранием мы можем завоевать те командные высоты, которые со смертью Н.Е. Жуковского были утрачены. Вот почему я от имени кафедры позволяю просить о срочном избрании профессором Н.Г. Четаева, который поможет выйти из того тупика, в котором мы находимся».

В октябре 1940 года, Четаев был избран по конкурсу на должность профессора кафедры теории упругости по разделу устойчивости, но уже в следующем году, с началом Великой отечественной войны Николай Гурьевич оказывается опять в Казани (туда был эвакуирован Институт механики АН), где продолжил свои контакты с научными сообществами КГУ и КАИ. На их базе возобновляется научная работа коллектива, начинают работать семинары по аэромеханике, по общей механике. Ряд сотрудников Института механики обращаются к оборонной тематике. Из письма академика Н.Е. Кочина своему аспиранту:

«Ряд работников института перешел на темы оборонного характера; я, Смирнов, Шор и Четаев занимались темами артиллерийского характера».

Николай Гурьевич изучает вопросы устойчивости траектории снарядов, мин, самолета при посадке с учетом дефектов посадочной площадки.

В нелегких условиях эвакуации многие сотрудники нашли в Четаеве опору при устройстве в Казани. В частности, Николай Гурьевич очень поддержал семью академика Н.Е. Кочина, который в это время оказался серьезно болен (из воспоминаний академика П.Я. Кочиной). Человеческие качества Николая Гурьевича раскрывают воспоминания

Н.П. Еругина, которыми он поделился на первой Четаевской конференции. Когда Николай Гурьевич узнал, что Еругин находится в казанском госпитале, он разыскал его, своим теплым участием поддержал в очень трудный момент жизни. Еругину после ранения ампутировали ногу. Посещения Николая Гурьевича, беседы на научные темы вернули Николая Павловича в научную жизнь.

В это же время Четаев работает и в КГУ. Читает ряд спецкурсов: «Вариационные принципы механики», «Теория притяжения» (сохранились напечатанными на ротапринте). В дальнейшем они вошли в лекции, прочитанные по теоретической механике, прочитанные на механико-математическом факультете МГУ в 1950-52 гг..

В 1943 году Николая Гурьевича избирают членом-корреспондентом АН СССР. Вот выдержки из одной из рекомендаций к избранию:

«Н.Г. Четаев является самым крупным специалистом Союза ССР по общей механике. Он широко известен как глава Казанской школы механиков, продвинувших вперед ряд принципиально важных и сложных вопросов, оставшихся неразрешенными в знаменитых работах А.М. Ляпунова по теории устойчивости. Н.Г. Четаеву принадлежат оригинальные исследования по общим принципам механики, теории фигур равновесия, оптике и др. вопросам механики и математики. В последнее время им выполнены важные работы по устойчивости самолета и снаряда. Академик Н.Е. Кочин. 16.05.1943 года».

После эвакуации Николай Гурьевич возглавил работу в Институте механики как заведующий отдела, а с 1945 года по 1953 год был директором Института. В это время Четаев поддерживает тесную связь с научными школами, которые возникли вследствие того, что после его отъезда из Казани, многие его единомышленники последовали его примеру, повлияв на возникновение новых научных коллективов в разных краях нашей страны. Г.В. Каменков организовал исследования по устойчивости в Московском авиационном институте. И.Г. Малкин, продолжая свою научную работу в Свердловске (Екатеринбурге), стоял у истоков одной из крупнейших школ по теории устойчивости, теории управления движением и теории игр. К.П. Персидский переехав в Алма-Ату, создал Казахскую школу теории устойчивости, представитель Свердловской школы Е.А. Барбашин – в Минск, возглавив Белорус-

скую школу теории устойчивости. М.Ш. Аминов, П.А. Кузьмин, С.Г. Нужин продолжили свою научно-педагогическую деятельность в Казани и воспитали целую плеяду специалистов по теории устойчивости и аналитической механике (В.М. Матросов, Т.К. Сиразетдинов, В.Н. Скимель и другие). В 1975 году В.М. Матросов с группой своих учеников и коллег был приглашен в Иркутск и создал Иркутскую школу динамики систем и теории управления. Сотрудничество с Н.П. Еругиным, который после войны вернулся в Ленинград, определило связь с ленинградцами. Позднее Еругин переехал в Минск.

Благодаря широким научным контактам и авторитету Н.Г. Четаева, Москва стала центром притяжения научных работников, интересы которых были связаны с устойчивостью движения и аналитической механикой. В Институте механики АН СССР под руководством Н.Г. Четаева стал работать семинар, быстро получивший широкую известность. На нем представлялись доклады не только по тематике четаевского отдела, но и в смежных областях. Часто с докладами выступали представители разных областей промышленности; так, на одном из заседаний была представлена серия докладов по проблеме баллонирования нити, подготовленная группой научных работников под руководством профессора А.Н. Минакова. Неоднократно выступали представители оборонных отраслей; в частности, по проблемам гироскопических систем выступала группа И.Г. Фридлендера (Институт гироскопии). В этом заседании активно участвовал Александр Юльевич Ишлинский, который на одном из заседаний семинара представил свою монографию «Теория гироскопов». Сотрудник отдела упругости А.А. Мовчан докладывал свои результаты по распространению второго метода Ляпунова на движение сплошных сред.

Большое внимание Николай Гурьевич уделял подготовке кадров: после войны его аспирантами были, например, В.В. Румянцев из Саратова, А.А. Богоявленский из Казани, Г.К. Пожарицкий из МГУ. Докторантом в пятидесятые годы был уралец Н.Н. Красовский. Вскоре после защиты кандидатских диссертаций докторантами стали также В.В. Румянцев и А.А. Богоявленский. В.В. Румянцев после кончины Н.Г. Четаева возглавил его отдел; он же стал руководителем семинара. Когда в 1965 г. Институт механики АН СССР был ликвидирован для реорганизации, Г.К. Пожарицкий и А.А. Богоявленский перешли в созданный

Институт проблем механики АН, В.В. Румянцев – в Вычислительный центр АН СССР, Б.С. Разумихин – в Институт автоматики и телемеханики. Тематика, заложенная московской школой Н.Г. Четаева, снова разветвилась, получив свое дальнейшее развитие. Семинар, руководимый В.В. Румянцевым, продолжил работу на мех-мате МГУ, а после кончины Валентина Витальевича – под руководством чл.-корр. РАН В.В. Белецкого и А.В. Карапетяна и сейчас носит имя В.В. Румянцева.

Много сил Николай Гурьевич отдавал работе в Московском университете. Еще в мае 1933 года математическое, механическое, астрономическое отделения были объединены в механико-математический факультет. На факультете по профилям механики было организовано 4 кафедры: теоретической механики (проф. А.И. Некрасов), теории упругости (проф. Н.Н. Бухгольц), гидродинамики (проф. Л.С. Лейбензон), аэродинамики (проф. В.В. Голубев). Некрасов заведовал кафедрой с 1933 по 1938 г.г., и с 1943 по мой 1957 г., до своей кончины. В 1944 г. (приказ № 7 от 10.01.1944 г.) по ходатайству академика А.И. Некрасова на должность профессора кафедры теоретической механики зачисляется Николай Гурьевич. Из письма А.И. Некрасова ректору МГУ академику А.Н. Несмеянову, президенту АН СССР:

«Николай Гурьевич Четаев, вместе с профессором Андреем Петровичем Минаковым суть два профессора нашего факультета собственно теоретической механики, столь редкие у нас в настоящее время, на которых и лежит почти все ядро преподавания теоретической механики в МГУ».

Лекции Николай Гурьевич читал блестяще. Виртуозно владел доской: несмотря на длинные выкладки, ему удавалось самые сложные вопросы курса излагать четко и ясно. Однажды, читая один из разделов устойчивости движения, он сослался на теорему Гурвица. Оказалось, что она аудитории не известна, и Четаев тут же с легкостью доказал ее. Для характеристики лекций Николая Гурьевича можно воспользоваться словами академика Н.Н. Лузина (хотя они относятся и к научным работам Четаева):

«Они превосходны ... Логическая строгость и ясность – полные. Использование классических приемов – искусное. И все это, я обязан очень подчеркнуть, изложено прекрасным русским языком, точности и

простоты превосходной. Видимо, автор замечательный стилист ... (26.09.1946)».

В процессе лекций всегда решались задачи, на обдумывание которых давалось время, и именно это давало уверенность в том, что читаются не какие-то абстрактные теории, а излагается инструмент, необходимый для решения конкретных (хотя и модельных) задач.

Кроме основного курса Николай Гурьевич регулярно читал спецкурс «Устойчивость движения», на основе которого была написана известная монография, получившая высокую оценку специалистов. Из отзывов на работы Н.Г. Четаева (1958 г., из архива кафедры):

«Монография Н.Г. Четаева «Устойчивость движения» стала настольной книгой инженеров и ученых, работающих в области устойчивости, а также учебником для вузов. В ней содержатся наиболее важные для приложений исследования, связанные с применением второго метода Ляпунова, в развитии которого Н.Г. Четаеву принадлежит огромная роль. До работ Н.Г. Четаева теория Ляпунова имела весьма ограниченное применение, и большая заслуга Н.Г. Четаева состоит в том, что в настоящее время теория устойчивости стала мощным средством решения важных задач техники и получила столько широкое распространение...»

В конце 50-х годов Николай Гурьевич прочел несколько спецкурсов для студентов и аспирантов: «Избранные главы аналитической механики», «Уравнения Пуанкаре», «Теория относительности». Все они пользовались большой популярностью и посещались большим числом слушателей, помимо студентов и аспирантов.

В это время по просьбе аспирантов кафедры теоретической механики Четаев начал вести семинар для них. Сначала на заседаниях заслушивались сообщения аспирантов по материалам их работы над диссертациями. Заседания проходили всегда весьма интересно и живо. Но очень скоро в работу семинара включились аспиранты Николая Гурьевича из Института механики, а также коллеги более зрелого возраста. Круг интересов семинара расширился. Несколько раз с сообщениями выступал сам Четаев, рассказывая о своих текущих исследованиях. Часть из них была им опубликована в статьях: «О гироскопе в кардановом подвесе», «О продолжении оптико-механической аналогии». Этот семинар нравился и самому Четаеву. Однажды, беседуя с прие-

хавшим из Казани П.А. Кузьминым и рассказывая ему о семинаре, сравнил этот семинар со знаменитым казанским, сказав, в заключение: «Даже лучше».

Конец 40-х и начало 50-х годов в СССР были трудными: и для страны и для науки. Известно, например, что по аналогии с генетикой, готовился разгром и физики, который не состоялся только благодаря академику И.В. Курчатову. В этой сложной обстановке Николай Гурьевич, даже будучи администратором (директором Института механики, 19.01.1946-23.09.1953), вел себя всегда независимо и достойно. По окончании очередного собрания на факультете (после сессии ВАСХ-НИЛ), на вопрос своего аспиранта С.И. Трушина: «Как ко всему этому нужно относиться?», Четаев просто изложил ему теорию Мальтуса (выводы делай сам).

Будучи редактором журнала «Прикладная математика и механика», он требовал, чтобы необходимые ссылки на иностранные источники присутствовали обязательно. В списках литературы для аспирантских экзаменов непременно содержались труды иностранных ученых: А. Пуанкаре, Е. Уиттекера, А. Эйнштейна, П. Аппеля и других. Когда умер Эйнштейн, Четаев попросил почтить его память минутой молчания на семинаре, это в то время (борьбы с космополитизмом) были смелые поступки.

После смерти А.И. Некрасова, в мае 1957 г., Николай Гурьевич становится заведующим кафедрой теоретической механики. К этому моменту сложилась такая ситуация, что курс теоретической механики преподавали люди, интересы которых были в стороне от этой науки. Бытовало мнение, что теоретическую механику может преподавать любой механик, а Четаев с самого начала своей деятельности на факультете настаивал на том, что необходимо готовить специальные кадры. Его работа была нацелена на укомплектование такими специалистами состава кафедры. Понимая актуальность вставшей на повестку дня космической тематики, Николай Гурьевич привлекает к работе тогда молодых энтузиастов этого дела: В.А. Егорова, В.А. Сарычева, Т.М. Энеева. В это время Николай Гурьевич приглашает и добивается зачисления на кафедру Д.Е. Охоцимского (всего за три с половиной месяца до своей кончины). Ректор МГУ академик И.Г. Петровский утверждает решение об избрании Дмитрия Евгеньевича по конкурсу на должность про-

фессора по кафедре теоретической механики механико-математического факультета. Николай Гурьевич уйдет из жизни 17 октября 1959 года и Д.Е. Охоцимский с 1962 года возглавит кафедру (в июне 1960 года он будет избран членом-корреспондентом АН СССР).

Николай Гурьевич заведовал кафедрой теоретической механики МГУ сравнительно недолго. Однако ему удалось заложить фундамент, на котором он поднял и на котором существует до сих пор кафедра теоретической механики и мехатроники МГУ, взрастившая целое сообщество прекрасных педагогов и ученых в области аналитической механики, устойчивости и управления.

Везде, где работал Николай Гурьевич (КГУ, КАИ, МАИ, ИМех, МГУ) его созидательная научная, педагогическая и организационная деятельность и духовое влияние оставляли неизгладимый след в истории страны и судьбах людей: учеников, членов его научных школ и школ, производных от них, последователей его творческого наследия, специалистов, воспитанных на его научных результатах и традициях, благородных людей, работающих для людей...

Многогранная научная деятельность Н.Г. Четаева и огромный вклад в развитие науки и образования были высоко оценены. В 1943 году Николай Гурьевич был избран членом-корреспондентом АН СССР по отделению «механики», а в 1947 г. – действительным членом Академии артиллерийских наук (ААН) по отделению «баллистики и артиллерии».

В 1940 г. ему было присвоено звание заслуженного деятеля науки Татарской АССР; в 1945 г. он награжден орденом Трудового Красного Знамени; в 1953 году – орденом Ленина. За цикл работ по аналитической механике и устойчивости движения Н.Г. Четаев удостоен Ленинской премии (посмертно).

После этого краткого обзора деятельности Николая Гурьевича хотелось бы поделиться воспоминаниями о нем, не связанными с наукой.

В 1940 году перед отъездом в Москву Николай Гурьевич женился во второй раз на Вере Александровне Самойловой, дочери известного физиолога Александра Филипповича Самойлова. Они воспитали двух сыновей – Димитрия (от первого брака), ставшего физиком и Александра – способного математика. Оказавшись в Москве, они жили на Сивцевом вражке, с его тещей Анной Александровной и семьей младшей

сестры Веры Александровны. Ни о каком кабинете в такой тесноте не приходилось и мечтать: работал Николай Гурьевич на кухне площадью 2-3 кв. метра, дом строился в период пропаганды коммунистического быта. И только, когда Николай Гурьевич стал директором Института механики, они получили отдельную квартиру в академическом доме на Ленинском проспекте, 13.

Ни машины, ни дачи у них никогда не было. Поездки на рыбалку (об этом увлечении вспоминают многие) были на электричке или автобусе.

Это была замечательная любящая пара: Вера Александровна вспоминала, что она была вынуждена уйти с работы, потому что когда ее не было дома, Николай Гурьевич не находил себе места, метался по квартире, не мог работать.

Хотелось бы сказать о Вере Александровне. За участие в Челюскинской эпопее она была награждена орденом Трудового красного Знамени; она была метеорологом, по ее сводкам совершались полеты.

Для Николая Гурьевича она была опорой и другом, на которого можно было положиться в непростые годы жизни.

После смерти Николая Гурьевича Вера Александровна сохранила весь архив. Часть архива сдала в Архив АН СССР. Часть была обработана и явилась основой для издания трудов Николая Гурьевича по аналитической механике и устойчивости движения, удостоенного Ленинской премии. Она же подготовила все материалы для издания курса лекций по теоретической механике (1987 г.).

Оба были большими театрами. Вера Александровна рассказывала, что сплошь и рядом, даже не имея билетов, они ехали к театру, покупали билеты с рук. 50-е годы были временем взлета «Современника», его Николай Гурьевич высоко ценил. В театре Вахтангова блистала Юлия Борисова, которая очень нравилась Николаю Гурьевичу.

Очень много времени Николай Гурьевич уделял своим детям и всегда любил детей (был в курсе детских проблем своих сотрудников). Тогда были в моде воскресные туристические прогулки; он участвовал в таких походах с одноклассниками сына Саши, после этого удивлялся, почему учителя жалуются на этих детей; многие из них бывали у Четаевых дома и пришли на похороны Николая Гурьевича.

Летом 1959 года Николая Гурьевича участвовал в байдарочном походе с Сашей и его другом на двух байдарках по Десне от Брянска до Киева. «Меня (Ефимова) взяли готовить и мыть посуду, но это мы, молодежь, делали вместе. Десна была выбрана, по-видимому, из-за сомов, в ней водящихся, которые привлекали Николая Гуриевича как рыбака. Ловил он их ночью, а днем спал, сидя на адмиральском посту в носу лодки. В Чернигов мы попали на Преображение, были на службе в соборе, еще домонгольском. И по выходе из него слушали пение слепцов-нищих «О богатом и Лазаре», были в пещерах Киево-Печерской лавры, тогда еще не закрытой».

Имея за плечами духовное происхождение, арест брата по 58 статье, братьев жены в эмиграции, Николай Гурьевич сумел сохранить стойкость и всегда вел себя независимо в той непростой идеологической обстановке, в которой находилась вся страна и наука в частности. Не будучи членом партии, к ее роли, как “рулевого” у него было вполне однозначное отношение. Когда ему однажды рассказали о каком-то вмешательстве парткома в учебно-научный процесс в МГУ, он сказал, что пусть они занимаются своим делом, а наука будет развиваться своим путем. Часто к нему обращались разные личности за отзывами; он вел себя всегда очень принципиально. Один деятель из Средней Азии присылал ему свой «труд» несколько раз и каждый раз получал отказ, тогда он прислал конверт с работой и в него вложил деньги. Николай Гурьевич, раскрыв, тут же отнес все это в партком: «Разберитесь».

В декабре 1953 года Николай Гурьевич подал заявление об уходе с поста директора Института по собственному желанию. Как рассказывал В.В. Румянцев, причиной этого были действия спецотдела, связанные с возросшей к тому времени засекреченностью некоторых научных тем; он почувствовал, что его стараются от этих тематик отодвинуть. Появилась железная дверь, за которую он не мог попасть. После ухода Николая Гурьевича с должности директора институт стал чахнуть, менялись директора – в результате его расформировали.

В заключении хочется сказать – вот мы сегодня собрались уже на 11-ю Четаевскую конференцию. Первая конференция состоялась в 1962 году в этом здании. Пелагея Яковлевна Кочина спрашивала Веру Александровну и удивлялась, как удалось так быстро организовать Четаевскую конференцию. Получить разрешение на Всесоюзную конферен-

цию и организовать ее было не просто и не быстро – сыграло роль общее уважение к Николаю Гурьевичу как ученому и человеку. И конечно благодаря энергии учеников и последователей Николая Гурьевича и энергии Веры Александровны.

Желаем всем участникам и организаторам конференции, городу Казани творческих успехов и всего доброго.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скимель В.Н.* Николай Гурьевич Четаев. Казань.: Изд-во гос. техн. ун-та, 2002. 106 с.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Алговер Ф., Байер Ф.</i> Пожалуйста, (не) возмущайте – использование информации о возмущениях в экономических МРС	3
<i>Фридрих Пфайфер.</i> Негладкие машины	8
<i>Ледяев Ю.С.</i> Оптимальное управление системами с эволюционирующей динамикой .	26
<i>Болотник Н.Н., Черноусько Ф.Л.</i> Новые задачи динамики и управления для локомоторных систем без внешних движителей	28
<i>Васильев С.Н., Гурьев Ю.В., Разумеенко Ю.В., Якушенко Е.И.</i> Динамика и управление морскими подводными объектами в сложных гидрофизических условиях	40
<i>Васильев С.Н., Кушнер А.Г.</i> Модельные аналогии и дифференциальные инварианты	51
<i>Галяев А.А., Рубинович Е.Я.</i> Планирование движения подвижных объектов в конфликтной среде	71
<i>Дегтярев Г.Л.</i> О научном наследии профессора Т.К. Сиразетдинова	91
<i>Евдокименков В.Н., Красильщиков М.Н.</i> Распределенная система интеллектуального управления группой беспилотных летательных аппаратов: методы и алгоритмы	113
<i>Желтов С.Ю., Косьянчук В.В., Сельвесюк Н.И.</i> Перспективы интеллектуализации современных авиационных комплексов	125
<i>Киселев Л.В.</i> Приоритетные задачи подводной робототехники в области морской геодезии	138
<i>Козлов В.В.</i> Принципы динамики и сервосвязи	152
<i>Козлов В.Н.</i> Проекционный метод синтеза оптимальных систем с ограниченными координатами и управлениями	153
<i>Г.А. Леонов, Н.В. Кузнецов, М.В. Юлдашев, Р.В. Юлдашев.</i> Устойчивость систем фазовой синхронизации	152
<i>Пакишин П.В.</i> Теория и приложения 2D-систем	171
<i>Толстоногов А.А.</i> Управляемые полиэдральные процессы выметания	173
<i>Ушаков В.Н., Ухоботов В.И., Ушаков А.В., Паршиков Г.В.</i> О приближенном вычислении множества разрешимости в задаче о сближении стационарной управляемой системы	176
<i>Фрадков А.Л., Сейфуллаев Р.Э.</i> Дискретизация систем управления	186
<i>Ченцов А.Г.</i> Итерационные программные конструкции для решения дифференциальных игр	194
<i>Якимова К.Е., Ефимов Г.Б.</i> Николай Гурьевич Четаев	201

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ

ТРУДЫ XI МЕЖДУНАРОДНОЙ
ЧЕТАЕВСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

13 – 17 июня 2017 г.

*Статьи воспроизводятся с оригиналов, представленных авторами,
и Издатель не несет ответственности за содержание статей*

Ответственный за выпуск В.Н. Милёхин
Компьютерная верстка – Н.Н. Семёнова
Дизайн обложки – Н.Н. Семёнова

Подписано в печать 05.06.17.
Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 12,55. Тираж 300 экз. Заказ Б 32.

Издательство КНИТУ-КАИ
420111, Казань, К. Маркса, 10

ISBN 978-5-7579-2226-3

