



115-летию со дня рождения Н.Г. Четаева
и памяти академика АН РТ
Т.К. Сиразетдинова
посвящается

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ

ТРУДЫ XI МЕЖДУНАРОДНОЙ
ЧЕТАЕВСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

ТОМ 2

Секция 2. УСТОЙЧИВОСТЬ

Казань, 13 – 17 июня 2017 г.



Министерство образования и науки Российской Федерации
Российская академия наук
Министерство образования и науки Республики Татарстан
Национальный комитет по автоматическому управлению
Академия наук Республики Татарстан
Научный совет РАН по теории управляемых процессов и автоматизации
Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова
Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ»

*115-летию со дня рождения Н.Г. Четаева
и памяти академика АН РТ
Т.К. Сиразетдинова посвящается*

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ

ТРУДЫ XI МЕЖДУНАРОДНОЙ
ЧЕТАЕВСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

ТОМ 2

Секция 2. УСТОЙЧИВОСТЬ

13 – 17 июня 2017 г.



Казань 2017

УДК 531.02 (063) + 531.391.5 (063)
ББК 22.211 + 22.236.37

Ан 64

Ан 64 **Аналитическая механика, устойчивость и управление:**
труды XI Международной Четаевской конференции. Т. 2. Секция 2.
Устойчивость. Казань, 13 – 17 июня 2017 г. – Казань: Изд-во КНИТУ-
КАИ, 2017. – 294 с.

ISBN 978-5-7579-2229-4 (т. 2)

ISBN 978-5-7579-2227-0

Представлены доклады, посвященные актуальным проблемам устойчивости движения. Дается развитие методов А.М. Ляпунова и Н.Г. Четаева и их применение в задачах устойчивости, колебаний, управления системами, описываемыми дифференциальными, разностными, функционально-дифференциальными, интегро-дифференциальными и уравнениями в частных производных, в детерминированной и стохастической постановках. Доклады представляют интерес для научных работников, аспирантов и инженеров, специализирующихся в области динамики систем и теории устойчивости.

УДК 531.01 (063) + 531.391.5 (063)

ББК 22.211 + 22.236 37

Редакционная коллегия:

Васильев С.Н., академик РАН

Козлов В.В., академик РАН

Дегтярёв Г.Л., академик АН РТ, д.т.н., профессор

Маликов А.И., д.ф.-м.н., профессор

Терентьев С.А., к.т.н., доцент

Ответственные секретари:

Хасанов А.Ю., к.т.н., доцент

Петрув И.В.

ISBN 978-5-7579-2229-4 (т. 2)
ISBN 978-5-7579-2227-0

© Авторы, перечисленные в содержании, 2017
© Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017

**РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ
АЛГОРИТМОВ НЕЧЕТКОГО УПРАВЛЕНИЯ
С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ
ЛЯПУНОВА**

А.Ф.Алексеев, А.И.Тихонов
(КНИТУ-КАИ, Россия, 420111, Казань,
К. Маркса, 10)
E-mail: falekseev@mail.ru

**FUZZY CONTROL
ALGORITHMS DEVELOPMENT AND IMPLEMENTATION
USING LYAPUNOV VECTOR FUNCTIONS METHOD**

A.F.Alekseev, A.I.Tikhonov
(KNRTU-KAI)

Keywords: fuzzy control systems, Lyapunov vector function, linear matrix inequalities

I. Метод ВФЛ широко применяется для анализа и синтеза динамических систем, является одним из точных математических методов, позволяющих исследовать широкий класс непрерывных, дискретных и гибридных систем управления. Рассмотрим комбинацию методов ФЛ и нечеткой математики. Для типовых задач теории управления. Модель системы рассмотрим в виде

$$\dot{x} = \bar{A}x + Bu, u = Cx,$$

A, B, C – постоянные матрицы.

Представим систему в виде $\dot{x} = Ax$, $A = \bar{A} + BC$, для таких систем используем вектор-функцию Ляпунова [1].

$$V = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}^T$$

$$V_i(x, h, \dot{h}) = x^T \left[P_i^1(h) + P_i^2(\dot{h}) \right] x,$$

где $P_i^1 = \sum_{j=1}^r h_j P_j^1$, $P_i^2 = \sum_{j=1}^r \dot{h}_j P_j^2$.

$$h_j(z(t)) = \frac{\omega_j(z(t))}{\sum_{j=1}^r \omega_j(z(t))}, \quad \omega_j(z(t)) = \prod_{k=1}^l \mu_k^j(z_k(t)).$$

Вычисли производную компонент функции Ляпунова в силу системы

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, h, \dot{h}) &= x^T \left[\dot{P}^1(h) + \dot{P}^2(\dot{h}) + A^T(h)P^1(h) + A^T(\dot{h})P^2(\dot{h}) + \right. \\ &\quad \left. + P^1(h)A(h) + P^2(\dot{h})A(\dot{h}) \right] x = x^T \Theta(h, \dot{h}, \ddot{h})x, \\ P^1(h) + P^2(\dot{h}) &> 0, \\ \Theta(h, \dot{h}, \ddot{h}) &< 0.\end{aligned}$$

Введем систему r_i правил:

$$\begin{aligned}r_i: & \text{ If } z_1(t) \text{ is } \mathbf{M}_1^j \text{ and } \dots z_p(t) \text{ is } \mathbf{M}_p^j. \\ & \text{ Then } \dot{x}(t) = A_i x(t).\end{aligned}$$

Пусть $|\dot{h}_i| < \phi_i^1$, $|\ddot{h}_i| < \phi_i^2 \forall i \in \mathbf{R}$. Система будет асимптотически устойчива, если выполняется

$$P_i^2 + Y > 0, \quad i \in \mathbf{R}$$

$$P_i^1 + \sum_{k=1}^r \phi_k^1 (P_k^2 + Y) > 0, \quad i \in \mathbf{R}$$

$$P_k^1 + A_i^T P_k^2 + P_k^2 A_i + X > 0, \quad i, k \in \mathbf{R}$$

$$\sum_{k=1}^r \phi_k^2 (P_k^2 + Y) + \frac{1}{2} (\Theta_i + \Theta_j + A_i^T P_j^1 + P_j^1 A_i + A_j^T P_i^1 + P_i^1 A_j) < 0, \quad i \in \mathbf{R}$$

$$i, j \in \mathbf{R}, \quad i \leq j$$

$$\Theta_i = \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^r \phi_k^1 [P_k^1 + A_i^T P_k^2 + P_k^2 A_i + X].$$

Обозначим эту группу формул (*).

Пусть $|\dot{h}_i| < \phi_i^1$, $|\ddot{h}_i| < \phi_i^2 \forall i \in \mathbf{R}$. Система будет асимптотически устойчива, если выполняется:

$$P_i^1 + \sum_{k=1}^r W_{(k,q)}^1 P_k^2 > 0, \quad i \in \mathbf{R}, \quad q \in \mathbf{M}$$

$$\sum_{k=1}^r W_{(k,l)}^2 P_k^2 + \frac{1}{2} [\Theta_i + \Theta_j + A_i^T P_j^1 + P_j^1 A_i + A_j^T P_i^1 + P_i^1 A_j] < 0,$$

$$i, j \in \mathbf{R}, \quad i \leq j, \quad l, q \in \mathbf{M},$$

где $\Theta_i = \stackrel{\text{def}}{=} W_{(k,q)}^1 [P_k^1 + A_i^T P_k^2 + P_k^2 A_i]$

Эту группу формул обозначим (**).

Пусть $|\dot{h}_i| < \phi_i^1$, $|\ddot{h}_i| < \phi_i^2 \forall i \in \mathbf{R}$. Система будет асимптотически устойчива, если выполняется:

$$\Xi_i < 0, i \in \mathbf{R},$$

где

$$\Xi_i =_{def} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^r \phi_k^2 (P_k^2 + Y) + \Theta_i - M_1 A_i + A_i^T M_1^T & \bullet \\ P_i - M_2 A_i + M_1^T & M_2 + M_2^T \end{bmatrix}$$

Эту группу формул обозначим (***) .

Пусть $|\dot{h}_i| < \phi_i^1, |\ddot{h}_i| < \phi_i^2 \forall i \in \mathbf{R}$. Система будет асимптотически устойчива, если выполняется:

$$\Xi_i^{q,l} < 0, i \in \mathbf{R}, q, l \in \mathbf{M},$$

где

$$\Xi_i^{q,l} =_{def} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^r [W_{(k,q)}^1 P_k^1 + W_{(k,q)}^2 P_k^2] - M_1 A_i - A_i^T M_1^T & \bullet \\ \sum_{k=1}^r W_{(k,q)}^1 P_k^2 + P_i^1 - M_2 A_i + M_1^T & M_2 + M_2^T \end{bmatrix}$$

Эту группу обозначим (****) .

II. Предлагается метод синтеза нелинейных систем управления типа Такаги-Сугено [2-4] с применением метода векторных функций Ляпунова [1] с формированием нечеткого логического регулятора с агрегированием управления для приведения к одинаковой размерности вектора входов и вектора выходов системы. В отличие от других работ подход основан на методе векторных функций Ляпунова (ВФЛ). Синтезируемый многомерный нечеткий логический регулятор обеспечивает устойчивость системы управления.

Предлагается метод синтеза нелинейных систем управления типа Такаги-Сугено с формированием нечеткого логического регулятора. В отличие от других работ подход основан на методе векторных функций Ляпунова (ВФЛ) [1]. Синтезируемый многомерный нечеткий логический регулятор обеспечивает устойчивость системы управления. Проведенные численные эксперименты показали эффективность подхода. Записывается алгоритм синтеза устойчивой нечеткой системы управления.

Метод векторных функций Ляпунова (ВФЛ) [1] является точным и эффективным методом исследования систем управления. Общие теоремы о динамических свойствах с применением векторной функции Ляпунова см., напр., [1].

Нечеткая логическая система состоит из динамического процесса и нечеткого логического регулятора. Пусть $X \in R^n$. Система управления характеризуется как нелинейная система с несколькими входами, моделируемой системой

$$\dot{x} = f(x) + b(x)u, x(t_0) = x_0$$

$x \in X, x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ – вектор состояния,

$$f^T(x) = [f_1(x) \ f_2(x) \ \dots \ f_n(x)], b(x) = \begin{pmatrix} b_{11}(x) & b_{12}(x) & \dots & b_{1m}(x) \\ b_{21}(x) & b_{22}(x) & \dots & b_{2m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(x) & b_{n2}(x) & \dots & b_{nm}(x) \end{pmatrix},$$

u – управление (из $X_{\Psi_{i1}}$), полученное дефазификацией методом центров тяжести для $T-S$ систем. FLC состоит из r нечетких правил $IF-THEN$ правило в $T-S$ системе

Rule i: $IF \ \Psi_i(x)$ is $X_{\Psi_{i,1}}$ *AND* ... *AND* $\Psi_i(x)$ is $X_{\Psi_{i,n}}$

THEN $u = u_i(x) \ i = 1, 2, \dots, r. \ r \in N$,

$\Psi_{ij}(x), j = 1, 2, \dots, n$ нечеткие множества, $u = u_i(x)$ – управление i правила.

Каждое нечеткое правило генерирует $\alpha_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, r$

Согласно $\alpha_i(x) = \min\{\mu_{x_{\Psi_1}}(), \mu_{x_{\Psi_2}}(), \dots, \mu_{x_{\Psi_n}}()\}$

Управление u , которое должно быть применено в процессе, является функцией α_i и u_i

Выход FLC задается

$$u = \frac{\sum_{i=1}^r \alpha_i u_i}{\sum_{i=1}^r \alpha_i}$$

Определение 1. Если для некоторых $x_0 \in X$, if firing degree $\alpha_i(x_0)$ соответствующее нечеткое правило i есть нуль для нечеткого правила i называется неактивным нечетким правилом для входа x_0 ; в противном случае правило называется активным нечетким правилом.

В силу этого

$$u = \frac{\sum_{i=1}^r \alpha_i u_i}{\sum_{i=1}^r \alpha_i}$$

правила при условии $\alpha_i \neq 0$ при суммировании.

Определение 2. Активная зона нечеткого правила i определяется как множество

$$X_i^A = \{x \in X : \alpha_i(x) \neq 0\} \quad X_i^{\bar{A}} = \{x \in X \setminus \alpha_i(x) \neq 0\}.$$

Рассмотрим систему управления общего вида $\dot{x} = f(x, u)$, $x \in R_n$, $u \in R^m$.

Агрегированное управление u_i представим в виде:

$$u_i = C_{ul}x, \quad C_{ul} - \text{постоянная матрица.}$$

Согласно методу ВФЛ строятся системы сравнения. Здесь используется линейная система сравнения (СС)

$$\dot{y} = A_c y_c$$

A^c – постоянная матрица с известными свойствами. Запишем ВФЛ

$$v_c = \{v_{1c}, v_{2c}, \dots, v_{lc}\}$$

Компоненты ВФЛ выбираем в виде квадратичных форм $v_i = x^T P_i x$, $P_i > 0$ - симметричная положительно определенная матрица. Пусть СУ имеет следующий вид

$$\dot{x} = f(x) + b(x)u$$

Производная компонент ВФЛ имеет вид

$$\dot{v}_{jc} = \frac{\partial v_{jc}}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial v_{jc}}{\partial x} f(x) + \frac{\partial v_{jc}}{\partial x} b(x)u = 2x^T P f(x) + 2x^T P b(x)u$$

$$\text{Или } \dot{v}_{jc} = F_j(x) + B_j(x)u, \text{ где } F_j(x) = \frac{\partial v_{jc}}{\partial x} f(x), B_j(x) = \frac{\partial v_{jc}}{\partial x} \tilde{B}(x)u$$

Определим множества по всем компонентам ВФЛ

$$B^0 = \{x \in X \setminus B(x) = 0\}$$

$$B^0 = \{x \in X \setminus B(x) = 0\} \dots B^0 = \{x \in X \setminus B(x) = 0\}$$

$$B^+ = \{x \in X \setminus B(x) > 0\} \quad B^+ = \{x \in X \setminus B(x) > 0\} \dots B^+ = \{x \in X \setminus B(x) > 0\}$$

$$B^{-+} = \{x \in X \setminus B(x) < 0\} \quad B^{-+} = \{x \in X \setminus B(x) < 0\}$$

$$B^{-+} = \{x \in X \setminus B(x) < 0\}$$

Из дифференциального неравенства $F(x) + B(x)u \leq A_c v$ следует

$$F_i(x) + B_i(x)u \leq \sum_{s=1}^{m_c} a_{ij}^c x^T P_j x,$$

$$\text{где } F_j(x) = \frac{\partial v_{jc}}{\partial x} f(x), \quad B_j(x) = \frac{\partial v_{jc}}{\partial x} \tilde{B}(x).$$

Преобразуем

$$B_1(x)u \leq \sum_{s=1}^{m_c} a_s^{jc} x^T P_{jc} x - F_1(x), \quad B_2(x)u \leq \sum_{s=1}^{m_c} a_s^{jc} x^T P_{jc} x - F_2(x), \dots,$$

$$B_{m_c}(x)u \leq \sum_{s=1}^{m_c} a_s^{jc} x^T P_{jc} x - F_{m_c}(x).$$

Дифференциальное неравенство запишется в следующем виде

$$Su \leq R$$

где

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1m_c} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2m_c} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m_c 1} & s_{m_c 2} & \dots & s_{m_c m_c} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1m_c} \end{pmatrix} = \|B_1(x)\|,$$

$$\begin{pmatrix} s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2m_c} \end{pmatrix} = \|B_2(x)\|, \quad \begin{pmatrix} s_{m_c 1} & s_{m_c 2} & \dots & s_{m_c m_c} \end{pmatrix} = \|B_{m_c}(x)\|,$$

$$R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_{m_c} \end{pmatrix}, \quad r_1 = \sum_{s=1}^{m_c} a_s^{jc} x^T P_{jc} x - F_1(x); \quad r_2 = \sum_{s=1}^{m_c} a_s^{jc} x^T P_{jc} x - F_2(x); \dots;$$

$$r_{m_c} = \sum_{s=1}^{m_c} a_s^{jc} x^T P_{jc} x - F_{m_c}(x);$$

Воспользуемся частным случаем матрицы A^c - диагональной матрицей $A_c = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{m_c m_c}\}, a_{ii} > 0$, т.е.

$$u_1 \leq (S^{-1}R)_1 = b_{11}(a_{11}^c x^T P_1 x - F_1(x));$$

$$u_2 \leq (S^{-1}R)_2 = b_{22}(a_{22}^c x^T P_2 x - F_2(x)); \dots;$$

$$u_{m_c} \leq (S^{-1}R)_{m_c} = b_{m_c m_c}(a_{m_c m_c}^{jc} x^T P_{m_c} x - F_{m_c}(x))$$

Рассмотрим частный случай системы с секторными нелинейностями. Проведем синтез нечеткого логического регулятора для системы вида

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma, t) + B_1 u(\sigma), \quad \sigma = Cx, \quad (*)$$

$A - n \times n$ -, $B - n \times m$ -, $B_1 - n \times m_1$ -, $C - m \times n$ - постоянные матрицы.

$$x \in R^n, \sigma \in R^m, \quad u \in R^{m_1},$$

$$\varphi^T(\sigma, t) = \{\varphi_1(\sigma_1, t), \varphi_2(\sigma_2, t), \dots, \varphi_m(\sigma_m, t)\},$$

$$0 \leq \sigma_j \varphi_j(\sigma_j, t) \leq k_j \sigma_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Проведем синтез управления для системы (*) с помощью абсолютной системы сравнения (СС). Введем СС вида

$$\dot{x}_c = A_c x_c + \sum_{j=1}^{m_c} b_j^c \varphi_j^c(\sigma_j^c, t), \quad \sigma_j^c = (c_j^c, x_c),$$

где $x_c \in R^{n_c}$, $\sigma_c \in R^{m_c}$; правая часть (*) удовлетворяет условиям Важевского; $\varphi_j^c \in C_{\sigma_c}^{(1)}$, $j = \overline{1, m_c}$; $0 \leq \sigma_j^c \varphi_j^c(\sigma_j^c, t) \leq k_j^c \sigma_j^c$, $j = \overline{1, m_c}$ ($\varphi^c \in N_\varphi$). СС назовем абсолютной СС в классе $N_\varphi (N_\varphi \supset \varphi, N_\varphi \supset \varphi^c)$, если она является СС равномерно по классу N_φ .

Воспользуемся ВФЛ вида

$$v_k = x^T P_k x, \quad k = \overline{1, n_c}.$$

Перепишем СС: $\dot{x}_c = A_c x_c + B^e \varphi^e$, $\sigma_j^c = C^c x_c$; вычислим производные компонент ВФЛ в силу системы (*):

$$\dot{v}_k = x^T G_k x + 2x^T P_k \varphi + 2x^T P_k B_1 u, \quad G_k = A^T P_k + P_k A.$$

Если выполняются неравенства

$$\begin{aligned} x^T G_i x + 2x^T P_i \varphi + 2x^T P_i B_1 u &\leq a_{i1}^c P_1 x + \\ \dots + a_{in_c}^c x^T P_{n_c} x + b_{i1}^c \varphi_1^c + \dots + b_{im_c}^c \varphi_{m_c}^c, & \quad i = \overline{1, n_c}, \quad \sigma = Cx, \\ \sigma_j^c = c_{j1}^c x^T P_1 x + \dots + c_{jn_c}^c x^T P_{n_c} x, & \quad j = \overline{1, m_c}, \end{aligned}$$

то система (3.1), (3.2) является СС для системы (3.1). Перепишем (3.4) в следующем виде:

$$\begin{aligned} F_i = x^T P_{\alpha i} x + b_{i1}^c \varphi_1^c + \dots + b_{im_c}^c \varphi_{m_c}^c - x^T G_i x - 2x^T P_i B \varphi - 2x^T P_i B_1 u &\geq 0, \quad i = \overline{1, n_c}, \\ \sigma = Cx, \quad \sigma_j^c = x^T P_{c j} x, \quad j = \overline{1, m_c}, \end{aligned}$$

где $P_{\alpha i} = \alpha_{i1}^c P_1 + \dots + \alpha_{in_c}^c P_{n_c}$, $P_{c j} = c_{j1}^c P_1 + \dots + c_{jn_c}^c P_{n_c}$.

Аналогично предыдущему разделу получим

$$\begin{aligned} 2x^T P_i B_1 u &\leq x^T P_{\alpha i} x + b_{i1}^c \varphi_1^c + \dots + b_{im_c}^c \varphi_{m_c}^c - x^T G_i x - 2x^T P_i B \varphi, \\ 2x^T P_i B_1 u &\leq x^T P_{\alpha i} x + b_{i1}^c \varphi_1^c + \dots + b_{im_c}^c \varphi_{m_c}^c - x^T G_i x - 2x^T P_i B \varphi, \\ \dots \\ 2x^T P_i B_1 u &\leq x^T P_{\alpha i} x + b_{i1}^c \varphi_1^c + \dots + b_{im_c}^c \varphi_{m_c}^c - x^T G_i x - 2x^T P_i B \varphi, \end{aligned}$$

Далее аналогично запишем

$$Su \leq R, \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1m_c} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2m_c} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m_c 1} & s_{m_c 2} & \dots & s_{m_c m_c} \end{pmatrix}, \quad \|s_{11} \quad s_{12} \quad \dots \quad s_{1m_c}\| = \|2x^T P_1 B_1\|,$$

$$\|s_{21} \quad s_{22} \quad \dots \quad s_{2m_c}\| = \|2x^T P_2 B_1\|, \quad \dots, \quad \|s_{m_c 1} \quad s_{m_c 2} \quad \dots \quad s_{m_c m_c}\| = \|2x^T P_{m_c} B_1\|,$$

$$R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_{m_c} \end{pmatrix} \left\| \begin{aligned} r_1 &= x^T P_{\alpha i} x + b_{i1}^c \varphi_1 + \dots + b_{im_c}^c \varphi_{m_c} - x^T G_i x - \\ &- x^T G_1 x - \|s_{m_c 1} \quad s_{m_c 2} \quad \dots \quad s_{m_c m_c}\| 2x^T P_i B \varphi; \dots; \\ r_2 &= x^T P_{\alpha i} x + b_{i1}^c \varphi_1 + \dots + b_{im_c}^c \varphi_{m_c} - x^T G_i x - r_2 = 2x^T P_i B \varphi \\ r_{m_c} &= x^T P_{\alpha i} x + b_{i1}^c \varphi_1 + \dots + b_{im_c}^c \varphi_{m_c} - x^T G_i x - 2x^T P_i B \varphi, \end{aligned} \right.$$

$$-x^T G_1 x - \|s_{m_c 1} \quad s_{m_c 2} \quad \dots \quad s_{m_c m_c}\| 2x^T P_i B \varphi; \dots;$$

$$x^T P_{\alpha i} x + b_{i1}^c \varphi_1 + \dots + b_{im_c}^c \varphi_{m_c} - x^T G_i x - r_2 = 2x^T P_i B \varphi$$

$$r_{m_c} = x^T P_{\alpha i} x + b_{i1}^c \varphi_1 + \dots + b_{im_c}^c \varphi_{m_c} - x^T G_i x - 2x^T P_i B \varphi,$$

III. Теорема синтеза: 1) $u = u_{(*)}$, 2) $u = u_{(*)}$ and $u = u_{A1}$; ...; m) $u = u_{Am}$;

...;

m+1) $u = u_{(**)}$, m+2) $u = u_{(**)}$ and $u = u_{A1}$; ...; 2m) $u = u_{Am}$;

2m+1) $u = u_{(***)}$, 2m+2) $u = u_{(***)}$ and $u = u_{A1}$; ...; 3m) $u = u_{Am}$.

Правилами TS управляем итерациями для синтеза регулятора, удовлетворяющего заданным условиям (например, оптимальности).

IV. Деагрегирование проводится глобальной или локальной оптимизацией регулятора по коэффициентам C_{ui} .

Публикация осуществлена в рамках научных проектов при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан №15-41-02465/2016, при финансовой поддержке РФФИ №16-31-00469.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mozelli L.A., Palhares R.M. Stability analysis of Takagi-Sugeno fuzzy systems via LMI: methodologies based on a new fuzzy Lyapunov function. *Revista Controle & Automacao*/Vol.22 no.6/Novembro e Dezembro 2011, pp.664-676.

2. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. Под ред. А.А.Воронова, В.М.Матросова. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат.лит., 1987. 312 с.

3. Takagi T., Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control. *IEEE Trans. Systems Man Cybernet.* 15 (1) 1985. Pp. 116-132.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА ОДНОГО СЕМЕЙСТВА СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

О.В. Анашкин (КФУ им. В.И. Вернадского, Россия,
295007, Симферополь, пр-т Вернадского, 4)

E-mail: [oanashkin@yandex.ru](mailto: oanashkin@yandex.ru)

Н.О. Седова (УлГУ, Россия, 432000, Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42)

E-mail: [sedovano@ulsu.ru](mailto: sedovano@ulsu.ru)

LIMIT SETS OF A FAMILY OF IMPULSIVE SYSTEMS

O.V. Anashkin (V.I. Vernadsky CFU, Russia,
295007, Simferopol, Vernadsky avenue, 4)

N.O. Sedova (UISU, Russia, 432000, Ul'yanovsk, Leo Tolstoi str., 42)

Keywords: nonlinear impulsive systems, limit set, bifurcation, periodic solution.

Введение. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (импульсные системы) являются инструментом моделирования разнообразных процессов, параметры которых в определенные моменты времени подвергаются резким изменениям под влиянием кратковременных (импульсных) внешних воздействий. Примеры таких процессов дают различные отрасли науки и технологии (физика, химия, теория управления, популяционная динамика, биотехнология, промышленная робототехника, экономика и другие). Учитывая пренебрежимо малую продолжительность воздействий по сравнению с характерным временем эволюции исследуемого процесса, в математической модели допускается, что параметры процесса изменяются мгновенно. Теория и приложения импульсных систем активно развивается с конца 60-х годов прошлого столетия [1-4].

Будем предполагать, что моменты импульсного воздействия известны заранее, т. е. фиксированы, тогда импульсную систему можно описать в следующем виде [1]

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \neq \tau_k, \quad \Delta x(t) = h_k(x(t)) - x(t), \quad t = \tau_k, \quad (1)$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\Delta x(t) = x(t+0) - x(t-0)$ – разность правого и левого предельных значений функции $x(t)$ в точке t , τ_k – моменты импульсного воздействия, $\tau_0 = 0$, $\tau_{k+1} = \tau_k + \theta_k$, $\theta_k > 0$ – заданные вещественные числа, $\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k = \infty$, $\sum_{k=0}^{-\infty} \theta_k = \infty$. Решением системы является непрерывная слева ($x(t) = x(t-0)$) кусочно-гладкая функция с разрыва-

ми первого рода в точках τ_k , удовлетворяющая уравнениям (1) на некотором интервале изменения независимой переменной t . Обозначим через $x(t; t_0, x^0)$ решение начальной задачи для системы (1), удовлетворяющее начальному условию: $x(t_0 + 0) = x^0$. Предполагается, что функции f и h_k обеспечивают однозначную разрешимость начальной задачи.

Система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием содержит аналоговую компоненту, которая представлена в (1) системой обыкновенных дифференциальных уравнений, и дискретную компоненту — разностное уравнение, задающее оператор импульсного воздействия. Поэтому решения импульсной системы наследуют типичные свойства решений разностных уравнений. По этой причине уже одномерные импульсные системы могут иметь сколь угодно сложную структуру решений, в частности, предельными множествами траекторий могут быть не только точки покоя, но и траектории периодических решений.

Рассмотрим нелинейную одномерную θ -периодическую импульсную систему ($n=1$) с автономным дифференциальным уравнением и оператором импульсного воздействия, не зависящим от момента τ_k :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad t \neq \tau_k, \quad x(t+0) = h(x(t)), \quad t = \tau_k, \quad (2)$$

где $\tau_k = k\theta$, $\theta > 0$, функции f и h — достаточно гладкие класса C^l , $l \geq 1$, $f(0) = h(0) = 0$, т. е. система имеет нулевое решение.

Все решения линеаризации системы (2) в нуле являются периодическими, если $|h'(0)| \exp[f'(0)\theta] = 1$. В случае общего положения $|h'(0)| \exp[f'(0)\theta] \neq 1$ линейное приближение не имеет нетривиальных периодических решений и тогда из известных теорем об условиях существования периодических решений у периодических импульсных систем [1-5] следует, что в системе (2) имеется по меньшей мере одно θ -периодическое решение (при определенных ограничениях).

Целью настоящей работы является анализ качественной перестройки (бифуркации) структуры решений импульсной системы (2) при изменении бифуркационного параметра, роль которого в нашем исследовании играет коэффициент $|h'(0)|$ линейного приближения оператора импульсного воздействия.

Для достаточно полного изучения структуры решений сначала рассмотрим квадратичное уравнение с линейным оператором импульсного воздействия. Показано, что при приближении $|h'(0)|$ к критическому значению $\exp[-f'(0)\theta]$ единственное периодическое решение сливается с ну-

левым решением и при дальнейшем изменении $|h'(0)|$ рождается новое периодическое решение, имеющее альтернативный тип устойчивости. Рассматриваются также уравнения с нелинейным оператором импульсного воздействия.

Таким образом, в семействе одномерных импульсных систем при изменении параметра в окрестности критического значения наблюдается бифуркация рождения периодического решения (решений) из стационарного решения.

Квадратичное уравнение с линейным импульсным воздействием. Условия существования периодического решения. Рассмотрим одномерную θ -периодическую импульсную систему

$$\frac{dx}{dt} = ax - rx^2, \quad t \neq k\theta, \quad x(t+0) = bx(t), \quad t = k\theta, \quad (3)$$

где a, r – вещественные постоянные, $\theta > 0, b > 0$. Благодаря линейности оператора импульсного воздействия, решение системы (3) можно выписать в явном виде. Изучим бифуркации решений системы (3) при изменении параметра $b > 0$.

Решение начальной задачи для дифференциального уравнения в (3) имеет вид

$$x(t; t_0, x_0) = \frac{a \exp[a(t - t_0)]x_0}{a + r(\exp[a(t - t_0)] - 1)x_0}. \quad (4)$$

Учитывая периодичность системы, предполагаем, что $0 \leq t_0 < \theta, -\infty < x_0 < +\infty$. Из (3) и (4) найдём рекуррентное уравнение, связывающее значения решения импульсной системы в соседних моментах импульсного воздействия,

$$x((k+1)\theta) = F(x(k\theta)) = \frac{Ax(k\theta)}{1 + Bx(k\theta)}, \quad (5)$$

где

$$A = b \exp(a\theta) > 0, \quad B = \frac{br}{a}(\exp(a\theta) - 1), \quad (6)$$

Обозначим $z_k = x(k\theta)$. Решение дробно-линейного разностного уравнения (5) можно выписать в явном виде

$$z_k(z_0) = F^k(z_0) = \frac{A^k z_0}{1 + B(1 + A + \dots + A^{(k-1)})z_0}, \quad (7)$$

где $F^k = F \circ F^{k-1}$ – k -я степень отображения $F: R \rightarrow R$, $R = (-\infty, +\infty)$.

Укажем основные свойства функции F : функция определена и непрерывно дифференцируема всюду, кроме полюса $z = -1/B$; монотонно возрастает, так как $F'(z) = A/(1+Bz)^2 > 0$; отображение F имеет только одну ненулевую неподвижную точку $\hat{z} = \frac{A-1}{B}$ (при $A \neq 1$) и при этом $F'(0) = A$, $F'(\hat{z}) = 1/A$. Отметим также, что у k -й степени отображения F при любом $k \geq 2$ нет неподвижных точек, отличных от $\hat{z} = \frac{A-1}{B}$..

Уравнение (3) имеет периодические решения тогда и только тогда, когда отображение F имеет ненулевые неподвижные точки. При $A=1$, когда положительный бифуркационный параметр b равен критическому значению $b_{cr} = \exp(-a\theta)$, нелинейное уравнение (3) вообще не имеет периодических решений. При $A \neq 1$ уравнение (3) имеет единственное периодическое решение, устойчивое при $A > 1$ и неустойчивое при $A < 1$. Эти выводы справедливы для произвольных ненулевых значений коэффициентов a , r и θ .

При $b = 1$ импульсные воздействия отсутствуют и одномерная импульсная система (3) превращается в одномерную динамическую систему. При этом

$$\hat{z} = \frac{A-1}{B} = \frac{b \exp(a\theta) - 1}{b(\exp(a\theta) - 1)} \cdot \frac{a}{r} \xrightarrow{b \rightarrow 1} \frac{a}{r},$$

где $\hat{x} = a/r$ – нетривиальное положение равновесия дифференциального уравнения системы (3).

Бифуркации решений уравнения (3) при $a > 0$ и $r > 0$. Пусть $a > 0$ и $r > 0$. В этом случае тривиальное решение $x = 0$ дифференциального уравнения системы (3) неустойчиво (репеллер), а точка покоя $\hat{x} = a/r > 0$ является аттрактором.

Из (6) находим, что $A > 0$ и $B > 0$. Тогда из (7) следует: если $z_0 > 0$, то $z_k(z_0) > 0$ при любом $k > 0$ и последовательность $\{z_k(z_0)\}_{k \geq 1}$ сходится:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k(z_0) = \begin{cases} 0, & 0 < A \leq 1, \\ \frac{A-1}{B}, & 1 < A. \end{cases} \quad (8)$$

При $z_0 < 0$ последовательность $\{z_k(z_0)\}_{k \geq 1}$, решение рекуррентного уравнения (5), является бесконечной, если $z_0 \notin A_0^-$, где

$$A_0^- = \left\{ z_0^{(k)} = \frac{-1}{B(1+A+\dots+A^k)}, k = 0, 1, 2, \dots \right\}.$$

Очевидно, что при $0 < A < 1$ множество A_0^- локализовано на сегменте $[-1/B, (A-1)/B]$, а при $A \geq 1$ — на сегменте $[-1/B, 0]$. Внимательный анализ, детали которого мы опускаем, показывает, что предел (8) существует для любой последовательности $\{z_k(z_0)\}_{k \geq 1}$, если $z_0 \notin A_0^-$. При $z_0 \in A_0^-$ решение $\{z_k(z_0)\}$ разностного уравнения (5) неограниченно продолжается влево, т.е. при $k \rightarrow -\infty$.

Остается добавить, что при $0 < A < 1$ разностное уравнение (5) имеет неустойчивую точку покоя $\hat{z} = \frac{A-1}{B} < 0$.

Свойства решений рекуррентного уравнения (5) определяют поведение решений импульсной системы (3) при $t \rightarrow +\infty$. При всяком $t_0 \in [0, \theta]$ и $x_0 > 0$ последовательность $x(k\theta; t_0, x_0)$ сходится согласно (8). Поэтому при $0 < A \leq 1$ $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; t_0, x_0) = 0$, а при $A > 1$ и $x_0 > 0$ все решения экспоненциально стремятся к положительному θ -периодическому решению

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{b \frac{A-1}{B} \exp[a(t-\tau_k)]}{1 + \frac{r}{a} (\exp[a(t-\tau_k)] - 1) b \frac{A-1}{B}} = \\ &= \frac{(b \exp(a\theta) - 1) \exp[a(t-\tau_k)]}{\exp(a\theta) - 1 + (b \exp(a\theta) - 1) (\exp[a(t-\tau_k)] - 1)} \cdot \frac{a}{r}, \quad \tau_k < t < \tau_{k+1} \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть теперь $x_0 < 0$, тогда из (4) имеем

$$x(\theta) = x(\theta; t_0, x_0) = \frac{ax_0 \exp[a(\theta-t_0)]}{a + x_0 r (\exp[a(\theta-t_0)] - 1)}. \quad (10)$$

Поэтому для любого $x_0 < 0$ при достаточно близком к θ начальном моменте t_0 значение $x(\theta)$ будет отрицательным. Нетрудно показать, что

при $x_0 < \frac{a}{r} \cdot \frac{1}{1 - \exp[a(\theta - t_0)]} < 0$ решение системы (3) уходит на $-\infty$ за конечное время на интервале (t_0, θ) . Если $x_0 = \frac{a}{r} \cdot \frac{1}{1 - \exp[a(\theta - t_0)]} < 0$, то $x(t; t_0, x_0) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \theta$.

При $\frac{a}{r} \cdot \frac{1}{1 - \exp[a(\theta - t_0)]} < x_0 < 0$ значение $x(\theta)$ отрицательное и возможны три сценария поведения последовательности $\{z_k(z_0)\}_{k \geq 1}$, удовлетворяющей рекуррентному уравнению (5) при $z_0 = x(\theta) < 0$: (а) последовательность $\{z_k(z_0)\}_{k \geq 1}$ конечная; (б) $z_k(z_0) > 0$ при $k \geq k_0$ для некоторого $k_0 > 0$; (в) $z_k(z_0) < 0$ при всех $k \geq 0$. Тогда нетрудно проверить, что при реализации первых двух сценариев решение системы (3) уходит на $-\infty$ за конечное время. Если $A < 1$, то в случае сценария (в) $x(t; t_0, x_0) \rightarrow 0 - 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Как уже было отмечено выше, при $A < 1$ или, что равносильно, $b < \exp(-a\theta)$ импульсная система (3) имеет неустойчивое отрицательное θ -периодическое решение вида (9).

Таким образом, при переходе параметра b через критическое значение $b_{cr} = \exp(-a\theta) < 1$ слева направо отрицательное неустойчивое θ -периодическое решение (9) бифурцирует сначала в тривиальное решение при $b = b_{cr}$, а при $b > b_{cr}$ становится положительным устойчивым θ -периодическим решением (9), притягивающим все положительные решения системы (3).

Бифуркации решений уравнения (3) при $a > 0$ и $r < 0$. Пусть $a > 0$ и $r < 0$. В этом случае тривиальное решение $x = 0$ дифференциального уравнения системы (3) неустойчиво (репеллер), а точка покоя $\hat{x} = a/r < 0$ является аттрактором.

Из (6) находим, что $A > 0$ и $B < 0$. Теперь полюс $z = -1/B$ функции $F(z)$ расположен справа от нуля. Множество точек A_0^- начальных значений решений рекуррентного уравнения (5), имеющих лишь конечное продолжение вправо, также локализовано справа от нуля. Теперь $z_k(z_0) < 0$ при всех $k \geq 0$, если $z_0 < 0$. Рассуждая также, как в предыдущем разделе, можно убедиться, что предел (8) существует для любой последовательно-

сти $\{z_k(z_0)\}_{k \geq 1}$, если $z_0 \notin A_0^-$. Следовательно, если $x_0 < 0$ и $0 < A \leq 1$, то $x(t; t_0, x_0) \rightarrow 0 - 0$ при $t \rightarrow +\infty$. При $A > 1$ и $x_0 < 0$ решение $x(t; t_0, x_0)$ стремится к экспоненциально устойчивому отрицательному θ -периодическому решению (9).

Решения $x(t; t_0, x_0)$ системы (3) с положительными начальными значениями ведут себя подобно поведению решений системы (3) с $r > 0$ и отрицательными начальными значениями, т. е. либо уходят на $+\infty$ за конечное время, либо стремятся к 0 справа, если x_0 достаточно близко к 0 и $A < 1$.

Бифуркация периодического решения теперь происходит в обратном направлении: неустойчивое положительное периодическое решение сначала сливается с точкой покоя, а затем превращается в устойчивое отрицательное периодическое решение.

При $a < 0$ начало становится аттрактором, а ненулевая точка покоя $\hat{x} = a/r$ – репеллером дифференциального уравнения в (3). При $r > 0$ коэффициенты A и B отображения F в правой части рекуррентного уравнения (5) положительны, последовательность $\{z_k(z_0)\}_{k \geq 1}$ ведет себя так же, как и в рассмотренном выше случае $a > 0, r > 0$. При $r < 0, B < 0$ и этот случай тоже был рассмотрен выше. Поэтому характер перестройки структуры решений уравнения (3) при $a < 0$ такой же, как и в рассмотренных выше случаях.

Нелинейный оператор импульсного воздействия. Пусть импульсная система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = ax - rx^2, \quad t \neq k\theta, \quad x(t+0) = bx(t) + cx^2(t), \quad t = k\theta, \quad (11)$$

где $b > 0, \theta > 0, a, r, c \in R$. Теперь решение системы уже нельзя записать в явном виде, но еще можно точно выяснить количество и характер устойчивости периодических решений. Рекуррентное уравнение, связывающее значения решения системы в соседних моментах импульсного воздействия имеет вид

$$x((k+1)\theta) = F(x(k\theta)) = \frac{h(x(k\theta)) \exp(a\theta)}{1 + \frac{r}{a} h(x(k\theta)) (\exp(a\theta) - 1)}, \quad (12)$$

где $h(t) = bx(t) + cx^2(t)$. Введем обозначения:

$$A_1 = b \exp(a\theta), \quad A_2 = c \exp(a\theta), \quad B_1 = \frac{rb}{a} (\exp(a\theta) - 1), \quad B_2 = \frac{rc}{a} (\exp(a\theta) - 1).$$

Тогда для ненулевых неподвижных точек отображения $F : R \rightarrow R$ из (12) получим уравнение

$$B_2 z^2 + (B_1 - A_2)z + 1 - A_1 = 0.$$

Корни уравнения имеют вид

$$z_{1,2} = \frac{A_2 - B_1}{2B_2} \pm \sqrt{\left(\frac{A_2 - B_1}{2B_2}\right)^2 + \frac{A_1 - 1}{B_2}}.$$

Можно показать, что при приближении бифуркационного параметра к критическому значению дискриминант квадратного уравнения

$$D = (A_2 - B_1)^2 + 4B_2(A_1 - 1) = \left[ce^{a\theta} - \frac{rb(e^{a\theta} - 1)}{a} \right]^2 + 4 \frac{rc(e^{a\theta} - 1)}{a} (be^{a\theta} - 1)$$

обязательно будет положительным и квадратичная система (11) будет иметь пару периодических решений периода θ . Для конкретных значений коэффициентов легко установить характер устойчивости этих решений.

Интересно отметить, что при дискриминант может оказаться отрицательным. Например, при $a = r = \theta = 1$, $b = qc$ дискриминант будет отрицательным при достаточно малом значении $c > 0$. Это означает, что система (11) с указанными коэффициентами не имеет θ -периодических решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Наукова думка, 1987.
2. Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. Theory of Impulsive Differential Equations. Singapore-New Jersey-London-Hong Kong: World Scientific, 1989.
3. Bainov D., Simeonov P. Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications. Harlow: Longman Scientific & Technical, 1993.
4. Samoilenko A. M., Perestyuk, N. A. Impulsive Differential Equations. River Edge: World Scientific, 1995.
5. Tan R., Liu Z., Cheke R. A. Periodicity and stability in a single-species model governed by impulsive differential equation. Applied Mathematical Modelling, 2012, **36**, 1085–1094.

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПРОГРАММНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМЫ С ЦИКЛИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ

А.С. Андреев (Ульяновский Государственный Университет, Россия,
432017, ул. Льва Толстого, 42)

E-mail: andreevas@ulsu.ru

Д.С. Макаров (Ульяновский Государственный Университет, Россия,
432017, ул. Льва Толстого, 42)

E-mail: prostodenis18@mail.ru

ON THE STABILIZATION OF STATIONARY PROGRAM MOTIONS OF A SYSTEM WITH CYCLIC COORDINATES

A.S. Andreev (Ulyanovsk State University, Russia,
432017, Ulyanovsk, Leo Tolstoy str., 42)

Email: andreevas@ulsu.ru

D.S. Makarov (Ulyanovsk State University, Russia,
432017, Ulyanovsk, Leo Tolstoy str., 42)

Email: prostodenis18@mail.ru

Keywords: mechanical system, cyclic coordinates, program motion, integral controller.

Аннотация. В работе исследуется задача о стабилизации программных движений голономной механической системы с циклическими координатами. Решение задачи с измерением только позиционных координат достигается управлением типа нелинейного интегрального регулятора.

Введение

Задача о математическом моделировании структуры управления движением голономной механической системы без измерения скоростей является в настоящее время весьма актуальной в связи с широким применением робототехники [1-7].

Данная работа является продолжением результатов из [8] с применением методов исследования устойчивости систем с последствием, полученных в работах [9, 10].

1. Постановка задачи

Рассмотрим голономную управляемую механическую систему со стационарными связями, имеющую n обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_n . Движение такой системы может быть описано с помощью уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + U \quad (1)$$

Положим также, что кинетическая энергия системы (1) не зависит от последних $(n - m)$ координат q_{m+1}, \dots, q_n ($0 < m < n, n > 1$), и, таким образом, первые m координат q_1, q_2, \dots, q_m являются периодическими, остальные – циклическими [11, 12].

Переобозначим координаты следующим образом

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_m)' = (q_1, q_2, \dots, q_m)' \quad s' = (s_1, s_2, \dots, s_{n-m}) = (q_{m+1}, \dots, q_n)'.$$

Таким образом, кинетическая энергия системы может быть записана в виде

$$2T = \dot{z}' A_{11}(z) \dot{z} + \dot{z}' A_{12}(z) \dot{s} + \dot{s}' A_{21}(z) \dot{z} + \dot{s}' A_{22}(z) \dot{s},$$

где составляющие матрицу A подматрицы $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \alpha_0 |z|^2 &\leq z' A_{11} z \leq \alpha_1 |z|^2, \\ \alpha_0 |s|^2 &\leq s' A_{22} s \leq \alpha_1 |s|^2, \\ \alpha_0 |s|^2 &\leq s' B s \leq \alpha_1 |s|^2, \\ B &= A_{12} A_{22} A_{21}, \quad \alpha_0, \alpha_1 = \text{const} > 0, \\ A_{21} &= A_{12}. \end{aligned}$$

Будем полагать, что обобщенные силы и управление по циклическим координатам отсутствуют, т.е.

$$Q' = (Q'_z, Q'_s), \quad U = (U'_z, U'_s), \quad Q_s = 0, \quad U_s = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial s} = 0. \quad (2)$$

Введем в рассмотрение циклические импульсы

$$v = \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = A_{21}(z) \dot{z} + A_{22}(z) \dot{s}. \quad (3)$$

Из последних $n - m$ уравнений (1) и предположений (2) получаем

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad (4)$$

т.е. циклические импульсы для движения системы (14) являются постоянными.

Следуя [11, 12], введем функцию Рауса. Для этого из (3) находим

$$\dot{s} = A_{22}^{-1}(z)(v - A_{21}(z) \dot{z}). \quad (5)$$

Функция Рауса примет вид [11, 12]

$$\begin{aligned} 2R = 2T - 2\dot{s}'v &= \dot{z}'A_{11}\dot{z} + \dot{z}'A_{12}A_{22}^{-1}(v - A_{21}\dot{z}) + (v - A_{21}\dot{z})'A_{21}\dot{z} + \\ &+ (v - A_{21}\dot{z})'A_{22}^{-1}(v - A_{21}\dot{z}) - 2(v - A_{21}\dot{z})'A_{22}^{-1}P = 2R_2 + 2R_1 + \\ &+ 2R_0, 2R_2 = \dot{z}'B(z)\dot{z}, R_1 = vA_{22}^{-1}A_{21}\dot{z}, 2R_0 = -v'A_{22}^{-1}v. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом матрица $B(z)$ является определенно-положительной.

Уравнения движения системы (1) также могут быть записаны в виде равенств (4) и (5) и уравнений

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + Q_z + U_z \quad (7)$$

Подставив выражение для функции R , получим следующие уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R_2}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial R_2}{\partial z} &= \frac{\partial R_0}{\partial z} - \frac{\partial \Pi}{\partial z} - G\dot{z} + U_z + Q_z, \\ dv/dt &= 0, \\ \dot{s} &= A_{22}^{-1}(z)(v - A_{21}(z)\dot{z}), \end{aligned} \quad (8)$$

где $G = G(z, v) = \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)'$, $g(z, v) = A_{12}A_{22}^{-1}v$ есть кососимметрическая матрица, $G' = -G$.

Пусть, при некоторых $z = z_0$ и $v = v_0$ управление U_z выбрано так, что выполняется условие

$$U_z^0(t) = -\frac{\partial R_0}{\partial z}(v_0, z_0) + \frac{\partial \Pi(t, z_0)}{\partial z}. \quad (9)$$

Тогда система (6) будет иметь программное движение

$$\dot{z} = 0, \quad z = z_0, \quad v = v_0, \quad \dot{s} = \dot{s}_0 = A_{22}^{-1}(z_0)v_0. \quad (10)$$

2. Построение управления.

Рассмотрим задачу о стабилизации программного движения (10) управлением вида

$$U_z = U_z^0(t) - \frac{\partial \Pi_U(t, v, z)}{\partial z} - \int_{t-h}^t P_z(t, \tau)(z(t) - z(\tau))d\tau \quad (11)$$

где $\Pi_U = \Pi_U(t, v, z)$ – некоторая непрерывно-дифференцируемая (по z дважды) ограниченная вместе со своими производными $\frac{\partial \Pi}{\partial t}(t, v, z_0) = 0$,

$P_z(t, z)$ есть матрица размерности $m \times m$ выражения вида $P_z = |p_{jk}(t, \tau)|$,

$p_{jk}(t, \tau) = p_{jk}^0 e^{s_{jk}^0(\tau-t)}$, $p_{jk}^0, s_{jk}^0 - const$ удовлетворяющая условиям

$$\dot{z}P(t, \tau)z \geq 0, z'P_t(t, \tau)z \leq -\beta_0|z|^2, \quad \beta_0 > 0,$$

$$P_t(t, \tau) = \frac{\partial P_z(t, \tau)}{\partial t} = - \left| p_{jk}^0 s_{jk}^0 e^{s_{jk}^0(\tau-t)} \right|, \quad (12)$$

$$|z|^2 = z_1^2 + \dots + z_m^2.$$

Запишем уравнения (7) с управлением (11), (12) в виде

$$\frac{dz(t)}{dt} = r(t),$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = B^{-1}(z(t))(E(z(t), r(t))r(t) - G(z(t), v(t))r(t) + Q_z(t, z(t), r(t)) - (13)$$

$$-\frac{\partial S(t, v(t), z(t))}{\partial z}) - \int_{t-h}^t P_z(t, \tau)(z(t) - z(\tau))d\tau$$

где $E = (e_{kj})$ – матрица, определяемая равенством

$$e_{kj} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial b_{ik}}{\partial z_j} - \frac{\partial b_{kj}}{\partial z_i} - \frac{\partial b_{ij}}{\partial z_k} \right) r_k,$$

функция

$$S(t, v, z) = \Pi(t, z) - R_0(v, z) - \frac{\partial \Pi(t, z_0)}{\partial z} z + \frac{\partial R_0(v, z_0)}{\partial z} z + \Pi_U(t, v, z).$$

В силу выбора U_z имеем $\frac{\partial S(t, v_0, z_0)}{\partial z} = 0$, так что система (13) имеет решение

$$z(t) = z_0, \quad r(t) = 0, \quad v = v_0, \quad \dot{s}_0 = A_{22}^{-1}(z_0)v_0,$$

отвечающее программному движению (10).

Полагаем, что функции $Q_z(t, z, r)$, $S(t, v, z)$, $\frac{\partial S}{\partial t}(t, v, z)$, $\frac{\partial S(t, v, z)}{\partial z}$ являются ограниченными, равномерно непрерывными на множествах вида $R \times K$, $K \in R^n$ – компакт, при этом

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, v, z) \leq 0, \quad S(t, v_0, z_0) = 0. \quad (14)$$

Уравнения (13) имеют аналогичный им вид с функциями $Q_z^*(t, z, r)$ и $S = S^*(v, z)$, предельными к Q_z и S

$$S^*(v, z) = \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t, v, z).$$

Введем функционал

$$V = \frac{1}{2} r'(t) B(z(t)) r(t) + S(t, v_0, z) + \frac{1}{2} v(t) - v_0^2 + \\ + \frac{1}{2} \int_{t-h}^t (z(t) - z(\tau))' P_z(t, \tau) (z(t) - z(\tau)) d\tau.$$

Его производная в силу уравнений (13) в соответствии с соотношениями (12) и (14) будет иметь следующую оценку

$$\dot{V} = -z'(t) G(z(t), v(t)) r(t) + z'(t) Q_z(t, z(t), r(t)) + \frac{\partial S(t, v_0, t)}{\partial t} + \\ + \frac{1}{2} \int_{t-h}^t (z(t) - z(\tau))' P_t(t, \tau) (z(t) - z(\tau)) d\tau \leq -W(z_t) = \quad (15) \\ = -\frac{\beta_0}{2} \int_{t-h}^t (z(t) - z(\tau))' P_t(t, \tau) (z(t) - z(\tau)) d\tau.$$

Соответственно имеем следующую теорему.

Теорема 1. *Предположим, что:*

- 1) функция $S = S(t, v_0, z)$ является определенно-положительной по z ;
- 2) функция $S^*(v_0, z)$ имеет изолированный минимум в точке

$$\left| \frac{\partial S^*(v_0, z)}{\partial z} \right| \neq 0 \quad \forall z \in \{0 < |z - z_0| < \delta\}.$$

Тогда под действием управления (11) программное стационарное движение (10) устойчиво, асимптотически устойчиво относительно движений, отвечающих значению $v = v_0$, а каждое иное возмущенное движение неограниченно приближается при $t \rightarrow +\infty$ к движению

$$\dot{z} = 0, \quad \dot{z} = z_1 = const, \quad v = v_1 = const, \quad \dot{s} = \dot{s}_1 = A_{22}^{-1}(z_1) v_1.$$

Доказательство: Из условия 1) теоремы и условий относительно функций, входящих в функционал V , следует, что он является определенно положительным, допускающим бесконечно малый высший предел по переменным $r, z, v - v_0$

В силу (15) имеем устойчивость движения (10).

Множество $\{W(z_t) = 0\}$ может содержать только те предельные решения, для которых $z(t) = z_1 = const$. Но такими решениями могут быть решения для которых одновременно

$$r(t) = 0, \quad v(t) = v_1 = const, \quad \frac{\partial S^*(v_1, z_1)}{\partial z} = 0.$$

Тем самым, в силу теорем [9, 10] имеем искомое доказательство.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-08482, № 15-01-08599).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника / Перевод с англ. – М.: Мир, 1989. – 624 с.
2. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. – М.: Наука, 1989. – 368 с.
3. Кулаков Ф.М. Супервизорное управление манипуляционными роботами. – М.: Наука, 1989. – 448 с.
4. Вербюк В.Е. Динамика и оптимизация робототехнических систем. – Киев: Наук.думка, 1989. – 187 с.
5. Градецкий В.Г., Князьков М.М., Фомин Л.Ф., Чащухин В.Г., Механика миниатюрных роботов. – М.: Наука, 2010. – 271 с.
6. Градецкий В.Г., Вешников В.Б., Камниченко С.В., Кравчук Л.Н., Управляемое движение мобильных роботов по произвольно ориентированным в пространстве поверхностям. – М.: Наука, 2001. – 356 с.
7. Корендясев А.И., Саламандра Б.Л., Тывес Л.И. Теоретические основы робототехники. В 2 кн. Кн. 2. – М.: Наука, 2006. – 383 с.
8. Макаров Д.С., Перегудова О.А. О стабилизации программных позиций голономной механической системы без измерения скоростей // Ученые записки УлГУ. Серия Математика и информационные технологии. 2016. Вып. 1(8).
9. Андреев А.С. Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений: монография. – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2005. – 328 с.

10. Андреев А.С. Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. –2009. – № 9. –С. 4–55.

11. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений // ПММ. – 1966. –Т. 30. – Вып. 8. – С. 922–933.

12. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. – М.: УРСС, 1998.

СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

А.С. Андреев, О.А. Перегудова, С.Ю. Раков

УлГУ, Россия, 432017, Ульяновск, Л.Толстого, 42

E-mail: AndreevAS@ulsu.ru, peregudovaoa@gmail.com

NONLINEAR INTERGAL REGULATOR SYNTHESSES ON THE BASE OF VOLTERRA EQUATIONS

A.S. Andreev, O.A. Peregudova, S.Yu. Rakov

ULSU, 432017, Ulianovsk, L.Tolstoi str., 42

Keywords: integro-differential Volterra equation, positive limit set, holonomic mechanical system, stabilization, nonlinear integral regulator, Lyapunov functional.

Введение. Задача построения регуляторов для нелинейных механических систем по-прежнему является актуальной. Один из подходов к решению этой проблемы состоит в использовании динамических компенсаторов (см. напр. [1-3]). Применение динамических компенсаторов по-сути является включением в регулятор интегральных слагаемых. Используя представление интегральных членов в структуре управляющих сигналов, как регуляторов с неограниченным последствием [4-6], движение механических систем с такими типами регуляторов можно моделировать интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра. В работе [7] дано развитие метода функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости неавтономных функционально-дифференциального уравнения типа Вольтерра. На этой основе разработаны методики построения ПИ- и ПИД-регуляторов в задачах управления механическими системами. В работе [8] предложен закон управления, осуществляющий стабилизацию заданного программного движения двухзвенного манипулятора в виде пропорционально-интегральной зависимости для случая, когда основание манипулятора совершает заданное нестационарное движение. При этом задача стабилизации программного движения решена для линеаризованной модели манипулятора. В работе [9] решена задача о стабилизации программного движения двухзвенного манипулятора без измерения скоростей. Представлена методика синтеза кусочно-непрерывного нелинейного управления на основе построения наблюдателя и применения метода вектор-функций Ляпунова.

В работе [10] решены задачи о стабилизации программных положений и стационарных движений голономных механических систем с измерением только обобщенных координат.

Результаты настоящей статьи делятся на две части. Первая часть состоит в установлении предельных свойств решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений вида Вольтерра с получением новых теорем об асимптотической устойчивости и неустойчивости на основе применения функционала Ляпунова со знакопостоянной производной. Во вторую часть вошли результаты по стабилизации программных положений голономных механических систем путем построения регуляторов с неограниченным последствием. На примере двухзвенного манипулятора с тремя степенями свободы проведено численное моделирование, подтверждающее полученные теоретические результаты.

Предельные свойства решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Рассмотрим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра

$$\dot{x} = f(x(t)) + \int_0^t g(s-t, x(t), x(s)) ds, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, \mathbb{R}^n – n -мерное линейное действительное пространство с нормой $\|x\|$; f, g – функции, определенные и непрерывные соответственно в областях $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^- \times \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0]$, при этом функция f удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(x^{(2)}) - f(x^{(1)})\| \leq L_1 \|x^{(2)} - x^{(1)}\|, \quad L_1 = L_1(K_1) \quad (2)$$

для каждого компактного множества $K_1 \subset \mathcal{D}$, а функция g – следующим условиям: для каждого компактного множества $K_2 \subset \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ выполняются неравенства

$$\|g(t, x, y)\| \leq g_1(\tau, K_2) \forall (t, x, y) \in \mathbb{R}^- \times K_2, \quad \int_{-\infty}^0 g_1(\tau, K_2) d\tau < +\infty, \quad (3)$$

$$\|g(\tau, x^{(2)}, y^{(2)}) - g(\tau, x^{(1)}, y^{(1)})\| \leq L_{21} \|x^{(2)} - x^{(1)}\| + L_{22} \|y^{(2)} - y^{(1)}\|,$$

$$L_{2j} = L_{2j}(K_2). \quad (4)$$

При условиях (2) – (4) для каждой начальной точки $x_0 \in \mathcal{D}$ существует единственное решение $x = x(t, x_0)$ ($x(0, x_0) = x_0$) уравнения (1), определенное на интервале $[0, \alpha)$, при этом $x(t, x_0) \rightarrow \partial \mathcal{D}$ при $t \rightarrow \alpha - 0$.

Пусть $x = x(t, x_0)$ есть некоторое решение (1), определенное и ограниченное некоторым компактом $K \subset \mathcal{D}$ при $t \geq 0$. Определим классическим образом положительную предельную точку $p \in \mathcal{D}$ и соответствующее положительное предельное множество $\omega^+(x_0)$

$$p = \lim_{t_k \rightarrow +\infty} x(t_k, x_0), \omega(x_0) = \{p \in \mathcal{D} : x(t_k, x_0) \rightarrow p, t_k \rightarrow +\infty\}.$$

В дополнение к (1) можно ввести уравнение Вольтерра с бесконечным запаздыванием

$$\dot{x} = f(x(t)) + \int_{-\infty}^t g(s-t, x(t), x(s)) ds, \quad (5)$$

существование которого следует из условия (2).

Теорема 1. Пусть $x = x(t, x_0)$ есть некоторое решение (1), определенное компактом $K \subset \mathcal{D}$ при всех $t \geq 0$. Тогда для каждой предельной точки $p \in \omega^+(x_0)$ существует решение $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, уравнения (5), такое что $x(0) = p$, $\{x(t), t \in \mathbb{R}\} \subset \omega^+(x_0)$.

Теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости. Пусть для уравнения (1) можно найти функционал Ляпунова вида

$$V(x_t) = V_1(x(t)) + \int_0^t V_2(s-t, x(t), x(s)) ds, \quad (x_t = x(s), 0 \leq s \leq t), \quad (6)$$

где V_1 и V_2 – некоторые неотрицательные скалярные функции, определенные и непрерывные в областях \mathcal{D} и $\mathbb{R}^- \times \mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

Предположим существование верхней правосторонней производной функционала (6) в силу (1)

$$\dot{V}^+(x_t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{V(x_{t+h}) - V(x_t)}{h},$$

имеющей следующую оценку

$$\dot{V}^+(x_t) \leq -W(x_t), \quad W(x_t) = W_1(x(t)) + \int_0^t W_2(s-t, x(t), x(s)) ds, \quad (7)$$

где $W_1(x)$ и $W_2(\tau, x, y)$ – некоторые неотрицательные функции, определенные и непрерывные в областях \mathcal{D} и $\mathbb{R}^- \times \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ и удовлетворяющие в этих областях условиям вида (2), (3) и (4).

Отсюда, в частности, для непрерывной функции $x: \mathbb{R} \rightarrow K, K \subset \mathcal{D}$ – компакт, следует существование

$$\int_{-\infty}^t W_2(s-t, x(t), x(s)) ds.$$

Теорема 2. *Предположим, что для уравнения (1) можно найти функционал $V = V(x_t)$, верхняя правосторонняя производная которого удовлетворяет неравенству (7). Тогда для каждого ограниченного компактом $K \subset \mathcal{D}$ решения $x = x(t, x_0)$ уравнения (1) множество $\omega^+(x_0)$ состоит из решений уравнения (5), удовлетворяющих равенствам*

$$W_1(x(t)) = 0, W_2(s-t, x(t), x(s)) = 0, t \geq s.$$

Теорема 2 представляет собой теорему принципа инвариантности для уравнения (1).

Положим, что в уравнении (1) $f(0) = 0, g(\tau, 0, 0) = 0$, и значит, уравнение (1) имеет нулевое решение $x(t, 0) = 0$.

Из теоремы 2 несложно вывести следующие достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости решения, в которых через $a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ обозначена функция типа Хана.

Теорема 3. *Предположим, что для уравнения (1) можно найти функционал вида (6) с функцией $V_1(x) \geq a(\|x\|)$, верхняя правосторонняя производная которого удовлетворяет неравенству (7). При этом отсутствуют решения $x = \phi(t)$ уравнения (5), удовлетворяющие при всех $t \in \mathbb{R}$ равенствам*

$$W_1(t, \phi(t)) = 0; W_2(s-t, \phi(t), \phi(s)) = 0, s \leq t,$$

кроме нулевого $\phi(t) = 0$. Тогда решение $x=0$ уравнения (1) асимптотически устойчиво.

Теорема 4. *Предположим, что для уравнения (1) можно найти функционал вида (6) с функцией $V_1(x)$, принимающей в любой достаточно малой окрестности $x = 0$ отрицательные значения, и верхней правосторонней производной, удовлетворяющей неравенству (7). При этом отсутствуют решения $x = \phi(t)$ уравнения (5), удовлетворяющие соотношениям*

$$V_1(\phi(t)) < 0, W_1(\phi(t)) = 0, W_2(s-t, \phi(t), \phi(s)).$$

Тогда решение $x = 0$ уравнения (1) неустойчиво.

Доказательства теорем 3 и 4 выводятся непосредственно из теоремы 2.

Решение задачи о стабилизации программного положения голономной механической системы. Рассмотрим управляемую механическую систему с n степенями свободы и соответственно обобщенными координатами описываемые уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q(q, \dot{q}) + U, \quad (8)$$

где $T = \dot{q}' A(q) \dot{q} / 2$ – кинетическая энергия системы с инерционной матрицей $A(q)$, $\dot{q} = dq / dt$, $Q(q, \dot{q})$ – вектор обобщенных диссипативных и гироскопических сил, $Q(q_i, 0) = 0$, $Q' \dot{q} \leq 0$, $\Pi = \Pi(q)$ – потенциальная энергия, U – обобщенная управляющая сила, $(\bullet)'$ – операция транспонирования. Полагаем, что функции, входящие в (8), определены и непрерывны при всех $q \in \mathbb{R}^n$, ограничения на управление U не накладываются.

Уравнения (8), разрешенные относительно \ddot{q} , представим в виде:

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q}, \quad \frac{d\dot{q}}{dt} = A^{-1}(q) \left(C(q, \dot{q}) \dot{q} + Q(q, \dot{q}) - \frac{\partial \Pi}{\partial q} + U \right).$$

При этом коэффициенты матрицы $C = (c_{jk})$ инерционных сил определяются равенством

$$c_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i; \quad j, k = 1, \dots, n$$

Рассмотрена задача о стабилизации и дестабилизации нулевого положения равновесия

$$\dot{q} = 0, \quad q = 0. \quad (9)$$

Показано, что эта задача решается посредством интегрального регулятора вида

$$U = - \frac{\partial \Pi_u(q)}{\partial q} - \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right)_0^t \int_0^t P(v-t) (f(q(t)) - f(q(v))) dv, \quad (10)$$

где $\Pi_u \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ есть некоторая непрерывно дифференцируемая функция, $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ есть некоторая неотрицательная матричная функция с производной $\frac{dP(s)}{ds} \geq 0$, $x' \frac{dP(s)}{ds} x \geq \alpha(s) \|x\|^2$, $\alpha(s) > 0$, $\int_{-\infty}^0 \alpha(s) ds < +\infty$

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть некоторая дифференцируемая функция, имеющая в любой

ограниченной области $\{q \in \mathbb{R}^m : \|q\| \leq \mu = const\}$ конечное число прообразов $f(c)$, или иначе, конечное число решений уравнения $f(q) = c$. Положим $\Pi_0 = \Pi(q) + \Pi_u(q)$. Соответственно теоремам 2-4 получены следующие результаты.

Теорема 5. *Предположим, что управление (10) таково, что функция $\Pi_0(q)$ является определенно-положительной, при этом в некоторой области $\{0 < \|q\| < \Delta\}$ выполнено неравенство $\|\partial \Pi_0(q) / \partial q\| > 0$. Тогда это управление обеспечивает стабилизацию программного положения (9). При этом, каждое ограниченное движение системы неограниченно приближается при $t \rightarrow +\infty$ к множеству движений*

$$\{\dot{q}(t) = 0, \partial \Pi(q(t)) / \partial q = 0\}.$$

Теорема 6. *Предположим, что управление (10) таково, что функция $\Pi_0(q)$ принимает в любой достаточно малой окрестности $q = 0$ отрицательные значения, при этом $\|\partial \Pi_0(q) / \partial q\| > 0$ в области $\{0 < \|q\| < \Delta, \Pi_0(q) < 0\}$. Тогда управление (10) является дестабилизирующим.*

Теоремы 5 и 6 представляют собой основу для построения интегральных регуляторов, как линейных (пропорционально-интегральных), так и нелинейных, в решении задач о стабилизации программных положений равновесия голономных механических систем в нелинейной постановке без измерения обобщенных скоростей.

Найдены условия, при которых задача о стабилизации программного положения механической системы решается при помощи регуляторов вида

$$U = -F(q, \dot{q})\dot{q} - \int_0^t p(v-t) \frac{\partial \Pi_0(q(v))}{\partial q} dv$$

Решение задачи о стабилизации программного положения двухзвенного манипулятора с тремя степенями свободы. Рассмотрим задачу о стабилизации программного положения двухзвенного манипулятора с тремя степенями свободы [11]. Выберем в качестве обобщенных координат q_1 , q_2 и q_3 углы поворота в трех цилиндрических шарнирах манипулятора: угол поворота q_1 колонки вокруг вертикальной оси, угол q_2 поворота первого звена длиной l_2 и массой m_2 и угол q_3

поворота второго звена длиной l_3 и массой m_3 [11]. Полагаем, что на систему действуют только силы тяжести, выражаемые потенциальной энергией

$$\Pi(q_2, q_3) = \mu_2 \sin q_2 + \mu_3 \sin(q_2 + q_3),$$

где $\mu_2 = gl_2(m_3 + 0.5m_2)$, $\mu_3 = 0.5gl_3m_3$.

Для задачи стабилизации программного положения $q_1 = q_{10}$, $q_2 = q_{20}$, $q_3 = q_{30}$ манипулятора найден нелинейный интегральный регулятор вида

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\lambda_1 \sin(q_1(t) - q_1^0) - \cos q_1(t) \int_{t-h(t)}^t p_1(v-t) (\sin q_1(t) - \sin q_1(v)) dv, \\ Q_2 &= \mu_2 \cos q_2^0 \cos(q_2(t) - q_2^0) + \mu_3 \cos(q_2^0 + q_3^0) \cos(q_2(t) + q_3(t) - \\ &\quad - q_2^0 - q_3^0) - \lambda_2 \sin(q_2(t) - q_2^0) - \cos q_2(t) \int_{t-h(t)}^t p_2(v-t) \times \\ &\quad \times (\sin q_2(t) - \sin q_2(v)) dv, \\ Q_3 &= \mu_3 \cos(q_2^0 + q_3^0) \cos(q_2(t) + q_3(t) - q_2^0 - q_3^0) - \lambda_3 \sin(q_3(t) - q_3^0) - \\ &\quad \cos q_3(t) \int_{t-h(t)}^t p_3(v-t) (\sin q_3(t) - \sin q_3(v)) dv, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 - \mu_2 - \mu_3 \geq \rho_1 > 0$, $\lambda_3 - \mu_3 \geq \rho_2 > 0$, $\rho_1 \rho_2 > \mu_3^2$.

Численное моделирование проводилось в системе MathCad при следующих значениях параметров манипулятора

$$m_2 = m_3 = 20, l_2 = l_3 = 1.$$

Были выбраны следующие значения программной позиции

$$q_1^0 = \pi, q_2^0 = \frac{\pi}{3}, q_3^0 = \frac{\pi}{4}.$$

Найдены следующие значения параметров управления (11)

$$\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 500, \lambda_3 = 200, p_i(v-t) = e^{k(v-t)+8} \quad (i=1,2,3), \quad k=10.$$

На рис. 1 – 3 показаны результаты моделирования на временном интервале $0 \leq t \leq 25c$. Сплошной линией показаны графики действительного движения, а штриховой – значения соответствующей программной

позиции. Видно, что при начальных отклонениях от программной позиции, равных 0,8рад происходит стабилизация данного положения.

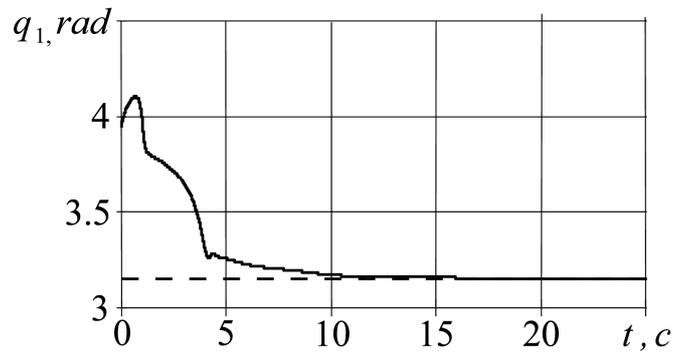


Рис. 1. Зависимости угловой координаты колонки от времени

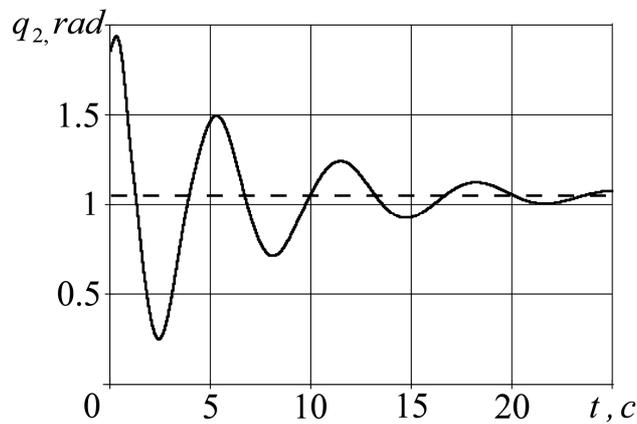


Рис. 2. Зависимости угловой координаты первого звена манипулятора от времени

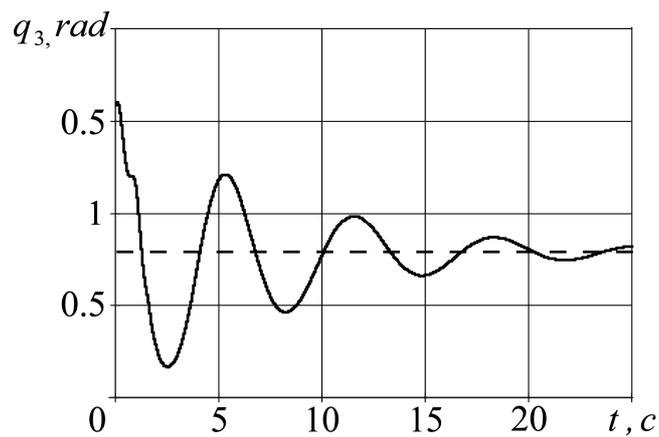


Рис. 3. Зависимости угловой координаты второго звена манипулятора от времени

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 15-01-08482, 15-01-08599).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Berghuis H., Nijmeijer H. Global regulation of robots using only position measurements // *Systems and Contr. Letters*. 1993. Vol. 21. P. 289-293.
2. Бурков И.В. Стабилизация натуральной механической системы без измерения её скоростей с приложением к управлению твёрдым телом // *Прикладная математика и механика*. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 923-933.
3. Burkov I.V. Stabilization of position of uniform motion of mechanical systems via bounded control and without velocity measurements // *3-rd IEEE Multi-conference on Systems and Control*. St. Petersburg. 2009. P. 400-405.
4. Ананьевский И.М., Колмановский В. Б. О стабилизации некоторых регулируемых систем с последействием // *Автоматика и телемеханика*. 1989. № 9. С. 34-42.
5. Андреев А.С. Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений: монография. Ульяновск: Изд-во Ул-ГУ, 2005. 328 с.
6. Андреев А.С. Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // *Автоматика и телемеханика*. 2009. № 9. С. 4-55.
7. Андреев А.С., Благодатнов В.В., Кильметова А.Р. Уравнения Вольтерра в моделировании ПИ- и ПИД-регуляторов // *Научно-технический вестник Поволжья*. 2013. № 1. С. 84-90.
8. Андреев А.С., Раков С.Ю. Об управлении двухзвенным роботоманипулятором на основе ПИ-регулятора // *Автоматизация процессов управления*. 2015. № 3(41). С. 69-72.
9. Андреев А.С., Перегудова О.А. Синтез управления двухзвенным манипулятором без измерения скоростей // *Автоматизация процессов управления*. 2015. № 4(42). С. 81-89.
10. Андреев А.С., Перегудова О.А. О стабилизации программных движений голономной механической системы без измерения скоростей // *Прикладная математика и механика*. 2017. Т. 81. Вып. 2. С. 137-153.
11. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 326 с.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ И РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Ф.Д. Байрамов, Б.Ф. Байрамов (Набережночелнинский институт
(филиал) КФУ, Россия, 423812, Республика Татарстан,
г. Набережные Челны, пр. Мира, 68/19)
E-mail: bbairamov@gmail.com

ABOUT STABILITY OF ONE CLASS OF HYBRID SYSTEMS WITH CONCENTRATED AND DISTRIBUTED PARAMETERS

F.D. Bairamov, B.F. Bairamov (Naberezhnochelninsky Institute of KFU,
423812, Republic of Tatarstan, Naberezhnye Chelny,
Prospekt Mira, 68/19)

Keywords: stability, hybrid systems, method of Lyapunov functions.

Введение. Одним из основных методов исследования устойчивости систем с распределёнными параметрами является метод функций (функционалов) Ляпунова. Основной проблемой при использовании метода является построение самого функционала Ляпунова. В приложениях функционалы обычно строились интуитивно, исходя из полной энергии, первых интегралов и других соображений. В работе [1] при решении задач устойчивости систем с распределёнными параметрами был предложен новый подход, суть которого заключается в следующем. Уравнения в частных производных высокого порядка предварительно сводятся к системе уравнений первого порядка по времени и пространственным координатам. Далее для этой системы функционалы Ляпунова строятся по конкретным уравнениям в виде интегральных форм, знакоопределённость которых можно проверять, применяя известный критерий Сильвестра. Такой подход позволяет конструктивно строить функционалы Ляпунова, проверять условия устойчивости и значительно расширяет возможность использования метода функционалов Ляпунова в конкретных приложениях.

В данной работе вышеописанный подход используется для исследования устойчивости гибридных систем с сосредоточенными и распределёнными параметрами. Преобразование исходных уравнений в частных производных в систему уравнений в частных производных первого порядка совместно с записью обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши позволяет конструктивно строить функцию Ляпунова в виде суммы интегральных и обычных квадратичных форм и разработать общую методику исследования устойчивости для достаточно широкого класса гибридных систем.

Постановка задачи. Рассмотрим систему, одно из звеньев которой описывается гиперболическим уравнением

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a_0(x) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a_1(x) \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + a_2(x) \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + a_3(x) \cdot y, \quad (1)$$

$$x \in (0,1), a_0(x) \geq \text{const} > 0,$$

а другие звенья – уравнениями

$$\frac{dz}{dt} = D_0 \cdot z + D_1 \cdot \phi(0,t) + D_2 \cdot \phi(1,t), \quad (2)$$

где $t \in I = [0, \infty)$, $y = y(x,t)$ – функция состояния распределённого звена, $z = z(t)$ – вектор-функция состояния конечномерных звеньев, $a_0(x)$ – непрерывная функция со своей первой производной, $a_i(x)$ ($i = \overline{1,3}$) – непрерывные функции, D_i ($i = \overline{0,2}$) – постоянные матрицы.

Уравнение (1) преобразуем в систему уравнений первого порядка. Для этого введём новые переменные $\phi_1 = y(x,t)$, $\phi_2 = \partial \phi_1 / \partial t$, $\phi_3 = \partial \phi_1 / \partial x$. В этих переменных запишем исходное уравнение (1), к которому добавим условие интегрируемости $\partial^2 y / \partial x \partial t = \partial^2 y / \partial t \partial x$. Таким образом, получим систему

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = \phi_2, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \phi_3, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = a_0 \cdot \frac{\partial \phi_3}{\partial x} + a_1 \cdot \phi_3 + a_2 \cdot \phi_2 + a_3 \cdot \phi_1, \quad \frac{\partial \phi_3}{\partial t} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x},$$

эквивалентную уравнению (1) [1]. Эту систему, вводя вектор $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$ и матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad A_0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad B_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

запишем в векторно-матричном виде

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = A(x) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + A_0(x) \cdot \phi, \quad B \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + B_0 \cdot \phi = 0. \quad (3)$$

При $x = 0$ и $x = 1$ заданы граничные условия

$$\Gamma_1 \cdot \phi(0,t) = \Gamma_2 \cdot z, \quad \Gamma_3 \cdot \phi(1,t) = \Gamma_4 \cdot z, \quad (4)$$

где $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$ – матрицы постоянных.

Уравнениями типа (2) – (4) описываются, например, системы, содержащие упругие валы, трубопроводы с распределённым характером течения жидкости или газа и т.д.

Введём меру $\rho = \int_0^1 \phi^T \cdot \phi \cdot dx$, характеризующую возмущённое состоя-

ние распределённого звена, и рассмотрим асимптотическую устойчивость системы (2) – (4) по переменным z , ρ .

Исследование устойчивости. Для решения поставленной задачи используем функцию Ляпунова

$$V = V_1 + V_2 = \int_0^1 \phi^T(x,t) \cdot F(x) \cdot \phi(x,t) \cdot dx + z^T(t) \cdot Q \cdot z(t), \quad (7)$$

где $F(x)$, Q – симметричные матрицы: Q – постоянная, а элементы $F(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции.

Особенностью системы (2) – (4) является то, что второе уравнение (3) и уравнения (4) не содержат производных по времени. Это не позволяет непосредственно вычислить производную V в силу всей системы. Поэтому сначала вычислим производную dV/dt в силу уравнения (2) и первого уравнения (3):

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & \int_0^1 \left[\phi^T \cdot F \cdot \left(A \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + A_0 \cdot \phi \right) + \left(\frac{\partial \phi^T}{\partial x} \cdot A^T + \phi^T \cdot A_0^T \right) \cdot F \cdot \phi \right] \cdot dx + \\ & + z^T \cdot \left(Q \cdot D_0 + D_0^T \cdot Q \right) \cdot z + 2 \cdot \phi^T(0,t) \cdot D_1^T \cdot Q \cdot z + 2 \cdot \phi^T(1,t) \cdot D_2^T \cdot Q \cdot z. \end{aligned}$$

Далее, следуя методу множителей Лагранжа, прибавим к этой производной выражение

$$\int_0^1 \left[\phi^T \cdot P \cdot \left(B \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + B_0 \cdot \phi \right) + \left(\frac{\partial \phi^T}{\partial x} \cdot B^T + \phi^T \cdot B_0^T \right) \cdot P^T \cdot \phi \right] \cdot dx,$$

равное нулю в силу второго уравнения (3). Здесь P – пока произвольная постоянная матрица.

Выполняя интегрирование по частям, получим

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^1 \left[-\phi^T \cdot w \cdot \phi + \frac{\partial \phi^T}{\partial x} \cdot \left(A^T \cdot F + B^T \cdot P^T - F \cdot A - P \cdot B \right) \right] \cdot dx +$$

$$\begin{aligned}
& +z^T \cdot (Q \cdot D_0 + D_0^T \cdot Q) \cdot z + 2 \cdot \phi^T(0,t) \cdot D_1^T \cdot Q \cdot z + 2 \cdot \phi^T(1,t) \cdot D_2^T \cdot Q \cdot z + \\
& + \phi^T(1,t) \cdot L(1) \cdot \phi(1,t) - \phi^T(0,t) \cdot L(0) \cdot \phi(0,t), \tag{8}
\end{aligned}$$

где $L(x) = F \cdot A + P \cdot B$,

$$w(x) = \frac{dL(x)}{dx} - F \cdot A_0 - A_0^T \cdot F - P \cdot B_0 - B_0^T \cdot P^T. \tag{9}$$

Для учёта уравнений (4) также воспользуемся методом множителей Лагранжа. К производной (8) прибавим равенства

$$\begin{aligned}
& \left[\phi^T(0,t) \cdot R_1 + z^T \cdot R_2 \right] \cdot \left[\Gamma_1 \cdot \phi(0,t) - \Gamma_2 \cdot z \right] + \left[\phi^T(0,t) \cdot \Gamma_1^T - z^T \cdot \Gamma_2^T \right] \times \\
& \quad \times \left[R_1^T \cdot \phi(0,t) + R_2^T \cdot z \right] = 0, \\
& \left[\phi^T(1,t) \cdot R_3 + z^T \cdot R_4 \right] \cdot \left[\Gamma_3 \cdot \phi(1,t) - \Gamma_4 \cdot z \right] + \left[\phi^T(1,t) \cdot \Gamma_3^T - z^T \cdot \Gamma_4^T \right] \times \\
& \quad \times \left[R_3^T \cdot \phi(1,t) + R_4^T \cdot z \right] = 0,
\end{aligned}$$

где R_1, \dots, R_4 – пока произвольные постоянные матрицы.

Пусть матрицы F, Q, P, R_1, \dots, R_4 удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}
& F \cdot A + P \cdot B = A^T \cdot F + B^T \cdot P^T, \quad x \in (0,1), \\
& D_1^T \cdot Q + \Gamma_1^T \cdot R_2^T - R_1 \cdot \Gamma_2 = 0, \quad D_2^T \cdot Q + \Gamma_3^T \cdot R_4^T - R_3 \cdot \Gamma_4 = 0, \tag{10} \\
& L(1) + R_3 \cdot \Gamma_3 + \Gamma_3^T \cdot R_3^T = 0, \quad L(0) + R_1 \cdot \Gamma_1 + \Gamma_1^T \cdot R_1^T = 0.
\end{aligned}$$

Тогда для производной dV/dt в силу системы (2) – (4) получим

$$\frac{dV}{dt} = - \int_0^1 \phi^T \cdot w(x) \cdot \phi \cdot dx - z^T \cdot M \cdot z, \tag{11}$$

где

$$M = -Q \cdot D_0 - D_0^T \cdot Q + R_2 \cdot \Gamma_2 + \Gamma_2^T \cdot R_2^T + R_4 \cdot \Gamma_4 + \Gamma_4^T \cdot R_4^T. \tag{12}$$

Согласно методу функций Ляпунова [1, 2] система (2) – (4) будет асимптотически устойчивой по переменным z, ρ , если интегральная квадратичная форма V_1 (7) непрерывна и определённо положительна по

мере ρ , квадратичная форма V_2 (7) определённо положительна, а производная dV/dt (11) определённо отрицательна по переменным z, ρ .

Непрерывность интегральной формы V_1 по мере ρ непосредственно следует из непрерывности, а, следовательно, ограниченности элементов матрицы $F(x)$ при $x \in (0,1)$. Остальные условия этого утверждения будут выполняться, если Q, M – определённо положительные, а матрицы $F(x), w(x)$ – определённо положительные при $x \in (0,1)$, т.е.

$$Q > 0, \quad M > 0; \quad F(x) > 0, \quad w(x) > 0, \quad x \in (0,1). \quad (13)$$

Пример. Рассмотрим устойчивость работы ветродвигателя роторного типа с вертикальной осью вращения совместно с насосом. Вал, передающий крутящий момент ветродвигателя насосу, имеет значительную длину, поэтому задача решается с учётом упругости этого вала.

Заметим, что использование экологически чистых ветронасосных агрегатов, позволяющих снизить энергетические затраты, является перспективным направлением. Ветродвигатель роторного типа не требует системы ориентации на ветер, бесшумен, безопасен и, в отличие от пропеллерных ветродвигателей, может быть размещён вблизи населённых пунктов и зданий.

Уравнения динамики ветронасосного агрегата с упругим передаточным валом в относительных отклонениях от номинального режима работы имеет вид [3]

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= k \cdot z + \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0}, \\ \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} &= a \cdot \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0,1), \\ \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=1} &= -k_1 \cdot \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} \Big|_{x=1}, \quad \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} \Big|_{x=0} = k_2 \cdot z. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $x = \frac{y}{\ell}$, $z = \frac{\omega - \omega_*}{\omega_*}$, $\phi(x,t) = \frac{\psi(x,t) - \psi_*(x,t)}{\psi_{\max}}$, $\psi_{\max} = \frac{M_* \cdot \ell}{G \cdot I}$, $a = \frac{G \cdot I}{J \cdot \ell^2}$, $k = \frac{1}{J_g} \cdot \left(\frac{\partial M}{\partial \omega} \right)_*$, $k_1 = \frac{\ell}{G \cdot I} \cdot \left(\frac{\partial M_H}{\partial \omega} \right)_*$, $k_2 = \frac{G \cdot I \cdot \omega_*}{\ell \cdot M_*}$, y – координаты поперечных сечений передаточного вала, ω – угловая скорость ветродвигателя, $\psi(x,t)$, ℓ , J , $G \cdot I$ – абсолютный угол поворота сечений, длина, погонный момент инерции, жёсткость на кручение передаточного

вала, M , M_H – крутящие моменты ветродвигателя и насоса, J_g – момент инерции ветродвигателя, ψ_{\max} – максимальный угол закручивания передаточного вала в номинальном режиме, знак (*) указывает на значения величин в номинальном режиме работы агрегата, когда $\omega_* = const$, $M = M_H = M_* = const$ и передаточный вал имеет постоянную по длине статическую деформацию $\partial\psi_*/\partial x = M_*/G \cdot I$.

Вводя новые переменные $\phi_1 = \partial\phi/\partial t$, $\phi_2 = \partial\phi/\partial x$ и учитывая условие интегрируемости $\partial\phi_2/\partial t = \partial\phi_1/\partial x$, запишем уравнения (14) в виде системы (2) – (4), где

$$A = \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad D_0 = k, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma_2 = k_2, \quad \Gamma_3 = \begin{vmatrix} k_1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix},$$

а матрицы A_0 , B , B_0 , D_2 , Γ_4 нулевые.

Построим функционал (7), где в данном примере примем $V_2 = q \cdot z^2$, $q = const > 0$. Запишем уравнение (9) и первое уравнение (10) в скалярном виде

$$f_{22} = a \cdot f_{11}, \quad \frac{df_{12}}{dx} = w_{11}, \quad a \cdot \frac{df_{12}}{dx} = w_{22}, \quad a \cdot \frac{df_{11}}{dx} = w_{12}, \quad (15)$$

где f_{ij} , w_{ij} – элементы матриц F , w .

Из последних четырёх уравнений (10) вытекают следующие граничные условия при $x = 0$ и $x = 1$:

$$q = a \cdot f_{11}(0), \quad f_{12}(0) = 0, \quad (1 + a \cdot k_1^2) \cdot f_{12}(1) = 2 \cdot a \cdot k_1 \cdot f_{11}(1). \quad (16)$$

Положим $w_{11} = 1$, $w_{22} = a$, $w_{12} = 0$.

Решая уравнения (15) при граничных условиях (16), получим

$$f_{11} = \frac{(1 + a \cdot k_1^2)}{2 \cdot a \cdot k_1}, \quad f_{12} = x,$$

а из уравнения (12) найдём $M = 2 \cdot q \cdot k$.

Функционал V (7) и его производная dV/dt (11) в силу системы (2) – (4) запишутся в виде:

$$V = \int_0^1 \left[\frac{1 + a \cdot k_1^2}{2 \cdot a \cdot k_1} \cdot (\phi_1^2 + a \cdot \phi_2^2) + 2 \cdot x \cdot \phi_1 \cdot \phi_2 \right] \cdot dx,$$

$$\frac{dV}{dt} = -\int_0^1 (\phi_1^2 + a \cdot \phi_2^2) \cdot dx + \frac{k \cdot (1 + a \cdot k_1^2)}{k_1^2} \cdot z^2.$$

Из неравенств (13) найдём условия асимптотической устойчивости работы ветронасосного агрегата с учётом упругости передаточного вала и выражения для k в виде:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \omega} \right)_* < 0, \quad 0 < k_1 < \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Сравнивая эти условия с условием устойчивости $\left(\frac{\partial M_H}{\partial \omega} \right)_* - \left(\frac{\partial M}{\partial \omega} \right)_* > 0$ для ветронасосного агрегата с жёстким передаточным валом, видим, что упругость вала сужает область устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Байрамов Ф.Д. Устойчивость и оптимальная стабилизация систем с распределенными параметрами. М.: Машиностроение, 1995. 160 с.
2. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1952. 432 с.
3. Байрамов Ф.Д., Байрамов Б.Ф., Мардамшин И.Г. Математическое моделирование и устойчивость гидравлической системы с ветронасосным агрегатом // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева, Казань. 2009. №4. С. 42-47.

МЕТОДОЛОГИЯ АНАЛИЗА НАБЛЮДАЕМОСТИ В ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ

Ф.Ю. Бакланов (МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия, 119991, Москва,
ул. Ленинские горы 1)

В.М. Морозов (НИИ Механики МГУ, Россия, 119192, Москва,
Мичуринский проспект 1)

Йоханн Дамбек (Технический Университет Мюнхена, Германия,
85748, Гархинг, Больцманнштрассе 15)

E-mail: moroz@imec.msu.ru

INVESTIGATION OF OBSERVABILITY IN LINEAR TIME-VARYING SYSTEMS

F.Yu. Baklanov (Lomonosov Moscow State University, Russia,
119991, Moscow, Leninskie gory 1)

V.M. Morozov (LMSU Institute of Mechanics, Russia,
119192, Moscow, Michurinsky prospect 1)

Johann Dambeck (Technical University of Munich, Germany,
85748, Garching bei München, Boltzmannstr. 15)

Keywords: linear time-varying system, observability, observability matrix, observability Gramian, Kalman filter.

Введение. Информация о свойствах наблюдаемости линейной системы особенно важна в таких прикладных областях, как оценка параметров [1] и интегрированная навигация [2], по следующим причинам. Во-первых, ответ на вопрос, является ли система вполне наблюдаемой, позволяет понять, может ли задача быть в принципе решена. Однако на практике в большинстве случаев количество доступных измерений оказывается значительно меньше размерности вектора состояния, и поэтому соответствующие системы могут быть не вполне наблюдаемы. В данной ситуации понимание того, какие именно комбинации компонент вектора состояния являются наблюдаемыми при движении по различным траекториям, может помочь инженеру «предсказать» поведение фильтра Калмана и порекомендовать совершать периодически специальные маневры для оценки определенных параметров или ошибок навигационной системы. Ниже предлагается методология исследования наблюдаемости, включающая в себя несколько подходов, которые могут быть использованы инженерами для анализа в прикладных задачах.

Основные определения. Рассмотрим однородную линейную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}. \quad (1)$$

Матрицы $\mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{H}(t)$ будем предполагать гладкими функциями времени, $\dim \mathbf{x} = n$, $\dim \mathbf{y} = m$.

Напомним некоторые определения. *Грамиан наблюдаемости* [3, 6-8] – это квадратная матрица, задаваемая соотношением

$$\mathbf{W}(t, t_0) = \int_{t_0}^t \mathbf{\Phi}^T(\tau, t) \mathbf{H}^T(\tau) \mathbf{H}(\tau) \mathbf{\Phi}(\tau, t) d\tau,$$

где $\mathbf{\Phi}(\tau, t)$ – переходная матрица системы (1).

Грамиан наблюдаемости удовлетворяет следующему линейному дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathbf{W}}(t, t_0) = -\mathbf{A}^T(t)\mathbf{W}(t, t_0) - \mathbf{W}(t, t_0)\mathbf{A}(t) + \mathbf{H}^T(t)\mathbf{H}(t), \quad \mathbf{W}(t_0, t_0) = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) обычно называют уравнением Ляпунова.

Предположим, что матрицы $\mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{H}(t)$ являются $n-2$ и $n-1$ раз непрерывно дифференцируемы. Тогда матрица, определяемая как

$$\mathbf{L}(t) = \left(\mathbf{L}_0^T \quad \dots \quad \mathbf{L}_{n-1}^T \right)^T,$$

где $\mathbf{L}_0 = \mathbf{H}(t)$, $\mathbf{L}_k = \dot{\mathbf{L}}_{k-1} + \mathbf{L}_{k-1}\mathbf{A}(t)$, $k = 1, \dots, n-1$, называется матрицей наблюдаемости [6, 9]. Эта матрица связывает первые $n-1$ производных функции измерения $\mathbf{y}(t)$ и вектор состояния системы $\mathbf{x}(t)$.

Связь между наблюдаемостью и Калмановской фильтрацией. Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{q}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t). \quad (3)$$

Предположим, что $\mathbf{x}(t_0) \sim N(\tilde{\mathbf{x}}(t_0), \mathbf{P}(t_0))$, и что $\mathbf{q}(t)$ и $\mathbf{r}(t)$ представляют собой гауссовский белый шум со следующими свойствами:

$$E[\mathbf{q}(t)] = 0, \quad E[\mathbf{q}(t)\mathbf{q}^T(\tau)] = \mathbf{Q}(t)\delta(t-\tau), \quad E[\mathbf{r}(t)\mathbf{r}^T(\tau)] = \mathbf{R}(t)\delta(t-\tau),$$

$$E[\mathbf{r}(t)] = 0, \quad E[\mathbf{x}(t_0)\mathbf{r}^T(t)] = 0, \quad E[\mathbf{x}(t_0)\mathbf{q}^T(t)] = 0, \quad E[\mathbf{r}(t)\mathbf{q}^T(\tau)] = 0.$$

Матрицы $\mathbf{Q}(t) \geq 0$, $\mathbf{R}(t) > 0 \forall t \geq 0$. Известно [8, 10], что матрица ковариации условного математического ожидания $E[\mathbf{x}(t) | \mathbf{y}(t)]$ (оценки фильтра Калмана) удовлетворяет матричному уравнению Риккати

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}(t) = & \mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^T(t) + \mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{\Gamma}^T(t) - \\ & - \mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{H}(t)\mathbf{P}(t), \mathbf{P}(t_0) = \mathbf{P}_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение (4) можно заменить эквивалентной линейной системой

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\Psi}_1 \\ \dot{\Psi}_2 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} \mathbf{A}(t) & \mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{\Gamma}^T(t) \\ \mathbf{H}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{H}(t) & -\mathbf{A}^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \\ \Psi_1(t_0) = & \mathbf{P}_0, \Psi_2(t_0) = \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение уравнения (4) выражается через решение системы (5)

$$\mathbf{P}(t) = \Psi_1(t)\Psi_2^{-1}(t).$$

В случае отсутствия шума в системе (3) ($\mathbf{Q}(t) \equiv \mathbf{0}$), решение системы (5) принимает вид [8]

$$\begin{aligned} \Psi_1(t) &= \Phi(t, t_0)\mathbf{P}_0, \\ \Psi_2(t) &= \Phi^T(t_0, t) + \left(\int_{t_0}^t \Phi^T(\tau, t)\mathbf{H}^T(\tau)\mathbf{R}^{-1}(\tau)\mathbf{H}(\tau)\Phi(\tau, t_0)d\tau \right) \cdot \mathbf{P}_0, \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \Phi^T(\tau, t)\mathbf{H}^T(\tau)\mathbf{R}^{-1}(\tau)\mathbf{H}(\tau)\Phi(\tau, t_0)d\tau = \\ = \int_{t_0}^t \Phi^T(\tau, t)\mathbf{H}^T(\tau)\mathbf{R}^{-1}(\tau)\mathbf{H}(\tau)\Phi(\tau, t)d\tau \cdot \Phi(t, t_0) = \mathbf{W}_R(t, t_0)\Phi(t, t_0). \end{aligned}$$

Выражение

$$\mathbf{W}_R(t, t_0) = \int_{t_0}^t \Phi^T(\tau, t)\mathbf{H}^T(\tau)\mathbf{R}^{-1}(\tau)\mathbf{H}(\tau)\Phi(\tau, t)d\tau$$

представляет собой Грамиан наблюдаемости системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{q}(t), \mathbf{y}_1(t) = \mathbf{H}_1(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}_1(t), \quad (6)$$

где

$$\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{y}(t), \mathbf{H}_1(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{H}(t), \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{r}(t),$$

а матрица $\mathbf{U}(t)$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{R}^{-1}(t) = \mathbf{U}^T(t)\mathbf{U}(t).$$

Таким образом, матрица ковариации шума измерения $\mathbf{r}_1(t)$ в системе (6) – единичная матрица, и тем самым величину $\mathbf{W}_R(t, t_0)$ можно понимать как «взвешенный» Грамиан наблюдаемости, или же как Грамиан наблюдаемости системы, шум измерения которой декоррелирован и нормализован посредством линейного преобразования функции измерения. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1}(t) &= \Psi_2(t)\Psi_1^{-1}(t) = \left(\Phi^T(t_0, t) + \mathbf{W}_R(t, t_0)\Phi(t, t_0)\mathbf{P}_0 \right) \mathbf{P}_0^{-1}\Phi(t_0, t) = \\ &= \Phi^T(t_0, t)\mathbf{P}_0^{-1}\Phi(t_0, t) + \mathbf{W}_R(t, t_0), \end{aligned}$$

и решение уравнения (4) принимает вид

$$\boxed{\mathbf{P}(t) = \left(\Phi^T(t_0, t)\mathbf{P}_0^{-1}\Phi(t_0, t) + \mathbf{W}_R(t, t_0) \right)^{-1}} \quad (7)$$

Формула (7) показывает, что в случае, когда шум в системе отсутствует, обратная матрица ковариации оценки фильтра Калмана представляет собой сумму «взвешенного» Грамиана наблюдаемости и обратной матрицы ковариации априорной оценки.

Как и обыкновенный Грамиан наблюдаемости, «взвешенный» Грамиан удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{W}}_R(t, t_0) &= -\mathbf{A}^T(t)\mathbf{W}_R(t, t_0) - \mathbf{W}_R(t, t_0)\mathbf{A}(t) + \\ &+ \mathbf{H}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{H}(t), \quad \mathbf{W}_R(t_0, t_0) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Аналитический метод исследования наблюдаемости. В случае, когда требуется определить явный вид наблюдаемых ковекторов, использование матрицы наблюдаемости является более предпочтительным. Для этого может быть использована следующая процедура:

1. В случае необходимости упростить изначальную систему
2. Вычислить матрицу наблюдаемости
3. Вычислить ранг матрицы наблюдаемости
4. Привести матрицу наблюдаемости к ступенчатому виду
5. Использовать ступенчатый вид для определения наблюдаемых ковекторов

Стоит заметить, что строки матрицы наблюдаемости задают наблюдаемые ковекторы, и поэтому ненулевые строки ступенчатой формы матрицы наблюдаемости задают некоторый базис в пространстве наблюдаемых ковекторов.

Численный метод исследования наблюдаемости. В случае, если знание явного вида наблюдаемых ковекторов не требуется, или же если аналитические вычисления оказываются слишком сложными, анализ наблюдаемости может быть произведен численно с помощью Грамиана наблюдаемости. Для анализа может быть использована следующая процедура.

1. Вычислить Грамиан наблюдаемости для набора конечных времен $\{t_i\}_{i=1}^N$
2. Вычислить ортонормированный базис пространства столбцов каждого из Грамианов $\mathbf{W}(t_i, t_0)$. В пакете Matlab это может быть сделано с помощью функции `orth()`. Транспонированные базисные векторы будут соответствовать наблюдаемым в момент времени t_i ковекторам.
3. Попытаться угадать аналитический вид наблюдаемых ковекторов

Стоит отметить, что третий этап процедуры может оказаться затруднительным, а явный вид наблюдаемых ковектором может остаться не до конца понятным. Тем не менее, данная процедура позволяет понять, какие из компонент вектора состояния $\mathbf{x}(t)$ присутствуют в наблюдаемых комбинациях, и как они связаны друг с другом. Эта информация может помочь лучше понять и предсказать поведение фильтра Калмана, которое, как было показано выше, зависит от свойств наблюдаемости линейной системы.

Алгоритм численной верификации результатов аналитического анализа. Аналитический анализ наблюдаемости зачастую предполагает очень длинные выкладки и трудоемкие аналитические вычисления. В связи с этим арифметические ошибки, такие как перепутанный знак, или же неправильный коэффициент, могут неожиданно появиться в вычислениях. Поэтому результаты аналитического анализа желательно всегда проверять посредством численных методов, которые могут быть легко автоматизированы и тем самым способны предоставить высокий уровень надежности.

Обозначим $\mathbf{s}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{x}(t)$, $\dim \mathbf{s}(t) = m$, наблюдаемые комбинации, которые требуется проверить. Для верификации аналитических вычислений может быть использован следующий алгоритм:

1. Выбрать некоторый базис в аналитически вычисленном наборе наблюдаемых комбинаций
2. Вычислить $\mathbf{W}(t_i, t_0)$, $i = 1, \dots, p$ с помощью (2)
3. Определить ортонормированный базис $\boldsymbol{\eta}_j(t_i)$, $j = 1, \dots, q$, правого нулевого подпространства $\mathbf{W}(t_i, t_0)$ в каждый из моментов времени t_i

4. Вычислить проверочные индикаторы

$$\chi_i = \max \text{abs} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{s}_1(t_i) / \|\mathbf{s}_1(t_i)\| \\ \vdots \\ \mathbf{s}_m(t_i) / \|\mathbf{s}_m(t_i)\| \end{pmatrix} \cdot (\boldsymbol{\eta}_1(t_i), \dots, \boldsymbol{\eta}_l(t_i)) \right), i = 1, \dots, p;$$

Здесь $\mathbf{s}_i(t)$ обозначает соответствующую строку матрицы $\mathbf{S}(t)$, а оператор $\text{abs}(\cdot)$ – это оператор, ставящий в соответствие произвольной матрице \mathbf{M}_1 матрицу \mathbf{M}_2 , элементы которой являются модулями соответствующих элементов матрицы \mathbf{M}_1

5. Убедиться, что все χ_i много меньше единицы, и что в каждый момент времени $m + q = \dim \mathbf{x}(t)$

Если наблюдаемые комбинации были определены правильно, то все проверочные индикаторы должны быть пренебрежимо малы. В случае, если некоторый из индикаторов сравним с единицей, то следует подозревать ошибку в аналитических вычислениях. Если же все индикаторы малы, но $m + l \neq \dim \mathbf{x}(t)$, то некоторой наблюдаемой комбинации может не хватать.

На самом деле предложенный алгоритм призван проверять, является ли аналитически определенное наблюдаемое подпространство ортогональным численно определенному ненаблюдаемому подпространству.

Пример использования методологии: задача калибровки бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС). Задача калибровки бескарданной инерциальной навигационной системы (БИНС) может быть сформулирована как задача оптимального оценивания вектора состояния линейной динамической системы [11]. В данной задаче знание свойств наблюдаемости системы особенно важно, т. к. оно дает возможность ответить на вопрос, может ли данная задача быть принципиально решена посредством некоторой последовательности вращений БИНС на поворотном столе. В работе [11] рассматривается возможность калибровки БИНС на грубых одностепенных поворотных столах, или стендах, и предлагается алгоритм, состоящий из трех этапов. На каждом из этапов калибровки одна из осей чувствительности БИНС совмещается с осью вращения стенда, и затем производится вращение системы с некоторой постоянной угловой скоростью.

Согласно [11, 12], уравнения ошибок БИНС имеют вид

$$\dot{\Psi}_{n\tilde{n}} = -\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \Psi_{n\tilde{n}} + \mathbf{R}_{nb} (\mathbf{b}_g + \mathbf{M}_g \boldsymbol{\omega}_{ib}), \quad \dot{\mathbf{b}}_g = 0, \quad \dot{\mathbf{M}}_g = 0, \quad \dot{\mathbf{b}}_a = 0, \quad \dot{\mathbf{M}}_a = 0, \quad (8)$$

и уравнение измерения принимает форму

$$\mathbf{y} = -\psi_{n\tilde{n}} \times \mathbf{e} + \frac{1}{g} \mathbf{R}_{nb} (\mathbf{b}_a + \mathbf{M}_a \mathbf{f}_b), \quad \mathbf{e} = (0, 0, 1)^T. \quad (9)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}_{ib}$ – вектор проекций угловой скорости на приборный трехгранник; \mathbf{b}_g – вектор смещений нулей датчиков угловой скорости (ДУС); \mathbf{M}_g – матрица, чьи диагональные элементы представляют собой ошибки масштабных коэффициентов ДУС, а недиагональные элементы – малые углы перекоса их осей чувствительности; \mathbf{b}_a – вектор смещений нулей акселерометров; \mathbf{M}_a – матрица, чьи диагональные элементы представляют собой ошибки масштабных коэффициентов акселерометров, а недиагональные элементы – малые углы перекоса их осей чувствительности; $\psi_{n\tilde{n}}$ – вектор ошибки ориентации, а $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$ – вектор проекций угловой скорости вращения Земли на географический трехгранник. \mathbf{R}_{nb} – матрица, задающая поворот приборного трехгранника относительно географического.

$$\mathbf{M}_g = \begin{pmatrix} m_{11}^g & m_{12}^g & m_{13}^g \\ m_{21}^g & m_{22}^g & m_{23}^g \\ m_{31}^g & m_{32}^g & m_{33}^g \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_a = \begin{pmatrix} m_{11}^a & 0 & 0 \\ m_{21}^a & m_{22}^a & 0 \\ m_{31}^a & m_{32}^a & m_{33}^a \end{pmatrix}$$

Уравнения (8), (9) могут быть переписаны в виде

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{z}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{H}(t)\mathbf{z},$$

$$\mathbf{z} = (\psi_{n\tilde{n}1} \ \psi_{n\tilde{n}2} \ \psi_{n\tilde{n}3} \ b_{g1} \ b_{g2} \ b_{g3} \ b_{a1} \ b_{a2} \ b_{a3})$$

$$(24 \times 1) \quad m_{11}^g \ m_{12}^g \ m_{13}^g \ m_{21}^g \ m_{22}^g \ m_{23}^g \ m_{31}^g \ m_{32}^g \ m_{33}^g \ m_{11}^a \ m_{21}^a \ m_{22}^a \ m_{31}^a \ m_{32}^a \ m_{33}^a)^T.$$

Рассмотрим процедуру калибровки в случае, когда ось вращения станда лежит в горизонтальной плоскости. На втором этапе калибровки имеем

$$\mathbf{R}_{nb}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cos \omega t & 0 & \sin \omega t \\ \sin \omega t & 0 & -\cos \omega t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_{ib} = \mathbf{R}_{nb}^T \cdot (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + (\omega, 0, 0)^T),$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = (0, \omega_{ie} \cos \phi, \omega_{ie} \sin \phi)^T, \quad \mathbf{f}_b = \mathbf{R}_{nb}^T \cdot (0, 0, g)^T$$

и аналитический метод исследования, предложенный выше, позволяет получить следующий явный вид наблюдаемых комбинаций:

$$\begin{aligned}
y_1^{2,hor} &= \Psi_{n\tilde{n}1}, y_2^{2,hor} = g\Psi_{n\tilde{n}2} - b_{a2} - g \sin \omega t \cdot m_{21}^a, \\
y_3^{2,hor} &= \omega_{ie} \cos \phi \cdot \Psi_{n\tilde{n}3} - b_{g2} - \omega_{ie} \sin \phi / g \cdot b_{a2} - \\
&\quad - \omega m_{22}^g + \omega_{ie} \cos \phi \cos \omega t \cdot m_{21}^a, \\
y_4^{2,hor} &= b_{g1} + \omega m_{12}^g - \omega m_{21}^a, y_5^{2,hor} = b_{g3} + \omega m_{32}^g, \\
y_6^{2,hor} &= b_{a1}, y_7^{2,hor} = b_{a3}, y_8^{2,hor} = m_{11}^g, y_9^{2,hor} = m_{13}^g, \\
y_{10}^{2,hor} &= m_{21}^g + m_{21}^a, y_{11}^{2,hor} = m_{23}^g, y_{12}^{2,hor} = m_{31}^g, \\
y_{13}^{2,hor} &= m_{33}^g, y_{14}^{2,hor} = m_{11}^a, y_{15}^{2,hor} = m_{31}^a, y_{16}^{2,hor} = m_{33}^a
\end{aligned} \tag{10}$$

Исследование первого и третьего этапов калибровки аналогичным образом показывает, что размерность наблюдаемого подпространства равна 16 на каждом из этапов, и набор наблюдаемых комбинаций может быть разрешен относительно всех инструментальных ошибок БИНС.

Рассмотрим подробнее второй этап. Наблюдаемые комбинации, полученные с помощью аналитических вычислений, задаются соотношением (10). Обозначим $\mathbf{S}(t)$ соответствующую им матрицу наблюдаемых ковекторов. Тогда

$$\mathbf{S}(t) = \frac{\partial \mathbf{y}^{2,hor}}{\partial (\mathbf{z})^T}, \mathbf{y}^{2,hor} = \left(y_1^{2,hor} \quad \dots \quad y_{16}^{2,hor} \right)^T.$$

Вычисление проверочного индикатора $\chi(t)$ при численных параметрах

$$\phi = 0.47 \text{ [rad]}, g = 9.81 \text{ [m / s}^2\text{]}, \omega = 0.1 \text{ [s}^{-1}\text{]}, \omega_{ie} = 2\pi / 24 / 3600 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

показывает, что после 100 секунд его значение становится меньше 10^{-6} , а после 400 секунд – меньше 10^{-7} . Применение этой же процедуры с другими наборами числовых параметров дает аналогичный результат. Поэтому можно сделать вывод, что наблюдаемые на втором этапе калибровки комбинации (10) успешно проходят процедуру проверки, и что строки матрицы $\mathbf{S}(t)$ действительно образуют базис в наблюдаемом в момент времени t подпространстве.

Предположим теперь, что в аналитических вычислениях была намеренно допущена ошибка, и была получена наблюдаемая комбинация

$$y_4^{2,hor} = b_{g1} - \omega m_{21}^a$$

ВМЕСТО КОМБИНАЦИИ

$$y_4^{2,hor} = b_{g1} + \omega m_{12}^g - \omega m_{21}^a.$$

В таком случае проверочный индикатор не стремится к нулю, и его значение стабилизируется со временем около отметки 0.1. Такое поведение говорит о том, что, возможно, была допущена ошибка в аналитических выкладках. Более подробное рассмотрение элементов матрицы

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s}_1(t) / \|\mathbf{s}_1(t)\| \\ \vdots \\ \mathbf{s}_m(t) / \|\mathbf{s}_m(t)\| \end{pmatrix} \cdot (\boldsymbol{\eta}_1(t), \dots, \boldsymbol{\eta}_l(t))$$

может помочь понять, какая именно из наблюдаемых комбинаций была вычислена неправильно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jategaonkar, R.V., Flight Vehicle System Identification: A Time-Domain Methodology, Progress in Aeronautics and Astronautics, ed. Lu, F.K., Vol. 216, AIAA, Reston, VA, 2006.
2. Farrell, J.A., Aided Navigation, GPS with High Rate Sensors, McGraw-Hill, USA, 2008.
3. Kalman, R.E., Canonical Structure of Linear Dynamic Systems, Proc. Natl Acad Sci U S A, Vol. 48, No. 4, 1962, pp. 596-600.
4. Kalman, R.E., Lectures on Controllability and Observability, C.I.M.E., Bologna, 1968.
5. Kalman, R.E., Falb, P.L., and Arbib, M.A., Topics in Mathematical System Theory, McGraw-Hill, New York, 1969.
6. Каленова В. И., Морозов В. М., Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2010.
7. Jikuya, I. and Hodaka, I., Kalman Canonical Decomposition of Linear Time-Varying Systems, SIAM J. Control and Optimization, Vol. 52, No. 1, 2014, pp. 271-310.
8. Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М., Оптимальное управление движением, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2005.
9. Kwakernaak, H. and Sivan, R., Linear Optimal Control Systems, Wiley-Interscience, USA, 1972.

10. Minkler, G. and Minkler, J., Theory and Application of Kalman Filtering, Magellan Book Company, USA, 1993.

11. Сазонов И. Ю. Калибровка бескарданной инерциальной навигационной системы в сборе при помощи грубых одностепенных стан­дов, Кандидатская диссертация, МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, 2012.

12. Козлов А. В., Сазонов И. Ю., Вавилова Н. Б., Парусников Н. А., Калибровка инерциальных навигационных систем на грубых стан­дах с учетом разнесения чувствительных масс ньютонометров, XX Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам, ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор" г. Санкт-Петербург, 2013, с. 104-107.

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОДВЕСА РОТОРА
В ПРОСТРАНСТВЕ ПАРАМЕТРОВ УПРАВЛЕНИЯ**

Д.В. Баландин (ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Россия, 603950,

Н. Новгород, проспект Гагарина, 23)

E-mail: dbalandin@yandex.ru

С.А. Малкин (АО «ОКБМ Африкантов», 603074, Россия, Н. Новгород,
Бурнаковский проезд, 15)

E-mail: ser-malkin@yandex.ru

**ON STABILITY OF THE ELECTROMAGNETIC SUSPENSION
ROTOR IN SPACE OF CONTROL PARAMETERS**

D.V. Balandin (Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, 603950,
Russia, Nizhni Novgorod, Gagarina Avenue, 23)

S.A. Malkin (SC «Afrikantov OKBM», 603074, Russia, Nizhny Novgorod,
Burnakovsky proezd, 15)

Keywords: stability, electromagnetic suspension, rotor, control, bearing

Введение. Неконтактный электромагнитный подвес (ЭМП) ротора является неустойчивым объектом. Электромагнитная сила только притягивает ротор и уменьшается с увеличением расстояния между ротором и электромагнитом. Чтобы стабилизировать ротор, а также придать ему желаемые динамические качества, в канал управления вводится регулятор – динамическое звено, на вход которого поступает сигнал с датчика положения, а выходной сигнал – ток или напряжение – подается на электромагнит и управляет магнитной силой.

В большинстве работ (например [1-7]) для обеспечения устойчивости магнитного подвеса ротора рассматривается наиболее простая линейная связь между перемещением ротора и током в ЭМ на базе пропорционально-дифференциального (ПД) или пропорционально-интегрально-дифференциального (ПИД) регулятора.

Структурная схема системы управления ЭМП с ПД-регулятором представлена на рис. 1.

Контроллер на основе сигнала с датчика по заданным алгоритмам управления вырабатывает управляющий сигнал, который подается на усилитель мощности и далее на электромагнит. Созданный таким образом в

обмотке ЭМ управляющий ток образует магнитную силу. Эта сила возвращает ротор в состояние равновесия. Устойчивость системы достигается только при непрерывном управлении.

Существуют два основных способа управления, называемых «управление по току» и «управление по напряжению» [3].

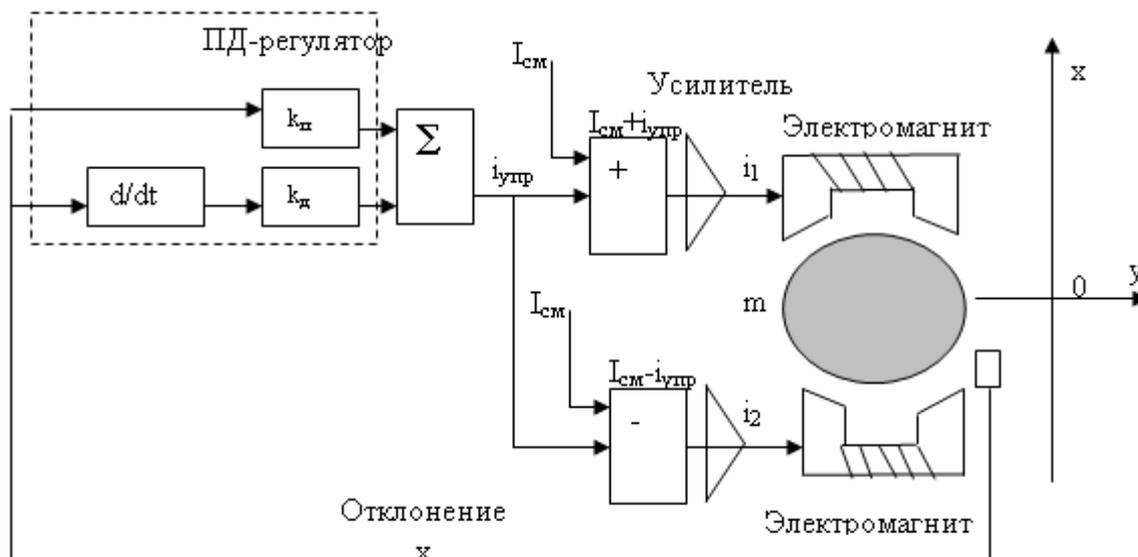


Рис. 1. Структурная схема СУ ЭМП с ПД-регулятором

В данной работе рассматривается управление по току, т.е. управляющей переменной является сила тока в цепи электромагнита, при этом объект управления описывается одним уравнением второго порядка.

$$m\ddot{z} = -mg + \frac{L_0 S_0}{2} \left[\left(\frac{I_1}{S_0 - z} \right)^2 - \left(\frac{I_2}{S_0 + z} \right)^2 \right], \quad (1)$$

где m – масса ротора;

I_1, I_2 – сила токов управления в обмотках ЭМП;

L_0 – индуктивность при центральном положении ротора;

S_0 – номинальный зазор между ротором и статором ЭМП;

z – перемещение ротора от центрального положения.

Для линеаризации зависимости (1) традиционно используют токи смещения $I_{см}$. Для этого в противоположно расположенные обмотки электромагнита подается одинаковый ток смещения. Алгоритмы регулирования реализованы таким образом, что ток управления с ПД-регулятора в одной катушке ЭМ прибавляется к постоянному току смещения, а в другой вычитается. Это приводит:

- к ненулевой производной dF/dI (усилие от тока) вблизи точки $x = 0$, что теоретически способствует повышению устойчивости системы регулирования;
- к созданию сил одностороннего тяжения, действующих одновременно на ротор, со стороны каждого из противоположащих магнитов;
- линеаризации зависимости силы от тока (рис. 2)

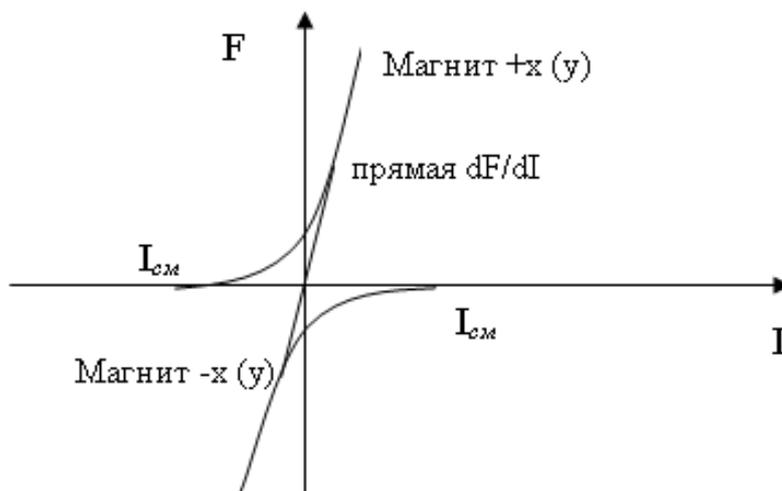


Рис. 2. Зависимость силы электромагнита от тока для системы регулирования с токами смещения

Последнее утверждение справедливо для малых отклонений ротора от точки $x = 0$. Нелинейность по координате устраняется путем включения в сигнал управления сигнала обратной связи по координате (рис. 3).

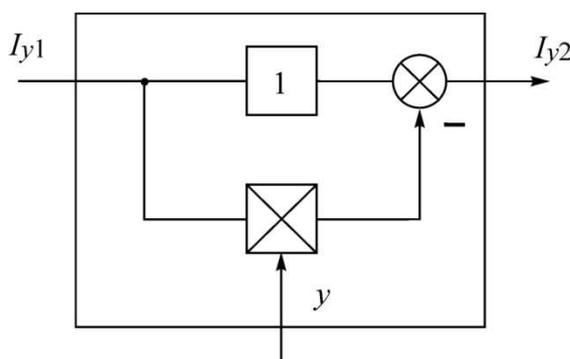


Рис. 3. Схема компенсации нелинейности силы от зазора [4]

Необходимо отметить, что при использовании токов смещения в системе регулирования растет потребляемая ЭМП электрическая энергия и, соответственно, увеличивается нагрев катушек ЭМП. Поэтому целесообразно рассмотреть возможность использования ПИД-регулирования без токов смещения.

Перспективными оказываются специальные алгоритмы компенсации нелинейной зависимости электромагнитной силы от тока и зазора с ис-

пользованием метода линеаризации обратной связью [8-13], при этом строится пропорционально-дифференциальный линеаризующий (ПДЛ) алгоритм управления, линеаризующий нелинейную зависимость силы от тока и расстояния между ротором и электромагнитом. Преимущество такой схемы по сравнению с введением тока смещения очевидно – внешняя линеаризация вводится только в той катушке, в которую подается ток управления. Поэтому уменьшаются потери потребляемой электрической энергии в ЭМ.

Теоретический анализ. Будем рассматривать вертикальный ротор, вывешенный двумя радиальными и одним осевым электромагнитами. Предполагая, что смещение ротора в осевом направлении малы по сравнению с величиной зазора S_0 , будем отдельно рассматривать осевое и радиальное движения ротора в электромагнитных подшипниках.

Динамика жесткого ротора описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} J \ddot{\alpha} &= -l_1(F_2^v - F_1^v) + l_2(F_2^n - F_1^n) - J_z \omega \dot{\beta}, \\ J \ddot{\beta} &= l_1(F_3^v - F_4^v) - l_2(F_3^n - F_4^n) + J_z \omega \dot{\alpha}, \\ m \ddot{x} &= F_3^v - F_4^v + F_3^n - F_4^n, \\ m \ddot{y} &= F_2^v - F_1^v + F_2^n - F_1^n. \end{aligned} \quad (2)$$

где x, y – координаты центра масс ротора, α, β – углы поворота ротора относительно осей y и x соответственно, l_1, l_2 – расстояния от центра масс ротора до верхнего и нижнего электромагнитных подшипников соответственно, индексы v и n указывают на электромагнитные силы, действующие на ротор со стороны верхних (v) и нижних (n) –электромагнитных подшипников, J – главный момент инерции ротора, ω – заданная угловая частота вращения ротора относительно оси z .

Идея линеаризации обратной связью применительно к рассматриваемому объекту изложена в работах [12, 13] и состоит в переходе к новым управлениям:

$$\begin{aligned} u_1 &= F_2^v - F_1^v, & u_2 &= F_2^n - F_1^n, \\ u_3 &= F_3^v - F_4^v, & u_4 &= F_3^n - F_4^n. \end{aligned}$$

Для введенных таким образом управлений система (2) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} J \ddot{\alpha} &= -l_1 u_1 + l_2 u_2 - J_z \omega \dot{\beta}, \\ J \ddot{\beta} &= l_1 u_3 - l_2 u_4 + J_z \omega \dot{\alpha}, \\ m \ddot{x} &= u_3 + u_4, \\ m \ddot{y} &= u_1 + u_2. \end{aligned}$$

Если теперь управления u_i задать в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= -(a_1 y_v + b_1 \dot{y}_v), \\ u_2 &= -(a_2 y_n + b_2 \dot{y}_n), \\ u_3 &= -(a_3 x_v + b_3 \dot{x}_v), \\ u_4 &= -(a_4 x_n + b_4 \dot{x}_n), \end{aligned} \quad (3)$$

где x_n, y_n и x_v, y_v – координаты оси ротора, измеряемые в нижних и верхних подшипниках соответственно, а параметры a_i, b_i определить следующим образом

$$\begin{aligned} a_1 = a_3 &= \frac{l_2}{l_1 + l_2} a, \quad a_2 = a_4 = \frac{l_1}{l_1 + l_2} a, \\ b_1 = b_3 &= \frac{l_2}{l_1 + l_2} b, \quad b_2 = b_4 = \frac{l_1}{l_1 + l_2} b, \end{aligned}$$

то система (2) принимает наиболее простой вид линейной системы с постоянными параметрами

$$\begin{aligned} J\ddot{\alpha} &= -l_1 l_2 (a\alpha + b\dot{\alpha}) - J_z \omega \dot{\beta}, \\ J\ddot{\beta} &= -l_1 l_2 (a\beta + b\dot{\beta}) + J_z \omega \dot{\alpha}, \\ m\ddot{x} &= -(ax + b\dot{x}), \\ m\ddot{y} &= -(ay + b\dot{y}). \end{aligned} \quad (4)$$

Простой анализ показывает, что при положительных значениях параметров a, b система (4) является асимптотически устойчивой. Для улучшения качества переходных процессов нужно увеличивать значения этих параметров. Однако, для реальных конструкций, как показывает практика эксплуатации, значения параметров не могут быть слишком большими. Основная причина этого явления в наличии запаздывания в системе формирования управления. Для простейшего учета запаздывания будем пренебрегать гироскопическими силами в двух первых уравнениях системы (4), тогда все уравнения этой системы становятся одноподобными. Рассмотрим для определенности третье уравнение в (4), представив его в виде

$$m\ddot{x}(t) = -(ax(t - \tau) + b\dot{x}(t - \tau)),$$

где параметр τ определяет запаздывание в блоке формирования управления. Разложение правой части этого уравнения в ряд по малому параметру τ с удержанием слагаемых первого порядка позволяет получить условия устойчивости в виде

$$a > 0, \quad b > 0, \quad b - \tau a > 0, \quad b\tau < m.$$

Компьютерный анализ. Расчетный анализ проведен с использованием программы ДИРОМ¹, разработанной специалистами НИИ Механики ННГУ им. Н.И. Лобачевского. На рис. 4 и 5 показан тестовый пуск ротора генератора масштабной модели ротора турбомашин (ММР) АО «ОКБМ Африкантов» с заданным равномерным дисбалансом в 10 мкм и отсутствием тяжения с ускорением в 1 Гц/с. Видно, что и в этом случае ПДЛ-регулятор дает заметный выигрыш в амплитуде колебаний ротора.

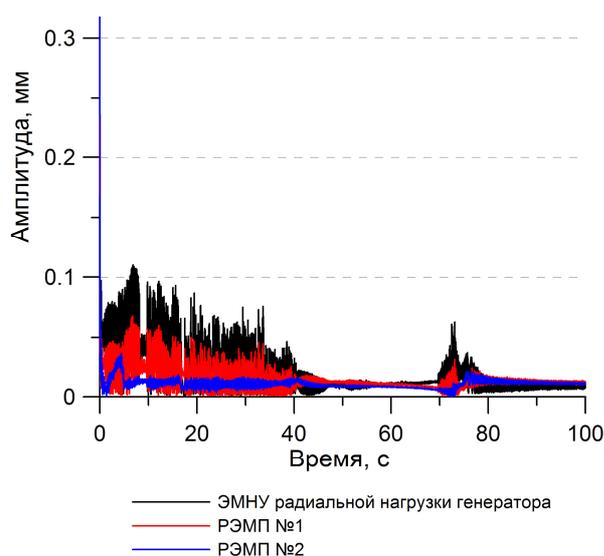


Рис. 4. ПД-регулятор

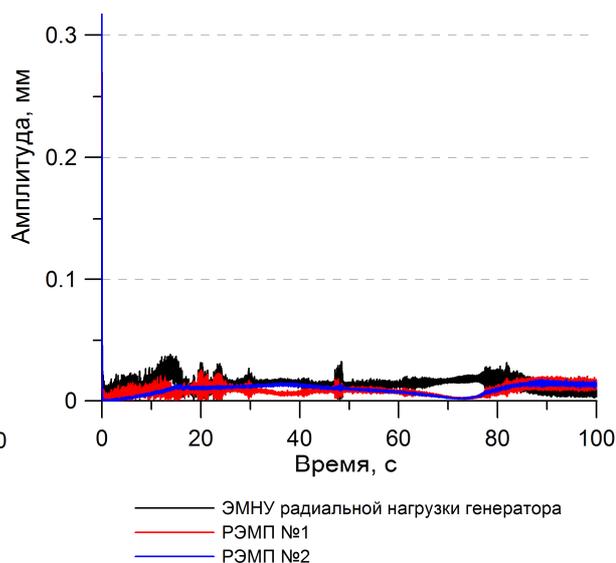


Рис. 5. ПДЛ-регулятор

На рис. 6 и 7 приведены расчетные спектры колебаний ротора ММР при управлении ПД- и ПДЛ- регуляторами, соответственно. Из рисунков видно, что в спектре с ПДЛ-алгоритмом проявляется только текущая частота вращения, а посторонние частоты отсутствуют.

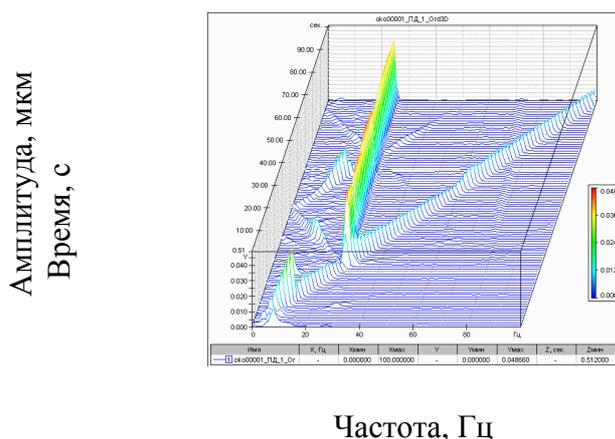


Рис. 6. АЧХ – ПД-регулятор

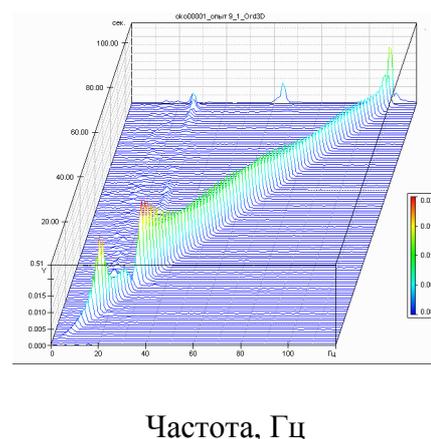


Рис. 7. АЧХ–ПДЛ-регулятор

¹ Авторские права на программу ДИРОМ принадлежат АО «ОКБМ Африкантов»

На рис. 8 и 9 приведены расчетные области рабочих параметров ротора генератора ММР при использовании ПД- и ПДЛ-алгоритма.

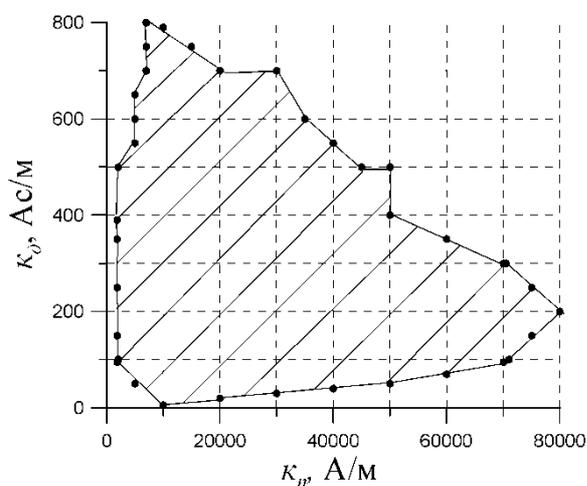


Рис. 8. ПД-регулятор

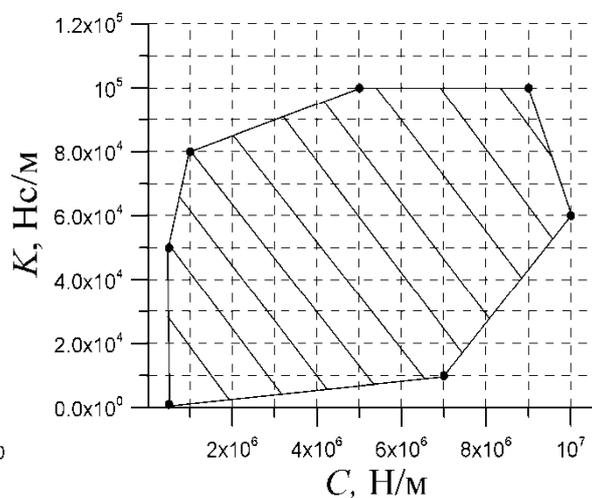
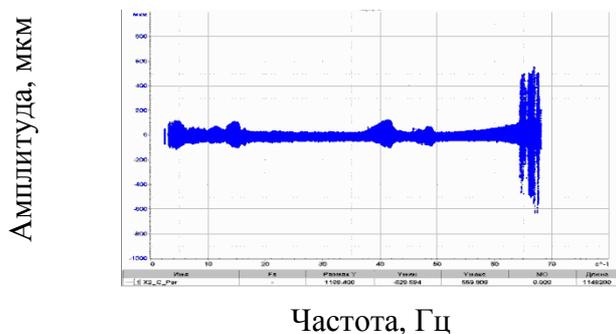
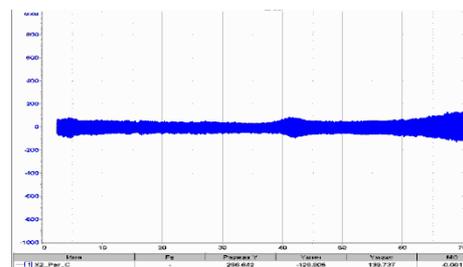


Рис. 9. ПДЛ-регулятор

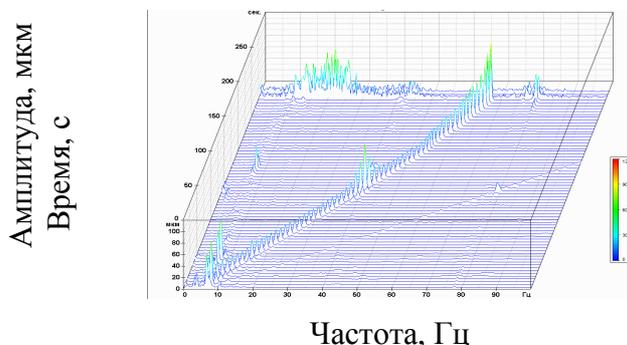
Натурный эксперимент. На рис. 10 и 11 представлены графики зависимости амплитуды колебаний ротора от частоты вращения в нижнем радиальном ЭМП ММР. Параметры управления для ПД-регулятора: верхний РЭМП - $\kappa_n=10000$ А/м, $\kappa_\delta=50$ А·с/м; нижний РЭМП - $\kappa_n=6000$ А/м, $\kappa_\delta=30$ А·с/м. Параметры управления для ПДЛ-регулятора: верхний РЭМП - $a=10^6$ Н/м, $b=10^6$ Нс/м; нижний РЭМП - $a=0,8 \cdot 10^6$ Н/м, $b=0,8 \cdot 10^6$ Нс/м.



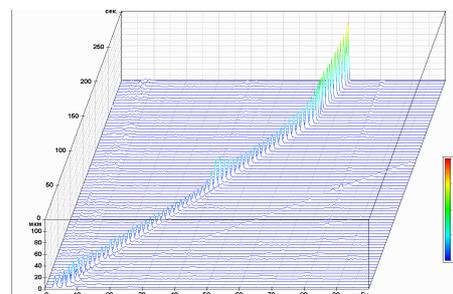
Частота, Гц



Частота, Гц



Частота, Гц



Частота, Гц

Рис. 10. ПД-регулятор

Рис.11. ПДЛ-регулятор

Из рисунков видно, что амплитуда колебаний ротора не превышает значения 160 мкм на частотах до 74 с^{-1} , что соответствует требованиям, предъявляемым к системам ЭМП. Снизу рисунков 10 и 11 представлены спектрограммы разгона ротора по датчику положения ротора. Из графиков видно, что в частотном спектре выражена текущая частота вращения, а посторонние частоты не проявляются.

По результатам серии экспериментов установлено, что значение жесткости допустимо устанавливать от $1,0 \cdot 10^6$ до $2,5 \cdot 10^6$ Н/м, а демпфирования от 8000 до 12000 Н·с/м (в радиальном ЭМП №1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-19-10279).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев Ю.Н. Синтез линейной оптимальной системы управления магнитным подвесом жесткого ротора// *Машиноведение*. 1987. № 4. С.49-56.
2. Журавлев Ю.Н., Хмылко Н.В. Динамическая оптимизация линейной системы управления активной магнитной опорой// *Изв. вузов. Электромеханика*. 1988. №12. С.74-81.
3. Журавлев Ю.Н. Активные магнитные подшипники. Теория, расчет, применение. СПб.: Политехника, 2003. 206 с.
4. Schweitzer G., Maslen E. *Magnetic bearings*. Springer, 2009.
5. ОАО «Корпорация ВНИИЭМ». Электромагнитные подшипники для газовой промышленности. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.vniiem.ru> .
6. Kato Y., Yoshida T., Ohniwa K. Self-Sensing Active Magnetic Bearings with Zero-bias-current control // *Electrical Engineering in Japan*. 2008. Vol.165. No.2.
7. Hu T., Lin Z., Jiang W., Allaire P.E. Constrained control design for magnetic bearing system // *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*. 2005. V. 127, pp. 601–616.
8. Lindlau J. D., Knospe C. R. Feedback Linearization of an Active Magnetic bearing with Voltage Control // *IEEE Transaction on Control Systems technology*. 2002. Vol. 10. No. 1.
9. Chen M., Knospe C. R. Feedback Linearization of Active Magnetic bearings: Current-mode Implementation // *IEEE Transaction on mechatronics*. 2005. Vol.10. No. 6.
10. Li L., Mao J. Feedback Linearization of Active Magnetic bearings actuators for uniform upper bound of force slew rate // *IEE Proc. Electr. Power Appl.* 1999. Vol. 146. No. 4.

11. Trumper D., Olson S., Subrahmanyam P. Linearizing control of magnetic suspension system // IEEE Trans. Contr. Syst. Technol. 1997. Vol.5, pp. 427-437.

12. Баландин Д.В., Коган М.М. Управление движением вертикального жесткого ротора, вращающегося в электромагнитных подшипниках// Изв. РАН. Теория и системы управления. 2011. №5. С.3-17.

13. Малкин С.А. Управление движением ротора в электромагнитном подвесе// Вестник ННГУ. 2011. №4(2). С. 219-221.

О ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СПУТНИКА С ГРАВИТАЦИОННЫМ СТАБИЛИЗАТОРОМ

А.В. Банщиков (ИДСТУ СО РАН им. В.М. Матросова, Россия,
664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, а/я 292)

E-mail:bav@icc.ru

ON THE GYROSCOPIC STABILIZATION OF THE EQUILIBRIUM POSITION OF THE SATELLITE WITH A GRAVITATION STABILIZER

A.V. Banshchikov (ISDCT SB RAS, Russia,
664033, Irkutsk, Lermontov str., 134, post box 292)

Keywords: dynamics of bodies system, stability of motion, degree of instability, gyroscopic stabilization, parametric analysis, solution of systems of inequalities, computer algebra.

Введение. Исследование вопросов устойчивости, стабилизации нелинейных или линеаризованных моделей механических систем часто приводит к задаче «параметрического анализа» полученных условий (неравенств). При параметрическом анализе важно иметь возможность оценки области значений параметров, при которых обеспечивается требуемое состояние (свойство) системы. Однако, трудно надеяться на получение аналитических результатов для моделей, обладающих высокой размерностью и содержащих много параметров. На этом этапе анализа нам может помочь использование пакетов компьютерной алгебры (ПКА) и создание соответствующего программного обеспечения (ПО) на базе этих пакетов.

Описание модели и постановка задачи. Центр масс системы (точка O_1) совершает пассивное движение по кеплеровой круговой орбите радиуса R с постоянной угловой скоростью ω (см. рис. 1). Стабилизатор представляет собой жёсткий стержень с точечной массой на его свободном конце. Стержень присоединен к спутнику в точке O_2 с помощью двухступенного подвеса. Оси поворота стержня совпадают с направлением осей тангажа и крена. Предполагается, что трение в шарнирах отсутствует. На систему действует гравитационный момент, предполагая, что остальные моменты пренебрежимо малы. В невозмущённом движении главные центральные оси инерции системы совпадают с осями орбитальной системы координат (ОСК) $O_1x_0y_0z_0$, а стержень направлен по радиусу орбиты— это положение равновесия спутника со стабилизатором в ОСК.

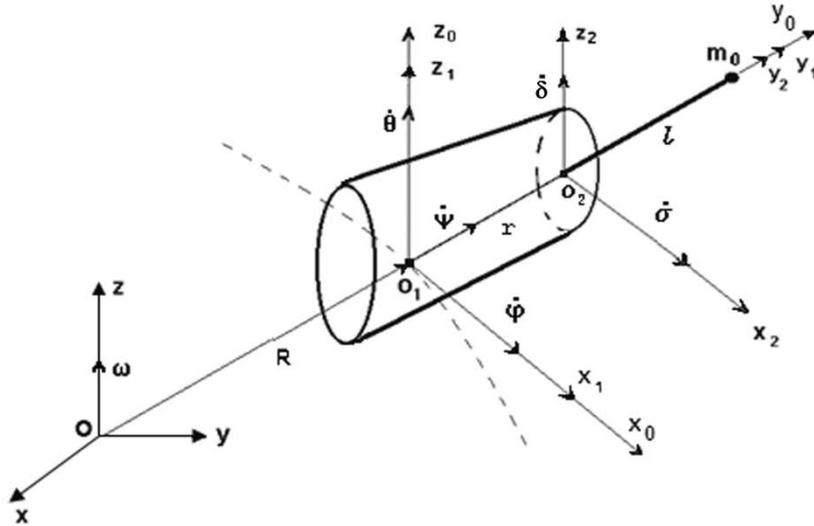


Рис. 1. Положение относительного равновесия спутника со стабилизатором

Описанная механическая система является хорошо изученной моделью (см., например, [1]). Для получения достаточных условий устойчивости применялся второй метод Ляпунова и теорема Барбашина–Красовского. Получение необходимых условий устойчивости (по линейным уравнениям возмущённого движения), как отмечено в [1], приводит к очень громоздким выкладкам. В отличие от пассивных систем стабилизации и ориентации в [2] исследованы возможности активного управления гравитационным стабилизатором, в частности оптимизация системы по степени устойчивости и точности.

Отметим, что устойчивость вращения консервативных спутниковых систем твёрдых тел, наряду с вековой устойчивостью, может быть связана и с гироскопической стабилизацией [3, 4].

Цель работы – параметрический анализ полученных условий устойчивости и построение области гироскопической стабилизации положения относительного равновесия неуправляемого спутника с гравитационным стабилизатором.

С помощью созданного программного комплекса [5, 6] для исследуемой системы тел в символьном виде на РС получены:

- кинетическая энергия и силовая функция приближённого ньютоновского поля тяготения;
- нелинейные уравнения движения в форме Лагранжа второго рода;
- матрицы уравнений возмущённого движения в первом приближении в окрестности положения равновесия;
- коэффициенты характеристического уравнения системы.

Линеаризованные в окрестности нулевого положения равновесия уравнения движения спутника со стабилизатором разбиваются на две независимые подсистемы. Соответственно, в канале тангажа (θ) и в канале рысканья–крена (ψ, ϕ):

$$\begin{cases} M_1 \ddot{q}_1 + K_1 q_1 = 0 \\ M_2 \ddot{q}_2 + G \dot{q}_2 + K_2 q_2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где все производные берутся по безразмерному времени $\tau = \omega t$ ($\omega = |\boldsymbol{\omega}|$ –

модуль орбитальной угловой скорости); $q_1 = \begin{pmatrix} \theta \\ \delta \end{pmatrix}$; $q_2 = \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \\ \sigma \end{pmatrix}$; δ, σ – углы

поворота стержня относительно корпуса спутника;

$$M_1 = \begin{pmatrix} c & f \\ f & d \end{pmatrix}; \quad K_1 = 3 \begin{pmatrix} b-a & f \\ f & f \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & f \\ 0 & f & d \end{pmatrix};$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} c-b & 0 & 0 \\ 0 & 4(c-a) & 4f \\ 0 & 4f & 3f+d \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 0 & c-b-a & 0 \\ a+b-c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$a = J_y; \quad b = J_x + mr(l+r) + \frac{1}{3}ml^2 + m_0(r+l)^2; \quad c = b + J_z - J_x;$$

$$d = \left(\frac{1}{3}m + m_0\right)l^2; \quad f = \left(\frac{1}{2}m + m_0\right)rl + d; \quad c-b-a \equiv J_z - J_x - J_y,$$

где m, m_0 – соответственно, массы стержня и точечного концевого груза; $l > 0$ – длина стержня; $r \geq 0$ – расстояние от центра масс системы до точки крепления стержня; J_x, J_y, J_z ; a, b, c – главные моменты инерции, соответственно, спутника и всей системы.

С учётом распределения масс в системе и эллипсоиде инерции твёрдого тела, справедливы неравенства:

$$b > a > 0, \quad c > a, \quad f > d > 0, \quad c > f, \quad b > f,$$

$$c + a - b \equiv J_z + J_y - J_x > 0, \quad b + a - c \equiv J_x + J_y - J_z > 0. \quad (2)$$

Уравнения (1) можно интерпретировать как уравнения колебаний некоторой механической системы, находящейся под действием потенциаль-

ных (с матрицами K_1, K_2) и гироскопических (с матрицей G) сил. Эти силы определяются силами гравитационного притяжения и движением по орбите. Матрицы M_1, M_2 играют роль диагональных блоков определённо положительной матрицы кинетической энергии.

Параметрический анализ условий устойчивости. Введём четыре безразмерных параметра:

$$\alpha = \frac{c-b}{a} = \frac{J_z - J_x}{J_y}; \quad \gamma = \frac{b-a}{c}; \quad p_1 = \frac{d}{f}; \quad p_2 = \frac{f}{c}. \quad (3)$$

Физически реализуемые значения параметров, с учётом (2), лежат в интервалах: $-1 < \alpha < 1, 0 < \gamma < 1, 0 < p_1 \leq 1, 0 < p_2 < 1$.

Вековое уравнение системы (1): $\Delta(\lambda^2) \equiv \Delta_1(\lambda^2) * \Delta_2(\lambda^2) = 0$ содержит λ только в чётных степенях. После проведения элементарных преобразований с характеристическими матрицами (умножение их строк на положительные множители) получим характеристические определители обозначениях (3), соответственно, в канале тангажа и в канале рысканья–крена:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \lambda^2 + 3\gamma & p_2(\lambda^2 + 3) \\ \lambda^2 + 3 & \lambda^2 p_1 + 3 \end{vmatrix} = \lambda^4 w_4 + \lambda^2 w_2 + w_0,$$

где $w_4 \equiv \det M_1 = p_1 - p_2; w_2 = 3(\gamma p_1 - 2p_2 + 1); w_0 \equiv \det K_1 = 9(\gamma - p_2);$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda^2 + \alpha & \lambda(\alpha - 1) & 0 \\ \lambda(\gamma - 1)(\alpha - 1) & \lambda^2(1 + \gamma\alpha) + 4(\alpha + \gamma) & (\lambda^2 + 4)p_2(\alpha + 1) \\ 0 & \lambda^2 + 4 & \lambda^2 p_1 + (3 + p_1) \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^6 v_6 + \lambda^4 v_4 + \lambda^2 v_2 + v_0,$$

где $v_4 = 3 + 3\alpha\gamma + (1 + \alpha)(p_1(2 + \alpha + 3\gamma) - p_2(8 + \alpha));$

$$v_2 = 3(1 + 3\gamma + \alpha(3 + \alpha + 2\gamma)) + p_1(1 + 3\gamma + \alpha(3 + 5\alpha + 6\gamma)) - 8p_2(1 + \alpha)(2 + \alpha);$$

$$v_6 \equiv \det M_2 = (1 + \gamma\alpha)p_1 - (1 + \alpha)p_2;$$

$$v_0 \equiv \det K_2 = 4\alpha((\gamma + \alpha)(3 + p_1) - 4p_2(\alpha + 1)).$$

Известно, что устойчивость в таких системах возможна только в случае, когда все корни многочлена Δ относительно λ^2 , являясь простыми, будут отрицательны и вещественны. Соответствующий критерий из [7] реализован в программном комплексе [6]. Алгебраические условия, обеспе-

чивающие требуемые свойства корней (необходимые условия устойчивости), представляют собой систему неравенств, соответственно, для каналов тангажа и рысканья–крена:

$$\begin{cases} p_1 - p_2 > 0, & \gamma p_1 - 2p_2 + 1 > 0, & \gamma - p_2 > 0, \\ p_1^2 \gamma^2 + 2(2p_2(1-p_1) - p_1)\gamma + (1 - 4p_2(1-p_1)) > 0; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} v_6 > 0, & v_4 > 0, & v_2 > 0, & v_0 > 0, \\ Dis \equiv v_4^2 v_2^2 - 4v_2^3 v_6 - 4v_4^3 v_0 + 18v_6 v_4 v_2 v_0 - 27v_0^2 v_6^2 > 0. \end{cases} \quad (5)$$

Отметим, что первое из условий в (4) и в (5) выполняются в силу определённой положительности матрицы кинетической энергии системы. Нетрудно показать, что последнее неравенство в (4) также всегда выполняется. Для этого выпишем дискриминант $16(p_1 - 1)^2 p_2 (p_2 - p_1)$ квадратичного по γ полинома, который всегда отрицателен при $p_1 > p_2$ (т.е. полином не имеет вещественных корней). В силу вышесказанного и положительности коэффициента при γ^2 следует, что полином принимает только положительное значение. Графически легко показать (см. рис. 2), что из двух оставшихся нерассмотренных неравенств в (4) выполнение условия $\gamma - p_2 > 0$ обеспечивает выполнение неравенства $\gamma p_1 - 2p_2 + 1 > 0$. Итак, устойчивость решения в канале тангажа имеет место при выполнении только двух условий: $\gamma - p_2 > 0, p_1 - p_2 > 0$.

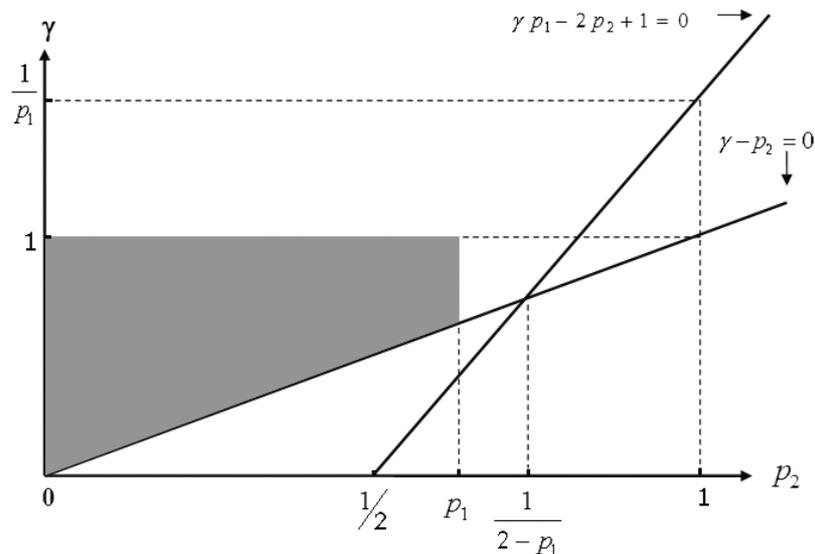


Рис. 2. Область устойчивости в канале тангажа

Последнее неравенство в (5) также получено в аналитическом виде и выписано в форме явной зависимости от параметров (3), но в силу его громоздкости не представлено. Чтобы подчеркнуть сложность анализируемо-

го полинома, отметим, что максимальные степени параметров α, γ, p_1, p_2 в выражении Dis равны, соответственно, 8, 4, 4, 3.

Анализ условий устойчивости (5) проведён с помощью функций *Reduce*, *RegionPlot*, *RegionPlot3D* ПКА «Mathematica», предназначенных, соответственно, для решения систем алгебраических неравенств, а также для графического 2D и 3D представления решения этих систем.

Получить аналитическое решение для системы неравенств (5) по всем четырём параметрам не представляется возможным. Поэтому в рамках параметрического анализа исходное четырёхмерное пространство параметров рассекалось плоскостями из двух выбранных параметров при фиксированных значениях оставшихся. В результате было построено несколько интересных нас двухпараметрических сечений («срезов»).

Гироскопическая стабилизация. Теоремы Кельвина–Четаева [3] позволяют начать изучение вопроса об устойчивости тривиального решения с анализа матрицы потенциальных сил. Известно, что чётность (нечётность) степени неустойчивости по Пуанкаре определяется положительностью (отрицательностью) определителя матрицы потенциальных сил.

Диагональные блоки матрицы K потенциальных сил рассматриваемой системы в обозначениях (3) имеют вид:

$$K_1 = 3 \begin{pmatrix} \gamma & p_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad K_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 4(\gamma + \alpha) & 4p_2(\alpha + 1) \\ 0 & 4 & 3 + p_1 \end{pmatrix}.$$

Соотношения $\gamma = p_2$, $\alpha = 0$ и $S \equiv (\gamma + \alpha)(3 + p_1) - 4p_2(\alpha + 1) = 0$ задают в пространстве параметров поверхности, разделяющие области с различными степенями неустойчивости. Например, на рис. 3 качественно изображены эти области при значениях параметров $p_1 = \frac{4}{5}$, $p_2 = \frac{5}{7}$.

Здесь, соответственно, области неустойчивости для всей системы: Z – с нулевой (*Zero*) степенью; \hat{E} – с чётной (*Even*) степенью (при $\gamma > p_2$) и \underline{E} (при $\gamma < p_2$); $O, \underline{O}, \hat{O}$ – с нечётной (*Odd*) степенью.

Для прикладных задач обычно задают распределение масс в системе, при котором матрица потенциальных сил будет определённоположительна и далее за счёт действия диссипативных сил обеспечивается асимптотическая устойчивость движения по теореме Ляпунова. Но, представляют интерес и потенциально неустойчивые системы.

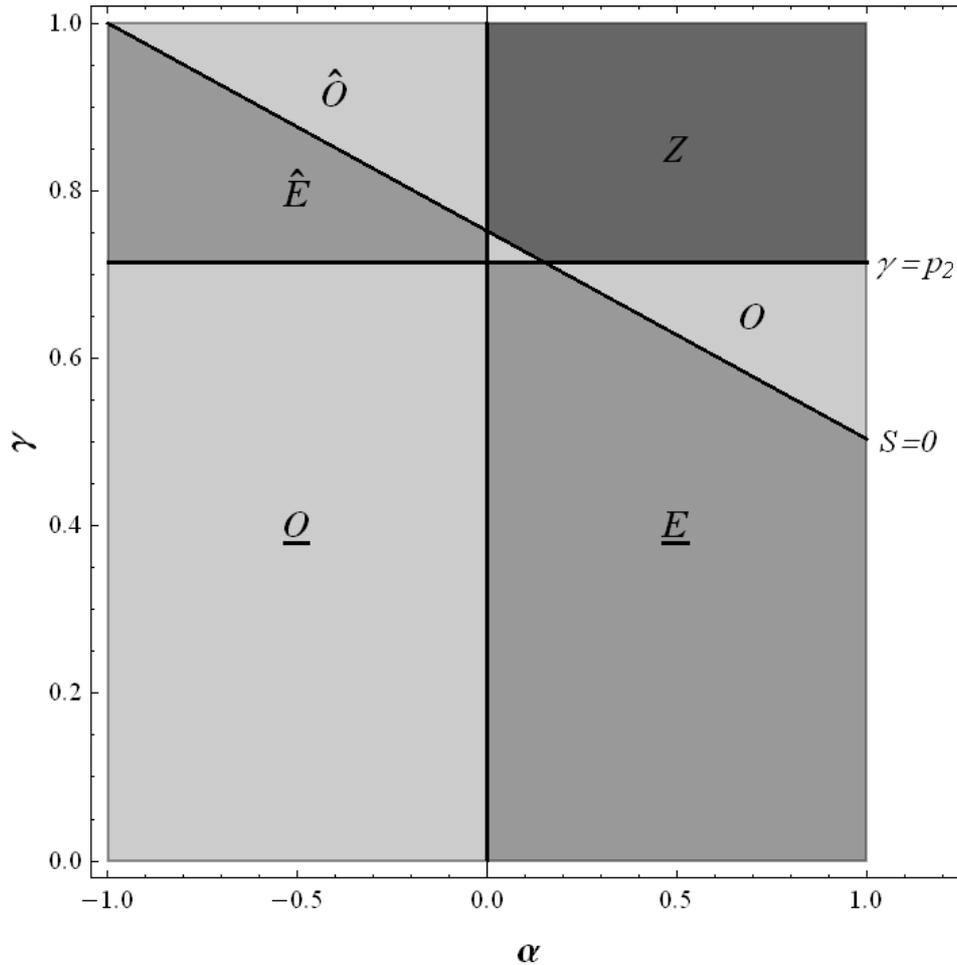


Рис. 3. Области с различными степенями неустойчивости

Отметим, что в областях O , \hat{O} , \underline{Q} неустойчивость положения равновесия под действием потенциальных сил имеет нечётную степень (т.е. $\det K = \det K_1 * \det K_2 < 0$). Таким образом, для значений параметров из этих областей по одной из теорем Кельвина–Четаева [3] о влиянии гироскопических сил следует, что гироскопическая стабилизация равновесия невозможна. В областях \hat{E} и \underline{E} неустойчивое положение равновесия имеет уже чётную степень неустойчивости (т.е. $\det K > 0$). Как показано в [3], для систем с чётной степенью при определённых условиях возможна стабилизация равновесия за счёт добавления гироскопических сил. В области Z матрицы K_1 , K_2 являются определённно положительными, и на основании другой теоремы Кельвина–Четаева добавление к потенциальным силам гироскопических сил сохраняет свойство устойчивости исследуемого движения.

Рассмотрим вопрос о возможности гироскопической стабилизации равновесия спутника со стабилизатором при выполнении следующего условия на моменты инерции спутника: $J_y > J_x > J_z$. В этом случае $\alpha < 0$

и, следовательно, подсистема рысканья–крена потенциально неустойчива (т.е. K_2 не является определённоположительной матрицей). Очевидно, что область \hat{E} с чётной степенью неустойчивости определяется как решение системы неравенств:

$$\gamma > p_2, \quad \alpha < 0, \quad S \equiv (\gamma + \alpha)(3 + p_1) - 4p_2(\alpha + 1) < 0. \quad (6)$$

Для обнаружения свойства гироскопической стабилизации необходимо выяснить, в какой части области (6) выполняются неравенства (5). Зафиксируем параметры p_1, p_2 этими же значениями как на рис. 3. Результат работы функции $RegionPlot[\{v_6 > 0, v_4 > 0, v_2 > 0, v_0 > 0, Dis > 0\}, \{\alpha, -1, 0\}, \{\gamma, 5/7, 1\}]$ показан на рис. 4.

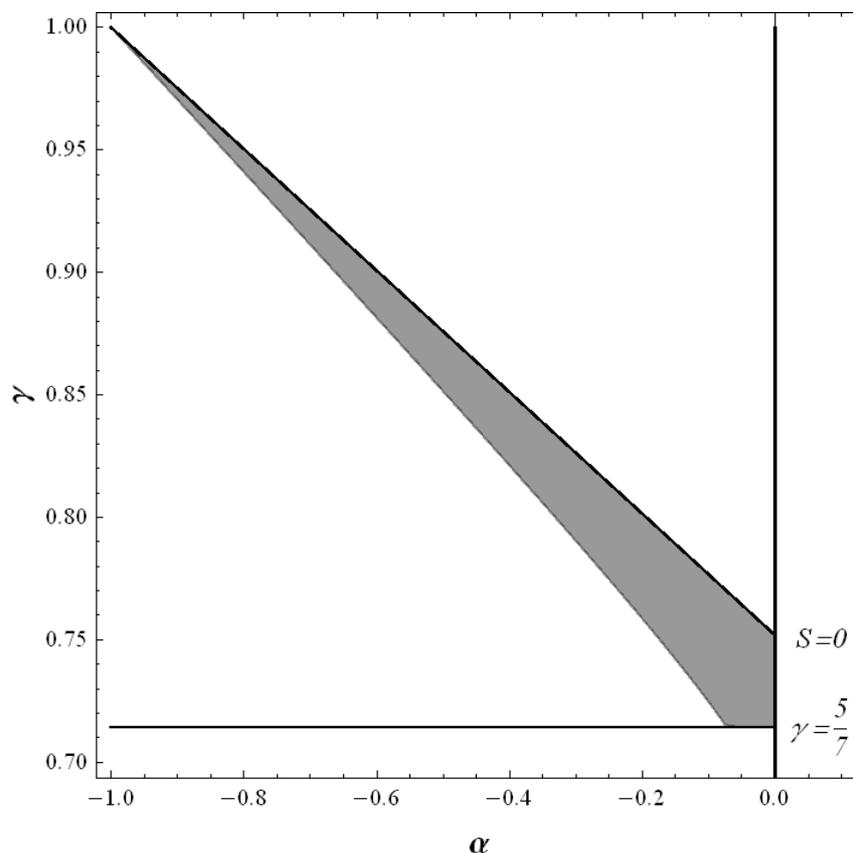


Рис. 4. Область гироскопической стабилизации

Как видно из рисунка гироскопическая стабилизация возможна не во всей области \hat{E} , а только в её заштрихованной «иглообразной» части. Таким образом, сформулируем следующее.

Утверждение 1. Для значений параметров из области \hat{E} с чётной степенью неустойчивости возможна стабилизация неустойчивого равновесия потенциальной системы за счёт действия гироскопических сил.

Рассмотрим вопрос о возможности гироскопической стабилизации в области \underline{E} . Отметим, что в этой области $w_0 = \det K_1 < 0$ и $v_0 = \det K_2 < 0$. Следовательно, нарушены одно из необходимых условий в (4) и одно из условий в (5). Таким образом, сформулируем следующее

Утверждение 2. Для значений параметров из области \underline{E} система потенциально неустойчива и не может быть стабилизирована за счёт влияния гироскопических сил.

Обоснование для утверждения 2 можно подтвердить также и другими фактами.

1). Очевидно, что при выполнении условий $w_4 > 0$, $w_0 < 0$ один из двух вещественных корней квадратичного полинома $\Delta_1(\lambda^2)$ обязательно положителен.

2). С помощью вышеупомянутой функции

$$\text{Reduce}[\{ w_0 < 0, v_0 < 0, w_4 > 0, v_6 > 0, w_4 v_4 + w_2 v_6 > 0, w_0 v_2 + w_2 v_0 > 0, w_4 v_2 + w_2 v_4 + w_0 v_6 > 0, w_4 v_0 + w_2 v_2 + w_0 v_4 > 0, w_0 v_0 > 0 \}]$$

проверяем положительность всех коэффициентов характеристического уравнения системы и получаем ответ FALSE (т.е. система рассмотренных неравенств несовместна).

Заключение. Подчеркнём, что проблемы достоверности, точности вычислений, а также вопросы ускорения и наглядности исследовательского процесса, могут быть частично сняты, если в качестве инструментального средства выбран ПКА. Наряду с использованием ПКА в качестве калькулятора для решения конкретной задачи, более значимым представляется подход, когда на базе внутреннего языка программирования ПКА (в рассмотренном случае «Mathematica») разрабатывается ПО для решения определённого класса задач. Фактически весь анализ, представленный выше, был проведён с помощью такого программного обеспечения.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект №16-07-00201 а), а также Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-8081.2016.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников.//Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. – М.: ВИНТИ, 1978. Т. 11. С. 5–223.

2. Потапенко Е.М. Динамика космического аппарата с прямым активным управлением гравитационным стабилизатором. // Космические исследования. – 1988. Т. 26, вып. 5. С. 699–708.
3. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. –М.: Гостехиздат, 1946. 204 с.
4. Давыскиб А., Самсонов В.А. О возможности гироскопической стабилизации вращения системы твердых тел.//Прикладная математика и механика. –1995. Т.59, вып. 3. С. 385–390.
5. Банщиков А.В., Бурлакова Л.А., Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н. Символьные вычисления в моделировании и качественном анализе динамических систем.//Вычислительные технологии. – 2014. Т.19. №6. С. 3–18.
6. Банщиков А.В., Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н. Программный комплекс для моделирования в символьном виде механических систем и электрических цепей. // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. №2016618253 от 25.07.2016. Федеральная служба по интеллектуальной собственности (РОСПАТЕНТ).
7. Козлов В.В. О стабилизации неустойчивых равновесий зарядов сильными магнитными полями.// Прикладная математика и механика. – 1997. Т. 61, вып. 3. С. 390–397.

О ТРАНСЦЕНДЕНТНОМ СЛУЧАЕ В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ПРИ НАЛИЧИИ РЕЗОНАНСА

Б.С. Бардин

Кафедра мехатроники и теоретической механики
Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)

Аннотация

Исследуется задача об устойчивости положения равновесия неавтономной гамильтоновой системы с одной степенью свободы. Предполагается, что функция Гамильтона 2π – периодически зависит от времени, а мультипликаторы линеаризованной в окрестности положения равновесия системы кратны и равны 1 или -1 . Указаны достаточные условия, при которых имеет место трансцендентный случай, когда вопрос об устойчивости не решается на основании анализа членов конечной степени в разложении гамильтониана в ряд в окрестности положения равновесия. Доказано, что в трансцендентном случае положение равновесия неустойчиво.

Ключевые слова и выражения: гамильтонова система, устойчивость, нормальная форма, резонанс, функция Четаева

MSC: 34C15, 34C20, 34C25, 34D35

1. Постановка задачи

Рассмотрим неавтономную гамильтонову систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dH}{dp}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{dH}{dq}, \quad (1)$$

Будем считать, что начало координат $q = p = 0$ является положением равновесия этой системы, а функция Гамильтона H представима в достаточно малой окрестности начала координат в виде сходящегося ряда

$$H = \sum_{k=2}^{\infty} H_k(q, p, t), \quad (2)$$

где H_k – однородная форма степени k относительно q и p с непрерывными 2π – периодическими t коэффициентами.

Пусть мультипликаторы линейной системы с гамильтонианом H_2 кратны и равны 1 или -1 . В этом случае характеристические показатели $\pm\lambda$

таковы, что либо $\lambda = N$, где N целое число (имеет место резонанс первого порядка), либо $2\lambda = 2N + 1$ (имеет место резонанс второго порядка). Будем предполагать, что элементарные делители характеристической матрицы линейной системы непростые. Тогда линейной вещественной T – периодической ($T = 2\pi$ в случае резонанса первого порядка $T = 4\pi$ в случае резонанса второго порядка) по t заменой переменных $q, p \rightarrow q_*, p_*$, гамильтониан (2) можно привести в виду [1,2]

$$H = \frac{1}{2} \delta p_*^2 + H_3 + \dots + H_4 + \dots, \quad (3)$$

где $H_k = \sum_{\nu+\beta=k} h_{\nu\beta} \cdot q_*^\nu \cdot p_*^\beta$, а коэффициенты $h_{\nu\beta}(t)$ – непрерывные, T – периодические функции t .

При помощи канонической близкой к тождественной, аналитической замены переменных $q_*, p_* \rightarrow \xi, \eta$ (построенной, например, при помощи метода Депри-Хори [3, 4]) гамильтониан (3) можно привести к виду [1, 5]

$$\Gamma = \frac{1}{2} \delta \eta^2 + a_M \xi^M + \dots \quad (M \geq 3) \quad (3)$$

где M – целое число, а коэффициент a_M – постоянная величина. Если $a_M \neq 0$, то вопрос об устойчивости положения равновесия системы с гамильтонианом (14) (а значит и исходной системы (11)) решается на основании следующего критерия [1].

Теорема. *Если M – четное число и $\delta a_M > 0$, то имеет место устойчивость положения равновесия по Ляпунову. Если же M – нечетное число или M – четное число, то положение равновесия неустойчиво по Ляпунову.*

При исследовании устойчивости движения конкретных механических систем, может встретиться особый случай, когда $a_M = 0$ при любом значении M .

Следуя терминологии, предложенной А.М. Ляпуновым [6], мы будем называть указанный случай *трансцендентным случаем* в задаче об устойчивости. В трансцендентном случае приведенная выше теорема очевидно неприменима. Трансцендентные случаи интересны не только с теоретической точки зрения, но и представляют интерес для приложений. Они, в частности, встречаются в задачах классической и небесной механики. В работе [7] было установлено, что в задаче об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжелого твердого тела в случае Горячева-Чаплыгина имеет место трансцендентный случай. Используя наличие

первого интеграла, было установлено, что в указанном случае маятниковые периодические движения орбитально неустойчивы. Отметим также, что трансцендентная ситуация возникает также и в интегрируемом случае Лагранжа [8].

В работе [9] был исследован вопрос об устойчивости положения равновесия автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в трансцендентном случае при наличии у характеристического уравнения линеаризованной системы кратного нулевого корня.

Целью данной работы является получение достаточных условий возникновения трансцендентной ситуации и исследование устойчивости положения равновесия системы (1) в трансцендентном случае.

2. Условия существования трансцендентного случая

В работе [5] трансцендентный случай рассматривался в связи с условием существования у системы (11) семейства периодических решений. В частности было показано, что в трансцендентном случае система (11) имеет однопараметрическое семейство T -периодических решений, рождающихся из положения равновесия. Данное семейство аналитически зависит от параметра, определяемого начальными условиями. Другими словами, в [5] было показано, что условие существования указанного семейства периодических решений является необходимым для наличия в системе (11) трансцендентного случая.

Покажем, что данное условие является также и достаточным. Действительно, пусть система (1) допускает семейство решений вид

$$q = g(t, \alpha), \quad p = f(t, \alpha), \quad (5)$$

где функции $g(t, \alpha)$, $f(t, \alpha)$, T – периодически зависят от переменной t , являются аналитическими по параметру α и тождественно обращаются в ноль при $\alpha = 0$.

Построим каноническую T -периодическую по t замену переменных $q, p \rightarrow \alpha, p_\alpha$ такую, что в новых переменных α, p_α решение (15) принимает вид

$$\alpha = const, \quad p_\alpha = 0, \quad (6)$$

т.е. в переменных α, p_α однопараметрическому семейству T -периодических решений (5) соответствует семейство положений равновесия.

Производящую функцию $S(p, \alpha)$ указанного канонического преобразования найдем из условий

$$q = -\frac{\partial S}{\partial p}, \quad p_\alpha = -\frac{\partial S}{\partial \alpha}. \quad (7)$$

Несложные вычисления показывают, что S можно выбрать в виде:

$$S = -p g(\alpha, t) + \int_0^\alpha \frac{\partial g}{\partial u}(u, t) f(u, t) du \quad (8)$$

Функция Гамильтона, записанная в переменных α, p_α , принимает вид

$$\Gamma = \frac{1}{2} p_\alpha^2 + p_\alpha^2 F(\alpha, p_\alpha, t), \quad (9)$$

где функция $F - T$ -периодически зависит от t и аналитична в окрестности $\alpha = p_\alpha = 0$, причем $F(0, 0, t) \equiv 0$.

Структура функции Гамильтона (9) гарантирует, что при выполнении нормализации коэффициенты a_M нормальной формы (4) будут обращаться в ноль при любом M . Действительно, пусть разложение функции F в ряд по степеням α и p_α начинается с членов некоторой степени k ($k \geq 1$). Выполним каноническую замену переменных равенствами $q, p_\alpha \rightarrow \alpha_*, p_{\alpha^*}$, заданную равенствами

$$\alpha_* = \frac{\partial W}{\partial p_{\alpha^*}}, \quad p_\alpha = \frac{\partial W}{\partial \alpha} \quad (10)$$

с производящей функцией

$$W = \alpha p_{\alpha^*} + p_{\alpha^*}^2 W_k(\alpha, p_{\alpha^*}, t), \quad (11)$$

где $W_k(\alpha, p_{\alpha^*}, t)$, – форма степени k относительно αp_{α^*} , коэффициенты которой T -периодически зависят от t . Нетрудно показать, что эти коэффициенты можно выбрать так, что в новых переменных α_*, p_{α^*} функция Гамильтона примет вид

$$\Gamma_* = \frac{1}{2} p_{\alpha^*}^2 + p_{\alpha^*}^2 F(\alpha_*, p_{\alpha^*}, t), \quad (12)$$

где функция $F_* - 2\pi$ – периодически зависит от t , а ее разложение в ряд в окрестности $\alpha_* = p_{\alpha^*} = 0$ начинается с членов степени не ниже $k + 1$.

Это означает, что при помощи последовательности канонических замен вида (10) в функции Гамильтона можно уничтожить члены любой конечной степени M ($M \geq 3$), т.е. в системе с гамильтонианом (9) имеет место трансцендентный случай. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Если система (11) с гамильтонианом (13) имеет однопараметрическое семейство T -периодических решений, рождающихся из положения равновесия, то имеет место трансцендентный случай.*

3. Исследование устойчивости положения равновесия в трансцендентном случае

Покажем, что в трансцендентном случае положение равновесия $q = p = 0$ системы (1) неустойчиво. Поскольку задача об устойчивости в исход-

ных переменных α, p_α , то достаточно показать неустойчивость системы с Гамильтонианом (9). Это можно сделать на основании теоремы Четаева.

Рассмотрим функцию Четаева $V = \alpha, p_\alpha$. Эта функция положительна в области $\alpha > 0, p_\alpha > 0$ и обращается в ноль на ее границе. Вычислим производную функции V в силу канонических уравнений с гамильтонианом (9).

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} p_\alpha + \alpha \frac{dp_\alpha}{dt} = p_\alpha^2 \left(1 + 2p_\alpha F(\alpha, p_\alpha, t) + \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} - \alpha \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right)$$

При достаточно малых значениях переменных α, p_α производная $\frac{dV}{dt}$ положительна в области $V > 0$. Таким образом, на основании теоремы Четаева положение равновесия $\alpha = p_\alpha = 0$ неустойчиво, что, очевидно, влечет за собой и неустойчивость положения равновесия исходной системы. Объединяя результаты данного и предыдущего параграфов, приходим к следующей теореме.

Теорема. Если система (1) с гамильтонианом (3) имеет однопараметрическое семейство T -периодических решений ($T = 2\pi$ или $T = 4\pi$), то имеет место трансцендентный случай и ее положение равновесия $q = p = 0$ неустойчиво.

Работа выполнена в рамках государственного задания (проект № 3.3858.217/4.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Иванов А.П., Сокольский А.Г.* Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы при параметрическом резонансе основного типа // *ПММ.* – 1980. – Т. 44, № 6. – С. 963-970
- [2] *Маркеев А.П.* Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009.
- [3] *Giacaglia G.* Perturbation methods in non-linear systems. – N.Y.: Springer – Verlag, 1972. – Перевод на русский: Джакаля Г.Е.О. Методы возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 319 с.
- [4] *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. – М.: Наука, 1978. – 312 с.
- [5] *Мерман Г.А.* Асимптотические решения канонической системы с одной степенью свободы в случае нулевых характеристических показателей // *Бюл. Ин-та теорет. астрон. АН СССР.* – 1964. – Т. 9, № 6 (109). – С. 394 – 424.

[6] *Ляпунов А.М.* Положения // Собр. соч. Т. 2. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – С. 264-271.

[7] *Бардин Б.С.* К задаче об устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Горячева-Чаплыгина // *Изв. РАН МТТ.* – 2007. № 2. – С. 14-21.

[8] *Бардин Б.С., Савин А.А.* Об устойчивости плоских периодических движений симметричного твердого тела с неподвижной точкой // *ПММ.* – 2013. – Т. 77, № 6.

[9] *Bardin B. S., Maciejewski A. J.* Transcendental case in stability problem of Hamiltonian system with two degrees of freedom in presence of first order resonance // *Qual. Theory Dyn. Syst.* – 2013. – Vol. 12? no. 1. – Pp. 207- 216.

ПРОБЛЕМА ФОРМАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ГАМИЛЬТОНА

А.Б. Батхин (ИПМ им. М.В.Келдыша, Россия, 125047, Москва, Миусская пл. 4)

E-mail: batkhin@gmail.com

PROBLEM OF FORMAL STABILITY OF STATIONARY POINT OF MULTIPARAMETRIC HAMILTONIAN SYSTEM

A.B. Batkhin (KIAM, 125047, Moscow, Miusskaya sq. 4)

Keywords: formal stability, stationary point, Hamiltonian system

Введение. Исследование устойчивости по Ляпунову положения равновесия системы Гамильтона в случае, когда число степеней свободы больше двух, требует значительных усилий. Это связано, с одной стороны, с тем, что устойчивость положения равновесия по линейному приближению может быть нарушена любым сколь угодно малым возмущением более высокого порядка. С другой стороны, для больших размерностей теорема Арнольда-Мозера об устойчивости положения равновесия неприменима. Однако, для многих прикладных задач зачастую вполне достаточной является формальная устойчивость, предложенная Ю. Мозером [8]. В случае отсутствия сильных резонансов между собственными частотами линеаризованной в окрестности стационарной точки системы Гамильтона условие формальной устойчивости положения равновесия формулируется с помощью теоремы А.Д. Брюно [5]. В работе автора [1] предложена схема исследования формальной устойчивости. Эта схема предполагает, во-первых, что вычислена область устойчивости Σ положения равновесия по линейному приближению, а, во-вторых, найдены так называемые резонансные множества $\mathcal{R}_{p:q}$ характеристического многочлена $f(\lambda)$, соответствующие сильным резонансам $2:1$, $3:1$. В данной работе рассмотрена методика исследования положения равновесия многопараметрической системы Гамильтона с тремя степенями свободы, основанная на описании дискриминантного и резонансного множеств кубического многочлена, предложенного в [3, 4].

Постановка задачи. Пусть в окрестности начала координат — положения равновесия — функция Гамильтона $H(\mathbf{z})$ системы с тремя степенями свободы может быть представлена в виде

$$H(\mathbf{z}) = \sum_{i=2}^{\infty} H_i(\mathbf{z}),$$

где $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$, \mathbf{q} и \mathbf{p} — канонически сопряжённые векторы координат и импульсов соответственно, а $H_i(\mathbf{z})$ — однородная функция степени i от них. Пусть квадратичная форма $H_2(\mathbf{z})$ не является знакоопределённой, т. е. теорема Лагранжа-Дирихле об устойчивости положения равновесия консервативной системы неприменима.

Ставится задача при указанных выше условиях рассмотреть схему исследования формальной устойчивости положения равновесия системы Гамильтона с тремя степенями свободы, правые части которой гладко зависят от вектора параметров \mathbf{P} .

Устойчивость в линейном приближении. Как известно, в гамильтоновом случае характеристический многочлен $f(\lambda)$ линеаризованной системы канонических уравнений

$$\dot{\mathbf{z}} = JA(\mathbf{P})\mathbf{z}, \text{ где } A(\mathbf{P}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \text{Hess}H_2, \quad (1)$$

является многочленом только от чётных степеней λ . Здесь матрица J — симплектическая единица. Тогда многочлен $f(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} f(\lambda)$, $\mu = \lambda^2$, названный в [2] *полухарактеристическим*, является приведённым кубическим многочленом

$$f_3 = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3. \quad (2)$$

Обозначим через Σ множество устойчивости линеаризованной системы (1) в пространстве параметров \mathbb{P} . В терминах полухарактеристического многочлена $f(\mu)$ критерий устойчивости положения равновесия линеаризованной гамильтоновой системы (1) формулируется следующей теоремой.

Теорема 1 ([2]) *Положение равновесия $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ линеаризованной гамильтоновой системы (1) устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда:*

- 1) все корни μ_k полухарактеристического многочлена $f(\mu)$ вещественны и неположительны;
- 2) все элементарные делители матрицы JA просты.

Для кубического многочлена $f_3(x)$ условие 1 проверяется с помощью утверждения

Утверждение 1 ([2, Теорема~2.2]) У многочлена $f_n(x)$ для $n = 2, 3$ все корни вещественные и неположительны тогда и только тогда, когда выполнены следующие неравенства:

$$a_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{и} \quad D(f_n) \geq 0,$$

где $D(f_n)$ — дискриминант многочлена $f_n(x)$.

Условие 1 эффективно проверяется с помощью утверждения.

Утверждение 2 Пусть λ^* — корень кратности k характеристического многочлена $f(\lambda)$ матрицы JA . Все соответствующие элементарные делители матрицы JA просты тогда и только тогда, когда $\text{rang}(JA - \lambda^*E) = m - k$, где $m = \dim JA$.

Определение 1 Множество \mathcal{R} с индексом $p:q$ назовем $p:q$ -резонансным, если для заданных натуральных чисел $p, q \in \mathbb{N}_0$ найдется пара корней многочлена (2), отношение которых равно $p:q$:

$$\mathcal{R}_{p:q} = \{P \in \Pi: \exists j, k = 1, \dots, m, \quad |\lambda_j(P)|:|\lambda_k(P)| = p:q, p, q \in \mathbb{N}_0\}.$$

Границей $\partial\Sigma$ множества устойчивости линейной системы Гамильтона (1) служат участки алгебраических многообразий $\mathcal{R}_0 = \{P: a_3(P) = 0\}$ и $\mathcal{R}_{1:1} = \{P: D(f) = 0\}$. Многообразия \mathcal{R}_0 и $\mathcal{R}_{1:1}$ суть резонансные множества, на которых имеется нулевой корень и по крайней мере пара кратных корней полухарактеристического многочлена (2) соответственно.

Структура резонансного множества кубики. Геометрически множество $\mathcal{R}_{p:q}(f_3)$ представляет собой линейчатую поверхность \mathcal{V}_2 , задаваемую полиномиальной параметризацией

$$\mathcal{V}_2: \{a_1 = -(p+q)t_1 - t_2, a_2 = pqt_1^2 + (p+q)t_1t_2, a_3 = -pqt_1^2t_2\}. \quad (3)$$

Роль направляющей играет скрученная кубика

$$\mathcal{V}_1: \{a_1 = -(p^2 + pq + q^2)t_1, a_2 = pq(p^2 + pq + q^2)t_1^2, a_3 = -(pqt_1)^3\}, \quad (4)$$

по которой эта поверхность самопересекается. При $p = q = 1$ получим дискриминантную поверхность $\mathcal{D}(f_3)$ (см. раздел 4 в [3]). Для $p:q = 7$ резонансное множество показано на рис. 1

Дискриминантная поверхность $\mathcal{D}(f_3)$ делит пространство коэффициентов Π на две области с разным числом вещественных корней: в области Π_1 многочлен $f_3(x)$ имеет три вещественных корня, в области Π_2 — один вещественный и пару комплексно-сопряжённых корней. Поскольку на

многообразии \mathcal{V}_2 кубика (2) имеет только вещественные корни, то множество $\mathcal{R}_{p:q}(f_3)$ для любого значения коэффициента $p:q \neq -1$ целиком содержится в области Π_1 и только может касаться дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_3)$. Поверхности \mathcal{V}_2 и $\mathcal{D}(f_3)$ касаются друг друга вдоль пары кривых, на которых третий корень, не соизмеримый ни с одним с двух других корней, совпадает с одним из корней этой пары. Параметрическое представление кривых $\mathcal{L}_{1,2}$, по которым дискриминантная поверхность $\mathcal{D}(f_3)$ касается резонансной поверхности \mathcal{V}_2 , есть:

$$\mathcal{L}_1: \{a_1 = -(p + 2q)t_1, a_2 = q(2p + q)t_1^2, a_3 = -q^2 p t_1^3\}, \quad (5)$$

$$\mathcal{L}_2: \{a_1 = -(2p + q)t_1, a_2 = p(p + 2q)t_1^2, a_3 = -qp^2 t_1^3\}. \quad (6)$$

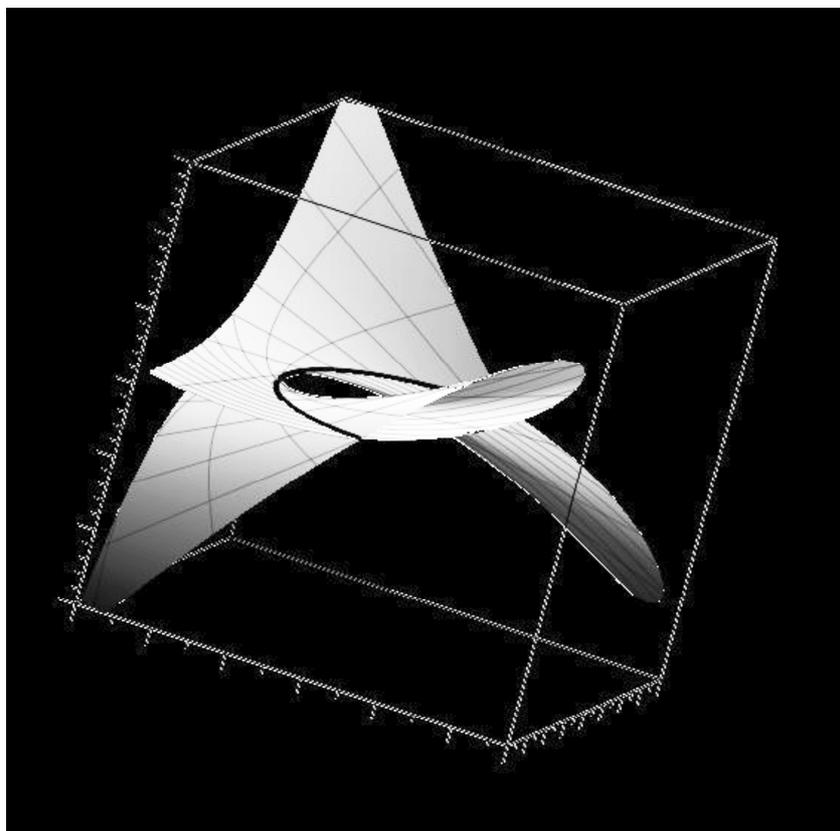


Рис. 1: Резонансное множество $\mathcal{R}_{p:q}(f_3)$ для коэффициента соизмеримости $p:q = 7$.

Выделена кривая v_1 , по которой поверхность v_2 самопересекается

Формальная устойчивость. Как известно, устойчивость положения равновесия системы (1) может быть нарушена возмущениями порядка 3 и выше. Если квадратичная форма $H_2(\mathbf{z})$ является знакоопределённой, то по

теореме Лагранжа-Дирихле возмущения высоких порядков не влияют на устойчивость. Далее полагаем, что форма $H_2(\mathbf{z})$ знакопеременная.

Определение 2 *Положение равновесия $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ гамильтоновой системы является формально устойчивым, если существует возможно расходящийся степенной ряд, который является формальным положительно определённым первым интегралом.*

Наличие формальной устойчивости гарантирует, что на конечном, но большом интервале времени возмущённая траектория остаётся близкой к невозмущённой.

Пусть для линейной системы Гамильтона (1) вычислено множество устойчивости Σ . Тогда для каждого значения $\mathbf{P} \in \Sigma$ матрица $JA(\mathbf{P})$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и, следовательно, её собственные числа чисто мнимые $\lambda_j = -\lambda_{j+3} = i\omega_j$, $j = 1, 2, 3$, а элементарные делители просты. В этом случае существует линейное каноническое преобразование, приводящее гамильтониан $H_2(\mathbf{z})$ к нормальной форме с набором инвариантов $\sigma_i(\mathbf{P})$, $i = 1, 2, 3$,

$$\tilde{H}_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \tilde{\lambda}_i(\mathbf{P})(q_i^2 + p_i^2), \quad \tilde{\lambda}_i(\mathbf{P}) = \sigma_i(\mathbf{P})\omega_i(\mathbf{P}), \quad \sigma_i(\mathbf{P}) = \pm 1. \quad (7)$$

Обозначим через $\tilde{\Lambda}(\mathbf{P})$ вектор размерности 3, составленный из коэффициентов $\tilde{\lambda}_i(\mathbf{P})$, $i = 1, 2, 3$, нормальной формы (7).

Наличие резонансов при условии, что нормальная форма (7) не является знакоопределённой, требует дальнейшей нормализации гамильтониана $H(\mathbf{z})$ по крайней мере до 4-го порядка для исследования устойчивости положения равновесия. Если отсутствуют резонансы порядков 2, 3 и 4, то для многомерных систем Гамильтона можно применить теорему Брюно (см. [5] или [7, гл. 5, п. 2]), выполнение которой гарантирует формальную устойчивость.

Пусть для системы (1) выполнено условие отсутствия резонансов порядков не выше четырёх, т. е.

$$\langle \mathbf{K}, \tilde{\Lambda} \rangle \neq 0 \text{ для } \mathbf{K} \in \mathbb{Z}^3, \quad 0 < |\mathbf{K}| \leq 4, \quad (8)$$

тогда существует такое аналитическое каноническое преобразование $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{U}, \mathbf{V})$, что новый гамильтониан \mathcal{H} имеет вид:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \tilde{\lambda}_i(U_i^2 + V_i^2) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 b_{ij}(U_i^2 + V_i^2)(U_j^2 + V_j^2) + R(\mathbf{U}, \mathbf{V}), \quad (9)$$

где $R(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ — многочлен от переменных (\mathbf{U}, \mathbf{V}) степени не ниже пяти.

Теорема 2 (Брюно, [5]) Если на любой паре ненулевых целочисленных векторов \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 из октанта $k_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, являющихся решением уравнения

$$\langle \mathbf{K}, \tilde{\Lambda} \rangle = 0, \quad (10)$$

квадратичная форма $\mathbf{K}_1^T \mathbf{B} \mathbf{K}_2 \neq 0$, где $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{i,j=1}^3$, $\tilde{\Lambda} \neq 0$, то положение равновесия $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ системы Гамильтона $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J} \partial \mathbf{H} / \partial \mathbf{z}$ формально устойчиво.

В работе автора [1] предложена некоторая схема исследования формальной устойчивости положения равновесия, основанная на теореме Брюно. Для реализации этой схемы требуется разбить область Π_1 на подобласти \mathcal{W}_i резонансными множествами $\mathcal{R}_{p:1}(f(\mu))$, $p = 4, 9$. При этом следует ограничиться только той частью Π_1 , в точках которой полухарактеристический многочлен $f(\mu)$ имеет только отрицательные вещественные корни. В силу утверждения 1 достаточно описать взаимное расположение дискриминантного множества $\mathcal{D}(f(\mu))$ и резонансных множеств $\mathcal{R}_{p:1}(f(\mu))$, $p = 4, 9$ в октанте $a_i > 0$, $i = 1, 2, 3$.

Согласно формулам (5) и (6) каждая из резонансных поверхностей $\mathcal{R}_{p:1}(f(\mu))$ касается дискриминантной поверхности $\mathcal{D}(f(\mu))$ вдоль кривых $L_{1,2}$. Сечение указанных выше поверхностей плоскостью $a_1 = \text{const} > 0$ показано на рис. 2 для $a_1 = 2$, $p = 4$.

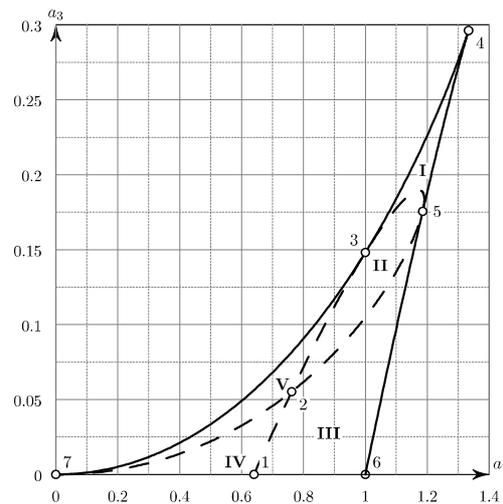


Рис. 2. Сечение дискриминантной $\mathcal{D}(f(\mu))$ (сплошная линия) и резонансной

$\mathcal{R}_{4:1}(f(\mu))$ (штриховая линия) поверхностей плоскостью $a_1 = 2$.

Кружками показаны особые точки, граничные точки и точки касания

Две резонансные поверхности $\mathcal{R}_{p_1:1}(f(\mu))$ и $\mathcal{R}_{p_2:1}(f(\mu))$, $p_{1,2} \in \{4,9\}$, пересекаются вдоль кривых \mathcal{C}_j . Параметризацию кривых \mathcal{C}_j нетрудно найти, используя следующие рассуждения. Пусть на поверхности $\mathcal{R}_{p_1:1}(f(\mu))$ многочлен $f(\mu)$ имеет два порождающих корня t_1 и t_2 , а на поверхности $\mathcal{R}_{p_2:1}(f(\mu))$ – u_1 и u_2 . Тогда на этих поверхностях $f(\mu)$ представляется в виде

$$f(\mu) = (\mu - t_1)(\mu - p_1 t_1)(\mu - t_2) = (\mu - u_1)(\mu - p_2 u_1)(\mu - u_2).$$

В точках пересечения поверхностей тройки корней должны совпадать. Нетрудно видеть, что имеются четыре различных набора значений параметров t_1, t_2, u_1, u_2 , для которых две тройки ненулевых корней совпадают:

1. $t_2 = p_2 t_1, u_1 = t_1, u_2 = p_1 t_1$;
2. $t_2 = p_1 p_2 t_1, u_1 = p_1 t_1, u_2 = t_1$;
3. $t_2 = \frac{t_1}{p_2}, u_1 = \frac{t_1}{p_1}, u_2 = p_1 t_1$;
4. $t_2 = \frac{p_1 t_1}{p_2}, u_1 = \frac{p_1 t_1}{p_2}, u_2 = t_1$.

Подставляя указанные выше значения параметра t_2 , получим параметризацию кривых $C_j = 1, 2, 3, 4$. Сечение резонансных поверхностей плоскостью $a_1 = \text{const} > 0$ показано на рис. 3 для $a_1 = 2, p_{1,2} = 4, 9$.

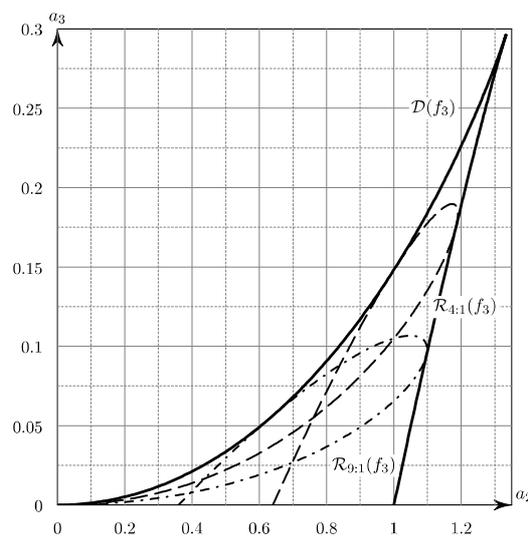


Рис. 3. Сечение резонансных поверхностей $\mathcal{R}_{p:1}(f(\mu))$ плоскостью $a_1 = 2$ для значений $p = 4$ (длинный штрих), $p = 9$ (штрих-пунктир). Сплошной линией показана дискриминантная поверхность $\mathcal{D}(f_3)$, являющаяся границей области Π_1

Методика исследования формальной устойчивости. Итак, пусть вычислено множество устойчивости по линейному приближению Σ и в нём выделено подмножество Σ^- , в которой сигнатура квадратичной формы $H_2(\mathbf{z}) \neq \pm 6$, т. е. эта форма знакопеременная.

1. Вычисляются резонансные поверхности $\mathcal{R}_{2:1}(f_3)$, $\mathcal{R}_{3:1}(f_3)$, которые разделяют подмножество Σ^- на конечное число открытых областей W_j .

2. В каждой области W_j отсутствуют сильные резонансы. Тогда, вычисляя нормальную форму функции Гамильтона $H(\mathbf{z})$ до 4-го порядка включительно, можно проверить выполнение условия теоремы 2. Если условие теоремы выполнено, то имеет место формальная устойчивость.

3. На самих резонансных поверхностях $\mathcal{R}_{2:1}(f_3)$ и $\mathcal{R}_{3:1}(f_3)$ вне точек кратного резонанса имеем ситуацию, когда одна пара собственных частот находится в сильном резонансе, а третья частота несоизмерима с ними. Тогда применимы теоремы § 2, 3, главы 4 книги [7]. Если их условия выполнены, то на соответствующих участках имеет место формальная устойчивость.

Отметим, что процедура нормализации функции Гамильтона в окрестности положения равновесия эффективно выполняется методом Депри-Хори с привлечением современных систем компьютерной алгебры (подробнее см. [7, 6]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Батхин А. Б. Выделение областей устойчивости нелинейной системы Гамильтона // Автомат. и телемех., 2013, № 8, С. 47–64.

[2] Батхин А. Б., Брюно А. Д., Варин В. П. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, № 1, С. 80–133.

[3] Батхин А. Б. Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // Программирование. 2016. Т. 42, № 2. С. 8–21. DOI:10.1134/S0361768816020031

[4] Батхин А. Б. Структура резонансного множества вещественного многочлена // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 29. С. 1–23. DOI:10.20948/prepr-2016-29

[5] Брюно А. Д. О формальной устойчивости систем Гамильтона // Матем. заметки, 1967, Т. 1, № 3, С. 325–330. DOI:10.1007/BF01098887

[6] Журавлев В. Ф., Петров А. Г., Шундерюк М. М. Избранные задачи гамильтоновой механики. М.: ЛЕНАНД. 2015. 304 с.

[7] Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М., Наука. 1978. 312 с.

[8] Moser J. New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems // Comm. Pure Appl. Math. 1958. V. 11:1. Pp. 81–114.

ЧАСТОТНЫЕ ОЦЕНКИ ШАГА ДИСКРЕТИЗАЦИИ В НЕЛИНЕЙНЫХ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМАХ

Т.А. Брынцева (СПбГУ, Россия, 198504, Санкт-Петербург,
Университетский проспект, 28)

E-mail: tatiana.bryntseva@gmail.com

FREQUENCY-DOMAIN ESTIMATES OF THE SAMPLING INTERVAL IN NONLINEAR HYBRID SYSTEMS

T.A. Bryntseva (SPSU, Russia, 198504, Saint Petersburg,
Universitetski avenue, 28)

Keywords: Stability of nonlinear systems, Hybrid systems, Lyapunov function, Sampling intervals, Frequency domains

Введение. Данная работа посвящена описанию метода оценивания максимального шага дискретизации в гибридных системах. Эта задача встречается достаточно часто, так как объекты в окружающей среде изменяют свои свойства непрерывно, а управление с помощью компьютерных технологий применяется дискретно. С развитием теории сетевых систем проблема стала еще более актуальной.

Последние несколько десятилетий одним из главных подходов для решения этой проблемы является метод «входного запаздывания», который состоит в преобразовании гибридной системы в систему с пилообразным запаздыванием. Впервые эта идея появилась в конце прошлого века в статьях [7], [16]. Эффективность подхода возросла с его применением в сочетании с дескрипторным методом ([3]). Принцип «входного запаздывания» стал широко использоваться в исследовании сетевых систем, где его рассматривали с независимыми от времени функционалом Ляпунова – Красовского или функцией Ляпунова – Разумихина ([2], [6], [8] и др.). Подход также получил развитие в статье [13], основная идея которой состоит в представлении исходной гибридной системы в виде замыкания линейной с интегральным оператором, чья L_2 норма является оценкой верхней границы шага дискретизации, и применении теоремы о малом коэффициенте к полученной системе. Этот метод был улучшен в статье [5] с помощью исследования пассивных свойств системы и применении теоремы об устойчивости с интегральными квадратичными ограничениями ([12]) вместо теоремы о малом коэффициенте.

Заметим, что представленные выше способы оценки не могут гарантировать устойчивость, если шаг дискретизации больше аналитической верхней границы для постоянного запаздывания. Известно, что для

многих систем это слишком строгое условие. Эта проблема была решена в статье [4], где в рамках метода «входного запаздывания» используется функционал Ляпунова – Красовского, зависящий от времени. Далее, этот результат был расширен в [9] для пилообразного запаздывания общего вида (случай равенства производной функции запаздывания ненулевой константе). Дальнейшее развитие техники «входного запаздывания» можно увидеть в следующих работах: [20], где для анализа устойчивости гибридной системы используется функция Ляпунова для дискретных систем, а полученные выпуклые неравенства решаются с помощью оптимизационного метода сумм квадратов (SOS); [18], в которой система исследуется методом построения наблюдателя, а также [14], [10], [20] и др..

Приведенные статьи рассматривают лишь случай линейных систем, исследование нелинейных можно найти в [11], [19] и др..

Стоит отметить, что практически все вышеперечисленные работы оценивают верхнюю границу шага дискретизации в терминах линейных матричных неравенств. В данной работе предлагается иной способ оценки, основанный на методе частотных неравенств, а именно круговой критерий для систем с запаздыванием [17].

Предварительные сведения. Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + b\varphi(t, \sigma(t_k)), \quad k \in \mathbb{N}, \\ \sigma(t_k) &= C^* x(t_k) = \begin{bmatrix} \sigma_1(t_1^k) \\ \vdots \\ \sigma_m(t_m^k) \end{bmatrix}, \quad t_i^0 = 0, i = 1, \dots, m, \\ \varphi(t, \sigma(t)) &= \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_m(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $t_{i+1}^k - t_i^k = T_i$, $i = 1, \dots, m$, A постоянная $n \times n$ матрица, b , C постоянные $n \times m$ матрицы, x - вектор состояния и φ - вектор нелинейностей, лежащих в секторе:

$$\begin{aligned} \mu_{11} &\leq \frac{\varphi_1(t, \sigma_1)}{\sigma_1} \leq \mu_{21}, \\ &\vdots \\ \mu_{1m} &\leq \frac{\varphi_m(t, \sigma_m)}{\sigma_m} \leq \mu_{2m}, \quad \sigma_i \neq 0, i = 1 \dots m. \end{aligned} \quad (2)$$

Представим (1), (2) как систему с пилообразным запаздыванием выбрав

такие функции $\tau_i(t)$, что $t_i^k = t - \tau_i(t)$, $0 \leq \tau_i(t) \leq T_i$, $i = 1 \dots m$, где T_i положительная вещественная постоянная:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + b\phi(t, \sigma(t - \tau(t))), \\ \sigma(t - \tau(t)) &= C^* x(t - \tau(t)) = \begin{bmatrix} \sigma_1(t - \tau_1(t)) \\ \vdots \\ \sigma_m(t - \tau_m(t)) \end{bmatrix}, i = 1 \dots m. \end{aligned} \quad (3)$$

Чтобы получить более обобщенные результаты, рассмотрим $\tau_i(t)$ такие, что $\tau_i(0) \geq 0$ (полагая, что существует начальное условие $x_0(t), t \in [-\tau_{max}(0), 0]$, где $\tau_{max} = \max_{i=1 \dots m} \tau_i(0)$). Обозначим для удобства

$T = \text{diag}\{T_1, \dots, T_m\}$. Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующий вспомогательный результат - обобщение леммы из [17] для систем с несколькими входами и выходами:

Лемма 1 Пусть t_0 наименьшее вещественное число такое, что $t_0 - \tau_i(t_0) \geq 0$, $i = 1 \dots m$. Тогда для всех решений системы (3) и $t \geq 0$ выполняется неравенство:

$$\begin{aligned} &\int_0^t e^{2\varepsilon s} (e^{2\varepsilon T_{max}} \dot{\sigma}(s)^* T^2 U \dot{\sigma}(s) - (\sigma(s) - \sigma(s - \tau(s)))^* \times \\ &\times U (\sigma(s) - \sigma(s - \tau(s)))) ds \geq -\Gamma, \end{aligned} \quad (4)$$

где $U = \text{diag}\{u_1, \dots, u_m\} > 0$ – вещественная матрица; $T_{max} = \max_{i=1 \dots m} T_i$; $\varepsilon \in \mathbb{R}$ –

положительные константы; $\Gamma = e^{2\varepsilon t_0} \int_0^{t_0} (\sigma(s) - \sigma(s - \tau(s)))^* U (\sigma(s) -$

$\sigma(s - \tau(s))) ds$. Доказательство для краткости опускается.

Замечание 1 В случае скалярного входа σ утверждение данной леммы совпадает с утверждением леммы 1 из [17].

Теорема 1, предложенная в [17] может быть использована для оценки шага дискретизации в частном случае непрерывной линейной системы со скалярным дискретным нелинейным управлением.

Теорема 1 (Чурилова, 1995) Рассмотрим следующую систему:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b\phi(t, \sigma(t - \tau(t))), \quad (9)$$

$$\sigma = c^* x, \quad (10)$$

где A – $n \times n$ вещественная постоянная, b, c вещественные постоянные n –векторы, x – вектор состояния, $\varphi(t, \sigma)$ – непрерывная нелинейность, лежащая в секторе, $\mu_1 \leq \frac{\varphi(t, \sigma)}{\sigma} \leq \mu_2$, $\tau(t)$ непрерывная, а $t - \tau(t)$ и строго монотонная.

Пусть существует вещественное число μ_0 такое, что выполняется $\mu_1 \leq \mu_0 \leq \mu_2$ и матрица $A + \mu_0 bc^*$ – гурвицева. Пусть также существует $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$ для которого выполняется $4\alpha\mu_1\mu_2 < 1$ и функция

$$\begin{aligned} \pi(\omega) = & \frac{(1 - \alpha(\mu_2 + \mu_1)^2)}{(1 - 4\alpha\mu_1\mu_2)} + (\mu_1 + \mu_2) \operatorname{Re}(W(j\omega)) + \\ & + \mu_1\mu_2 |W(j\omega)|^2 - T^2 |W(j\omega)|^2 \frac{\omega^2}{4\alpha}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\omega \in \mathbb{R}$, $j = \sqrt{-1}$ удовлетворяет неравенствам

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \pi(\omega) > 0, \quad (12)$$

$$|\Delta(j\omega)|^2 \pi(\omega) > 0 \quad \forall \omega \geq 0 \quad (13)$$

(в точках ω , для которых $|\Delta(j\omega)| = 0$, неравенство (13) понимается как предельное).

Тогда существуют положительные постоянные числа C_1, C_2, ε , которые зависят только от коэффициентов линейной части системы и чисел μ_1, μ_2, T , такие, что для любого решения $x(t)$ системы (9), (10) с непрерывной начальной функцией $x_0(t)$, определенной при $-\tau_0 \leq t \leq 0$, справедлива оценка

$$\|x(t)\| \leq (C_1 \|x_0(0)\| + C_2 \max_{-\tau_0 \leq t \leq 0} |c^* x_0(t)|) \exp(-\varepsilon t)$$

для всех $t \geq 0$.

Замечание 2. Условия строгой монотонности $t - \tau(t)$ и непрерывности τ являются необязательными, достаточно монотонности и непрерывности на промежутках $[t - \tau(t), t]$ соответственно.

Теорема 1 позволяет получить следующие оценки для шага дискретизации – параметра T :

$$T^2 \leq \inf_{\omega > 0, g(\omega) \neq 0} \frac{f(\omega) + D}{g(\omega)}, \quad (14)$$

где $f(\omega) = (\mu_1 + \mu_2) \operatorname{Re}(W(j\omega)) + \mu_1 \mu_2 |W(j\omega)|^2$, $D = (1 - \alpha(\mu_2 + \mu_1)^2) \times$
 $\times (1 - 4\alpha\mu_1\mu_2)^{-1}$ и $g(\omega) = \omega^2 |W(j\omega)|^2 / 4\alpha$.

Основной результат. Случай системы с несколькими входами и выходами с нелинейным дискретным управлением. Основным результатом работы является следующая теорема, которая может быть использована для получения оценок для шага дискретизации:

Теорема 2 Рассмотрим систему (3). передаточную функцию, описывающую линейную часть системы, а за $\Delta(p) = \det(pI_n - A)$ – характеристический полином матрицы коэффициентов A , где I_n – единичная матрица размерности n . Введем следующее обозначение:

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mu_{1m} \end{bmatrix}, \quad \mu_2 = \begin{bmatrix} \mu_{21} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mu_{2m} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Пусть существует такая диагональная $m \times m$ матрица μ_0 , что каждый ее элемент μ_{0i} лежит между μ_{1i} и μ_{2i} , $i = 1 \dots m$ и матрица $A + b\mu_0 C^*$ гурвицева. Пусть функция

$$\pi(\omega) = W(j\omega)^* U \left(\mu_1 \mu_2 \alpha - T^2 \frac{\omega^2}{4} \right) (I_m - 4\alpha\mu_1\mu_2) W(j\omega) - \operatorname{Re} \left(W(j\omega)^* \times \right.$$

$$\left. \times (\mu_1 + \mu_2) (I_m - 4\alpha\mu_1\mu_2) \alpha U \right) + \alpha U \left(I_m - \alpha(\mu_1 + \mu_2)^2 \right), \quad (16)$$

удовлетворяет следующим неравенствам

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \pi(\omega) > 0, \quad (17)$$

$$|\Delta(j\omega)|^2 \pi(\omega) > 0 \quad \forall \omega \geq 0, \quad (18)$$

где α диагональная $m \times m$ матрица с диагональными элементами α_i , $1 - 4\alpha_i \mu_{1i} \mu_{2i} > 0$, U положительно определенная диагональная матрица размерности m (в точках ω , для которых $|\Delta(j\omega)| = 0$, неравенство (42) понимается как предельное)

Тогда существуют положительные вещественные константы C_1 , C_2 , ε , зависящие только от коэффициентов линейной части системы и μ_1 , μ_2 , T , такие, что для всех решений $x(t)$ системы (2), (3) с непрерывной

начальной функцией $x_0(t)$, $-\max_{i=1,\dots,m} \tau_i(0) = -\tau_{max} \leq t \leq 0$ выполняется следующее неравенство:

$$\|x(t)\| \leq (C_1 \|x_0(0)\| + C_2 \max_{-\tau_{max}t \leq 0} \|C^* x_0(t)\|) e^{-\varepsilon t}, \forall t \geq 0. \quad (19)$$

Доказательство для краткости опускается.

Случай нелинейной системы с нелинейным дискретным управлением

С помощью теоремы 2 мы также можем получить оценки для шага дискретизации непрерывных нелинейных систем с нелинейным дискретным управлением, предположив, что некоторые из нелинейностей φ_i , $i=1,\dots,m$ системы (1) имеют шаг дискретизации $T_i = 0$. В качестве примера рассмотрим частный случай нелинейной системы со скалярным дискретным управлением:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b_1 \varphi_1(t, \sigma_1(t)) + b_2 \varphi_2(t, \sigma_2(t_k)), \sigma = C^* x = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}, \quad (37)$$

где $A \in^{n \times n}$, $b_1, b_2 \in^{n \times 1}$ и $C \in^{n \times 2}$, x , n -вектор состояния, $\varphi_1(t, \sigma_1)$, $\varphi_2(t, \sigma_2)$ – непрерывные нелинейные функции такие, что

$$\mu_{11} \leq \frac{\varphi_1(t, \sigma_1)}{\sigma_1} \leq \mu_{12}, \quad \mu_{21} \leq \frac{\varphi_2(t, \sigma_2)}{\sigma_2} \leq \mu_{22}. \quad (38)$$

Теорема 4 Рассмотрим систему (37) с ограничениями (38) как систему с пилообразным запаздыванием. Обозначим передаточную функцию ее линейной части $W(p) = c^* (A - pI_n)^{-1} b$, где $b = [b_1 b_2]$, и $\Delta(p) = \det(pI - A)$ характеристический полином матрицы A .

Пусть существует такая диагональная 2×2 матрица μ_0 , что каждый диагональный элемент μ_{0i} лежит между μ_{1i} и μ_{2i} , $i=1,2$, а также $A + b\mu_0 C^*$ гурвицева. Пусть

$$\begin{aligned} \pi(\omega) = & W(j\omega)^* \begin{bmatrix} \mu_{11} \mu_{12} u & 0 \\ 0 & \alpha_2 \mu_{21} \mu_{22} - \frac{T^2 \omega^2}{4} \end{bmatrix} W(j\omega) - \\ & - \operatorname{Re}(W(j\omega)^* \begin{bmatrix} (\mu_{11} + \mu_{12}) u & 0 \\ 0 & \alpha_2 (\mu_{21} + \mu_{22}) \end{bmatrix}) + \end{aligned} \quad (39)$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{(1 - \alpha_1(\mu_{11} + \mu_{12})^2)u}{1 - 4\alpha_1\mu_{11}\mu_{12}} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_2(1 - \alpha_2(\mu_{21} + \mu_{22})^2)}{1 - 4\alpha_2\mu_{21}\mu_{22}} \end{bmatrix} \quad (39)$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \pi(\omega) > 0, \quad (40)$$

$$|\Delta(j\omega)|^2 \pi(\omega) > 0 \quad \forall \omega \geq 0, \quad (41)$$

где $W(j\omega) = C^*(A - j\omega I_n)^{-1}b$, α_i , $i = 1, 2$ – положительная вещественная константа, для которой выполняется $1 - 4\alpha_i\mu_{1i}\mu_{2i} > 0$, $u > 0 \in \mathbb{R}$ (в точках ω , для которых $|\Delta(j\omega)| = 0$, неравенство (41) понимается как предельное).

тогда существуют положительные вещественные константы C_1 , C_2 , ε , зависящие только от коэффициентов линейной части системы и от μ_{1i} , μ_{2i} , $i = 1, 2$, T , такие, что для всех решений $x(t)$ системы (2), (3) с непрерывной начальной функцией $x_0(t)$, $-\max_{i=1, \dots, m} \tau_i(0) = -\tau_{max} \blacklozenge \geq t \geq \blacklozenge 0$,

выполняется следующее неравенство:

$$\|x(t)\| \leq (C_1 \|x_0(0)\| + C_2 \max_{-\tau_{max}t^0} \|C^* x_0(t)\|) e^{-\varepsilon t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (42)$$

Примеры. Проиллюстрируем эффективность подхода, основанного на применении частотных неравенств, несколькими примерами.

Пример 1. Рассмотрим линейную систему с нелинейным дискретным управлением (см. [11]):

$$\dot{x}(t) = u(t_k - \tau), k \in \mathbb{Z}, \quad (43)$$

$$u(t) = -\frac{\xi x(t)}{\sqrt{1 + x^2(t)}}, \quad (44)$$

где $\tau \in (0, \tau_*]$ постоянное запаздывание, $\xi > 0$. Необходимо оценить $T + \tau_*$. В данном случае мы можем применить базовую теорему 1. Обозначим $\sigma(t) = -\xi x(t)$, тогда для нелинейности $u(t)$ выполняется $\mu_1 = 0 \leq u(t) / \sigma(t) \leq 1 = \mu_2$, откуда следует, что $1 - 4\alpha\mu_1\mu_2 > 0$ всегда верно при любых положительных α . Функция $\pi(\omega)$ из условий теоремы 1 принимает вид $\pi(\omega) = -h^2 \xi^2 / (4\alpha) - \alpha + 1$, где $h = T + \tau_*$. Исходя из того, что $\pi(\omega)$ должна быть положительной, получим следующие условия для h :

$$h^2 < \frac{(1-\alpha)4\alpha}{\xi^2}. \quad (45)$$

Правая часть неравенства (45) достигает максимума при $\alpha = 0.5$, следовательно, $h < 1/\xi$. В [11] была получена более строгая оценка $h < 1/(2\sqrt{3}\xi)$.

Одним из преимуществ частотного подхода является то, что он позволяет получить оценки на шаг дискретизации для систем с негладкими или разрывными нелинейностями. Рассмотрим систему (43), (44), но с кусочно-линейным разрывным управлением:

$$u(x) = \begin{cases} -kx, & |x| > 1, \\ -x, & |x| \leq 1. \end{cases}, \quad k > 0. \quad (49)$$

Теперь нелинейность $u(x)$ лежит в секторе с параметрами $\mu_1 = -k$, $\mu_2 = -1$, $\sigma = x$. Мы можем применить частотный подход, рассматривая решения системы (49) как решения по Филлипову (см. [1]). Частотное неравенство (14) примет вид $T^2 < 4\alpha(1-\alpha(k+1)^2)/(1-4\alpha k)$, где $\alpha < 1/(k+1)^2$.

Если параметр $k < 1$, то мы получим максимальную оценку $T < 1$ при $\alpha = 1/(2(k+1))$. При $k = 1$ максимальная оценка - $T < 1$ при α выбранном сколь угодно близким $1/(2(k+1))$. Если $k > 1$ - $T < 1/k$ при $\alpha = 1/(2k(k+1))$.

Пример 2. Синхронизация двух мобильных роботов. Считая, что роботы движутся при малых скоростях, мы можем ограничиться кинематической моделью тележек, ведущей и ведомой:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= v \cos(\varphi_1(t)) & \dot{x}_2(t) &= v \cos(\varphi_2(t)) \\ \dot{y}_1(t) &= v \sin(\varphi_1(t)) & \dot{y}_2(t) &= v \sin(\varphi_2(t)) \\ \dot{\varphi}_1(t) &= \omega_1(t) & \dot{\varphi}_2(t) &= \omega_2(t_k), k \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (50)$$

где ω_2 - управление, $\omega_1(t)$ - заданная угловая скорость, v - фиксированная линейная скорость. Перейдем к системе относительно ошибок $e = y_1 - y_2$, $\varepsilon = \varphi_1 - \varphi_2$ и построим линейный закон управления ([15]). Тогда (50) примет форму

$$\dot{X} = AX + b \begin{bmatrix} \eta(\sigma_2(t)) \\ \sigma_1(t - \tau(t)) \end{bmatrix}, \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = CX, \quad (51)$$

где $X = \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, $\eta(t) = 2 \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - \varepsilon$, $\tau(t)$ такая, что $t_k = t - \tau(t)$ и

$0 \leq \tau(t) \leq T$, где $T > 0$ - вещественная постоянная, $A = \begin{bmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ Kv\gamma & Kv - \gamma \end{bmatrix}$, $K < 0$, $\gamma > 0$ - вещественные константы. Нелинейность

η лежит в секторе $-2 \leq \eta / \sigma_2 \leq 0$. Оценим шаг дискретизации T используя теорему 4. Рассмотрим условие (40):

$$\begin{bmatrix} u(1-4\alpha_1) - \frac{(KT\gamma v^2)^2}{4} & -\frac{KT^2\gamma v^2(Kv-\gamma)}{4} \\ \frac{-KT^2\gamma v^2(Kv-\gamma)}{4} & \alpha_2 - \frac{T^2(Kv-\gamma)^2}{4} \end{bmatrix} > 0, \quad (52)$$

где $\alpha_1 > 0$, $1-4\alpha_2 > 0$, $u > 0$. Легко видеть, что для (52) необходимо, чтобы $\alpha_2 - T^2(Kv-\gamma)^2/4 > 0$ или $T^2 < 4\alpha_2/(Kv-\gamma)^2$ и также нетрудно заметить, что выполнение последнего неравенства и выбор достаточно большого параметра u влекут выполнение неравенства (52).

Условие (41) равносильно

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} > 0, \quad (53)$$

$$A_1 = \omega^4 \left(u(1-4\alpha) - \frac{T^2}{4} \right) + K^2 \gamma^2 v^4 \alpha_2 \omega^2,$$

$$A_2 = K\gamma v^2 \left((Kv-\gamma)\omega^2 - K\gamma v^2 \omega j \right) \left(\alpha_2 - T^2 \frac{\omega^2}{4} \right),$$

$$A_4 = \left(\alpha_2 - T^2 \frac{(Kv-\gamma)^2}{4} \right) \omega^4 + \left(\alpha_2 (Kv-\gamma)^2 - (Kv^2\gamma)^2 \frac{T^2}{4} - 2\alpha_2 Kv^2\gamma \right) + \alpha_2 (Kv^2\gamma)^2$$

$A_3 = \overline{A_2}$. A_1 стремится к бесконечности с увеличением u , поэтому, если $A_4 > 0$ и параметр u достаточно большой, то неравенство (53) выполняется. Рассмотрим неравенство:

$$\left(\alpha_2 - T^2 \frac{(Kv-\gamma)^2}{4} \right) \omega^4 + \left(\alpha_2 (Kv-\gamma)^2 - (Kv^2\gamma)^2 \frac{T^2}{4} - 2\alpha_2 Kv^2\gamma \right) \omega^2 + (54)$$

$$+\alpha_2(Kv^2\gamma)^2 > 0. \quad (54)$$

Коэффициент при ω^4 в (56) положителен, если $T^2 < 4\alpha_2 / (Kv - \gamma)^2$, $\alpha_2(Kv^2\gamma)^2 > 0$. Поэтому для выполнения (56) достаточно, чтобы $\alpha_2(Kv - \gamma)^2 - (Kv^2\gamma)^2 T^2 / 4 - 2\alpha_2 Kv^2\gamma > 0$ при $T^2 < 4\alpha_2 / (Kv - \gamma)^2$. Это верно при $v < 4$, что совпадает с предположением, что роботы движутся с малой скоростью.

Таким образом, мы получили, что условия теоремы 4 для (51) равносильны

$$T^2 < 4\alpha_2 / (Kv - \gamma)^2. \quad (55)$$

Выбрав α сколь угодно близким к 0.25, получим

$$T^2 < \frac{1}{(Kv - \gamma)^2}. \quad (56)$$

Зависимость T от выбора параметров K и γ представлена на рис. 1.

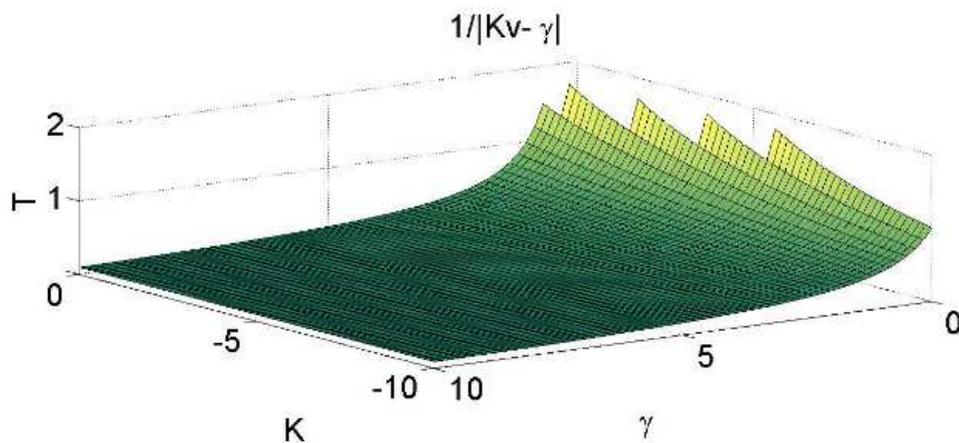


Рис. 1. Зависимость оценки шага дискретизации (52) от параметров K и γ , $v = 0.1$ м/с

При $K = -5$, $\gamma = 0.6$ и $v = 0.1$ получим оценку $T < 0.9091$. С помощью моделирования в системе Matlab с данными параметрами и начальными условиями $e(0) = 0.1$, $\varepsilon(0) = 1$ была получена оценка на шаг дискретизации 1.81.

Заключение. В данной статье был представлен новый подход к оценке шага дискретизации гибридных нелинейных систем. В большинстве существующих методов поиска верхней оценки шага

дискретизации используются линейные матричные неравенства, поэтому для получения результата зачастую необходимы мощные вычислительные техники, а сами оценки будут численными. Результаты, найденные с помощью описанного в данной работе метода, являются аналитическими, они не требуют сложных расчетов и использования вычислительных программ, что было проиллюстрировано примерами.

Метод позволяет получить оценки, зависящие от параметров, как показано в случае синхронизации движения мобильных роботов. Это помогает увидеть, как необходимо выбирать регулируемые величины, чтобы увеличить верхний порог шага дискретизации.

Также преимуществом частотного подхода является то, что в его рамках рассматриваются и нелинейные системы с нелинейным управлением, включая системы с разрывными и негладкими нелинейностями, в то время как большинство имеющихся статей по данной тематике исследуют лишь линейный случай.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V.A. Yakubovich, A.C. Gelig, and G.A. Leonov. *Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities*. World Scientific, Singapore, 2004.
2. E. Fridman, A.Seuret, and J.-P.Richard. Robust-sampled data stabilization of linear systems: An input delay approach. *Automatica*, 40:1141–1446, 2004.
3. E. Fridman. New lyapunov-krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems. *Systems & Control Letters*, 43:309–319, 2001.
4. E. Fridman. A refined input delay approach to sampled-data control. *Automatica*, 46:421–427, 2010.
5. H. Fujioka. Stability analysis of systems with aperiodic sample-and-hold devices. *Automatica*, 45:771–775, 2008.
6. H. Gao and T. Chen. Network-based h-infinity output tracking control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53:655–667, 2008.
7. Ю.В. Михеев, В.А. Соболев, and Э.М. Фридман. Асимптотический анализ цифровых систем управления. *Автоматика и телемеханика*, 49:1175–1180, 1988.
8. X. Jiang, Q.-L.Han, S. Liu, and A. Xue. A new h-infinity stabilization criterion for networked control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53:1025–1032, 2008.
9. K. Liu, V. Suplin, and E. Fridman. Stability of linear systems with general sawtooth delay. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 27:419–436, 2011.

10. Y. Liu and M. Li. An improved delay-dependent stability criterion of networked control systems. *Journal of the Franklin Institute*, 351:1540–1552, 2014.
11. F. Mazenc, M. Malisoff, and T. Dinh. Robustness of nonlinear systems with respect to delay and sampling of the controls. *Automatica*, 49:1925–1931, 2013.
12. A. Megretski and A. Rantzer. System analysis via integral quadratic constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47:819–830, 1997.
13. L. Mirkin. Some remarks on the use of time-varying delay to model sample-and-hold circuits. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52:1109–1112, 2007.
14. Y. Oishi and H. Fujioka. Stability and stabilization of aperiodic sampled-data control systems using robust linear matrix inequalities. *Automatica*, 46:1327–1333, 2010.
15. Е.В. Усик. Синхронизация нелинейных систем лурье на основе пассивации и бэкстеппинга. *Автоматика и телемеханика*, 73:1305–1315, 2012.
16. Э.М. Фридман. Использование моделей с последствием в задаче синтеза оптимальных цифровых систем управления. *Автоматика и телемеханика*, 53:1523–1528, 1992.
17. М. Ю. Чурилова. Аналог кругового критерия абсолютной устойчивости для систем с переменным запаздыванием. *Автоматика и телемеханика*, 2:52–56, 1995.
18. A. Polyakov, D. Efimov, W. Perruquetti, and J.-P. Richard. Output stabilization of time-varying input delay systems using interval observation technique. *Automatica*, 49:3402–3410, 2013.
19. R. Seifullaev and A. Fradkov. Robust nonlinear sampled-data system analysis based on Fridman’s method and s-procedure. *International journal of robust and nonlinear control*, pages 1099–1239, 2015.
20. A. Seuret and M. Peet. Stability analysis of sampled-data systems using sum of squares. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(6):1620–1625, 2007.

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Е.А. Булкина (СПбПУ Петра Великого, Россия, 195251, Санкт-Петербург,
Политехническая, 29)

e-mail: bulkina.e.a@gmail.com

А.Н. Фирсов (СПбПУ Петра Великого, Россия, 195251, Санкт-Петербург,
Политехническая, 29)

e-mail: anfirs@yandex.ru

NUMERICAL-ANALYTICAL METHOD FOR SOLVING THE INVERSE PROBLEM OF STABILITY FOR TECHNICAL SYSTEMS WITH MULTIPLE UNCERTAIN PA- RAMETERS

E.A. Bulkina (Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University,
195251, Санкт-Петербург, Политехническая, 29)

e-mail: bulkina.e.a@gmail.com

A.N. Firsov (Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University,
195251, Санкт-Петербург, Политехническая, 29)

e-mail: anfirs@yandex.ru

Keywords: technical systems with uncertain parameters, inverse problem of stability, numerical algorithm

1. Введение

Важной задачей при анализе свойств любой динамической системы (технической, экономической, биологической и т.п.), а также при проектировании подобных систем, является оценка условий сохранения тех или иных свойств системы при малых изменениях системных параметров. В частности, такая информация важна при оценке степени ремонтпригодности системы при необходимости замены тех или иных конструктивных элементов системы. Ввиду сложности, а иногда и практической невозможности указать необходимые и достаточные допустимые диапазоны изменения соответствующих параметров, большой интерес могут представить хотя бы достаточные оценки. С другой стороны, практика показывает, что стремление к универсальности теоретических результатов, как правило, приводит к большим затруднениям в применении таких результатов для решения конкретных задач. Мы считаем, что учет такого рода соображе-

ний должен лежать в основе построения теоретических конструкций, направленных на решение конкретных прикладных задач. Это, правда, отнюдь не исключает использования формальной логики как основы рассуждений, связанных с применением математических методов и конструкций

Имея это в виду, формализуем постановку задачи. Предположим, что сохранение интересующего нас свойства (свойств) некоторой системы определяется требованием выполнения следующих m условий относительно n параметров $\{\varepsilon_j\}$, $j = 1, 2, \dots, n$, связанных с этой системой:

$$f_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) < 0, i = 1, 2, \dots, m. \quad (1)$$

Предположим далее, что каждая функция $f_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ непрерывна (как будет видно ниже, ее даже можно считать непрерывно дифференцируемой) в соответствующей области $\Omega_i \subset R^n$, причем

$$\vec{0} \in \bigcap_{i=1}^m \Omega_i, \vec{0} \equiv (0, 0, \dots, 0) \in R^n. \quad (2)$$

Предположим, наконец, что для всех f_i в точке $\vec{0}$ имеют место неравенства $f_i(\vec{0}) \leq -\delta$ для некоторого $\delta > 0$.

Отсюда следует, что существует n -мерный шар D_ρ некоторого ненулевого радиуса ρ с центром в $\vec{0}$, для всех точек которого одновременно выполнены неравенства

$$f_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) < -\delta/2, i = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

Но в n -мерный шар всегда можно поместить, в частности, вписать n -мерный куб Q с центром, совпадающим с центром шара, и с ребрами, параллельными координатным осям. Отсюда следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. Пусть $(-\hat{\varepsilon}_i, \hat{\varepsilon}_i)$, $\hat{\varepsilon}_i > 0$ - интервал, все точки ε которого являются решениями неравенства $f_i(\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon) < -\delta/2$. Тогда n -мерный куб

$$Q = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_j \in (-\hat{\varepsilon}_j, \hat{\varepsilon}_j) = \bigcap_{i=1}^m (-\hat{\varepsilon}_i, \hat{\varepsilon}_i); j = 1, 2, \dots, n\}$$

представляет собой одно из решений системы неравенств (3).

Эта лемма позволяет, например, предложить следующий метод (см. п. 2) решения задачи о достаточных условиях сохранения свойства устойчивости линейной динамической системы при возможных (заранее неизвестных, в частности, случайных) изменениях ее параметров. Необходимость такого рода оценки может быть весьма злободневной, например, в ситуации замены тех или иных конструктивных элементов технической системы при ее ремонте: номиналы, как заменяемых, так и заменяющих элементов, как правило, точно никогда не известны.

2. Сохранение устойчивости линейной динамической системы при неопределенных возмущениях ее параметров

Итак, пусть динамическая система задана следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dZ(t)}{dt} = AZ(t), \quad (4)$$

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n, Z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))^T.$$

Здесь A – известная постоянная матрица, причем все собственные значения $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, n$ матрицы A различны и их вещественные части отрицательны. В этом случае, как известно, система (4) будет устойчивой. Если, однако, заменить матрицу A матрицей $\tilde{A} = A + E, E = (\varepsilon_{ij})_{i,j=1}^n$, где ε_{ij} – неизвестные «возмущения» элементов исходной матрицы, то вопрос об устойчивости «возмущенной» системы $\frac{dZ(t)}{dt} = \tilde{A}Z(t)$ становится актуальным, и может быть решен на основании леммы 1. При этом, однако, надо предварительно доказать, что собственные значения $\lambda_k(E) \equiv \lambda_k(\varepsilon_{ij}), k = 1, 2, \dots, n$ матрицы $\tilde{A} = A + E$ являются достаточно гладкими функциями параметров $\varepsilon_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$ в окрестности нуля. Для случая одного возмущающего параметра такая задача была решена во второй половине прошлого века, в первую очередь, в работах Т. Като (см. его монографию [1]). Для случая нескольких параметров возмущения задача оказалась намного сложнее, и более или менее содержательные результаты были получены, в основном, в работах Ji-guang Sun [2, 3, 4]. Эти, последние, результаты, мы и используем в дальнейшем.

Лемма 2. [2, 3, 4]. Пусть $\vec{p} \in C^N, A(\vec{p}) \in C^{n \times n}$ действительная аналитическая функция от \vec{p} в некоторой окрестности $U(\vec{0})$, причем матрица $A(\vec{0})$ – симметричная. Предположим, далее, что λ_i – простое собственное значение матрицы $A(\vec{0})$, и \vec{x}_i – соответствующий собственный вектор, удовлетворяющий равенствам $A(\vec{0})\vec{x}_i = \lambda_i\vec{x}_i, \vec{x}_i^T A(\vec{0}) = \lambda_i\vec{x}_i^T$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) Существует простое собственное значение $\lambda_i(\vec{p})$ матрицы $A(\vec{p})$, которое будет аналитической функцией от \vec{p} в некоторой окрестности $U(\vec{0})$, и $\lambda_i(\vec{0}) = \lambda_i$;

2) Собственный вектор $\vec{x}_i(\vec{p})$ матрицы $A(\vec{p})$, соответствующий собственному значению $\lambda_i(\vec{p})$, является аналитической функцией от \vec{p} в $U(\vec{0})$, и $\vec{x}_i(\vec{0}) = \vec{x}_i$.

В доказательстве данной леммы используется тот факт, что существует матрица $X_{2i} \in C^{n \times (n-1)}$ такая, что матрица $X = (\vec{x}_i, X_{2i})$ не является сингулярной, и удовлетворяет следующим равенствам

$$X^T X = I_n, \quad X^T A(\vec{0}) X = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0_{1 \times (n-1)} \\ 0_{(n-1) \times 1} & A_{2i} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Здесь I_n - единичная матрица размера $n \times n$, а A_{2i} - матрица размера $(n-1) \times (n-1)$.

Напомним, что в настоящей работе мы считаем матрицу $A(\vec{0})$ симметричной. Ниже предлагается вариант построения соответствующей матрицы X .

Нетрудно доказать, что в качестве X можно взять матрицу $X = (\vec{x}_i, X_{2i})$, где \vec{x}_i - *единичный* собственный вектор симметричной матрицы $A \in C^{n \times n}$, соответствующий собственному значению λ_i , а столбцы матрицы $X_{2i} \in C^{n \times (n-1)}$ представляют собой векторы, ортогональные вектору \vec{x}_i , и *не являющиеся собственными* для матрицы A .

Действительно, рассмотрим подробнее выражение $X^T A$:

$$X^T A = (\vec{x}_i \quad \vec{y}_1 \quad \dots \quad \vec{y}_{n-1})^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $a_{ij} \in R$, \vec{x}_i - собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_i , а векторы \vec{y}_j , $j = 1, \dots, (n-1)$ - это векторы, ортогональные вектору \vec{x}_i . Так как матрица A симметрична, и \vec{x}_i - ее собственный вектор, то выполняется условие $\vec{x}_i^T A = \lambda_i \vec{x}_i^T$. Следовательно, нетрудно видеть, что выражение (6) будет иметь следующий вид:

$$X^T A = \begin{pmatrix} \lambda_i \vec{x}_i^T \\ A^* \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $\lambda_i \vec{x}_i^T$ - вектор-строка, а $A^* \in C^{(n-1) \times n}$. Тогда

$$\begin{aligned}
X^T AX &= \begin{pmatrix} \lambda_i \bar{x}_i^T \\ A^* \end{pmatrix} (\bar{x}_i \quad \bar{y}_1 \quad \dots \quad \bar{y}_{n-1}) = \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_i \cdot (\bar{x}_i, \bar{x}_i), \lambda_i \cdot (\bar{x}_i, \bar{y}_1), \dots, \lambda_i \cdot (\bar{x}_i, \bar{y}_{n-1}) \\ A_2^* \end{pmatrix}, \quad (8)
\end{aligned}$$

Здесь (\bar{x}, \bar{y}) - скалярное произведение. Так как $\|\bar{x}_i\|=1$, $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)=0$, в силу ортогональности соответствующих векторов, а матрица $X^T AX$ симметрична в силу симметричности матрица A , то выражение (8) примет следующий вид:

$$X^T AX = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0_{1 \times (n-1)} \\ 0_{(n-1) \times 1} & A_{2i} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

что и требовалось.

Имеет место следующий основополагающий результат:

Теорема (Ji-g. Sun, [3, 4, 5]). Пусть. Предположим, что λ_i простое собственное значение матрицы $A(\vec{0})$, и x_i соответствующий ему собственный вектор, удовлетворяющий условию $\|x_i\|=1$. Пусть $\vec{\varepsilon} \equiv (\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{1n}, \dots, \varepsilon_{n1}, \dots, \varepsilon_{nn})^T$, и $A(\vec{\varepsilon}) = A(\vec{0}) + E$, где матрица «возмущений» $E = (\varepsilon_{ij})_{i,j=1}^n$. Тогда матрица $A(\vec{\varepsilon})$ удовлетворяет условиям Леммы 2, и справедливо представление

$$\lambda_i(\vec{\varepsilon}) = \lambda_i + \bar{x}_i^T E \bar{x}_i + \bar{x}_i^T E X_{2i} (\lambda_i I - A_{2i})^{-1} X_{2i}^T E \bar{x}_i + O(\|E\|^3), \quad (10)$$

где матрица X_{2i} определена выше.

Этот результат позволяет применить в рассматриваемой ситуации рассуждения п. 1 настоящей работы, а именно, принять в качестве функции $f_i(\vec{\varepsilon})$ первые три слагаемых правой части формулы (10).

Продемонстрируем применение описанной выше методики на следующем примере.

3. Численный пример

Пусть матрица $A(\vec{0})$ имеет вид

$$A(\vec{0}) = \begin{pmatrix} -1,27 & 0,25 & 1 & 0 \\ 0,25 & -3,16 & 0 & 1,1 \\ 1 & 0 & -2,6 & 1 \\ 0 & 1,1 & 1 & -6,2 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

а матрица возмущений E

$$E = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 & \varepsilon_{14} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{31} & 0 & \varepsilon_{33} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор собственных значений для матрицы (11) будет равен

$$\vec{\lambda} = (-6,7049 \quad -3,0383 \quad -2,7402 \quad -0,6466)^T.$$

Все собственные значения простые. Действительная часть собственных значений лежит в левой части оси координат и, следовательно, невозмущенная система (4) устойчива.

Применим предложенный выше метод оценки величины возмущений матрицы A , при которых сохраняется свойство устойчивости возмущенной матрицы $A(\vec{\varepsilon}) = A + E$. Продемонстрируем соответствующий алгоритм на примере первого собственного значения $\lambda_1 = -6,7049$.

Соответствующий ему собственный вектор равен

$$\vec{x}_1 = (0,0574 \quad -0,2909 \quad -0,2392 \quad 0,9246)^T.$$

Матрица $X_1 = (\vec{x}_1, X_{21})$:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0,0574 & 1 & 0 & 0 \\ -0,2909 & 0 & 1 & 0 \\ -0,2392 & 0 & 0 & 1 \\ 0,9246 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Применяя к матрице (12) ортогонализацию Грамма-Шмидта, получим матрицу следующего вида

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0,057 & -0,998 & 0 & 0 \\ -0,291 & -0,017 & 0,957 & 0 \\ -0,239 & -0,014 & -0,073 & 0,968 \\ 0,925 & 0,053 & 0,282 & 0,25 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем матрицу $X_1^T A(0) X_1$:

$$X^T A(0) X = \begin{pmatrix} -6,7049 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,252 & -0,1664 & -0,9697 \\ 0 & -0,1664 & -2,8385 & 0,271 \\ 0 & -0,9697 & 0,271 & -2,3346 \end{pmatrix},$$

где блок размера 3×3 – это матрица A_{21} .

Используем теперь формулу (10) для составления неравенств вида (3). Составим выражение (10) для $\lambda_1(\vec{\varepsilon})$:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\vec{\varepsilon}) = & 0.00329\varepsilon_{11} + 0.0531\varepsilon_{14} - 0.0167\varepsilon_{21} + 0.0846\varepsilon_{22} - \\ & -0.0137\varepsilon_{31} - 0.269\varepsilon_{42} + 0.0572\varepsilon_{33} - 0.01\varepsilon_{11}\varepsilon_{14} + \\ & +0.0137\varepsilon_{11}\varepsilon_{21} - 0.00006\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 0.0509\varepsilon_{14}\varepsilon_{21} + \\ & +0.0419\varepsilon_{14}\varepsilon_{31} - 0.0076\varepsilon_{14}\varepsilon_{33} - 0.0006\varepsilon_{21}\varepsilon_{31} - \\ & -0.0002\varepsilon_{11}\varepsilon_{42} - 0.0004\varepsilon_{22}\varepsilon_{31} + 0.0022\varepsilon_{21}\varepsilon_{33} + \\ & +0.0045\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + 0.0021\varepsilon_{14}\varepsilon_{42} - 0.0107\varepsilon_{21}\varepsilon_{42} + \\ & +0.0583\varepsilon_{22}\varepsilon_{42} + 0.0052\varepsilon_{31}\varepsilon_{33} + 0.0032\varepsilon_{31}\varepsilon_{42} - \\ & -0.0107\varepsilon_{33}\varepsilon_{42} - 0.0006\varepsilon_{11}^2 + 0.0011\varepsilon_{14}^2 - 0.00003\varepsilon_{21}^2 - \\ & -0.0201\varepsilon_{22}^2 - 0.00051\varepsilon_{31}^2 - 0.0129\varepsilon_{33}^2 + 0.0178\varepsilon_{42}^2 \end{aligned}$$

Теперь, используя Лемму 1, заменим все ε_{ij} на ε .

$$\lambda_1(\varepsilon) = 0,1226\varepsilon^2 - 0,1012\varepsilon - 6,7049.$$

Прделаем то же самое для остальных собственных значений, получим следующие равенства:

$$\lambda_2(\varepsilon) = -0,2333\varepsilon^2 + 0,9831\varepsilon - 3,0383,$$

$$\lambda_3(\varepsilon) = -0,1254\varepsilon^2 + 0,4785\varepsilon - 2,7401,$$

$$\lambda_4(\varepsilon) = -0,0146\varepsilon^2 + 1,6395\varepsilon - 2,7401.$$

Решая систему неравенств $\{\lambda_i(\varepsilon) < 0\}$, $i = 1, 2, \dots, 4$, получаем достаточное условие сохранения устойчивости возмущенной системы в виде:

$$\varepsilon_{jk} \in (-6.995, 0.395), \quad j, k = 1, 2, 3, 4.$$

Однако, учитывая, что соотношение (10) предполагает относительную малость матрицы возмущений E : $\|E\|^3 \ll \|E\|^2$, интервал возможных значений параметров ε_{jk} следует указать, например, такой:

$$\varepsilon_{jk} \in (-0.05, 0.05), \quad j, k = 1, 2, 3, 4.$$

4. Выводы

В работе предложен и обоснован метод оценки допустимых интервалов малых возмущений нескольких параметров динамической системы, обеспечивающий сохранение устойчивости системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kato T. A Short Introduction to Perturbation Theory for Linear Operators, N.-Y.: Springer-Verlag, 1982
- [2] Sun Ji-guang. Eigenvalues and eigenvectors of a matrix dependent on several parameters. J. Comput. Math., 3, 1985, P. 351-364.
- [3] Sun Ji-guang. Sensitivity analysis of multiple eigenvalues (I). J. Comput. Math., 6, 1988, P. 28-38.
- [4] Sun Ji-guang. Sensitivity analysis of multiple eigenvalues (II). J. Comput. Math., 6, 1988. P. 131-141.
- [5] Horn R., Johnson C.R. Matrix analysis. - 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 2013.
- [6] Bulkina E., Firsov A. Analytical analysis of the inverse stability problem for some classes of non-linear dynamical systems with a small uncertain parameter. - III Int. Sci. and Tech. Conf. "Technics. Technologies. Education. Safety" 28-29 May 2015, VelikoTarnovo, Bulgaria.- Proceedings, Vol. 2: "Научни известия" of Sci.Tech.Union of Mech. Eng., Issue 5 (168), May 2015, pp. 44-46.

УДК 681.5

**МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ НЕЙРОНЕЧЕТКОГО УПРАВЛЕНИЯ
ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ В УСЛОВИЯХ
НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ЗАДАЧАМ
ДОБЫЧИ И ПОДГОТОВКИ НЕФТИ**

Г.Л. Дегтярев, Ф.Ф. Алексеев, П.С. Широков, А.Ф. Алексеев
(КНИТУ-КАИ, Россия, 420111, Казань, К.Маркса, 10)

E-mail: falekseev@mail.ru

**METHODS AND ALGORITHMS OF NEURO FUZZY CONTROL
OF DYNAMIC SYSTEMS IN CONDITIONS OF UNCERTAINTY
WITH AN APPLICATION TO THE PROBLEMS
OF OIL PRODUCTION AND PREPARATION**

G.L. Degtyarev, F.F. Alekseev, P.S. Shirokov, A.F. Alekseev
(KNRTU-KAI, Russia, 420111, Kazan, K.Marx str, 10)

Keywords: Lyapunov vector function, neuro fuzzy control, uncertainty, oil production

I. Метод ВФЛ широко применяется для анализа и синтеза динамических систем, является одним из точных математических методов, позволяющих исследовать широкий класс непрерывных, дискретных и гибридных систем управления. Рассмотрим комбинацию методов ФЛ и нечеткой математики для типовых задач теории управления. Модель системы рассмотрим в виде

$$\dot{x} = \bar{A}x + Bu, u = Cx,$$

\bar{A} , B , C – постоянные матрицы.

Представим систему в виде $\dot{x} = Ax$, $A = \bar{A} + BC$, для таких систем используем вектор-функцию Ляпунова [1].

$$V = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}^T$$

$$V_i(x, h, \dot{h}) = x^T \left[P_i^1(h) + P_i^2(\dot{h}) \right] x,$$

$$P_i^2 = \sum_{j=1}^r \dot{h}_j P_j^2.$$

$$h_j(z(t)) = \frac{\omega_j(z(t))}{\sum_j \omega_j(z(t))}, \quad \omega_j(z(t)) = \prod_{k=1}^p \mu_k^j(z_k(t)).$$

Вычислим производную компонент функции Ляпунова в силу системы:

$$\dot{V}(x, h, \dot{h}) = x^T \left[\dot{P}^1(h) + \dot{P}^2(\dot{h}) + A^T(h)P^1(h) + A^T(h)P^2(\dot{h}) + \right. \\ \left. + P^1(h)A(h) + P^2(\dot{h})A(h) \right] x = x^T \Theta(h, \dot{h}, \ddot{h}) x$$

$$\Theta_i = \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^r \phi_k^1 [P_k^1 + A_i^T P_k^2 + P_k^2 A_i + X]$$

$$\Theta(h, \dot{h}, \ddot{h}) = \sum_{k=1}^r \ddot{h}_k P_k^2 + A^T(h)P(h) + P(h)A(h) + \sum_{k=1}^r \dot{h}_k [P_k + A^T(h)P_k^2 + P_k^2 A(h)] =$$

$$= \sum_{k=1}^r \ddot{h}_k (P_k^2 + Y) + A^T(h)P(h) + P(h)A(h) + \sum_{k=1}^r \dot{h}_k [P_k + A^T(h)P_k^2 + P_k^2 A(h) + X]$$

$$\sum_{k=1}^r \phi_k^2 (P_k^2 + Y) + A^T(h)P(h) + P(h)A(h) + \sum_{k=1}^r \dot{h}_k [P_k + A^T(h)P_k^2 + P_k^2 A(h) + X] = \bar{\Theta}(h, \dot{h}, \ddot{h})$$

Аналогичные понятия вводятся для конечно-разностных и гибридных систем (см. список публикаций).

Применим метод ВФЛ для синтеза управления добычей нефти с известным на определенном временном интервале режимом закачки и добычи.

II. Рассматривается система

$$x_{s+1} = Ax_s + Bu_s,$$

$A - n \times n - B - n \times m$ – постоянные матрицы. ВФЛ также выбирается в виде

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_{m_c})^T$$

с компонентами $v_i = x_s^T P_j x_s$, $j = 1, \dots, m_c$; $A^T P_i A - P_i = G_i$.

Выбирается линейная разностная система

$$\Delta v < A^c v, \Delta v_s = (\Delta v_{s1}, \Delta v_{s2}, \dots, \Delta v_{sm_c})^T.$$

Или $x_s^T G_i x_s + 2x_s^T A^T B u_s + u_s^T B^T P_i B u_s \leq a_{i1}^c v_1 + a_{i2}^c v_2 + \dots + a_{im_c}^c v_{m_c}$

или $u_s^T B^T P_i B u_s + 2x_s^T A^T B u_s \leq \sum_{j=1}^{m_c} a_{ij}^c x_s^T P_j x_s - x_s^T G_i x_s$, $i = 1, \dots, m_c$.

Введем обозначения

$$\bar{A} = B^T P_i B (> 0); \bar{B} = 2x_s^T A^T B; \bar{C}_i = \sum_{j=1}^{m_c} a_{ij}^c x_s^T P_j x_s - x_s^T G_i x_s.$$

Разностное уравнение принимает вид

$$u_s^T D u_s + C u_s - R \leq 0$$

Обозначим $U_i = u_s^T \bar{A}_i u_s + \bar{B}_i u_s + \bar{C}_i$. Вычислим первый дифференциал

$$dU = du^T \bar{A}_i + u^T \bar{A}_i du_s + du_s^T C^T = 2du_s^T D u_s + du_s^T \bar{B}^T.$$

Из уравнений

$$2\bar{A}_i u_s + \bar{B}_i^T = 0, i = 1, \dots, m_c \text{ или}$$

$$2\bar{A}_{1-i} u_s + \bar{B}_1^T = 0;$$

$$2\bar{A}_2 u_s + \bar{B}_2^T = 0;$$

...

$$2\bar{A}_{m_c} u_s + \bar{B}_{m_c}^T = 0;$$

определяется регулятор

$$u_s = -\frac{1}{2} \bar{A}_i^{-1} \bar{B}_i^T$$

при выполнении достаточного условия экстремума $d^2U_i > 0$ или $d^2U_i = 2du_s^T \bar{A}_i du_s > 0$ или $\bar{A}_i > 0$, $i = 1, \dots, m_c$.

Аналогично запишется теорема

$$(Q_i = -\frac{1}{2} \bar{A}_i^{-1}, \bar{A}_i = B^T P_i B (> 0); \bar{B} = 2x_s^T A^T B;$$

$$\bar{C}_i = \sum_{j=1}^{m_c} a_{ij}^c x_s P_j x_s - x^T G_i x_s).$$

III. Основные проблемы, по которым проводятся исследования в настоящей работе, относятся к разделу фундаментальных задач математики и информатики, развиваемых в рамках регионального конкурса "КОНКУРС ПОВОЛЖЬЕ". В настоящее время месторождения нефти РФ являются достаточно выработанными. В этих условиях требуется постоянный контроль процесса добычи нефти, прогнозирование его и управление им. Для решения этих задач начиная с шестидесятых годов прошлого века широко используются гидродинамические математические модели. Однако, несмотря на наличие самых современных вычислительных машин и программных комплексов, повсеместно отличается низкое качество гидродинамического моделирования.

Основными причинами являются:

- неполнота информации о геологическом строении и физических свойствах пластов в межскважинном пространстве;
- техногенные изменения, происходящие в процессе разработки месторождения.

В самом деле, гидродинамическая математическая модель представляет собой систему сложных дифференциальных уравнений в частных производных, параметры и граничные условия для которых зависят от множества неопределенных факторов. Задача получения на основе такой модели достоверной оценки состояния месторождения, прогноза добычи и особенно ее оптимизации, представляется достаточно трудоемкой и неэффективной в условиях большого числа неопределенностей.

Поэтому для повышения эффективности работы системы управления добычей предлагается использовать возможности нейронечеткого моделирования. Нейросетевая модель строится на базе вход-выходных данных системы нагнетательных и добывающих скважин. Эта модель, оптимизируемая по реальным данным, позволяет делать прогнозы о будущем состоянии нефтедобывающих скважин, решать задачи:

- поиска условий максимизации добычи при заданных объемах ресурсов закачки;

- обеспечения заданного уровня добычи нефти при минимизации ресурсов закачки.

На основе нейросетевого моделирования решается проблема, анализа и синтеза управления нефтедобывающими установками в рамках отдельного месторождения в условиях неопределенности. При этом каждая задача решается поэтапно.

На первом этапе производится регуляризация данных, так как среди показаний приборов учета как закачки технической жидкости, так и добычи нефти встречаются показания, которые превышают суточную производительность насосных станций (ошибка измерений), встречаются отрицательные значения и т.п. В процессе регуляризации проводится дополнение имеющейся информации. В частности используется среднее арифметическое, которое рассчитывается по предыстории процесса разной продолжительности, проводится кодирование информации переводом значений в код Грея.

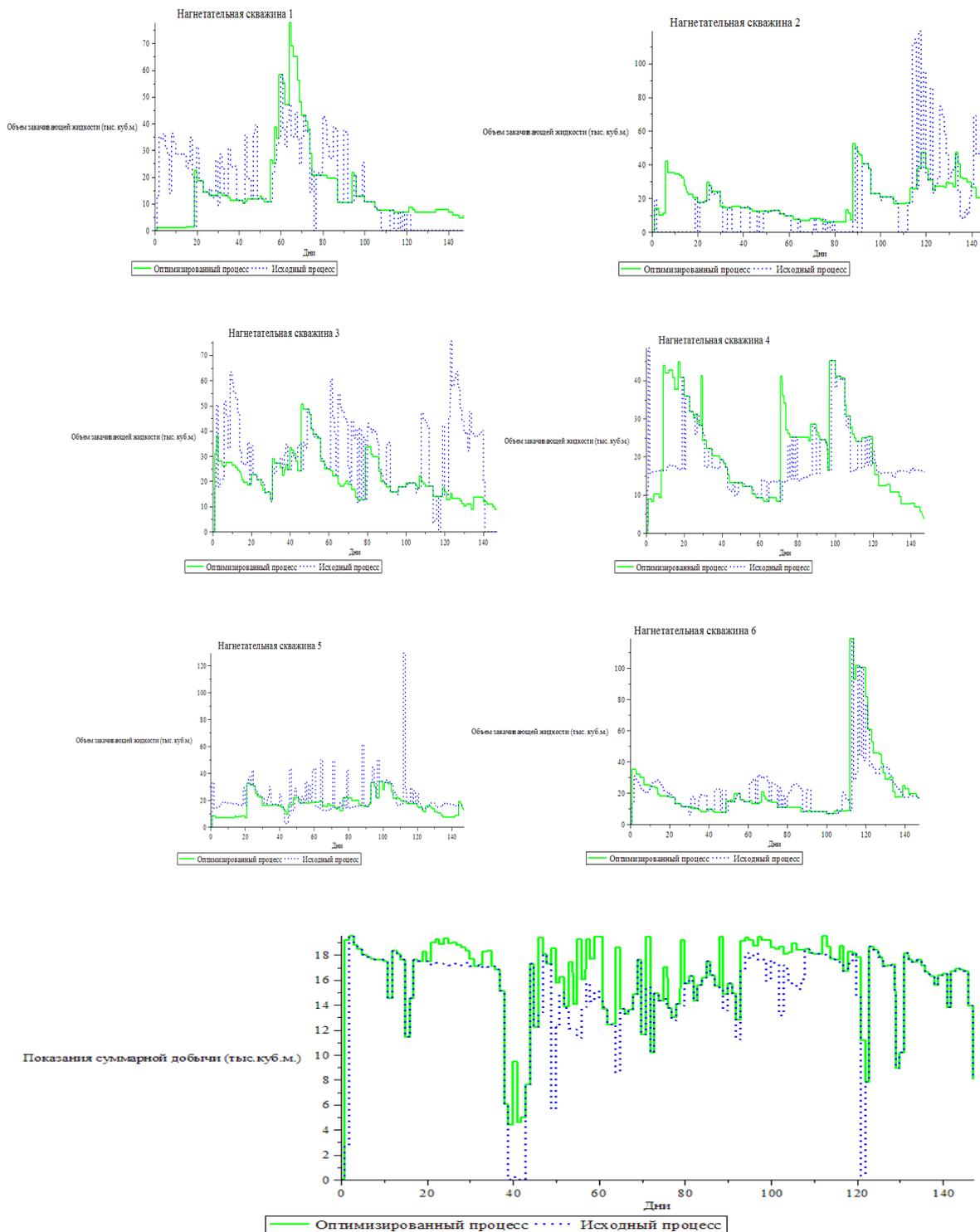
На втором этапе определяется начальная структура нейросети, которая далее оптимизируется по структуре и параметрам.

Выбор оптимальной структуры нейросети и ее обучение (оптимизация) осуществляется с помощью генетических алгоритмов по критерию минимизации целевой функции ошибки нейросети, которая находится по методу наименьших квадратов.

На третьем этапе разрабатываются алгоритмы прогнозирования и управления.

В качестве примера рассматривается задача построения оптимальной нейросети по 6 входным скважинам и 1 выходной. Входы варьируются в пределах 10% при постоянной суммарной закачке. Рассматривается нейросеть с одним скрытым слоем, в котором количество нейронов определяется автоматически и варьируется от 8 до 14. В качестве активационной функции используется сигмоидальная функция. Имеющиеся данные используются для корректировки весов и пороговых значений сети.

На последнем рисунке показано сравнение исходной сети и оптимизированной.



Полученные результаты показали, что созданы эффективные алгоритмы настройки нейросети по известным вход-выходным данным, которые позволяют решать задачи управления и оптимизации процесса добычи нефти.

Публикация осуществлена в рамках научных проектов при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан №15-41-02465, при финансовой поддержке РФФИ №16-31-00469, №16-31-00472.

Список использованной литературы

1. Mozelli L.A., Palhares R.M. Stability analysis of Takagi-Sugeno fuzzy systems via LMI: methodologies based on a new fuzzy Lyapunov function. *Revista Controle & Automacao*/Vol.22 no.6/Novembro e Dezembro 2011, pp.664-676.
2. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. Под ред. А.А.Воронова, В.М.Матросова. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат.лит., 1987. 312 с.
3. Tomescu M.-L. Preitl S., Precup R.-E., Tar J.K.. Stability analysis Method for fuzzy Control Systems Dedicated Controlling Nonlinear Processes. *Acta Polytechnica Hungarica*. V. 4. No. 3. 2007. Pp. 127-141.
4. Takagi T., Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control. *IEEE Trans. Systems Man Cybernet.* 15 (1) 1985. Pp. 116-132.
5. Cao Y.-Y., Frank P.M. Stability and synthesis of nonlinear time-dlay systems via linear Takagi-Sugeno fuzzy models. *Fuzzy Sets and Systems*. 124 (2001) 213-229. Pp. 213-229.
6. Алексеев Ф.Ф., Бильченко Г.Г., Бородин В.М.. Теоремы об устойчивости управляемых систем. В кн.: Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. Новосибирск: Наука, Сиб.отделение, 1991. С. 11-20
7. Алексеев Ф.Ф., Алексеев А.Ф., П.С.Широков П.С. Синтез нелинейных нечетких систем управления на основе метода векторных функций Ляпунова. Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием. Москва, РУДН. 23-27 апреля 2012 г. Москва. Российский университет дружбы народов. 2012. С. 160-162.

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ
И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ
ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ**

А.В. Демидова (РУДН, 117198, Москва, Миклухо-Маклая, 6)
E-mail: ademidova@sci.pfu.edu.ru

О.В. Дружинина (ФИЦ ИУ РАН, 199333, Москва, Вавилова, 44;
ИПУ РАН, 117997, ул. Профсоюзная, д. 65)
E-mail: ovdruzh@mail.ru

О.Н. Масина (ЕГУ им. И.А. Бунина, 399770, Елец, Коммунаров, 28)
E-mail: olga121@inbox.ru

**STABILITY ANALYSIS AND NUMERICAL SIMULATION
OF STOCHASTIC SYSTEMS OF POPULATION DYNAMICS**

A.V. Demidova (RUDN University, Miklukho-Maklaya str. 6,
Moscow, 117198)

O.V. Druzhinina (FRC CSC RAS, Vavilov str. 44, building 2, Moscow,
119333; ICS RAS, Profsoyuznaya str. 65, Moscow, 117997)

O.N. Masina (Bunin Yelets State University, Communards str. 28,
Yelets, 399770)

Keywords: stochastic model, differential equations, single-step processes, stability, population dynamics, principle of a reduction, mutualism, simulation.

Введение. Проблемы устойчивости математических моделей популяционной динамики рассматривались в [1–5] и других работах. Анализ устойчивости позволяет оценить способность биосистемы противостоять возмущающим факторам внешней среды и сохранять в неизменном виде свои качественные характеристики достаточно долгое время. Для исследования устойчивости динамических популяционных моделей используются как первый, так и второй методы Ляпунова и их обобщения [1, 5].

Большинство моделей популяционной динамики, встречающихся в литературе, являются детерминированными. Как известно [6], при детерминистическом описании модели не учитываются вероятностные факторы, влияющие на поведение модели. Самым распространенным методом введения стохастичности в модель является аддитивное добавление стохастического члена, который описывает лишь внешнее воздействие и не связан со структурой самой модели. В [7] разработан метод построения самосогласованных стохастических моделей. Этот метод учитывает структуру моделей и базируется на идее комбинаторной методологии, описанной в работах [8].

Развитие методов исследования устойчивости недетерминированных систем представлено в работах [5, 9–11]. В этих работах описан системный подход, позволяющий с единой точки зрения рассматривать свойства устойчивости моделей, описываемых дифференциальными уравнениями различных типов. Указанный подход базируется на переходе от детерминистического описания модели к стохастическому и на принципе редукции задачи об устойчивости решений дифференциального включения к задаче об устойчивости других типов уравнений.

За несколько десятилетий динамическая теория популяций сформировалась в самостоятельное научное направление со своими методами исследования. Рассматриваемые в этом направлении проблемы обладают рядом существенных общих свойств. Для популяций характерны такие процессы, как рождение и гибель особей, хищничество, паразитизм, миграция, конкуренция. Математические модели с учетом конкуренции и мутуализма рассматривались в [12–14] и других работах.

Двумерные модели с учетом симбиоза исследованы в [4]. Модель динамики популяций жертвы и двух хищников, при наличии взаимодействий «жертва–мутуалист» и «хищник–мутуалист», рассмотрена в [13]. В [12] исследованы взаимодействия вида «хищник–жертва–мутуалист». Устойчивость четырехмерной модели взаимодействия двух конкурирующих особей с двумя симбионтами в детерминированном и стохастическом случаях исследована в [14].

В настоящей работе рассмотрены две модели динамики популяций, учитывающие конкуренцию и мутуализм популяций. Детерминированное описание каждой из моделей дается системой трех обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Проведено качественное исследование решений указанных моделей. На основе принципа редукции выполнен анализ устойчивости. Осуществлен синтез стохастических моделей «конкурент–конкурент–мутуалист» и «хищник–жертва–мутуалист». Описана структура стохастических моделей, записаны уравнения Фоккера–Планка, сформулировано правило перехода к стохастическому дифференциальному уравнению в форме Ланжевена. Проведен сравнительный анализ детерминистической и стохастической моделей.

Качественный анализ детерминированных моделей. Рассматривается динамическая популяционная модель «конкурент–конкурент–мутуалист», описываемая системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= ax_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1} \right) - \frac{a\beta x_1 x_2}{1 + mx_3}, \\
\dot{x}_2 &= \delta x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2} \right) - \eta x_1 x_2, \\
\dot{x}_3 &= \gamma x_3 \left(1 - \frac{x_3}{L_0 + lx_1} \right),
\end{aligned} \tag{1}$$

где использованы следующие обозначения: x_1 – плотность популяции первого конкурента, x_2 – плотность популяции второго конкурента, x_3 – плотность популяции мутуалиста, $\gamma, L_0, l, a, K_1, K_2, \beta, m, \delta, \eta$ – положительные постоянные. Модель (1) является модификацией модели, рассмотренной в [12], и характеризуется логистическим типом роста популяций конкурентов. В отсутствие мутуализма модель (1) представляет собой классическую модель Лотки–Вольтерра конкурентного взаимодействия.

Кроме того, рассматривается динамическая популяционная модель «хищник–жертва–мутуалист», описываемая системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \alpha x \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{vxy}{1 + \mu u}, \\
\dot{y} &= y \left(-s + \frac{cvx}{1 + \mu u} \right), \\
\dot{u} &= \tau u \left(1 - \frac{u}{R_0 + rx} \right),
\end{aligned} \tag{2}$$

где x – плотность популяции жертвы, y – плотность популяции хищника, u – плотность популяции мутуалиста, $\alpha, v, \mu, \tau, K, s, c, R_0, r$ – положительные постоянные. Модель (2) является модификацией модели, рассмотренной в [12], и характеризуется как логистическим типом роста популяции жертвы в отсутствие хищника, так и логистическим типом роста популяции мутуалиста. В отсутствие мутуализма модель (2) представляет собой классическую модель Лотки–Вольтерра.

Для модели (1) в результате решения соответствующих алгебраических уравнений найдены следующие стационарные состояния: $F_1(0, 0, L_0)$, $F_2(0, K_2, 0)$, $F_3(0, K_2, L_0)$, $F_4(K_1, 0, 0)$, $F_5(K_1, 0, K_1l + L_0)$, $F_6(K_1\delta(K_2\beta - 1)/(K_1K_2\beta\eta - \delta), K_2(K_1\eta - \delta)/(K_1K_2\beta\eta - \delta), 0)$, $F_7(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$. Координаты x_1^* ,

x_2^* , x_3^* найдены с помощью вычислительного пакета. Установлено, что все состояния равновесия $F_0 - F_7$ существуют при условии $(\eta K_1 - \delta)(\beta K_2 - 1) > 0$. Проведена оценка модельных параметров, построен ряд локальных фазовых траекторий системы (1).

Для модели (2) найдены стационарные состояния: $E_0(0, 0, 0)$, $E_1(0, 0, R_0)$, $E_2(K, 0, 0)$, $E_3(K, 0, Kr + R_0)$, $E_4\left(\frac{s}{c\nu}, \frac{\alpha}{\nu}\left(1 - \frac{s}{Kc\nu}\right), 0\right)$, $F_5(x, y, u)$

где

$$x = \frac{s(R_0\mu + 1)}{c\nu - rs\mu}, \quad y = \frac{c\alpha(R_0\mu + 1)(Kc\nu - Krs\mu - R_0s\mu - s)}{K(c\nu - rs\mu)^2}, \quad u = \frac{R_0c\nu + rs}{c\nu - rs\mu}.$$

Условия существования положительного асимптотически устойчивого стационарного состояния (x, y, u) сформулированы в [12] и состоят в выполнении неравенств: $c\nu K > s(1 + \mu(R_0 + rK))$, $s \geq \tau$.

Численный анализ детерминированных моделей. С целью численного эксперимента для модели «конкурент–конкурент–мутуалист» были выбраны следующие параметры: начальные значения плотностей популяций – $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (30.0, 20.0, 10.0)$, значения параметров – $a = 1.4$, $\beta = 0.5$, $K_1 = 15.7$, $K_2 = 30.0$, $m = 1.5$, $\delta = 0.1$, $\eta = 0.08$, $\gamma = 1.5$, $L_0 = 12$, $l = 1.2$. На рис. 1 представлен фазовый портрет системы (1) при указанных начальных значениях и значениях параметров.

Детерминистическая модель
 Стационарная точка $F_7 = (12.66, 16.19, 27.19)$,
 $a=1.4, \beta=0.5, K_1=15.7, K_2=30.0, m=1.5, \delta=2.2, \eta=0.08, \gamma=1.5, L=12.0, l=1.2$

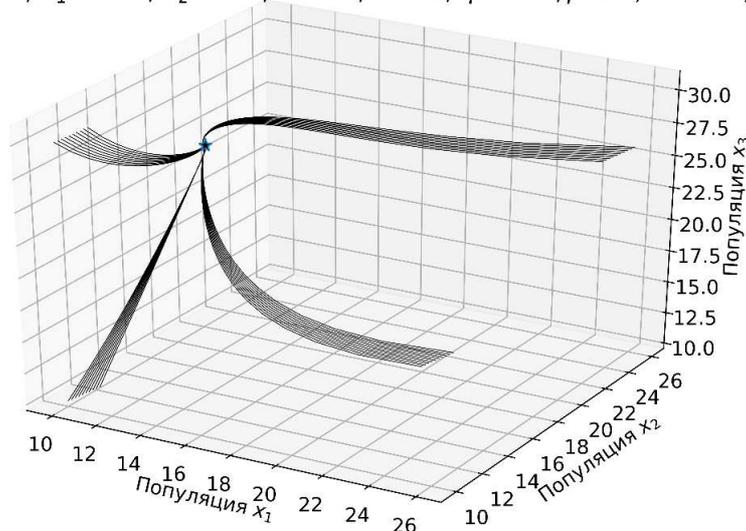


Рис. 2. Фазовый портрет системы (1), соответствующий стационарному состоянию $F_7(x_1, x_2, x_3) = (12.66, 16.19, 27.19)$

Аналогично получены результаты численного эксперимента и построены фазовые портреты системы (1), соответствующие различным стационарным состояниям F_0-F_6 .

С целью численного эксперимента для модели «хищник–жертва–мутуалист» были выбраны следующие параметры: начальные значения плотностей популяций $(x(0), y(0), u(0)) = (10.0, 10.0, 5.0)$, значения параметров $(\alpha, K, v, \mu, c, s, \tau, R_0, r) = (1.0, 30.0, 1.2, 1.7, 1.3, 1.0, 1.0, 5.0, 0.2)$. На рис. 2 представлен фазовый портрет системы (2), соответствующий стационарному состоянию E_5 , при указанных начальных значениях и значений параметров.

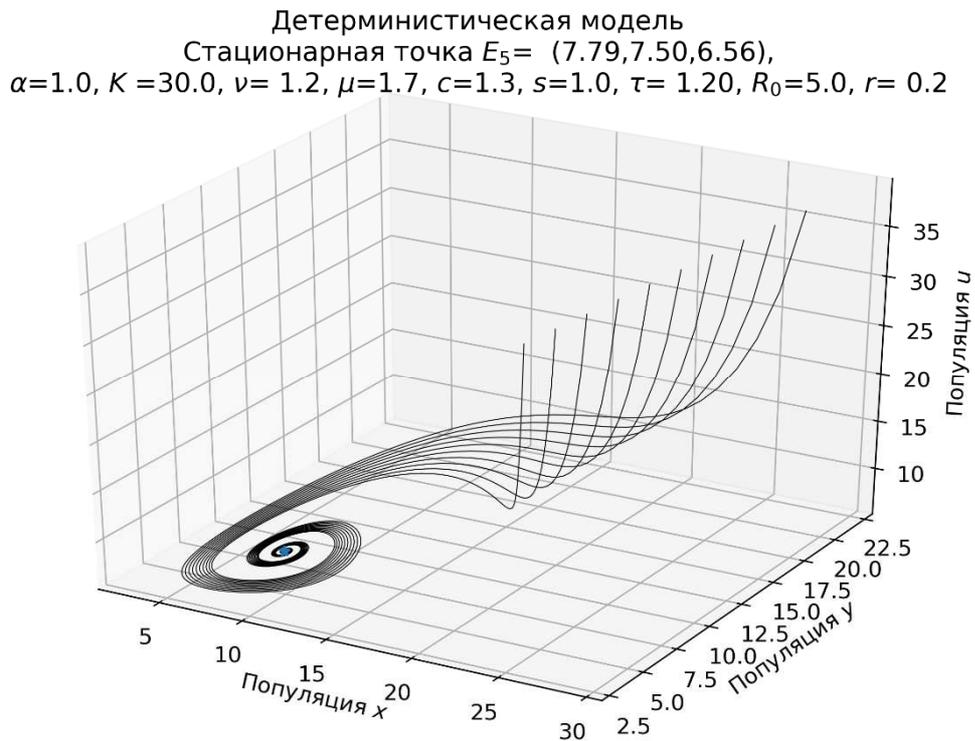


Рис. 2. Фазовый портрет системы (2), соответствующий стационарному состоянию $E_5 = (7.78, 7.49, 6.55)$

Аналогично построены фазовые портреты для стационарных состояний E_0-E_4 .

Результаты численного исследования детерминированных моделей использованы для сравнительного анализа с результатами численного исследования соответствующих стохастических моделей.

Синтез недетерминированных моделей и анализ устойчивости. Для моделей (1) и (2) построены соответствующие дифференциальные включения, нечеткие и стохастические дифференциальные уравнения.

С помощью принципа редукции задачи об устойчивости решений дифференциальных включений к задаче об устойчивости решений нечетких дифференциальных уравнений получены условия устойчивости [5, 9–11]. С помощью принципа редукции получены условия устойчивости стохастических уравнений, соответствующих моделям (1) и (2). Доказано, что если нулевое решение нечеткого уравнения α -устойчиво по Ляпунову при каждом $\alpha \in (0, 1]$, то нулевое решение соответствующего стохастического уравнения устойчиво по вероятности. Если нулевое решение нечеткого уравнения асимптотически α -устойчиво при любом $\alpha \in (0, 1]$, то нулевое решение соответствующего стохастического уравнения асимптотически устойчиво по вероятности. Получены условия устойчивости почти наверное и устойчивости в среднем. Результаты проведенного исследования устойчивости недетерминированных моделей популяционной динамики использованы для сравнительного анализа со свойствами моделей, построение которых было выполнено с помощью другого метода – метода построения самосогласованных стохастических моделей [7].

Результаты проведенного исследования устойчивости недетерминированных моделей популяционной динамики использованы для сравнительного анализа со свойствами моделей, построение которых было выполнено с помощью другого метода – метода построения самосогласованных стохастических моделей [7]. В работе выполнено построение стохастических моделей, соответствующей моделям (1) и (2), с помощью метода построения самосогласованных стохастических моделей [7]. Согласно этому методу для исследуемой системы записаны схемы взаимодействия, которые включает в себя символическую запись всех возможных взаимодействий между элементами системы. Для этого использованы операторы состояния системы и оператор изменения состояния системы [7].

Далее с учетом соответствующих интенсивностей переходов от основного кинетического уравнения (master equation) с помощью формального разложения в ряд можно перейти к приближенному уравнению Фоккера–Планка. Далее нетрудно получить эквивалентное стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ланжевена. При практическом применении метода стохастическое дифференциальное уравнение можно записать сразу после записи схемы взаимодействия, так как для записи коэффициентов уравнения Фоккера–Планка необходимо знать только интенсивности переходов и операторы изменения состояний.

Схема взаимодействия элементов и оператор изменения состояния R системы (1) представлены в виде:

$$\begin{array}{l}
X_1 \xrightarrow{a} 2X_1 \\
X_2 \xrightarrow{\delta} 2X_2 \\
X_3 \xrightarrow{\gamma} 2X_3 \\
X_1 + X_1 \xrightarrow{a/K_1} X_1 \\
X_2 + X_2 \xrightarrow{\delta/K_2} X_2 \\
X_1 + X_2 \xrightarrow{\eta} X_1 \\
X_1 + X_2 \xrightarrow{a\beta/(1+mx_3)} X_2 \\
X_3 + X_3 \xrightarrow{\gamma/(L_0+lx_1)} X_3
\end{array}
\quad
R = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1
\end{pmatrix}.$$

Первые три строки схемы взаимодействия соответствуют естественному размножению видов в отсутствии других факторов, 4-я и 5-я строки символизируют внутривидовую конкуренцию, а 6-я – межвидовую конкуренцию. Последние две строки описывают симбиотические отношения между видами X_1 и X_3 . В 7-ой строке конкурентное взаимодействие вида X_2 на вид X_1 уменьшается за счет взаимодействия вида X_1 с мутуалистом X_3 . Аналогично, в последней строке внутривидовая конкуренция вида X_3 уменьшается за счет взаимодействия с мутуалистом X_1 .

Состояние системы описано с помощью вектора $x = (x_1, x_2, x_3)$. Интенсивности переходов из состояния x в состояние $x + R^A$ в единицу времени определены соответствующими соотношениями. Записано соответствующее модели уравнение Фоккера–Планка. Получены уравнения Ланжевена, эквивалентные уравнениям Фоккера–Планка, в виде $dx = a(x, t)dt + b(x, t)dW$, где $x \in R^3$ – функция состояния системы, $W \in R^3$ – стандартное трехмерное броуновское движение. Для коэффициентов справедливы соотношения $a(x) = A(x)$, $b(x) = B(x)B(x)^T$.

Показано, что уравнение в моментах для стохастического дифференциального уравнения в форме Ланжевена полностью совпадает с моделью (1) и может служить для исследования детерминистического поведения.

Исследование стохастического члена стохастического дифференциального уравнения в форме Ланжевена позволило изучить влияние введения стохастики на поведение изучаемой системы.

Для модели (2) аналогично была построена стохастическая модель и получены коэффициенты уравнения Фоккера–Планка.

Численный эксперимент проводился с помощью разработанного программного комплекса для численного решения систем обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений методами Рунге–Кутты [15]. Библиотека написана на языке python с использованием модулей numpy и scipy. Реализованы алгоритмы генерирования траекторий винеровского процесса и многоточечных распределений, аппроксимация кратных стохастических интегралов, тестирование сильной и слабой сходимости численных методов и непосредственно сами численные алгоритмы стохастического метода Рунге–Кутты. Компьютерное исследование показало, что для рассмотренной детерминистической модели «конкурент–конкурент–мутуалист» программный комплекс дает результаты, полностью согласующиеся с аналитическими выводами.

С помощью разработанного комплекса программ для стохастических моделей взаимодействия популяций были проведены численные эксперименты с выбором тех же параметров, что и для численного анализа детерминистических моделей (1) и (2). На рис. 3, 4 представлены траектории средних значений по 100 реализациям при указанных начальных значениях и значениях параметров на временном интервале для стохастических систем, соответствующим системам (1) и (2).

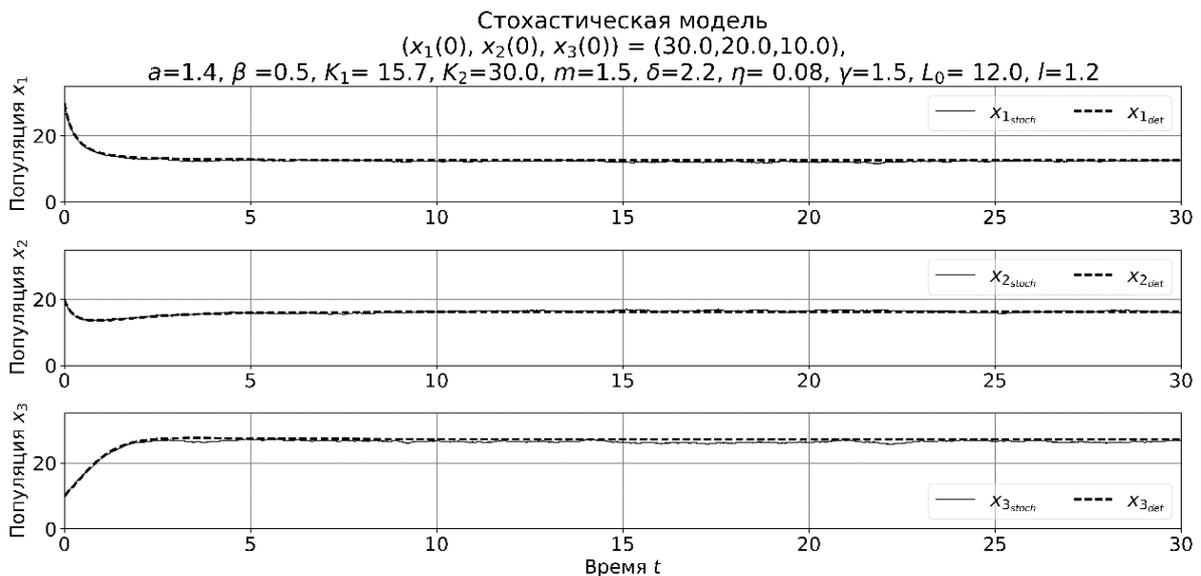


Рис. 3. Траектории средних значений по 100 реализациям для модели «конкурент–конкурент–мутуалист», соответствующие стационарному состоянию $F_7(x_1, x_2, x_3) = (12.66, 16.19, 27.19)$

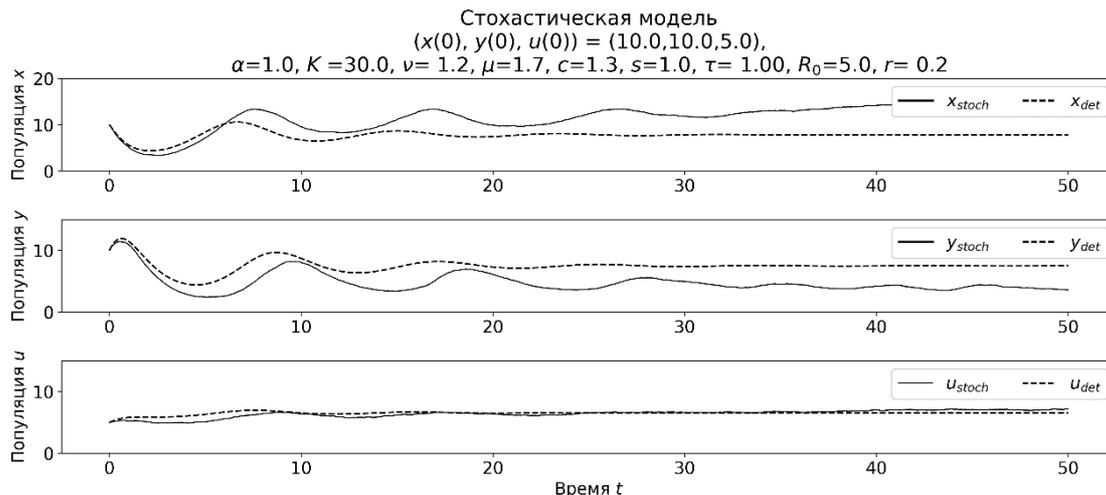


Рис. 4. Траектории средних значений по 100 реализациям для модели «хищник–жертва–мутуалист», соответствующие стационарному состоянию $E_5 = (7.78, 7.49, 6.55)$

Численный эксперимент для модели «конкурент–конкурент–мутуалист» показал значительную близость траекторий для стохастического и детерминистического случаев. Так же как и в детерминистическом случае, траектории средних значений различных реализаций выходят на стационарный режим. Кроме того, численный анализ модели показал, что введение стохастичности слабо влияет на устойчивость системы, поэтому для изучения системы можно рассматривать ее детерминистическое приближение, которое определяется матрицей $A(x)$ в уравнении Фоккера–Планка.

Для модели «хищник–жертва–мутуалист» в результате численного анализа было получено, что графики средних значений по 100 различным реализациям траекторий решений стохастических дифференциальных уравнений значительно отличаются от графиков решений для соответствующей детерминистической системы. Это говорит о значимом влиянии стохастичности на поведение системы. В связи с этим для анализа качественного поведения (в частности, устойчивости решений) стохастической модели «хищник–жертва–мутуалист» необходимо использовать другие методы и подходы. Например, возможными направлениями являются применение статистического анализа и качественных методов для стохастических дифференциальных уравнений и решение задач на краевые условия для уравнения Фоккера–Планка.

В ходе численного эксперимента возникла проблема выбора допустимых границ для параметров моделирования. С одной стороны, указанная проблема связана с выявлением промежутков сохранения физического смысла, а, с другой стороны, с отслеживанием изменения качественного поведения в зависимости от выбора параметров. Важно отметить, что про-

блема выбора параметров представляет интерес не только на этапе численного моделирования, но и в процессе предварительного качественного анализа модели.

Заключение. Для исследования трехмерных динамических моделей взаимодействия популяций использовано сочетание метода построения стохастических самосогласованных моделей и принципа редукции. На основе применения метода построения стохастических самосогласованных моделей осуществлен синтез соответствующих стохастических моделей. На основе принципа редукции с переходом к дифференциальным включениям, нечетким дифференциальным уравнениям и стохастическим дифференциальным уравнениям получены достаточные условия устойчивости. Численные эксперименты, проведенные с помощью разработанного программного обеспечения, позволили провести оценку согласованности расчетов для детерминированного и стохастического случаев. Полученные результаты направлены на дальнейшее развитие методов построения и анализа устойчивости недетерминированных моделей динамики.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 15-07-08795).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.Ю., Платонов А.В., Старков В.Н., Степенко Н.А. Математическое моделирование и исследование устойчивости биологических сообществ. СПб.: Соло, 2006.
2. Пых Ю.А. Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики. М.: Наука, 1983.
3. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.
4. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003.
5. Шестаков А.А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. М.: УРСС, 2007.
6. Oksendal B.K. Stochastic differential equations: An introduction with applications. Berlin: Springer, 2003.
7. Геворкян М.Н., Демидова А.В., Егоров А.Д., Кулябов Д.С., Королькова А.В., Севастьянов Л.А. Влияние стохастизации на одношаговые модели // Вестник РУДН. Сер. «Математика. Информатика. Физика». 2014. № 1. С. 71–85.
8. Van Kampen N.G. Stochastic processes in physics and chemistry. Elsevier, 1992. V. 1.
9. Меренков Ю.Н. Об абстрактном эволюционном уравнении // Дифференциальные уравнения. 2004. Т.40. №2. С. 274–276.

10. Дружинина О.В., Масина О.Н. Методы исследования устойчивости и управляемости нечетких и стохастических динамических систем. М.: ВЦ РАН, 2009.

11. Демидова А.В., Дружинина О.В., Масина О.Н. Исследование устойчивости модели популяционной динамики на основе построения стохастических самосогласованных моделей и принципа редукции// Вестник РУДН. Сер. «Математика. Информатика. Физика». 2015. №3. С. 18–29.

12. Rai B., Freedman H.I., Addicott J.F. Analysis of three species models of mutualism in predator-prey and competitive systems // Math. Biosci. 1983. № 63. С. 13–50.

13. Freedman H.I., Rai B. Uniform persistence and global stability in models involving mutualism Competitor-competitor-mutualist systems // Indian J. Math. 1988. V. 30. P. 175–186.

14. Freedman H. I., Rai B. Can mutualism alter competitive outcome: a mathematical analysis//Rocky Mountain Math. J. 1995. V. 25. № 1. P. 217–230.

15. Еферина Е.Г., Королькова А.В., Геворкян М.Н., Кулябов Д.С., Севастьянов Л.А. Программный комплекс стохастического моделирования одношаговых процессов // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». 2014. № 3. С. 46–59.

ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМАХ ДВИЖЕНИЯ ГРЕБНОЙ ЛОДКИ

*М.З. Досаев**, *Л.А. Климина**, *Sh.-Sh. Hwang***

(* НИИ механики МГУ, Россия, 119192, Москва, Мичуринский просп., 1;

** Chien Hsin University of Science and Technology, No.229, Jianxing Rd.,
Zhongli Dist., Taoyuan City 32097, Taiwan)

E-mail: dosayev@imec.msu.ru

ON STEADY MOTIONS OF A ROWING BOAT

*M.Z. Dosaev**, *L.A. Klimina**, *Sh.-Sh. Hwang***

(* LMSU Institute of Mechanics, Michurinsky prosp.,1,
119192, Moscow, Russia;

** Chien Hsin University of Science and Technology, No.229, Jianxing Rd.,
Zhongli Dist., Taoyuan City 32097, Taiwan)

Keywords: rowing boat, closed dynamical model, steady motions.

Введение. Гребные подводные двигатели машущего типа востребованы во многих прикладных задачах [1]. Одним из основных преимуществ таких двигателей, по сравнению с винтовыми, является возможность использования в водоемах с водорослями без необходимости регулярной очистки гребного элемента.

В данной работе рассматривается лодка с кривошипно-шатунным гребным механизмом. Предполагаем, что лодка снабжена двумя гребными веслами, расположенными симметрично относительно оси симметрии корпуса, которые движутся синхронно.

Аналогичная механическая система рассматривалась в работе [2], где было выполнено численное исследование характеристик установившихся режимов движения системы в зависимости от параметров модели, а также было проведено сравнение с экспериментом.

В данной работе по сравнению с [2] проведено аналитическое исследование периодических траекторий соответствующей динамической системы: на основе применения метода малого параметра Пуанкаре получены необходимые условия существования периодических траекторий при достаточно малых значениях безразмерного параметра, отвечающего за инерционные свойства системы. Показано, что для случая симметричной гребной пластины данные необходимые условия выполнены при положительных значениях управляющего момента. На основе анализа полученных

необходимых условий существования периодических траекторий показано, что зависимость средней скорости корпуса лодки от величины управляющего момента на установившихся режимах движения при определенных условиях близка к функции квадратного корня.

Описание системы. Исследуемый механический объект состоит из корпуса лодки, двух гребных весел и мотора, приводящего весла в движение (рис. 1). Будем считать, что весла движутся синхронно и корпус совершает прямолинейное движение вдоль оси Pu , лодка движется в воде без течения.

В силу симметрии далее ограничимся описанием движения одного из весел лодки. Массу m , приводимую в движение вдоль оси Pu по средствам этого весла, будем считать равной половине массы всей системы.

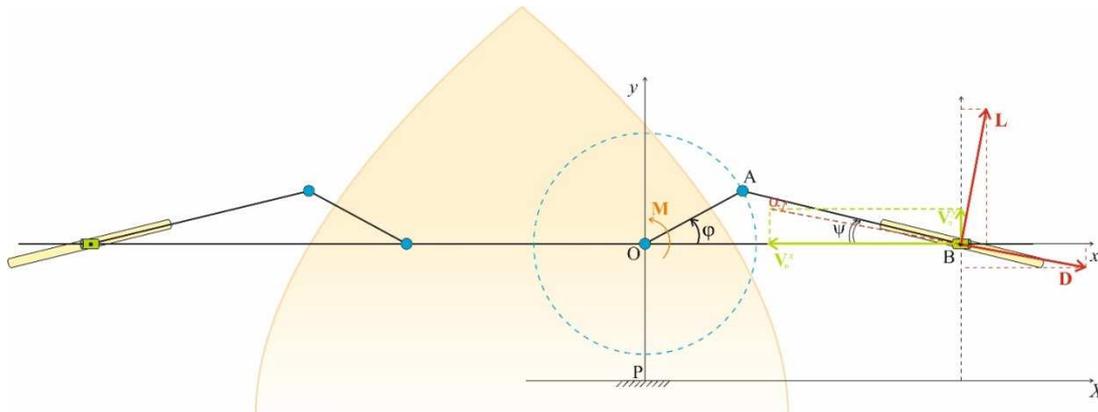


Рис. 1. Схема лодки с кривошипно-шатунным гребным механизмом (вид сверху)

Итак, рассмотрим одно из весел лодки (второе симметрично). Весло представляет собой кривошипно-шатунный механизм с кривошипом OA (длины r), шатуном AB (длины l), ползуном B , движущимся вдоль оси Ox (рис. 1). Гребная пластина жестко прикреплена к шатуну.

Мотор подает момент M на ось O кривошипа.

Скорость точки O направлена вдоль оси Pu .

Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем угол φ поворота кривошипа и координату y точки O вдоль оси Pu .

Будем предполагать, что центр масс тела «звено OA +ротатор мотора» совпадает с точкой O , центр масс тела «звено AB +пластина» совпадает с точкой B . J_1 — центральный момент инерции твердого тела «звено OA +ротатор мотора», m — суммарная масса системы, J_2 — центральный момент инерции твердого тела «звено AB +пластина», m_2 — масса твердого тела «звено AB +пластина».

Считаем, что гидродинамическая сила действует только на пластину и приложена в точке B пластины. Не учитываем гидродинамическое сопротивление, действующее на корпус лодки. В рамках квазистационарной мо-

дели [3] гидродинамические силы, действующие на лопасть, – боковая сила L и сила сопротивления D – описываются выражениями:

$$D = 0.5\rho S V_B^2 C_d(\alpha); \quad L = 0.5\rho S V_B^2 C_l(\alpha).$$

Здесь ρ – плотность воды; S – площадь пластины; $C_d(\alpha), C_l(\alpha)$ – коэффициенты силы сопротивления и боковой (подъемной) силы; \square - периодические функции мгновенного угла атаки α ; V_B – скорость точки В.

Уравнения движения. Для составления уравнений движения воспользуемся формализмом Лагранжа.

Кинетическая энергия системы имеет вид:

$$E_k = \frac{1}{2} \left(m\dot{y}^2 + J_1 k(\varphi) \dot{\varphi}^2 \right),$$

$$\text{где } k(\varphi) = 1 + a^2 \frac{J_2 \cos^2 \varphi}{J_1 \cos^2 \psi} + \frac{m_2 r^2}{J_1} (\sin \varphi + \cos \varphi \operatorname{tg} \psi)^2,$$

$$\psi = \arcsin(a \sin \varphi),$$

$$a = \frac{r}{l}.$$

Запишем динамические уравнения движения рассматриваемой системы в безразмерных переменных (точкой обозначена производная по безразмерному времени $\tau = Tt$, где T – некоторое характерное время):

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{p}{k(\varphi)}, \\ \dot{p} &= -\frac{k'(\varphi)}{2k^2(\varphi)} p^2 + \mu(Q(\varphi, p, y) + N), \\ \dot{y} &= \mu b f(\varphi, p, y). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $y = TV_O / r$ – безразмерная скорость центра масс всей системы; p – безразмерный импульс, отвечающий координате φ , $\alpha = \psi + \operatorname{arctg} \frac{y}{u}$ – угол атаки; $u = -pk^{-1}(\varphi)(\sin \varphi + \cos \varphi \operatorname{tg} \psi)$ – безразмерная компонента скорость точки В вдоль оси Ox ; $Q = -(\sin \varphi + \cos \varphi \operatorname{tg} \psi) \sqrt{u^2 + y^2} \times (C_l(\alpha) y - C_d(\alpha) u)$ – безразмерная обобщенная гидродинамическая сила, соответствующая обобщенной координате φ , $f = -\sqrt{u^2 + y^2} (C_l(\alpha) u +$

$+C_d(\alpha)y$ – безразмерная гидродинамическая сила в проекции на ось Oy ;
 $N = M(\mu J_1 T^2)^{-1}$ – безразмерный момент, создаваемый мотором;
 $b = J_1 m^{-1} r^{-2}$ – безразмерный параметр. Предполагаем, что $\mu = 0.5 \rho S r^3 / J_1$ является малым параметром модели.

Отметим, что правая часть системы (1) 2π -периодическая по переменной φ .

Постановка задачи. Требуется описать установившиеся движения лодки, при которых корпус лодки движется поступательно прямолинейно с постоянной средней скоростью. Таким движениям соответствуют 2π -периодические по переменной φ траектории системы (1). В частности, требуется оценить, какую среднюю скорость может развить лодка с гребным механизмом в зависимости от величины управляющего момента. Рассматриваем только движения с положительной угловой скоростью кривошипа OA (при необходимости можно полностью аналогично рассмотреть движения с $\dot{\varphi} < 0$). Итак, рассматриваем $p > 0$.

Необходимые условия существования 2π -периодических траекторий. В области $p > 0$ примем переменную φ за новое время. Введем новую переменную $x = p / \sqrt{k(\varphi)}$. Перепишем систему (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\varphi} &= 1, \\ \frac{dx}{d\varphi} &= \mu x^{-1} \left(Q(\varphi, x\sqrt{k(\varphi)}, y) + N \right), \\ \dot{y} &= \mu b \sqrt{k(\varphi)} x^{-1} f(\varphi, x\sqrt{k(\varphi)}, y). \end{aligned} \quad (2)$$

При $\mu = 0$ система (2) распадается на две гамильтоновы системы (относительно переменных φ, x и φ, y) с гамильтонианами $H_1 = x$, $H_2 = y$.

Траектории этих гамильтоновых систем имеют вид:

$$x_h = h_1, \quad y_h = h_2, \quad (3)$$

где h_1, h_2 – положительные константы.

Метод малого параметра Пуанкаре позволяет получить необходимое условие существования периодических траекторий в неавтономной системе, близкой к гамильтоновой (см., например, [4]). Применяя этот метод (аналогично [5]), получаем, что при достаточно малых μ для существова-

ния 2π -периодической по φ траектории системы (2), возникающей из траектории вида (3) порождающей гамильтоновой системы, необходимо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(\varphi, h_1 \sqrt{k(\varphi)}, h_2) d\varphi + N &= 0; \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{k(\varphi)} f(\varphi, h_1 \sqrt{k(\varphi)}, h_2) d\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Введем обозначение $h = h_2 / h_1$. Перепишем уравнения (4) относительно неизвестных h_1 и h . При этом учтем, что

$$\alpha(\varphi, x_h, y_h) = \psi - \arctg(h\sqrt{k(\varphi)} / (\sin \varphi + \cos \varphi \operatorname{tg} \psi)) = \alpha(\varphi, h).$$

Система (4) примет вид:

$$\begin{aligned} h_1^2 I_1(h) + N &= 0; \\ h_1^2 I_2(h) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Из второго уравнения системы (5) найдем значение h^* , отвечающее возможному периодическому решению (оно не зависит от параметра N). Численные расчеты показывают, что для широкого диапазона аэродинамических характеристик пластины уравнение функция $I_2(h)$ имеет единственный корень.

Из первого уравнения (5) найдем

$$h_1^* = \sqrt{N} / \sqrt{-I_1(h^*)}. \quad (6)$$

Отметим, что $I_1(h^*) < 0$ для любого h^* , являющегося корнем $I_2(h)$ (нетрудно показать (в силу $C_d(\alpha) > 0$ при любом α)).

Таким образом, если система (2) при малых μ имеет периодическую траекторию, то значения y вдоль этой траектории близки к $y_h = h_1^* h^* = h^* (-I_1(h^*))^{-1/2} \sqrt{N} = c \sqrt{N}$, где c – параметр, не зависящий от N . Таким образом, при малых μ средняя скорость корпуса лодки на возможном установившемся движении пропорциональна корню от величины управляющего момента, создаваемого мотором.

Покажем, что при любом $N > 0$ существует, по крайней мере, одно решение $\{h^*, h_1^*\}$ системы (5), т.е. выполнены необходимые условия существования периодической траектории системы (2).

При $h=0$ получаем $\alpha \equiv \psi$, а в выражении для функции f остается только слагаемое: $f|_{h=0} = -C_l(\psi)u|u|$. Отметим, что знак u противоположен знаку ψ . Учитывая, что для плоской пластины функция C_l нечетная, получаем, что функция f неотрицательна при $h=0$, более того, в некотором диапазоне значений φ положительна. Так что $I_2(0) > 0$.

Легко установить, что $I_2(+\infty) < 0$. В силу непрерывности функции $I_2(h)$ получаем, что существует хотя бы один корень h^* функции $I_2(h)$, для которого $I_2'^* = I_2'|_{h=h^*} < 0$. При любом $N > 0$ значение h_1^* для данного h^* существует и определяется формулой (6).

Итак, необходимые условия существования 2π -периодического решения системы (2) выполнены.

Численное исследование. Численное исследование системы (2) проведено в работе [2]. При этом выявлено существование одной притягивающей периодической траектории при широком диапазоне значений параметров системы. Более того, при численном моделировании выявлено, что зависимость среднего значения переменной y на этой периодической траектории от параметра N , действительно, имеет вид квадратного корня. Расчеты были выполнены при конечных значениях параметра μ (0.1, 1, 10) при следующих значениях параметров модели: $a = 0.8$, $J_2 = 0.2J_1$, $m_2r^2 = 0.3J_1$, функции, коэффициенты $C_d(\alpha)$, $C_l(\alpha)$ были взяты для плоской пластины удлинения 8.

Эксперимент. Результаты экспериментов с лабораторным макетом лодки, математическая модель которой рассмотрена в данной работе, описаны в работе [2]. В частности, показано, что экспериментальная зависимость средней (по времени) скорости лодки от величины момента двигателя качественно описывается функцией квадратного корня, смещенной вправо вдоль оси абсцисс. Одной из причин смещения, не выявленного в рамках предложенной математической модели, может быть неучтенное в модели гидродинамическое сопротивление корпуса лодки.

Заключение. В работе рассмотрена математическая модель лодки с гребным механизмом машущего типа. Уравнения движения представлены в форме динамической системы, близкой к гамильтоновой. Получены необходимые условия существования периодических траекторий динамической системы, отвечающих установившимся режимам прямолинейного

движения лодки. Показано, что зависимость средней скорости корпуса лодки от величины момента двигателя на таких режимах движения близка к функции квадратного корня с некоторым множителем, зависящим от параметров модели. Этот результат согласуется с проведенными ранее численными исследованиями модели, а также с результатами экспериментов.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №№ 15-01-06970, 16-31-00374.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Павлов К.Г. Сравнительный анализ движителей типа машущее крыло и возможные области их применения // Морские интеллектуальные технологии, Санкт-Петербург, 4(26), т.1, 2014, стр. 50-54.
2. Бекмеметьев В. О., Досаев М. З., Климина Л. А. Установившиеся режимы движения лодки с кривошипно-шатунным механизмом // Динамические системы. 2015. Т. 5, № 3-4. стр. 169–176.
3. Досаев М.З., Кобрин А.И., Локшин Б.Я., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. Конструктивная теория МВЭУ. Учебное пособие. Части I-II // М.: Изд-во мех-мат ф-та МГУ, 2007.
4. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. Москва: Наука, 1978. 456 с.
5. Шалимова Е.С. Стационарные и периодические режимы в задаче о движении тяжелой точки по вращающейся сфере при наличии вязкого трения // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 2014, № 4, с. 43–50.

**ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ
ОГРАНИЧЕНИЯ ПЕРЕТОКОВ ПО ЛИНИЯМ
ЭНЕРГООБЪЕДИНЕНИЙ**

А.А. Ефремов, В.Н. Козлов (ФГАОУ ВО «СПбПУ», Россия, 194021,
Санкт-Петербург, Политехническая, 29)

E-mail: artem.efremov@spbstu.ru

**SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE STABILITY LIMIT OVER-
FLOW SYSTEMS BY LINE INTERCONNECTION**

A.A. Efremov, V.N. Kozlov (Peter the Great St.Petersburg Polytechnic Universi-
ty, St.Petersburg, 194021, Polytechnicheskaya, 29)

Keywords: structural-invariant equations, the impact of the model, stability.

Введение. Развитие управления электроэнергетикой России – актуальная задача, включающая системы автоматического регулирования частоты и активной мощности (САР ЧМ), а также системы ограничения перетоков (СОП) активной мощности по линиям на основе сетевых характеристик [1]. В работе рассмотрены достаточные условия устойчивости систем ограничения перетоков, по линиям электропередач энергообъединений.

Постановка задачи. Пусть векторно-матричная форма *структурно-инвариантных уравнений* ЭЭО с учетом САР частоты описывает ЭМХ-процессы уравнениями вида [2]:

$$\begin{bmatrix} \Phi' \\ \Omega' \\ P' \\ \Sigma' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & E_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ -\bar{T}_a R_\rho & -\bar{T}_a T_y & \bar{T}_a & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & \bar{T}_\Pi K_\Omega & -\bar{T}_\Pi & \bar{T}_\Pi K_\Pi \\ \bar{T}_C K_1 & \bar{T}_C K_2 & 0_{n \times n} & -\bar{T}_C \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Phi \\ \Omega \\ P \\ \Sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{T}_C K_C \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ -\bar{T}_a \\ 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix} M, \quad (1)$$

$$s = c_1 x = c \Phi = (s_1, \dots, s_l, \dots, s_f)^T, \quad s_l = \rho_{ik} (\varphi_i - \varphi_k). \quad (2)$$

Система (1) должна быть асимптотически устойчивой с учетом САР частотой, которая обеспечивает выполнение условий: $\text{Re } \lambda_j (A_1) < 0, j = 1, \dots, N$.

Дифференциальные уравнения ЭЭО (1) с вектором управлений $u \in \mathbb{R}^n$ для СОП представляются в общей форме:

$$x' = A_1 x + B_U u + B_M M, \quad s = c_1 x \quad (3)$$

В результате *статически определяемые* векторно-матричные алгебраические уравнения стационарных состояний имеют вид

$$0_N = A_1 x + B_U u + B_M M.$$

Тогда справедливы результаты:

а) Система стационарных уравнений, следующая из (1) и (3) при выполнении условий стационарности

$$(\Phi', \Omega', P', \Sigma')^T = 0_N \in \mathbb{R}^N, \quad N = 4n,$$

имеет однозначное решение, так как отличие от нуля определителя матрицы A_1 обеспечивается выбором

$$K_1 = \text{diag}(K_{1i})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ K_2 = \text{diag}(K_{2i})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

б) Из уравнения (3) следуют *корректные «модели влияния»* управлений СОП $u \in \mathbb{R}^m$ и нагрузки $M \in \mathbb{R}^n$ на вектор отклонений перетоков $s = c_1 x = c\Phi \in \mathbb{R}^f$ для стационарных режимов, которые имеют вид

$$s = c_1 x = \beta_U u + \beta_M M, \quad \beta_U = -c_1 A_1^{-1} B_U, \quad \beta_M = -c_1 A_1^{-1} B_M. \quad (4)$$

Таким образом, матрицы $\beta_U, \beta_M \in \mathbb{R}^{f \times n}$ в (4) определяют «модели влияния» управлений $u \in \mathbb{R}^m$ и внеплановых нагрузок $M \in \mathbb{R}^n$ на отклонения перетоков. Вектор нагрузок не доступен измерению, поэтому для вычисления управлений СОП используется «модель влияния» управлений на перетоки.

Условия устойчивости системы ограничения перетоков. Устойчивость неединственных состояний исследуется в условиях линеаризация нелинейных уравнений ЭМХ-процессов в ЭЭО в окрестности «точек линеаризации» X_0, U_0, S_0 для состояний, управлений и возмущений ЭЭО. Это определяет линейные стационарные разностные уравнения, формируемые на основе уравнений ЭМП. Тогда модели динамики ЭЭО соответствуют моделям (1), (3) вида

$$x_{k+1} = Hx_k + F_u u_k + F_\mu \mu_k, \quad s_k = cx_k, \quad x_{k_0} = x_0. \quad (5)$$

Уравнения (5) дополняются уравнениями режимов ЭЭО

$$X_k = X_0 + x_k \in \mathbb{R}^N, \quad U_k = U_0 + u_k \in \mathbb{R}^N, \\ M_k = M_0 + \mu_k \in \mathbb{R}^N, \quad N = 4n, \quad S_k = S_k^I + s_k \in \mathbb{R}^s, \quad (6)$$

где X_0, U_0, M_0 – исходные значения векторов состояний, управлений и внеплановых нагрузок на станции. Векторы $S_k = S_k^H + s_k \in \mathbb{R}^s$ – определяют полные векторы перетоков в виде суммы измеренных значений S_k^H и отклонений перетоков s_k в окрестности стационарных состояний СОП.

Далее используются следующие из уравнений ЭМП-процессов математические «модели влияния» ТА на перетоки по линиям (4). В (5) и (6) имеются связи между отклонениями перетоков и координатами $(\Phi, \Omega)^T$ вектора состояний $(\Phi, \Omega, P, \Sigma)^T$. Матрицы $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F_u \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $F_\mu \in \mathbb{R}^{n \times s}$, вычислены на основе (4) и (5) для матричной экспоненты и интеграла от нее для блочной формы уравнений с диагональными блоками [3]. Эти матрицы – матрицы Якоби, соответствующие «точкам линеаризации» X_0, U_0, S_0 .

Точки линеаризации являются стационарными состояниями систем (5), (6) с управлениями как решениями задач табл. 1.

Таблица 1. Задачи управления СОП с различными функционалами и «жесткими» и «мягкими» режимами ограничения перетоков по линиям

1	<p>1). Модульный функционал</p> $u_{k,*} = \arg \min \{ \varphi_1 = w^T u_k - C , u_k \in D_\alpha, \alpha = 1, 2 \} \in \mathbb{R}^m$ <p>2). Квадратичный функционал</p> $u_{k,*} = \arg \min \{ \varphi_2 = \ u_k - C\ ^2, u_k \in D_\alpha \subset \mathbb{R}^m, \alpha = 1, 2 \} \in \mathbb{R}^m$
	<p>1). Допустимые области в пространствах пропорционального (в) и интегрального (г) управлений для режима «жесткого ограничения» перетоков по не перегруженным линиям</p>
	$D_1 = \left\{ u_k \in \mathbb{R}^m \mid a). A_l u_k = \theta(S_{l,k}, S_l^+, S_l^-) = \right.$ $= S_{l,k} - \left(S_{l,k} - S_l^- - S_{l,k} - S_l^+ + S_l^- + S_l^+ \right) / 2,$ $l \in M_{II, k-1} = \{j\} \cup \{p\};$

	$\begin{aligned} & \text{б). } S_q^- - S_{q,k} \leq A_q u_k = \sum_{i=1}^n \beta_{qi} u_{i,k} \leq S_q^+ - S_{q,k}, \quad q \in M_{\text{НП},k-1}; \\ & \text{в). } U^- \leq u_k \leq U^+; \text{ з). } U^- - U_{k-1} \leq u_k \leq U^+ - U_{k-1} \} \end{aligned}$
	<p>2). Допустимые области в пространстве пропорциональных (б) и интегральных (в) управлений для режима «мягкого ограничения» перетоков в допустимых пределах по всем классам линий</p>
2	$\begin{aligned} D_2 = \left\{ u_k \in \mathbb{R}^m \mid \right. & \text{а). } A_l u_k = \sum_{i=1}^n \beta_{li} u_{i,k} = \theta(S_{l,k}, S_l^+, S_l^-) = \\ & = S_{l,k} - \left(\left S_{l,k} - S_l^- \right - \left S_{l,k} - S_l^+ \right + S_l^- + S_l^+ \right) / 2 = b_{l,k-1}, \quad l \in M_{k-1}; \\ & \text{б). } U^- \leq u_k \leq U^+; \text{ в). } U^- - U_{k-1} \leq u_k \leq U^+ - U_{k-1} \} \end{aligned}$

Пропорциональные или интегральные законы системы ограничения перетоков имеют вид

$$U_k = \gamma_1 u_{k*} = \gamma_1 \Phi_u(cx_k), \quad (7a)$$

$$U_{k+1} = U_k + \gamma_2 u_{k*} = \gamma_2 \Phi_u(cx_k), \quad (7б)$$

где векторы в равенствах (7.а) определяются решениями задачи оптимизации: вычислить векторы управлений на станции

$$\begin{aligned} u_{k*} = \arg \min \left\{ \varphi = \|u_k - C\|^2, \quad C \neq 0_m \mid u_k \in D^0 = \{u_k \mid Au_k = \theta(S_{k-1}, S^- \right. \\ \left. = S_k - \left(\left| S_k - S^- \right| - \left| S_k - S^+ \right| + S^- + S^+ \right) / 2, \quad S_k = S_k^H + cx_k \}, \right. \end{aligned} \quad (8a)$$

$$D^2 = \left\{ u_k \mid \|u_k\|^2 \leq r^2 \right\} \subset D^3 \sim \left\{ u_k \mid U^- \leq u_k \leq U^+ \right\}.$$

Для закона управления (7.б) приращения управлений определяются решениями задач конечномерной оптимизации: вычислить локально оптимальные приращения управлений, которые обеспечивают минимум функционала затрат на ограничение перетока

$$\begin{aligned} u_{k*} = \arg \min \left\{ \varphi = \|U_{k-1} + u_k - C\|^2, \quad C \neq 0_m, \right. \\ \left. u_k \in D_2 = \left\{ u_k \mid A(U_{k-1} + u_k) = \theta(S_k, S^+, S^-) = \right. \right. \end{aligned} \quad (8б)$$

$$= S_k - \left(\left| S_k - S^- \right| - \left| S_k - S^+ \right| + S^- + S^+ \right) / 2, S_k = S_k^H + cx$$

$$D^2 = \left\{ u_k \mid \|u_k\|^2 \leq r^2 \right\} \subset D^3 \sim \left\{ u_k \mid U^- \leq u_k \leq U^+ \right\}. \quad (8б)$$

Эти соотношения определяют модели для анализа устойчивости (сходимости) замкнутых систем ограничения ЭЭО, которые описываются уравнениями в (5,6). При этом для пропорционального закона СОП используются модели (7.а) и (8.а), а для систем с суммарным законом – модели (7.б) и (8.б).

В задачах (8.а) и (8.б) приведены два варианта аппроксимации параллелепипедов (допустимых областей изменения управлений) шарами евклидова пространства. Это позволяет при исследовании достаточных условий устойчивости получить качественные результаты, например, для части допустимых областей. Это связано с заданием управлений операторами минимизации. Решение задач возможно для системы с объектом (5,6) и пропорциональным (7.а) или интегральным (8.а) управлениями.

Условия устойчивости (сжатия) операторов (5,6) для СОП следуют из принципа сжимающих отображений. Учитывая класс нелинейности – оператора $\theta(S_k, S^+, S^-) = \theta(x_k)$, исследуемая система имеет неединственное положение равновесия [3], поэтому далее анализируются условия устойчивости с учетом этой особенности. Методика иллюстрируется на примере системы ограничения перетоков с пропорциональным управлением (8.а).

Полученные далее достаточные условия устойчивости в форме условий сходимости дополняют условия [4, 5] для синтеза систем ЛОУ на основе стационарных «моделей влияния» (4), что иллюстрирует «робастную сходимость» в классе *статически определимых уравнений* динамики объекта.

Утверждение. Пусть выполнены следующие условия:

1. Уравнения динамики системы ЛОУ перетоками по линиям ЭЭО соответствуют последовательности разностных операторов для (4), (5) вида

$$x_{k+1} = F_k(x_k, p) = Hx_k +$$

$$+ F_u \left\{ GT \left[P_A c H x_k + P^0 C (\alpha_k / \rho)^{1/2} \right] \right\} + F_\mu \mu, \quad x_{k_0} = x_0, \quad s_k = cx_k, \quad (9)$$

где матрица $H \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$ определяет сходящийся матричный линейный ограниченный оператор объекта с нормой $\|H\| < 1$, а линейная часть этого

оператора (для объекта) удовлетворяет ранговому критерию управляемости Р. Калмана и критерию управляемости системы с ограниченными координатами, *гарантирующими осуществимость* динамики [6].

2. Оператор (17) системы ЛОУ определяет управления из условий: вычислить последовательность векторов управлений

$$u_{k*} = \arg \min \left\{ \varphi(u_k) = \|u_k - C\|^2 \mid Az_k = \theta_k(x_k), A = \beta \in \mathbb{R}^{f \times m}, \right. \\ \left. \theta(S_{k-1}, S^+, S^-) = \theta(x_k) = S_k - \left(|S_k - S^-| - |S_k - S^+| + S^- + S^+ \right) / 2, S_k = S \right. \\ \left. u^- = U^- - U_* \leq u_k \leq U^+ - U_* = u^+ \right\} \in \mathbb{R}^m. \quad (10)$$

Задачи (9) разрешаются оператором конечномерной оптимизации в канонической форме для системы (8) вида

$$u_{k*} = \Gamma \left[P_A \theta(x_k) + P^0 C (\alpha_k / \rho)^{1/2} \right]. \quad (11)$$

3. Нелинейный оператор многомерной «зоны», являющийся причиной отсутствия единственности стационарных состояний, реализует технологическую логику СОП и имеет следующий вид

$$\theta(x_k) = \theta(S_{k-1}, S^+, S^-) = S_k - \left(|S_k - S^-| - |S_k - S^+| + S^- + S^+ \right) / 2 \in \mathbb{R}^f, \\ S_k = S_k^H + cx_k.$$

Этот оператор определяет для «мягкую форму» ограничений для перетоков с помощью кусочно-линейного оператора с условием Липшица

$$\|\theta(x_k) - \theta(x_*)\| \leq L_\theta \|\theta_k - \theta_*\| \leq L_\theta \|c\| \cdot \|x_k - x_*\|,$$

а нормы координат состояний (9) ограничены в совокупности, т. е.

$$\|x_k\| \leq M, k = 1, 2, \dots$$

4. Область задания нелинейной части оператора системы (11) соответствует условию совместности ограничений задач в (10)

$$\alpha_k = r^2 - \theta_k^T (AA^T)^{-1} \theta_k > 0, \theta_k = \theta(x_k), \rho = C^T P^0 C.$$

5. Счетное семейство разностных операторов (9) ЛОУ

$$u_{k*} = \Gamma \left[P_A \theta(x_k) + P^0 C (\alpha_k / \rho)^{1/2} \right] \quad (12)$$

с параметрами системы $p = (C, A, \theta, S^-, S^+)$ можно аппроксимировать счетной последовательностью линейных непрерывных операторов вида $x_{k+1} = \tilde{F}_k(x_k, p)$, $x_{k_0} = x^0 \in T$, которые локально адекватны в текущем времени производным Фреше для оператора (20) в точках. Тогда условия (9) – (12), ограничивающие норму $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times m}$, имеют вид

$$\|\Gamma\| < (1 - a_1) / (a_2 + a_3), \quad (13)$$

где параметры оператора замкнутой системы ЛОУ равны

$$a_1 = \|H\| < 1, \quad a_2 = \|F_u\| L_u \|P_A\| \cdot L_\theta \|c\|,$$

$$a_3 = \|F_u\| L_u \|P^0 C\| (L_\theta \|c\|)^2 M \|P_A^T P_A\| (\delta + \|C\|) / (2r\rho),$$

а нормы векторов состояний ограничены так, что $\|x_k\| \leq \delta$.

Доказательство условий сходимости типа (13) использует принцип сжимающих отображений, аппроксимацию нелинейных операторов минимизации в (9) рядом Тейлора, производные Фреше, а также спектральные нормы матриц имеют вид: $\|A\| = \max \lambda_j^{1/2}(A^T A)$, $j = 1, \dots, n$.

Таким образом, модели замкнутых систем и проекционные операторы минимизации СОП определяют условия робастной устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев В. П., Козлов В. Н., Строганов Р. П. и др. Формализация задач управления энергообъединениями по частоте и активной мощности // Электричество. 1986. № 6.
2. Козлов В. Н. Управление частотой и перетоками активной мощности электроэнергетических объединений с учетом энергетической безопасности // Известия РАН. Энергетика, 2012, № 3.
3. Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М.: Наука, 1978. 16. Козлов В. Н. Метод нелинейных операторов в автоматизированном проектировании динамических систем. Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та им. А. А. Жданова, 1986. – 166 с.
4. Васильев Ю.С., Волков Э.П., Глухих В.А., Демирчян К.С., Дьяков А.Ф., Коротеев А.С., Лопота В.А., Федоров М.П. (ред. совет). Энергетика

России. XXI век. Принципы развития. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2011. – 720 с.

5. Гавурин М. К. Лекции по методам вычислений. М.: Наука. 1971. – 248 с.

6. Козлов В. Н., Куприянов В. Е., Заборовский В. С. Вычислительные методы синтеза систем автоматического управления. Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та им. А. А. Жданова, 1989. – 220 с.

**АНАЛИЗ СЛАБОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
ПОВТОРЯЮЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ
МЕТОДОМ ВЕКТОРНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА**

Ю.П. Емельянова (АПИ НГТУ им. Р.Е. Алексеева, Россия,
607227, г. Арзамас, ул. Калинина, 19)

E-mail: emelianovajulia@gmail.com

М.А. Емельянов (АПИ НГТУ им. Р.Е. Алексеева, Россия,
607227, г. Арзамас, ул. Калинина, 19)

E-mail: mikhailemelianovarzamas@gmail.com

**WEAK STABILITY ANALYSIS
OF REPETITIVE PROCESSES VIA
VECTOR LYAPUNOV FUNCTION**

J.P. Emelianova (Arzamas Polytechnic Institute of R.E. Alekseev
Nizhny Novgorod State Technical University,
607227, Nizhny Novgorod, Kalinina str., 19)

M.A. Emelianov (Arzamas Polytechnic Institute of R.E. Alekseev
Nizhny Novgorod State Technical University,
607227, Nizhny Novgorod, Kalinina str., 19)

Keywords: weak stability, 2D systems, repetitive processes, iterative learning control.

Введение. Повторяющиеся процессы, среди которых промышленными примерами могут служить конвейер для резки угля или металлопрокат, представляют собой класс 2D систем и характеризуются тем, что многократно повторяют одну и ту же операцию на заданном интервале времени, каждый раз возвращаясь в начальное состояние. Эту операцию называют шагом, проходом или итерацией. Таким образом, вектор состояния повторяющегося процесса зависит от двух переменных – времени и номера шага, при этом все шаги имеют одинаковую длительность во времени. На каждом повторении предыдущий профиль повторения явным образом зависит от следующего и в результате могут возникнуть колебания, возрастающие по амплитуде от повторения к повторению. Эта проблема не может быть решена стандартными методами теории управления.

Характерным примером является конвейер для резки угля, где профилем повторения (прохода) является верхняя часть угольного пласта выше нулевой линии, и целью является извлечение максимального количества угля за проход. Режущая машина опирается на предыдущий

профиль прохода для того, чтобы произвести следующий проход, при этом не исключено, что могут возникнуть колебания профиля, амплитуда которых будет возрастать от повторения к повторению.

В случае линейной динамики с постоянной длительностью повторения, была разработана практически мотивированная теория устойчивости и на базе этих условий получены алгоритмы синтеза закона управления [1]. Позднее эти результаты были применены для синтеза закона управления с итеративным обучением и были экспериментально подтверждены на примере портального робота, выполняющего операцию схватывания и перемещения предмета [2].

Работы, связанные с изучением устойчивости нелинейных 2D систем стали появляться совсем недавно. Например, в [3, 4] рассмотрены различные формы устойчивости для дискретных нелинейных моделей Роессера. В [5] на базе метода векторных функций Ляпунова получены условия экспоненциальной устойчивости для дискретных нелинейных повторяющихся процессов.

В данной работе метод векторных функций Ляпунова [5] используется для получения достаточных условий слабой устойчивости нелинейных повторяющихся процессов. Это новая форма устойчивости мотивирована конечной длительностью каждого повторения, тогда как экспоненциальная устойчивость накладывает ограничения на бесконечном интервале времени. Аналогичная особенность присуща также и линейным повторяющимся процессам, что в свою очередь привело к развитию практической устойчивости для линейных повторяющихся процессов [6].

Слабая устойчивость дискретных повторяющихся процессов. Рассмотрим нелинейный дискретный повторяющийся процесс с интервалом повторения $0 \leq p \leq T-1$, $k \geq 0$, описываемый следующей моделью в пространстве состояний

$$\begin{aligned} x_{k+1}(p+1) &= f_1(x_{k+1}(p), y_k(p), u_{k+1}(p)), \\ y_{k+1}(p) &= f_2(x_{k+1}(p), y_k(p), u_{k+1}(p)), \end{aligned} \quad (1)$$

где $T < \infty$ – длительность каждого повторения, p – текущее время на каждом повторении, $x_k(p) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – вектор состояния на k -м повторении, $y_k(p) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – выходной вектор на k -м повторении или, другими словами, вектор профиля повторения, f_1 и f_2 – нелинейные функции такие, что $f_1(0,0,0) = 0$, $f_2(0,0,0) = 0$, этим условием обеспечивается состояние равновесия в начале координат. Граничные условия заданы в виде последовательности начальных значений вектора состояния и начального профиля повторения и имеют следующий вид

$$\begin{aligned} x_{k+1}(0) &= d_{k+1}, \quad k \geq 0, \\ y_0(p) &= f(p), \quad 0 \leq p \leq T-1, \end{aligned} \quad (2)$$

где элементы $d_{k+1} \in \mathbb{R}^{n_x}$ – известные константы и элементы $f(p) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – известные функции от p . Также предполагается, что существуют вещественные числа $M_f > 0$, $\kappa_d > 0$ и $0 < \lambda_d < 1$ такие, что d_{k+1} и $f(p)$ удовлетворяют соотношениям

$$|f(p)|^2 \leq M_f, |d_{k+1}|^2 \leq \kappa_d \lambda_d^{k+1}, k \geq 0, \quad (3)$$

где $|q|$ означает Евклидову норму вектора q , величина $0 < \lambda_d < 1$ характеризует скорость сходимости последовательности начальных значений вектора состояния. Далее повсюду будем считать, что граничные условия удовлетворяют (3).

Кроме того, важно отметить, что в данной статье предполагается, что начальный вектор состояния на каждом шаге не зависит от вектора профиля повторения. Но, как упоминалось ранее, существуют приложения, где это предположение не применимо и элементы последовательности начальных значений вектора состояния должны быть явной функцией от вектора профиля повторения. Таким образом, одной из перспектив данной работы является получение результатов для более общего случая.

Особенностью повторяющихся процессов является то, что одна из двух переменных, а именно, вектор профиля повторения, изменяется на ограниченном интервале. В связи с этим в теории линейных повторяющихся процессов вводится, учитывая этот факт, понятие устойчивости вдоль повторений [1]. Это понятие основано на свойствах линейного оператора в банаховом пространстве и не может быть непосредственно перенесено на нелинейный случай. Поэтому для класса нелинейных повторяющихся процессов введено понятие устойчивости по профилю повторения [5, 8], которое является разновидностью экспоненциальной устойчивости и согласуется с принятым понятием устойчивости вдоль повторений в линейном случае.

Метод функций Ляпунова основан на изучении свойств этой функции и дискретного аналога ее градиента вдоль траекторий исследуемой системы. Динамика повторяющихся процессов определяется вектором состояния x и вектором профиля повторения y , которые являются функциями двух независимых переменных p и k . Функция Ляпунова для этих процессов может быть выбрана как скалярная функция $V(x, y)$, но чтобы построить градиент вдоль траекторий системы (1) необходимо найти величины $x_{k+1}(p) - x_k(p)$ и $y_k(p+1) - y_k(p)$ как функции от x и y . Эти величины могут быть найдены только путем решения системы (1), в результате чего теряется преимущество второго метода Ляпунова. В связи с этим предлагается использовать векторные функции Ляпунова и попытаться сделать заключение об устойчивости на основе изучения свойств аналога дивергенции этих функций.

В недавних работах [5, 7], на основе метода векторных функций Ляпунова и дивергентного подхода получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости для нелинейных дискретных повторяющихся процессов. В случае линейной динамики, известное понятие устойчивости вдоль повторений требует равномерной ограниченности переменных для всех p и k , но на практике процессы имеют лишь конечное число повторений и конечную длительность повторения. Это привело к развитию понятия строгой практической устойчивости таких процессов, где требование равномерной ограниченности при неограниченном возрастании k и p снимается. Понятие слабой устойчивости, которое вводится в данной статье, является нелинейным обобщением понятия строгой практической устойчивости и дает более «мягкие» условия для синтеза закона управления.

Рассмотрим закон управления следующего вида

$$u = \psi(x, y), \quad \psi(0,0) = 0. \quad (4)$$

Введем следующее понятие слабой устойчивости.

Определение 1 *Нелинейный дискретный повторяющийся процесс (1), (3) с законом управления (4) называется слабо устойчивым, если для всех $T < \infty$*

$$\sum_{p=0}^{T-1} |y_k(p)|^2 \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Дальнейший анализ основан на использовании функции Ляпунова следующего векторного вида

$$V(x_{k+1}(p), y_k(p)) = \begin{bmatrix} V_1(x_{k+1}(p)) \\ V_2(y_k(p)) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где $V_1(x) \geq 0, V_2(y) \geq 0$. Дискретный аналог оператора дивергенции этой векторной функции вдоль траекторий системы (1) имеет вид

$$\mathcal{D}_d V(x_{k+1}(p), y_k(p)) = \Delta_p V_1(x_{k+1}(p)) + \Delta_k V_2(y_k(p)), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_p V_1(x_{k+1}(p)) &= V_1(x_{k+1}(p+1)) - V_1(x_{k+1}(p)), \\ \Delta_k V_2(y_k(p)) &= V_2(y_{k+1}(p)) - V_2(y_k(p)). \end{aligned}$$

Теорема 1 *Предположим, что существует векторная функция (6) и положительные скаляры κ, c_1, c_2 и c_3 такие, что*

$$V_1(x_{k+1}(0)) \leq \kappa |x_{k+1}(0)|^2, \quad (8)$$

$$c_1 |y|^2 \leq V_2(y) \leq c_2 |y|^2, \quad (9)$$

$$\mathcal{D}_d V(x_{k+1}(p), y_k(p)) \leq -c_3 |y_k(p)|^2. \quad (10)$$

Тогда повторяющийся процесс (1), (3) с законом управления (4) слабо устойчив.

Доказательство. Из (10) следует, существование достаточно малого \bar{c}_3 такого, что $\bar{c}_3 < c_3$ и

$$\mathcal{D}_d V(x_{k+1}(p), y_k(p)) \leq -c_3 |y_k(p)|^2 \leq -\bar{c}_3 |y_k(p)|^2. \quad (11)$$

С учетом (9) и (10), неравенство (11) может быть записано в виде

$$V_1(x_{k+1}(p+1)) - V_1(x_{k+1}(p)) + V_2(y_{k+1}(p)) - V_2(y_k(p)) \leq -\bar{c}_3 |y_k(p)|^2 \leq -\frac{\bar{c}_3}{c_2} V_2(y_k(p)), \quad (12)$$

или

$$V_1(x_{k+1}(p+1)) + V_2(y_{k+1}(p)) \leq V_1(x_{k+1}(p)) + \left(1 - \frac{\bar{c}_3}{c_2}\right) V_2(y_k(p)). \quad (13)$$

Обозначим $\lambda = 1 - \frac{\bar{c}_3}{c_2}$. Из последнего неравенства следует, что \bar{c}_3 можно выбрать из условия

$$\lambda_d^{\frac{1}{2}} < \lambda < 1, \quad (14)$$

Выполнение которого гарантирует сходимость, как будет показано в конце доказательства. Перепишем (13) в виде

$$V_1(x_{k+1}(p+1)) \leq V_1(x_{k+1}(p)) + \lambda V_2(y_k(p)) - V_2(y_{k+1}(p)). \quad (15)$$

Решая (15) относительно $V_1(x_{k+1}(p))$ получим следующее выражение:

$$V_1(x_{k+1}(p)) \leq V_1(x_{k+1}(0)) + \sum_{h=0}^{p-1} [\lambda V_2(y_k(h)) - V_2(y_{k+1}(h))], \quad (16)$$

и обозначая $H_k(p) := \sum_{h=0}^{p-1} V_2(y_k(h))$, из (16) получим, что

$$H_{k+1}(p) \leq \lambda H_k(p) + V_1(x_{k+1}(0)) - V_1(x_{k+1}(p)). \quad (17)$$

Решая (17) имеем

$$H_k(p) \leq \lambda^k H_0(p) + \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{k-1-n} [V_1(x_{n+1}(0)) - V_1(x_{n+1}(p))], \quad (18)$$

или

$$\sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{k-1-n} V_1(x_{n+1}(p)) + \sum_{h=0}^{p-1} \lambda^{p-1-h} V_2(y_k(h)) \leq \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{k-1-n} V_1(x_{n+1}(0)) + \lambda^k \sum_{h=0}^{p-1} \lambda^{p-1-h} V_2(y_0(h)). \quad (19)$$

Последнее неравенство эквивалентно следующему:

$$\lambda^{-(p-1)} \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{-n} V_1(x_{n+1}(p)) + \lambda^{-(k-1)} \sum_{h=0}^{p-1} \lambda^{-h} V_2(y_k(h)) \leq \lambda^{-(k-1)} \lambda^{-(p-1)} \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{k-1-n} V_1(x_{n+1}(0)) + \lambda^{-(p-1)} \sum_{h=0}^{p-1} \lambda^{p-1-h} V_2(y_0(h)). \quad (20)$$

Вычисляя слагаемые правой части (20) с учетом (3) (8), (9) и (14) последовательно получим

$$\begin{aligned} & \lambda^{-(k-1)} \lambda^{-(p-1)} \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{k-1-n} V_1(x_{n+1}(0)) + \lambda^{-(p-1)} \sum_{h=0}^{p-1} \lambda^{p-1-h} V_2(y_0(h)) \leq \\ & \leq \kappa \kappa_d \lambda^{-(T-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n + c_2 M_f \sum_{h=0}^T \lambda^{-h} = \frac{\kappa \kappa_d \lambda^{-(T-1)}}{1-\lambda} + \frac{c_2 M_f (\lambda^{-T} - 1)}{\lambda^{-1} - 1} = C(T). \end{aligned} \quad (21)$$

Для всех k и $p \leq T-1$. Также из левой части неравенства (20) следует, что

$$C(T) \geq \lambda^{-(k-1)} \sum_{h=0}^{p-1} \lambda^{-h} V_2(y_k(h)) \geq (c_2 \lambda) \lambda^{-k} \sum_{h=0}^{p-1} |y_k(h)|^2 \quad (22)$$

и

$$\sum_{h=0}^{p-1} |y_k(h)|^2 \leq \bar{C}(T) \lambda^k. \quad (23)$$

Для всех k и $p \leq T-1$, где $\bar{C}(T) = \frac{C(T)}{c_2 \lambda}$. Поскольку $C(T) < \infty$ для всех

$T < \infty$, из (23) следует, что повторяющийся процесс (1), (3) с законом управления (4) слабо устойчив, что и требовалось доказать.

Следствие 1 Из условий Теоремы 1 следует, что вектор профиля повторения $y_k(p)$ стремится к равновесию в начале координат экспоненциально, т.е.

$$|y_k(p)|^2 \leq \bar{C}(T) \lambda^k, \quad (24)$$

где $\bar{C}(T) < \infty$ для всех $T < \infty$ и $0 < \lambda < \infty$.

В самом деле, из (22) следует, что

$$C(T) \geq (c_2 \lambda) \lambda^{-k} |y_k(p-1)|^2,$$

для всех $p \leq T < \infty$ и выполняется (24) при $\bar{C}(T) = \frac{C(T)}{c_2 \lambda}$.

Слабая устойчивость дифференциальных повторяющихся процессов. Рассмотрим нелинейный дифференциальный (непрерывно-дискретный) повторяющийся процесс с интервалом повторения $0 \leq t \leq T$, описываемый следующей моделью в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{k+1}(t) &= f_1(x_{k+1}(t), y_k(t), u_{k+1}(t)), \\ y_{k+1}(t) &= f_2(x_{k+1}(t), y_k(t), u_{k+1}(t)), \end{aligned} \quad (25)$$

где k – номер повторения, $x_k(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – вектор состояния на k -м повторении, $y_k(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – вектор профиля повторения на k -м повторении, $u_k(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ – вектор управления (входной вектор) на k -м повторении; f_1 , f_2 и g – нелинейные функции такие, что $f_1(0,0,0) = 0$, $f_2(0,0,0) = 0$ (последнее, как и в дискретном случае гарантирует состояние равновесия в начале координат).

Граничные условия заданы в виде последовательности начальных значений векторов состояния и начальных профилей повторения, удовлетворяют (3) и имеют следующий вид

$$\begin{aligned} x_{k+1}(0) &= d_{k+1}, k \geq 0, |d_{k+1}|^2 \leq \kappa_d \lambda_d^{k+1}, k \geq 0, \\ y_0(t) &= f(t), |f(t)|^2 \leq M_f, 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (26)$$

где элементы вектора $d_{k+1} \in \mathbb{R}^{n_x}$ – известные величины, элементы вектора $f(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – известные функции от t и $\kappa_d > 0$, $0 < \lambda_d < 1$. Эти ограничения являются непрерывным аналогом ограничений (2).

Для получения условий слабой устойчивости рассматриваемой системы (25), (26) введем следующую векторную функцию Ляпунова

$$V(x_{k+1}(t), y_k(t)) = \begin{bmatrix} V_1(x_{k+1}(t)) \\ V_2(y_k(t)) \end{bmatrix}, \quad (27)$$

где $V_1(x) \geq 0, V_2(y) \geq 0$. Рассмотрим закон управления вида (4) и введем следующее понятие слабой устойчивости.

Определение 2 *Нелинейный дифференциальный повторяющийся процесс (25), (26) с законом управления (4) называется слабо устойчивым, если*

$$\int_0^T |y_k(t)|^2 dt \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Определим оператор дивергенции (27) вдоль траекторий системы (25) как

$$\mathcal{D}_c V(x_{k+1}(t), y_k(t)) = \frac{dV_1(x_{k+1}(t))}{dt} + \Delta_k V_2(y_k(t)), \quad (29)$$

где $\Delta_k V_2(y_k(t)) = V_2(y_{k+1}(t)) - V_2(y_k(t))$.

Теорема 2 *Предположим, что существует векторная функция (27) и положительные κ, c_1, c_2 и c_3 такие, что*

$$V_1(x_{k+1}(0)) \leq \kappa |x_{k+1}(0)|^2, \quad (30)$$

$$c_1 |y|^2 \leq V_2(y) \leq c_2 |y|^2, \quad (31)$$

$$\mathcal{D}_c V(x_{k+1}(t), y_k(t)) \leq -c_3 |y_k(t)|^2. \quad (32)$$

Тогда нелинейный дифференциальный повторяющийся процесс (25), (26) с законом управления (4) слабо устойчив.

Доказательство. Из (31) и (32) следует, что существует такая $\bar{c}_3 < c_3$, что $\frac{1}{\lambda_d^2} < \zeta := 1 - \frac{\bar{c}_3}{c_2} < 1$ и

$$\mathcal{D}_c V(x_{k+1}(t), y_k(t)) \leq -c_3 |y_k(t)|^2 \leq -\bar{c}_3 |y_k(t)|^2. \quad (33)$$

Из (32) и (33) следует

$$\frac{dV_1(x_{k+1}(t))}{dt} + V_1(x_{k+1}(t)) + V_2(y_{k+1}(t)) - \zeta V_2(y_k(t)) \leq 0. \quad (34)$$

Решение неравенства (34) относительно $V_1(x_{k+1}(t))$ приводит к соотношению

$$V_1(x_{k+1}(t)) \leq V_1(x_{k+1}(0)) - \int_0^t [V_2(y_{k+1}(s)) - \zeta V_2(y_k(s))] ds. \quad (35)$$

Обозначим

$$W_{k+1}(t) := V_1(x_{k+1}(0)) - V_1(x_{k+1}(t)),$$

$$H_k(t) := \int_0^t V_2(y_k(s)) ds,$$

и перепишем (35) в виде

$$H_{k+1}(t) \leq \zeta H_k(t) + W_{k+1}(t). \quad (36)$$

Решая неравенство (36) получим

$$H_n(t) \leq \zeta^n H_0(t) + \sum_{k=1}^n W_k(t) \zeta^{n-k}, \quad (37)$$

или

$$\sum_{k=1}^n V_1(x_k(t)) \zeta^{n-k} + \int_0^t V_2(y_n(s)) ds \leq \sum_{k=1}^n V_1(x_k(0)) \zeta^{n-k} + \zeta^n \int_0^t V_2(y_0(s)) ds.$$

Последнее неравенство эквивалентно следующему соотношению

$$\sum_{k=1}^n V_1(x_k(t)) \zeta^{-k} + \zeta^{-n} \int_0^t V_2(y_n(s)) ds \leq \zeta^{-n} \sum_{k=1}^n V_1(x_k(0)) \zeta^{-k} + \int_0^t V_2(y_0(s)) ds. \quad (38)$$

Вычисляя слагаемые в правой части (38) (с учетом граничных условий, условий (30) и (31)) получим

$$\begin{aligned} & \zeta^{-n} \sum_{k=1}^n V_1(x_k(0)) \zeta^{-k} + \int_0^t V_2(y_0(s)) ds \leq \sum_{k=1}^n \kappa \kappa_d \lambda_d^k \zeta^{-k} + \int_0^t c_2 M_f ds \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \kappa \kappa_d \zeta^k + c_2 M_f T = \frac{\kappa \kappa_d}{1 - \zeta} + c_2 M_f T = C(T). \end{aligned} \quad (39)$$

из (38) и (39) следует, что

$$c_1 |x_n(t)|^2 \zeta^{-n} \leq C(T), t \in [0, T], n = 0, 1, \dots \quad (40)$$

Поскольку $C(T) < \infty$ для всех $T < \infty$, из (40) следует, что рассматриваемый процесс слабо устойчив, что и требовалось доказать.

Заметим, что в отличие от дискретного случая здесь без дополнительных условий на функцию Ляпунова нельзя гарантировать результат, аналогичный установленному в следствии 1. Вывод таких условий – предмет дальнейших исследований

Заключение. В данной работе на базе метода векторных функций Ляпунова получены достаточные условия слабой устойчивости нелинейных дискретных и дифференциальных повторяющихся процессов. Этот тип устойчивости интересен тем, что дает более «мягкие» условия для синтеза закона управления, чем экспоненциальная устойчивость, условия которой могут быть слишком сильными в случае практических

приложений. В связи с этим, работа имеет серьезные перспективы дальнейшего применения результатов к задачам управления с итеративным обучением.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-38-00192 мол_а

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rogers E., Galkowski K., Owens D. H. Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes // Lecture Notes in Control and Inform. Sci. – 2007 – Vol. 349. – 466 p.
2. Hladowski L., Galkowski K., Cai Z., Rogers E., Freeman C., Lewin P. Experimentally supported 2D systems based iterative learning control law design for error convergence and performance // Control Engineering Practice. – 2010. – Vol. 18, – P. 339—348.
3. Pakshin P., Gałkowski K., Rogers E. Stability and stabilization of systems modeled by 2D nonlinear stochastic Roesser models // Proc. 7th Int. Workshop on Multidimensional (nD) systems. – 2011. – P. 1–6.
4. Yeganefar Nima, Yeganefar Nader, Ghamgui M., Moulay E. Lyapunov Theory for 2-D Nonlinear Roesser Models: Application to Asymptotic and Exponential Stability // IEEE Transact. Automat. Control. – 2013. – V. 58. 1299–1304.
5. Emelianova J., Pakshin P., Galkowski K., Rogers E. Vector Lyapunov Function Based Stability of a Class of Applications Relevant 2D Nonlinear Systems // IFAC Proceedings Volumes (IFAC PapersOnLine)– Vol. 47, Issue 3. – 2014. – P. 8247–8252.
6. Paszke W., Dabkowski P., Rogers E., K. Gałkowski, New results on strong practical stability and stabilization of discrete linear repetitive processes // Systems & Control Letters. – 2015. – Vol.75. – P. 22–29.
7. Emelianova J., Pakshin P., Galkowski K., Rogers E. Stability of Nonlinear Discrete Repetitive Processes with Markovian Switching // Syst. & Control Lett. – 2015. – Vol.75. – P. 108–116.
8. Emelianov M., Pakshin P., Galkowski K., Rogers E. Stability and Stabilization of Differential Nonlinear Repetitive Processes with Applications // IFAC Proceedings Volumes (IFAC PapersOnLine). – Vol. 47, Issue 3. – 2014. – P. 5467–5472.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОГРАММНОГО МНОГООБРАЗИЯ С КОМПАКТНОЙ ОКРЕСТНОСТЬЮ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

С.С. Жуматов (Институт математики и математического моделирования,
050010, Республика Казахстан, Алматы, 10, ул. Пушкина, 125) E-
mail: sailau.math@mail.ru,

ON A STABILITY OF AUTOMATIC CONTROL SYSTEM'S PROGRAM MANIFOLD WITH COMPACT NEIBOORHOOD

Zumatov S.S. (Institute of mathematics and mathematical modelling,
050010, Almaty, 10, Pushkin str. 125, Republic of Kazakstan)

Keywords: program manifold, automatic control system, absolute stability, Lyapunov's function.

Введение. Уравнения и методы классической механики успешно используются для решения задач составления уравнений динамики управляемых систем, содержащие элементы различной природы [1-5]. Задачи такого типа с различными их видоизменениями названы обратными задачами дифференциальных систем [3]. Теория обратных задач дифференциальных систем является обобщением методов решения классических обратных задач динамики. Еругиным Н.П. решена задача построения множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую, которая стала исходной для решения обратных задач дифференциальных систем. В дальнейшем она развивалась как задача построение систем дифференциальных уравнений по заданному интегральному многообразию, как решение различных обратных задач динамики, как построение систем программного движения. Обзор работ по этим направлениям и обширная библиография приведены в [4]. По работам посвященных построению систем автоматического управления по заданному программному многообразию сделан обзор в монографии [5]. Последующие исследования по моделированию динамики сложных систем проведены в работах [6-14].

В работе [3] получены достаточные условия устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости интегральных многообразий, обладающих компактной окрестностью, систем дифференциальных уравнений. В данной работе рассматривается задача определения устойчивости программного многообразия систем автоматического управления, обладающей компактной окрестностью.

Пусть управляемая система [1-5]

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in I = [0, \infty[\quad (1)$$

где x — n -вектор состояния объекта; u — r -вектор управления ; f — n -вектор-функция , обладает $(n - s)$ -мерным интегральным многообразием

$$\Omega \equiv \omega(t, x) = 0, \quad (2)$$

где ω — s -вектор.

В силу того, что многообразие $\Omega(t)$ является интегральным для системы (1) имеет место

$$\dot{\omega} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot f(t, x, u) = F(t, \omega, u), \quad (3)$$

где $F(t, 0, u) \equiv 0$ - некоторая s -вектор-функция ; при $F = F(t, \omega, \xi(\omega, t))$ система (3) называется замкнутой; $\xi = \xi(\omega, t)$ - множество законов обратной связи [5].

Введем следующие определения [3]:

Определение 1. Расстоянием от точки x до многообразия $\Omega(t)$ назовем $\rho(x, \Omega(t)) = \inf_{y(t) \in \Omega(t)} \rho(x, y(t))$.

Определение 2. ε -окрестностью $\Omega_\varepsilon(t)$ многообразия $\Omega(t)$ называется множество точек x удовлетворяющих условию $\rho(x, \Omega(t)) \leq \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$.

Определение 3. Многообразие $\Omega(t)$ обладает компактной окрестностью $\Omega_\varepsilon(t)$, если существует такое $h > 0$, что множество точек $\Omega_h(t)$ является компактом при всех $t \geq t_0$.

Определение 4. Ограниченная вектор-функция ω допускает бесконечно малый высший предел, если для всякого сколь угодно малого $\delta > 0$ существует такое $\gamma > 0$, что при всех $\rho(x, \Omega(t)) \leq \gamma$ и $t \geq t_0$ выполняется неравенство $\|\omega\| \leq \delta$.

Определение 5. Если ограниченная функция $V(t, x, \omega)$ такова, что для всякого сколь угодно малого $l > 0$ найдется такое отличное от нуля $\delta < \delta_1$, если существует, что для t, x, ω , подчиненных неравенствам

$$\|\omega\| \leq \delta, \quad \rho(x, \Omega(t)) \leq L, \quad t \geq t_0,$$

будет выполняться ограничение $|V| < l$, то функция V допускает бесконечно малый высший предел.

Постановка задачи: получить условие абсолютной устойчивости программного многообразия систем автоматического управления, обладающей компактной окрестностью $\Omega_\varepsilon(t)$.

Мы будем исследовать случай, когда $\|\omega\| = \rho(x, \Omega(t))$.

Достаточные условия абсолютной устойчивости программного многообразия систем автоматического управления, обладающей компактной окрестностью $\Omega_\varepsilon(t)$ устанавливаются аналогично теоремам Ляпунова об устойчивости тривиального решения систем уравнений возмущенного движения.

Рассмотрим систему непрямого управления

$$\dot{x} = f(t, x) - B\xi, \quad \dot{\xi} = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T \omega - R\xi, \quad (4)$$

обладающую заданным интегральным многообразием $\Omega \equiv \omega(t, x) = 0$, при условии $R > 0$. Здесь x, f — n -мерные, ξ, σ, φ — r -мерные, ω — s -мерный векторы, $t \in I = [0, \infty[$, $B (n \times r)$, $P (s \times r)$, $R (r \times r)$ — матрицы, нелинейная вектор-функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad 0 < \sigma^T \varphi(\sigma) \leq \sigma^T K \sigma \quad \forall \sigma \neq 0. \quad (5)$$

Так как Ω является интегральным многообразием системы (4), то при $F(t, x, \omega) = -A\omega$ имеем

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= -A\omega - HB\xi, \quad \dot{\xi} = \varphi(\sigma), \\ \sigma &= P^T \omega - R\xi, \quad H = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad 0 < \sigma^T \varphi(\sigma) \leq \sigma^T K \sigma \quad \forall \sigma \neq 0. \quad (7)$$

$$K = K^T > 0, \quad K = \text{diag}(k_1, \dots, k_r) > 0.$$

Система (6) имеет единственное положение равновесия $\omega = \sigma = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\det \begin{vmatrix} A & HB \\ -P^T & R \end{vmatrix} \neq 0.$$

Теорема. Пусть система (6) асимптотически устойчива относительно вектор-функции ω для $\varphi(\sigma) = h\sigma$, $h \in (0, K]$ и при нелинейной функции $\varphi(\sigma)$ удовлетворяющей условиям (7) существуют матрицы $L = L^T > 0$, $\beta = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_r) > 0$.

Тогда для абсолютной устойчивости программного многообразия системы (6) обладающее компактной окрестностью $\Omega_\varepsilon(t)$ достаточно выполнения соотношений

$$\gamma_1(\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2) \leq V \leq \gamma_2(\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2), \quad (8)$$

$$g_1(\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2) \leq -\dot{V} \leq g_2(\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2), \quad (9)$$

и оно является экспоненциально абсолютно устойчивым.

Доказательство. Если существуют матрицы $L = L^T > 0$, $\beta = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_r) > 0$, то для системы (6, 7) можно построить функцию Ляпунова

$$V = \omega^T L_0 \omega + 2\omega^T L_1 \xi + \xi^T L_2 \xi + \int_0^\sigma \varphi^T(\sigma) \beta d\sigma > 0, \quad (10)$$

где

$$L = \begin{vmatrix} L_0 & L_1 \\ L_1^T & L_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \beta = \text{diag} \|\beta_1, \dots, \beta_r\| > 0.$$

Производная этой функции по времени t , в силу системы (6, 7) имеет следующий вид

$$\begin{aligned} -\dot{V} = & \omega^T G_0 \omega + 2\omega^T G_1 \xi + \xi^T g \xi + 2\omega^T G_2 \varphi(\sigma) + \\ & + 2\xi^T G_3 \varphi(\sigma) + \varphi^T \rho \varphi > 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$G_0 = A^T L_0 + L_0 A; \quad G_1 = L_0 B + A^T L_1; \quad g = B L_1 + L_0 B^T;$$

$$G_2 = -L_1 + \frac{1}{2} A^T P \beta; \quad G_3 = -L_2 + B^T P \beta; \quad \rho = \beta R;$$

$$G = \begin{vmatrix} G_0 & G_1 & G_2 \\ G_1^T & g & G_3 \\ G_2^T & G_3^T & \rho \end{vmatrix} > 0. \quad (12)$$

Для того, чтобы было $-\dot{V} > 0$, достаточно выполнения $G > 0$. Таким образом программное многообразие абсолютно устойчиво при выполнении условия (12).

На основании свойства (7) и структуры обратной связи σ справедливы следующие оценки:

$$0 < \int_0^\sigma \varphi^T(\sigma) \beta d\sigma < \frac{\beta_1 k_1}{2} \|\sigma\|^2; \quad 0 < \|\varphi\|^2 < k_1 \|\sigma\|^2; \quad (13)$$

$$\rho_1 \|\omega\|^2 + \nu_1 \|\xi\|^2 \leq \|\sigma\|^2 \leq \rho_2 \|\omega\|^2 + \nu_2 \|\xi\|^2,$$

где $k_1 = \min\{k_i\}$, $\beta_1 = \{\beta_i\}$ ($i = 1, \dots, r$); k_i - собственные числа матрицы K , а ρ_1, ρ_2 и ν_1, ν_2 определяются так:

$$\rho_1 = \min_{\omega \neq 0} \frac{\omega^T P P^T \omega}{\omega^T \omega}; \quad \rho_2 = \max_{\omega \neq 0} \frac{\omega^T P P^T \omega}{\omega^T \omega};$$

$$\nu_1 = \min_{\xi \neq 0} \frac{\xi^T R R^T \xi}{\xi^T \xi}; \quad \nu_2 = \max_{\xi \neq 0} \frac{\xi^T R R^T \xi}{\xi^T \xi}.$$

В силу положительной определенности V (104) и $-\dot{V}$ (11), с учетом оценок (13), имеют место соотношения

$$\gamma_1 (\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2) \leq V \leq \gamma_2 (\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2); \quad (14)$$

$$g_1 (\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2) \leq -\dot{V} \leq g_2 (\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2). \quad (15)$$

Здесь

$$\gamma_1 = \min \left\{ l_1 + \frac{\beta_1 k_1}{2} \rho_1; l_1 + \frac{\beta_1 k_1}{2} \nu_1 \right\};$$

$$\gamma_2 = \max \left\{ l_2 + \frac{\beta_1 k_1}{2} \rho_2; l_2 + \frac{\beta_1 k_1}{2} \nu_2 \right\};$$

$$g_1 = \min \{ g_0 \{1 + k_1 \rho_2; 1 + k_1 \nu_2\} \}$$

$$g_2 = \max \{ g_s \{1 + k_1 \rho_2; 1 + k_1 \nu_2\} \},$$

l_1, l_2, g_0, g_s - наименьшие, наибольшие значения собственных чисел L и G .

Пусть $\|z\|^2 = \|\omega\|^2 + \|\xi\|^2$. Тогда, принимая во внимание соотношения (14), (15), получим оценки

$$V_0 \exp \alpha_1 (t - t_0) \leq V \leq V_0 \exp \alpha_2 (t - t_0), \quad (16)$$

$$\gamma_2^{-1} V_0 \exp \alpha_1 (t - t_0) \leq \|z\|^2 \leq \gamma_1^{-1} V_0 \exp \alpha_2 (t - t_0), \quad (17)$$

где

$$V_0 = z_0^T L z_0 + \int_0^{\sigma_0} \varphi^T(\sigma) \beta d\sigma; \quad z_0 = z(t_0); \quad \sigma_0 = \sigma(t_0);$$

$$\alpha_1 = -g_2 / \gamma_1; \quad \alpha_2 = -g_1 / \gamma_2.$$

Откуда в силу соотношений (14) мы имеем

$$\|z\|^2 \leq \gamma_1^{-1} \gamma_2 \|z(t_0)\|^2 \exp 2\alpha(t - t_0), \quad t \geq t_0, \quad \alpha = \frac{\alpha_2}{2}, \quad (18)$$

или

$$\|z\|^2 \leq N \|z(t_0)\|^2 \exp \alpha(t - t_0),$$

где $N = \sqrt{\gamma_2 \gamma_1^{-1}}$ и $\|z(t_0)\|$ достаточно мала.

Таким образом программное многообразие экспоненциально абсолютно устойчиво.

1. Майгарин Б.Ж. Устойчивость и качество процессов нелинейных нелинейных систем автоматического управления. Алма-Ата. 1981. -316 с.

2. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнению, имеющих заданную интегральную кривую // Прикл. Мат. и мех., 1952. Т. 16., вып. 6. С. 653-670.

3. Галиуллин А.С., Мухаметзяноа И.А., Мухарлямов Р.Г. и др. Построение систем программного движения. М., 1971. 352 с.

4. Галиуллин А.С., Мухаметзяноа И.А., Мухарлямов Р.Г. Обзор исследований по аналитическому построению систем программного движения // Вестник Российского ун-та Дружбы народов. 1994. № 1. С. 5-21.

5. Жуматов С.С., Крементуло В.В., Майгарин Б.Ж. Второй метод Ляпунова в задачах устойчивости и управления движением. Алматы. 1999. 228 с.

6. Layton R.A. Principle of Analytical System Dynamics. -- N.-Y. Springer, 1998. - 158 p.

7. Сиразетдинов Т.К., Родионов В.В., Сиразетдинов Р.Т. Динамические модели экономического региона. -- Казань: Изд-во "Фэн" Академии Наук РТ. 2005. - 320 с.

8. Meiser Peter, Enge Olaf, Freudenberg Heiko and Kielau Gerald. Electromechanical Interactions in Multibody Systems Containing Electromechanical Drives//Multibody System Dynamics. 1. 1997. -- P.281-302.

9. Мухарлямов Р.Г. Моделирование динамических процессов различной природы// Проблемы аналитической механики и теория устойчивости . Сборник трудов, посвященный памяти академика В.В.Румянцева. М.: Наука, 2009. --С.310-324.

10. Мухарлямов Р.Г. Уравнения движения механических систем. Изд-во РУДН, 2001. - 99 с.

11. Mukharlyamov R.G. Differential-Algebraic Equations of Programmed Motions of Lagrangian Dynamical Systems // Mechanics of Solids.-- 2011. -- Vol. 46, No. 4, -- P. 534-543.

12. Mukharlyamov R.G. Simulation of Control Processes, Stability and Stabilization of Systems with Program Constraints // Journal of Computer and Systems Sciences International. --2015. --Vol.54, No.1, --P.13-26.

13. Libre J., Ramirez R. Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications. Springer International Publishing Switzerland. --2016. --266 p.

14. Жуматов С.С. Частотные критерии конвергентности систем управлений в окрестности программного многообразия // Нелинейные колебания.-- Киев. 2016 . Т.28. № 3. С. 367-375.

СТАБИЛИЗАЦИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ СПУТНИКА ПРИ ПОМОЩИ МАГНИТНЫХ МОМЕНТОВ

В.И. Каленова В.И., В.М. Морозов

(НИИ механики МГУ, Россия,
119192, Москва, Мичуринский пр-т, 1)

E-mail: kalen@imec.msu.ru

ON STABILIZATION OF RELATIVE EQUILIBRIUM OF SATELLITE BY MAGNETIC ACTUATORS

V.I. Kalenova, V.M. Morozov

(LMSU Institute of Mechanics, Michurinskiy pr. 1,
119192, Moscow, Russia)

Keywords: stabilization, satellite, stability, reducible time-varying systems, controllability, magnetic control, control.

Введение. В системах ориентации спутников во многих случаях используется взаимодействие спутника с гравитационным и магнитным полями Земли. В последнее время магнитные системы ориентации широко применяются в практике космических исследований, особенно для ориентации малых спутников. Этим вопросам посвящено большое число публикаций (см., например, [1-4]). Одним из важных аспектов при исследовании возможностей магнитной стабилизации является вопрос об управляемости системы. Обзор работ этого направления содержится в [5].

Постановка задачи. Будем предполагать, что центр масс искусственного спутника Земли (ИСЗ) движется по круговой орбите, наклоненной к плоскости магнитного экватора на угол I . Пусть $OXYZ$ – орбитальная система координат с началом в центре масс ИСЗ: ось OZ направлена по радиусу-вектору центра масс ИСЗ; OY – по нормали к плоскости орбиты. $Oxyz$ – подвижная система координат, оси которой направлены по главным центральным осям инерции ИСЗ.

Обозначим: $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ – угловая скорость вращения спутника относительно системы координат $Oxyz$; ω_0 – величина угловой скорости движения центра масс ИСЗ по орбите.

Уравнения движения ИСЗ около центра масс допускают стационарные решения, отвечающие положениям относительного равновесия, в которых оси инерции спутника $Oxyz$ совпадают с осями орбитальной системы координат $OXYZ$ [6].

Управляющий момент формируется силами взаимодействия магнитных катушек, установленных на спутнике, с магнитным полем Земли

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{b}$$

Здесь $\mathbf{m} = [m_1 \ m_2 \ m_3]^T$ - магнитный дипольный момент спутника; \mathbf{b} - индукция геомагнитного поля в точке расположения центра масс спутника, которое аппроксимируется магнитным диполем в проекциях на оси $Oxyz$

$$\mathbf{b}(\tau) = \begin{pmatrix} b_1(\tau) \\ b_2(\tau) \\ b_3(\tau) \end{pmatrix} = \frac{\mu}{a^3} \begin{pmatrix} \cos \tau \sin I \\ -\cos I \\ 2 \sin \tau \sin I \end{pmatrix}$$

I - угол наклона плоскости орбиты ИСЗ к плоскости магнитного экватора; μ - постоянная магнитного поля Земли, a - радиус орбиты; $\tau = \omega_0 t$ - безразмерное время.

Магнитный момент \mathbf{m} рассматривается далее как управляющий момент.

Линеаризованные в окрестности положения относительного равновесия, в котором оси системы координат $Oxyz$ совпадают с соответствующими осями $OXYZ$, уравнения управляемого движения имеют вид [5]

$$\ddot{x}^{(1)} + D_1 \dot{x}^{(1)} + R_1 x^{(1)} = B_1(\tau)u \quad (1)$$

$$\ddot{x}^{(2)} + R_2 x^{(2)} = B_2(\tau)u \quad (2)$$

$$\text{Здесь } x^{(1)} = \|x_1 \ x_3\|^T, \quad x^{(2)} = x_2; \quad u = \frac{\mu}{a^3} m.$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} -\kappa_1 & 0 \\ 0 & -\kappa_3 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 & -g_1 \\ g_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = -\kappa_2,$$

$$g = J_2 - J_1 - J_3, \quad g_i = g / J_i, (i=1,3)$$

$$\kappa_1 = 4(J_3 - J_2) / J_1, \kappa_2 = 3(J_3 - J_1) / J_2, \kappa_3 = (J_1 - J_2) / J_3$$

x_1, x_2, x_3 - малые углы рассогласования между осями орбитальной и подвижной системами координат.

Матрицы $B_i(\tau)$ в этом случае имеют вид

$$B_1(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 2\beta_1 \sin \tau & \beta_4 \\ -\beta_5 & -\beta_3 \cos \tau & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2(\tau) = \begin{pmatrix} -2\beta_2 \sin \tau & 0 & \beta_2 \cos \tau \end{pmatrix}$$

$$\text{где } \beta_j = \sin I / J_j, \quad (j=1,2,3); \quad \beta_4 = \cos I / J_1, \quad \beta_5 = \cos I / J_3$$

Задача стабилизации состоит в том, чтобы построить управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1), (2).

Переход к стационарной системе. Система (1), (2) является линейной системой, в которой матрицы коэффициентов при x, \dot{x} постоянны, а матрицы коэффициентов при управлении зависят от времени. Эта система относится к классу линейных нестационарных систем, содержащих управление и допускающих приведение к стационарным системам в расширенном пространстве состояний [7,8]. Согласно методике [7,8] введем векторы

$$f^{(1)}(\tau) = \begin{vmatrix} \cos \tau & \sin \tau & 1 \end{vmatrix}^T, \quad f^{(2)}(\tau) = \begin{vmatrix} \cos \tau & \sin \tau \end{vmatrix}^T \quad (3)$$

Тогда матрицы коэффициентов при управлении в системе (1), (2) могут быть представлены в виде

$$B_1 = \sum_1^3 B_{i1} f_i^{(1)}(\tau), \quad B_2 = \sum_1^2 B_{j2} f_j^{(2)}(\tau);$$

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad B_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 2\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad B_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \beta_4 \\ -\beta_5 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (4)$$

$$B_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \beta_2 \end{vmatrix}, \quad B_{22} = \begin{vmatrix} -2\beta_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Векторы f_1^T, f_2^T , определенные по формулам (3), удовлетворяют системам обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{f}^{(i)}(\tau) = S_i f^{(i)}(\tau), \quad (i=1,2) \quad S_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad S_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (5)$$

Введем следующие замены переменных [7]

$$x^{(1)} = F_1^T(\tau) y^{(1)}, \quad F_1^T(\tau) = f^{(1)T}(\tau) \otimes E_2, \quad y^{(1)} (6 \times 1) \quad (6)$$

(2×6)

$$x^{(2)} = F_2^T(\tau) y^{(2)}, \quad F_2^T(\tau) = f^{(2)T}(\tau), \quad y^{(2)} (2 \times 1) \quad (7)$$

(1×2)

Здесь E_2 – единичная (2×2) -матрица, символ \otimes означает кронекеровское произведение матриц [9].

Тогда замена переменных (6), (7) приводит нестационарную систему (1), (2) к стационарной системе

$$\ddot{y}^{(1)} + G_1 \dot{y}^{(1)} + N_1 y^{(1)} = Q_1 u, \quad \ddot{y}^{(2)} + D_2 \dot{y}^{(2)} + N_2 y^{(2)} = Q_2 u \quad (8)$$

$$G_1 = 2(S_1^T \otimes E_2) + E_3 \otimes D_1, \quad N_1 = E_3 \otimes R_1 + S_1^T \otimes D_1 + (S_1^T)^2 \otimes E_2,$$

$$D_2 = 2S_2^T, \quad N_2 = E_2 \otimes R_2 + (S_2^T)^2, \quad Q_1 = \begin{Bmatrix} B_{11}^T & B_{21}^T & B_{31}^T \end{Bmatrix}^T, \quad Q_2 = \begin{Bmatrix} B_{12}^T & B_{22}^T \end{Bmatrix}^T$$

Заметим, что стационарная система (8) избыточна, каждой компоненте исходного вектора соответствуют несколько компонент расширенного вектора состояния:

$$x^{(1)}(2 \times 1) \rightarrow y^{(1)}(6 \times 1); \quad x^{(2)} \rightarrow y^{(2)}(2 \times 1)$$

Стационарная система (8) состоит из трех независимых подсистем, связанных только через управление, относительно переменных $(z^{(1)}, z^{(2)}); z^{(3)}; z^{(4)}$, где

$$z^{(1)} = \begin{Bmatrix} y_1 & y_2 \end{Bmatrix}^T, \quad z^{(2)} = \begin{Bmatrix} y_3 & y_4 \end{Bmatrix}^T, \quad z^{(3)} = \begin{Bmatrix} y_5 & y_6 \end{Bmatrix}^T, \quad z^{(4)} = \begin{Bmatrix} y_7 & y_8 \end{Bmatrix}^T$$

$$\begin{cases} \ddot{z}^{(1)} + D_1 \dot{z}^{(1)} + 2\dot{z}^{(2)} + (R_1 - E_2)z^{(1)} + D_1 z^{(2)} = B_{11}u \\ \ddot{z}^{(2)} + D_1 \dot{z}^{(2)} - 2\dot{z}^{(1)} + (R_1 - E_2)z^{(2)} - D_1 z^{(1)} = B_{21}u \end{cases} \quad (9)$$

$$\ddot{z}^{(3)} + D_1 \dot{z}^{(3)} + R_1 z^{(3)} = B_{31}u \quad (10)$$

$$\ddot{z}^{(4)} + D_2 \dot{z}^{(4)} + N_2 z^{(4)} = Q_2 u \quad (11)$$

Система (9) содержит только управление u_2 , а в системы (10) и (11) входят управления u_1, u_3 .

Нетрудно показать, что система (9) управляема, если $\cos I \neq 0$; система (10), (11) управляемы, если $\sin I \neq 0$. Эти системы связаны общими управлениями. Будем далее полагать, что $\cos I \neq 0$, $\sin I \neq 0$. Не приводя полного исследования управляемости, далее будем считать, что стационарная система (9)-(11) управляема.

Построение стабилизирующего управления. Стабилизирующее управление для исходной нестационарной системы (1),(2) можно строить на основе приведенной стационарной системы (9)-(11) [7].

Задача стабилизации системы состоит в том, чтобы построить управление u , обеспечивающее стремление к нулю компонент вектора состояния

$$Z(\tau), \quad Z(\tau) = \begin{Bmatrix} z^{(1)T} \dot{z}^{(1)T} z^{(2)T} \dot{z}^{(2)T} z^{(3)T} \dot{z}^{(3)T} z^{(4)T} \dot{z}^{(4)T} \end{Bmatrix}^T \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty$$

Управление будем выбирать из условия минимума квадратичного функционала

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[Z^T(\tau) \Theta Z(\tau) + u^T(\tau) \Gamma u(\tau) \right] d\tau,$$

где Θ и Γ – положительно определенные постоянные матрицы размерности 16×16 и 3×3 соответственно. Оптимальное управление имеет вид [10]

$$u(\tau) = -KZ(\tau), \quad K = -\Gamma^{-1} Q^T L \quad (12)$$

Матрица L размерности 16×16 является положительно определенным решением уравнения Риккати

$$LR + R^T L - LQ\Gamma^{-1}Q^T L + \Theta = 0$$

Здесь матрицы $R(16 \times 16), Q(16 \times 3)$ – матрицы системы (9)-(11), записанной в форме Коши.

Синтезированное на основе расширенной стационарной системы управляющее воздействие является функцией переменных Z стационарной системы более высокого порядка, чем исходная нестационарная система. Для введения управления непосредственно в исходную систему следует преобразовать вектор $Z(16 \times 1)$ в другой вектор X той же размерности, который содержит векторы состояния $x(3 \times 1), \dot{x}(3 \times 1)$ исходной системы (1),(2) и дополнительный вектор, выбранный так, чтобы вектор X и вектор состояния стационарной системы Z были связаны невырожденным преобразованием

$$X = T(\tau)Z, \quad Z = T^{-1}(\tau)X \quad (13)$$

Тогда уравнения для вектора X можно представить в виде

$$\dot{X} = MX + C(\tau)u \quad (14)$$

$$M = \text{diag}(A_1, A_1, A_1, A_2, A_2), \quad C(\tau) = \begin{pmatrix} B_1(\tau) \\ -\sin(\tau)B_{11}(\tau) + \cos(\tau)B_{21}(\tau) \\ B_{31}(\tau) \\ B_2(\tau) \\ -\sin(\tau)B_{12}(\tau) + \cos(\tau)B_{22}(\tau) \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -R_1 & -D_1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -R_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Нестационарная система (14) включает в себя исходную систему (1), (2) в качестве подсистемы. Управление (12), построенное для стационарной системы (9)-(11) можно вводить в систему (14) в виде $u(\tau) = -KT^{-1}(\tau)X(\tau)$.

Было проведено численное моделирование указанного алгоритма в пакете Matlab. Некоторые результаты моделирования для координат x_1, x_2, x_3 и их скоростей приведены на рис. 1- 3.

Значения параметров:
 $I = \pi / 6; J_1 = 20kgm^2; J_2 = 25kgm^2; J_3 = 10kgm^2; Q = E_2, \Gamma = 100.0E_3$

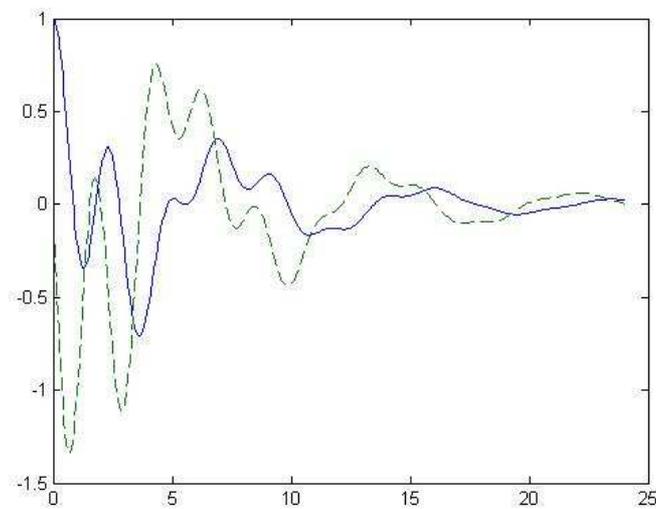


Рис.1. $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)$

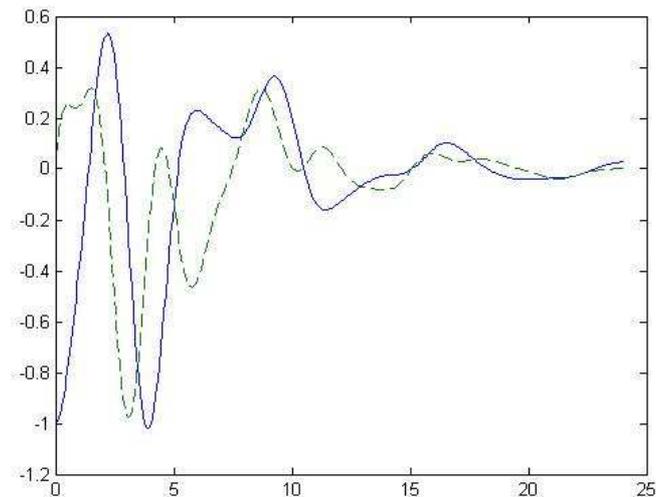


Рис. 2. $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)$

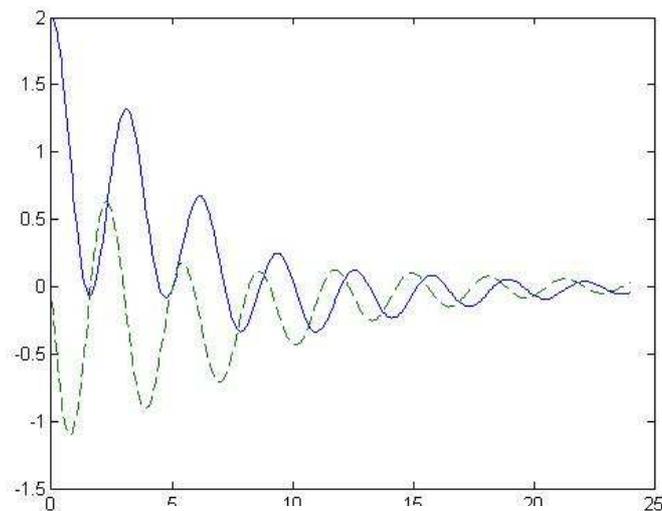


Рис. 3. $x_3(\tau), \dot{x}_3(\tau)$

Таким образом, продемонстрирована эффективность предложенного метода построения алгоритма стабилизации, обеспечивающего асимптотическую устойчивость положения относительного равновесия спутника при использовании управления магнитными моментами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Psiaki M. Magnetic torque attitude control via asymptotic periodic linear quadratic regulation. *Journal of guidance, control, and dynamics*. 2001. Vol. 24, no. 2. 386-304.
2. Bushenkov V., Ovchinnikov M., Smirnov V. Attitude stabilization of a satellite by magnetic coils. *Acta Astronautica* Vol. 50, No. 12, pp. 721–728, 2002
3. Degtyarev A.A., Hao-Chi Chang, Ovchinnikov M.Yu. Attitude motion of the axisymmetrical gyrostatt-satellite affected by active magnetic control. *Keldysh Institute preprints*, 2009, No. 47, 31 p. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-47&lg=e>
4. Использование магнитных катушек и магнитометра для обеспечения трехосной ориентации спутника / Д.С.Иванов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 47. 20 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-47/>
5. Yaguang Yang. Controllability of Spacecraft Using Only Magnetic Torques. *IEEE Trans. On Aerospace and Electronic System*. 2016. Vol. 52. №2. 955-962.
6. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: изд-во Моск. Ун-та. 1975. 308с.
7. Каленова В.И., Морозов В.М. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. М.: Физматлит, 2010. -208с.

8. Каленова В.И., Морозов В.М. Приводимость линейных нестационарных систем второго порядка с управлением и наблюдением. В.И.Каленова, В.М.Морозов. //ПММ. Т.76. 2012. Вып. 4. С.576-588.
9. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука. 1969. -368с.
- 10.Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука. 1978. 552с.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПУАНКАРЕ-ПОНТРЯГИНА В ОКРЕСТНОСТИ НЕИЗОЛИРОВАННЫХ РАВНОВЕСИЙ ПОРОЖДАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Л.А. Климина, Б.Я. Локшин, Ю.Д. Селюцкий

(НИИ механики МГУ, Россия, 119192, Москва, Мичуринский просп., 1)

E-mail: klimina@imec.msu.ru

APPLYING OF THE POINCARÉ-PONTRYAGIN APPROACH IN THE NEIGHBORHOOD OF UNISOLATED FIXED POINTS OF THE GENERATING SYSTEM

L.A. Klimina, B.Ya. Lokshin, Yu.D. Selyutskiy

(LMSU Institute of Mechanics, Michurinsky prosp.,1, 119192, Moscow, Russia)

Keywords: autonomous dynamical system, periodic trajectories, the Poincaré-Pontryagin theorem, local generating system.

Аннотация. Рассматривается близкая к гамильтоновой автономная динамическая система с одной степенью свободы, с цилиндрической фазовой координатой. Система представляет собой математическую модель аэродинамического маятника с крылом, расположенным перпендикулярно державке. Неконсервативные силы описываются трансцендентными функциями от угловой координаты и обобщенной скорости. Оказывается, что трансцендентность неконсервативных сил «приводит» к наличию в системе периодических траекторий, не выявляемых при прямом применении метода Пуанкаре-Понтрягина [1, 2], что не характерно для полиномиальных систем [3].

«Дополнительные» периодические траектории обнаружены (путем построения дополнительной гамильтоновой системы, локально приближающей полную систему) в малой окрестности множества неизолированных равновесий исходной порождающей гамильтоновой системы.

Построены бифуркационные диаграммы периодических траекторий, существующих вне «пограничного слоя» и внутри него, данные диаграммы склеиваются естественным образом. Здесь под «пограничным слоем» понимается малая окрестность особого множества, требующая отдельного исследования [4].

Введение. Рассмотрим автономную динамическую систему с одной степенью свободы с цилиндрическим фазовым пространством. Кинетическая и потенциальная энергии системы могут быть представлены в виде: $T = 0.5a_1k(\varphi)\dot{\varphi}^2$ и $U = a_2u(\varphi)$, где φ – угловая координата; $k(\varphi) > 0$,

$u(\varphi) \geq 0$ – безразмерные функции; a_1, a_2 – положительные размерные коэффициенты.

Предположим, что система близка к гамильтоновой. Тогда уравнения движения могут быть представлены в следующей безразмерной форме:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\partial H_0}{\partial p}; \quad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial H_0}{\partial \varphi} + \varepsilon Q(\varphi, p). \quad (1)$$

$$H_0 = 0.5k^{-1}(\varphi)p^2 + u(\varphi).$$

Здесь $Q(\varphi, p)$ соответствует обобщенным неконсервативным силам, \square – малый положительный параметр. Обозначим $H_0(\varphi, p) = h$ – уровень энергии порождающей гамильтоновой системы с гамильтонианом H_0 . Будем считать, что правая часть системы (1) аналитична по φ и p и 2π –периодична по φ .

Известная задача [1, 2] состоит в том, чтобы описать периодические траектории (2π –периодические и циклы) системы (1) при достаточно малых \square , по крайней мере, оценить число таких траекторий [3]. Для решения этой задачи применяют метод Пуанкаре-Понтрягина, устанавливающий достаточные условия существования периодических траекторий (1).

Введем следующие обозначения: $f(h, \varphi) = \pm \sqrt{2(h - u(\varphi))k(\varphi)}$ при $h \geq \min(u(\varphi))$, $\varphi \in \{\varphi : h \geq u(\varphi)\}$; E – это множество тех значений h , для которых кривая $f(h, \varphi)$ содержит особые точки с $\partial H_0 / \partial \varphi = \partial H_0 / \partial p = 0$.

Порождающая функция $I(h)$ Пуанкаре-Понтрягина определяется [1] как среднее значение функции $Q(\varphi, p)$ вдоль кривой $f(h_0, \varphi)$ при $h_0 \notin E$ (для 2π -периодической траектории берется отдельно либо положительное, либо отрицательное значение $f(h_0, \varphi)$).

Теорема Пуанкаре-Понтрягина гласит [1, 2], что если $h_0 \notin E$ – невырожденный корень функции $I(h)$, то при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ система (1) имеет грубую периодическую траекторию, возникающую из траектории $p = f(h_0, \varphi)$ порождающей гамильтоновой системы.

При полиномиальной правой части число периодических траекторий системы (1) традиционно оценивают числом невырожденных корней порождающей функции $I(h)$ Пуанкаре-Понтрягина [3].

Однако для систем с неполиномиальной правой частью могут существовать «дополнительные» периодические траектории, отвечающие значениям $h_0 \in E$ и расположенные в «пограничном слое» – в малой окрестности особых точек порождающей гамильтоновой системы. Покажем это на примере исследования одной конкретной системы.

Постановка задачи. Тяжелый стержень OA может вращаться вокруг вертикальной оси Oz , текущее положение стержня определяется углом φ , отсчитываемым от неподвижной прямой Ox (рис. 1). В точке A к стержню жестко прикрепена под прямым углом вертикальная плоская пластина. К точке A пластины приложена аэродинамическая сила, действующая на пластину со стороны набегающего стационарного потока воздуха, скорость которого направлена вдоль Ox . В шарнире O действует момент вязкого трения. Будем использовать квазистатическую модель аэродинамического воздействия.

Уравнения движения маятника могут быть представлены в форме (1) при $H_0 = 0.5p^2$, $Q(\varphi, p) = \sqrt{(p + \sin \varphi)^2 + \cos^2 \varphi} (C_y(\alpha) \cos \varphi - C_x(\alpha)(p + \sin \varphi)) - bp$ $\varepsilon = 0.5\rho S r^3 J^{-1}$, где $\alpha = \arctg(\cos \varphi / (p + \sin \varphi))$ – мгновенный угол атаки, $C_x(\alpha) = 0.1 + \sin^2 \alpha$, $C_y(\alpha) = \sin 2\alpha$ – коэффициенты силы сопротивления и подъемной силы, b – коэффициент вязкого трения в оси O , ρ – плотность воздуха, r – длина державки OA , S – площадь пластины. Фазовое пространство системы (1) является цилиндрическим.

Требуется, в предположении малости параметра ε , описать 2ε -периодические траектории системы (1) и циклы. При этом среди 2ε -периодических траекторий будем рассматривать те, которые расположены в верхней половине фазового цилиндра (для траекторий, расположенных в нижней половине фазового цилиндра можно провести аналогичные рассуждения).

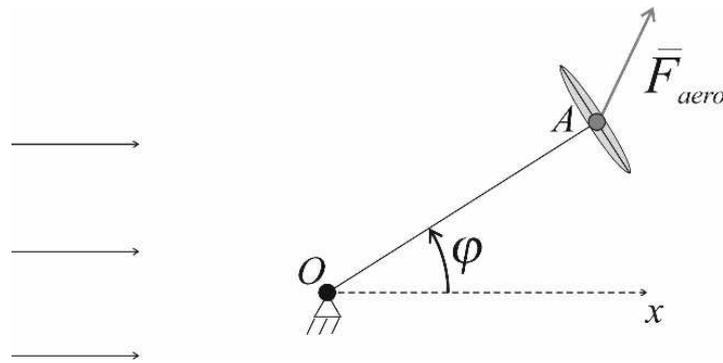


Рис. 1. Аэродинамический маятник (вид сверху)

Будем рассматривать b как варьируемый параметр, построим диаграмму периодических траекторий (1) в зависимости от b . Аналогичная задача кратко рассмотрена в [5].

Применение метода Пуанкаре-Понтрягина. Функция $I(h)$ для поставленной задачи имеет вид: $I(h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(\varphi, \sqrt{2h}) d\varphi$. Для произвольно

b невырожденные корни $I(h)$ могут быть найдены численно. Значение $p|_{\varphi=\pi}$ на периодической траектории системы (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремиться к значению $f(h,0) = \sqrt{2h}$. Жирная кривая на рис. 2 показывает эволюцию 2π -периодической траектории, возникающей из траектории порождающей системы с гамильтонианом H_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$, в зависимости от параметра b .

Отметим, что на рис. 2 простым корням функции $I(h)$ отвечает не только полученная бифуркационная кривая, но и не являющаяся частью бифуркационной кривой прямая $p=0$, за исключением точки $\{b_0, 0\}$, которая отвечает кратному корню $I(h)$. Дело в том, что прямая $p=0$ соответствует в данной задаче множеству E особых значений h , для которых теорема Пуанкаре-Понтрягина не дает однозначного ответа о возникновении периодических траекторий из траекторий системы с гамильтонианом H_0 .

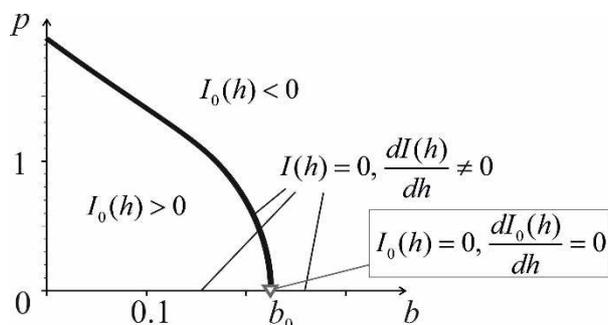


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма периодических траекторий, возникающих из траекторий системы H_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$

Применение метода Пуанкаре-Понтрягина в «пограничном слое».

Для решения вопроса о существовании периодических траекторий в пограничном слое прямой $p=0$ сделаем замену переменной и времени $y = p / \sqrt{\varepsilon}$, $s = \tau \sqrt{\varepsilon}$. Система (1) в «пограничном слое» примет вид:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial H_1}{\partial y}; \quad \frac{dy}{ds} = -\frac{\partial H_1}{\partial \varphi} + \sqrt{\varepsilon} \left(y \frac{\partial F(\varphi, p)}{\partial p} \Big|_{p=0} - by \right) + O(\varepsilon), \quad (2)$$

$$H_1 = \frac{y^2}{2} + \int_{\varphi}^{\vartheta} Q(\vartheta, 0) \vartheta d\vartheta.$$

Гамильтонова система с гамильтонианом H_1 приближает исходную систему (1) локально – в «пограничном слое» прямой $p=0$. Фазовый портрет системы с гамильтонианом H_1 нетривиален в отличие от фазового портрета системы с гамильтонианом H_0 , приближающей систему (1) вне

«пограничного слоя». В частности, траектории системы H_1 могут стать (и становятся при определенном диапазоне параметров) порождающими не только для 2π -периодических траекторий системы (1), но и для циклов.

Построим новую локальную порождающую функцию $I_2(h)$, ее простые корни отвечают грубым периодическим траекториям системы (2), возникающим из траекторий порождающей системы с гамильтонианом H_1 .

Для каждого b простые корни $I_2(h)$ можно определить численно. Жирная кривая на рис. 3 показывает эволюцию 2π -периодических траекторий и циклов (2), пересекающих прямую $\varphi = \pi$, возникающих из траекторий системы с гамильтонианом H_1 . Диаграммы, представленные на рис. 2, 3 – «глобальная» и «локальная» – склеиваются при $p \rightarrow 0$ и, соответственно, $y \rightarrow \infty$.

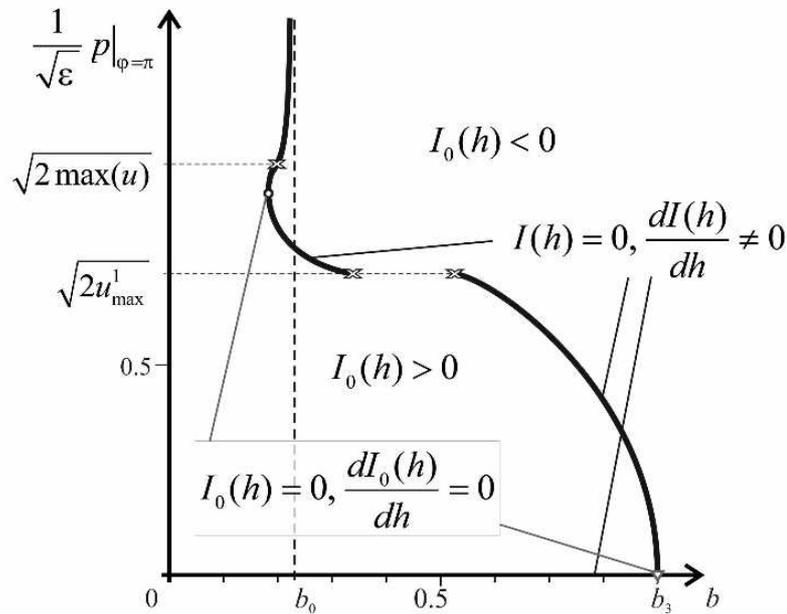


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма периодических траекторий, возникающих из траекторий системы H_1 при $\epsilon \rightarrow 0$

Отметим, что не только описание эволюции периодических траекторий исходной системы, но и оценка числа таких траекторий были бы неточны без исследования грубых периодических траекторий, расположенных в «пограничном слое» прямой $p = 0$.

Заключение. Рассмотрена близкая к гамильтоновой неконсервативная автономная система второго порядка. Для выявления периодических траекторий системы применен метод Пуанкаре-Понтрягина. При этом «глобальное» (для всей фазовой плоскости, кроме окрестности прямой $p = 0$) и «локальное» (в окрестности прямой $p = 0$) применение метода позволило выявить различные периодические траектории. Построение допол-

нительной «локальной» порождающей системы позволило не только более полно описать эволюцию периодических траекторий при изменении параметра модели, но и уточнить оценку числа периодических траекторий системы.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №№ 15-01-06970, 16-31-00374.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С. О динамических системах, близких к гамильтоновым // ЖЭТФ, 1934, т. 4, № 9, с. 234-238.
2. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. Москва: Наука, 1967. 488 с.
3. Хованская (Пушкарь) И.А. Ослабленная инфинитезимальная 16-я проблема Гильберта // Нелинейные аналитические дифференциальные уравнения, Сборник статей, Тр. МИАН, 254, Наука, М., 2006, 215–246.
4. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Наука, 1985 448 с.
5. Климина Л.А., Локшин Б.Я. Об одном конструктивном методе поиска ротационных и автоколебательных режимов в автономных динамических системах. Нелинейная динамика, 2017, т. 13, №1 (в печати).

МЕТОД ОЦЕНИВАНИЯ СОСТОЯНИЯ И СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЯ С КОМПЕНСАЦИЕЙ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ ЛИПШИЦЕВЫХ СИСТЕМ

А.И. Маликов (ИММ КазНЦ РАН, КНИТУ-КАИ, Россия,
420111, Казань, К. Маркса, 10)
E-mail: a_i_malikov@mail.ru

METHOD FOR STATE ESTIMATING AND CONTROL SYNTHESIS WITH DISTURBANCE COMPENSATION FOR TIME-VARYING LIP- SCHITZ SYSTEMS

A.I. Malikov (IME KazSC RAS, KNRTU-KAI,
420111, Kazan, K. Marx str., 10)

Keywords: control and observer design, combine feedback, unknown inputs, disturbances.

Введение. Для синтеза управления, обеспечивающего подавление произвольных ограниченных внешних возмущений развиты H_∞ - подход [1-4] и метод инвариантных эллипсоидов [5,6]. При этом синтез оптимального (или субоптимального) регулятора сводится в H_∞ - подходе к минимизации H_∞ нормы передаточной матрицы системы, а в методе инвариантных эллипсоидов – к поиску наименьшего инвариантного эллипсоида замкнутой системы. И в том и другом случае задача синтеза управления в виде обратной связи по состоянию решаются на основе техники линейных матричных неравенств (ЛМН) [7]. Эти методы наиболее эффективны для линейных стационарных систем управления. В [8] техника ЛМН использовалась уже в целях робастной стабилизации систем с неопределенной нелинейностью, однако, без учета воздействия внешних возмущений. В [9] этот подход применен для нахождения инвариантных эллипсоидов и синтеза линейных регуляторов по состоянию для одного класса нелинейных автономных систем при учете внешних неопределенных ограниченных возмущений.

С развитием техники ЛМН появились работы [10,11], в которых для линейных систем получены достаточные условия устойчивости на конечном интервале в терминах разрешимости ЛМН. Там же были предложены способы синтеза управления в виде обратной связи по состоянию, основанные на решении задач оптимизации с ограничениями в виде ЛМН. В монографии [11] представлены результаты по устойчивости, ограниченности на конечном интервале и синтезу управления для линейных переменных по времени систем в терминах разрешимости дифференциальных ли-

нейных матричных уравнений или неравенств. В [12] эти результаты были развиты и распространены на класс Липшицевых нелинейных систем с ограниченными по L_∞ или L_2 -норме внешними возмущениями. При этом задачи оценивания состояния и анализа ограниченности относительно заданных множеств сведены к численному решению матричных систем сравнения [13-14] или дифференциальных линейных матричных неравенств (ДЛМН) и проверки условий, представленных ЛМН. Синтез линейных регуляторов в виде обратной связи по состоянию сведен к задачам поиска решений ДЛМН, или задачам полуопределенного программирования. В [15] для указанного класса систем также решены задачи подавления начальных отклонений и неопределенных внешних возмущений с оценкой качества по H_∞ -критерию. В [16] для линейных автономных систем предложен способ синтеза управления в виде комбинированной обратной связи как по состоянию, так и по известным компонентам вектора возмущений.

При неполной информации о векторе состояния (измеряются только компоненты вектора выхода) и отсутствии информации о компонентах вектора возмущений могут использоваться наблюдатели состояния и неизвестных входов, синтез которых для линейных стационарных систем также сводится к задачам оптимизации с ЛМН [17-19]. Способ синтеза наблюдателей состояния, предложенный в [20] на основе метода матричных систем сравнения для регулируемых систем с секторными нелинейностями и неопределенными ограниченными возмущениями, был развит в [21] и применен для оценивания неизвестных внешних возмущений. В [22,23] предложены способы синтеза наблюдателей состояния, обеспечивающие ограниченность на конечном интервале ошибки оценивания относительно заданных множеств начальных состояний и допустимых траекторий, а также H_∞ -подавление в каждый момент времени одновременно начальных отклонений и неопределенных ограниченных внешних возмущений для неавтономных непрерывных Липшицевых систем.

В данной работе предлагается способ синтеза управления с комбинированной обратной связью по состоянию и компонентам вектора входных воздействий, которые являются известными или оцениваются в каждый момент времени с помощью наблюдателя. Синтезированное управление обеспечивает на конечном интервале ограниченность относительно заданных множеств для неавтономных непрерывных Липшицевых систем с неопределенными возмущениями.

1. Постановка задачи. Пусть возмущенное движение управляемой системы в отклонениях от невозмущенного описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B_1(t)u + \Phi(t)\phi(t, x) + E_1(t)v(t) + D_1(t)w(t), \quad (1)$$

$$y = C_y(t)x + E_2(t)v(t) + D_2(t)w \quad (2)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $v(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор входных воздействий; $w(t) \in \mathbb{R}^r$ – вектор неопределенных внешних возмущений и погрешностей измерений; $z \in \mathbb{R}^s$ – вектор выхода, по которому определяется качество управления; $y \in \mathbb{R}^l$ – вектор измеряемого выхода; $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_1(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D_1(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_y(t) \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $D_2(t) \in \mathbb{R}^{l \times r}$, $E_1(t) \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $E_2(t) \in \mathbb{R}^{l \times p}$ – известные матрицы с непрерывными и ограниченными элементами при всех $t \in [t_0, T]$; $T > 0$ – заданная константа; $l \geq p$ (количество измеряемых компонент вектора выхода не меньше количества компонент вектора неизвестных входов. Предполагается, что пара $(A(t), B_1(t))$ – управляема (стабилизируема), пара $(A(t), C_y(t))$ – наблюдаема (детектируема), и матрица $D_2(t)$ является матрицей полного ранга строк, так что неравенство $D_2^T(t)D_2(t) > 0$ выполняется для всех $t \geq t_0$.

Предполагается, что начальное состояние рассматриваемой системы принадлежит заданному эллипсоиду

$$x(t_0) = x_0 \in E(Q_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T Q_0^{-1} x \leq 1\}, \quad (3)$$

где Q_0 – известная положительно определенная симметрическая матрица.

Нелинейная вектор-функция $\phi(t, x)$ удовлетворяет условию, заданному в виде:

$$\|\phi(t, x') - \phi(t, x'')\|^2 \leq \mu \|C_F(t)(x'(t) - x''(t))\|^2, \quad \forall t \in [t_0, T], x', x'' \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

где $C_F(t) \in \mathbb{R}^{q \times n}$ – известная матрица с непрерывными и ограниченными элементами при всех $t \in [t_0, T]$. Здесь и далее $\|\cdot\|$ означает евклидову норму вектора, $\mu \geq 0$ – известная константа (константа Липшица).

Допустим, что в системе (1) неопределенные возмущения являются непрерывными функциями времени, ограниченными по L_∞ -норме:

$$W = \{w : \|w(t)\|^2 \leq 1, t \in [t_0, T]\}. \quad (5)$$

Также предположим, что неизвестные входные воздействия $v(t)$ представлены кусочно-непрерывными функциями, ограниченными по L_2 -норме вместе со своими производными по времени (имеется в виду обобщенные производные)

$$\Sigma = \{v : \int_{t_0}^T \|v(t)\|^2 dt \leq \lambda_1 < \infty, \int_{t_0}^T \|\dot{v}(t)\|^2 dt \leq \lambda_2 < \infty\}, \quad (6)$$

где λ_1, λ_2 – известные константы.

Для рассматриваемой системы (1) с неопределенными возмущениями $w(t)$ и неизвестными входными воздействиями $v(t)$ нет полной информации о векторе состояния, т.е. только компоненты вектора выхода y измеряются. Требуется синтезировать регулятор в форме обратной связи по состоянию наблюдателя и наблюдатель вектора состояния $x(t)$ и неизвестных входов $v(t)$, который будет давать оценку $\hat{x}(t)$ вектора состояния $x(t)$ и оценку $\hat{v}(t)$ неизвестных входов $v(t)$ по результатам измерений вектора выхода $y(t)$. При этом регулятор и наблюдатель должны обеспечить на конечном интервале $[t_0, T]$:

1) ограниченность вектора состояния относительно заданных множеств $[E(R_0), E(R(t))]$ и ограниченность ошибки оценивания относительно заданных множеств $[E(S_0), E(S(t))]$, $R_0, R(t), S_0, S(t)$ – заданные положительно определенные матрицы;

2) компенсацию неизвестных входных воздействий $v(t) \in \Sigma$.

2. Синтез регулятора, обеспечивающего ограниченность при неопределенных возмущениях и неизвестных входах. Регулятор задается в форме обратной связи по состоянию x системы (1) и входному воздействию v :

$$u = K(t)x + K_1(t)v, \quad (7)$$

где матрицы $K(t), K_1(t)$ будут выбираться из условия ограниченности на конечном интервале состояний $x(t)$ эволюционирующим инвариантным эллипсоидом. Следует отметить, что способ синтеза регулятора в виде комбинированной обратной связи по состоянию и возмущению из условия минимизации следа матрицы предельного инвариантного эллипсоида, ограничивающего выход, был предложен в [16] для линейных автономных систем. Здесь предлагается способ синтеза комбинированного регулятора из условия ограниченности на конечном интервале для неавтономной нелинейной Лишицевой системы.

Определение 1. Будем говорить, что регулятор (7) обеспечивает на $[t_0, T]$ для системы (1) свойство ограниченности относительно заданных множеств $[E(R_0), E(R(t))]$, если для всех $x_0 \in E(R_0)$ существуют на $[t_0, T]$ решения $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (1) с начальными данными $x(t_0) = x_0$, для которых имеет место $x(t, t_0, x_0) \in E(R(t))$ при всех $t \in [t_0, T]$, $w(t) \in W$, $v(t) \in \Sigma$ и нелинейностях из (4). Здесь $R_0, R(t)$ – заданные положительно определенные матрицы, определяющие размеры эллипсоидов допустимых начальных отклонений и допустимых состояний при $t \in [t_0, T]$.

Задача синтеза сводится к оптимизации критерия при ограничениях в виде дифференциальных линейных матричных неравенств. В качестве критерия берется след матрицы, определяющей размер ограничивающего состояние инвариантного эллипсоида.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Для того чтобы регулятор (7) обеспечил на конечном интервале $[t_0, T]$ ограниченность системы (1) относительно заданных множеств $[E(R_0), E(R(t))]$ достаточно, чтобы при некоторых $\alpha > 0, \beta > 0$ существовали при всех $t \in [t_0, T]$ симметрическая матрица $Q(t)$ и матрицы $Y(t) = K(t)Q(t)$, $K_1(t)$ такие, что следующие неравенства удовлетворяются

$$Q(t_0) \geq (1 + \lambda_1)R_0, \quad Q(t) \leq R(t) \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} -\dot{Q}(t) + AQ + QA^T + B_1Y + Y_1^T B_1^T + & B_1K_1 + E_1 & QC_F^T \\ +\alpha Q + \frac{1}{\alpha}D_1D_1^T + \beta\Phi\Phi^T & & \\ (B_1K_1 + E_1)^T & -\frac{1}{1 + \lambda_1}I & 0 \\ C_FQ & 0 & -\frac{\beta}{\mu}I \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

При этом может быть учтено ограничение $x^T K^T Kx \leq \text{trace}(Z)$ на компоненты управления по состоянию в виде дополнительного ограничения

$$\begin{bmatrix} Z & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (10)$$

где Z – заданная положительно определенная матрица.

Таким образом, задача синтеза наблюдателя состояния на конечном интервале $[t_0, T]$ со свойством ограниченности ошибки оценивания относительно заданных множеств $[E(R_0), E(R(t))]$ сводится к следующей задаче оптимизации с ДЛМН:

Задача 1. Минимизировать $\text{tr}(Q(t))$ при ограничениях (8)–(10).

Здесь оптимизация проводится по матричным переменным $Q(t), Y(t), K_1(t)$ и скалярной переменной $\beta(t)$. По найденному решению матрица $K(t)$ определится $K(t) = Y(t)Q^{-1}(t)$.

3. Синтез наблюдателя, обеспечивающего на конечном интервале ограниченность относительно заданных множеств ошибки оценивания. Наблюдатель полного порядка для оценки вектора состояния $x(t)$ и вектора неизвестных входов $v(t)$ строится в виде

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A(t)\hat{x} + B(t)u + \Phi(t)\phi(t, \hat{x}) + E_1(t)\hat{v}(t) + L_1(t)(y - \hat{y}), \quad \hat{x}(t_0) = 0, \\ \dot{\hat{v}} &= L_2(t)[y - \hat{y}], \quad \hat{v}(t_0) = 0, \\ \hat{y} &= C_y(t)\hat{x} + E_2\hat{v}(t)\end{aligned}\quad (11)$$

где матрица $L(t) = \begin{bmatrix} L_1(t) \\ L_2(t) \end{bmatrix}$ коэффициентов усиления наблюдателя будет выбираться из условия получения требуемого эволюционирующего во времени эллипсоида $E(S(t))$, ограничивающего ошибку оценивания $\varepsilon = \left((x - \hat{x})^T \quad (v - \hat{v})^T \right)^T$ на рассматриваемом интервале $[t_0, T]$.

Введем расширенные векторы $x_p = [x^T, v^T]^T$, $\hat{x}_p = [\hat{x}^T, \hat{v}^T]^T$ и запишем уравнение наблюдателя (11) в виде:

$$\dot{\hat{x}}_p = A_p(t)\hat{x}_p + B_p(t)u + \Phi(t)\phi(\hat{x}) + L(t)(y - C_p(t)\hat{x}_p), \quad (12)$$

где приняты обозначения: $C_p(t) = [C_y(t), E_2(t)]$,

$$A_p(t) = \begin{bmatrix} A(t) & E_1(t) \\ 0_{p \times n} & 0_{p \times p} \end{bmatrix}, \quad B_p(t) = \begin{bmatrix} B(t) \\ 0_{p \times m} \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнение для ошибки $\varepsilon = x_p - \hat{x}_p$ будет иметь вид

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= \dot{x}_p - \dot{\hat{x}}_p = [A_p(t) - L(t)C_p(t)]\varepsilon + [D_p(t) - L(t)D_2(t)]w(t) + \\ &+ \Phi_p(t)[\phi(t, x) - \phi(t, \hat{x})] + G\dot{v},\end{aligned}\quad (13)$$

где $D_p(t) = \begin{bmatrix} D_1(t) \\ 0_{p \times r} \end{bmatrix}$, $\Phi_p(t) = \begin{bmatrix} \Phi(t) \\ 0_{p \times q} \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0_{n \times p} \\ I_p \end{bmatrix}$, $C_{Fp}(t) = [C_F(t), 0_p]$.

Определение 2. Наблюдатель (12) обеспечивает на заданном интервале $[t_0, T]$ ограниченность ошибки оценивания относительно заданных множеств $[E(S_0), E(S(t))]$ если для всех $\varepsilon_0 \in E(S_0)$ существуют на $[t_0, T]$ решения $\varepsilon(t) = \varepsilon(t, t_0, x_0)$ системы (13) с начальными данными $\varepsilon(t_0) = \varepsilon_0$, и для них имеет место $\varepsilon(t, t_0, x_0) \in E(S(t))$ при всех $t \in [t_0, T]$, $w(t) \in W$, $v(t) \in \Sigma$ и всех нелинейностях из (4).

Теорема 2. Для того чтобы наблюдатель (8) обеспечил на заданном интервале $[t_0, T]$ ограниченность ошибки оценивания относительно заданных множеств $[E(S_0), E(S(t))]$ ($S_0, S(t)$ – заданные положительно определенные матрицы, причем $S_0 = \text{diag}\{R_0, R_v\}$, $R_0 - n \times n$, $R_v - p \times p$ – положительно определенные матрицы) достаточно, чтобы при некоторых $\alpha > 0, \beta > 0$ существовали при всех $t \in [t_0, T]$ симметрическая матрица $P(t)$ и матрица $Y(t) = P(t)L(t)$ такие, что выполняются следующие дифференциальное линейное (при фиксированном α) матричное неравенство:

$$\begin{bmatrix} dP/dt + A_p^T P + P A_p - C_p^T Y^T - P \Phi_p & P D_p - Y D_2 & P G \\ -Y C_p + \alpha P + \beta \mu C_{Fp}^T C_{Fp} & & \\ \Phi_p^T P & -\beta I & 0 & 0 \\ D_p^T P - D_2^T Y^T & 0 & -\alpha I & 0 \\ G^T P & 0 & 0 & -\frac{1}{1 + \lambda_2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

$$P(t_0) \leq \frac{1}{1 + \lambda_2} S_0^{-1}, \quad P(t) \geq S^{-1}(t). \quad (11)$$

Таким образом, задача синтеза наблюдателя состояния и неизвестных входов на конечном интервале $[t_0, T]$ со свойством ограниченности ошибки оценивания относительно заданных множеств $[E(S_0), E(S(t))]$ сводится к следующей задаче оптимизации с ДЛМН:

Задача 2. Минимизировать $\text{tr}(Q(t))$ при ограничениях (10), (11) и

$$\begin{bmatrix} Q(t) & I \\ I & P(t) \end{bmatrix} \geq 0. \quad (12)$$

Здесь оптимизация проводится по матричным переменным $Q(t), P(t), Y(t)$ и скалярной переменной $\beta(t)$. По найденному решению матрица $L(t)$ определится как $L = P^{-1}Y$.

4. Приложение к двухзвенному манипулятору. Рассматривается манипулятор с двумя звеньями, соединенными между собой упругим шарниром [24]. Предполагается, что движение манипулятора происходит в вертикальной плоскости.

Дифференциальные уравнения, описывающие динамику манипулятора с двумя звеньями с упругим соединением представлены в [24]:

$$\begin{aligned}
& (m_1 l_1^2 + I_{p1} + I_{p2} + m_2(L_1^2 + l_2^2 + 2L_1 l_2 \cos \theta_2)) \ddot{\theta}_1 + \\
& + (m_2(l_2^2 + L_1 l_2 \cos \theta_2) + I_{p2}) \ddot{\theta}_2 = \\
& = m_2 L_1 l_2 \sin \theta_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 + m_1 g l_1 \sin \theta_1 + \\
& + m_2 g (L_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)) + T - B_{\theta_1} \dot{\theta}_1 - w_1. \\
& (m_2(l_2^2 + L_1 l_2 \cos \theta_2) + I_{p2}) \ddot{\theta}_1 + (m_2 l_2^2 + I_{p2}) \ddot{\theta}_2 = \\
& = m_2 L_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - f(\theta_1) - B_{\theta_2} \dot{\theta}_2 - w_2.
\end{aligned} \tag{13}$$

где момент, создаваемый двигателем постоянного тока представляется в

$$\text{виде: } T = \frac{K_g K_m}{R_m} V - \frac{(K_g K_m)^2}{R_m} \dot{\theta}_1.$$

Отметим, что здесь все обозначения, а также значения параметров, приняты как в [24].

Синтез регулятора в виде обратной связи по состоянию для рассматриваемого манипулятора проводился по модели, представленной в виде (1), где A, B_1, D_1 – постоянные матрицы линеаризованной относительно требуемого положения равновесия $x_0 = (\pi; 0; 0; 0)^T$ системы (13).

На основе теоремы 6 из [12] был получен регулятор в виде обратной связи по состоянию с постоянными коэффициентами усиления $K = (-337.5234 \quad -74.4200 \quad -158.6049 \quad -34.6259)$, обеспечивающий минимальный по критерию следа матрицы предельный инвариантный эллипсоид для линеаризованной системы с неопределенными возмущениями $w(t) = (w_1(t), w_2(t))^T$ из (5). Как показало моделирование по полной нелинейной модели, данный регулятор обеспечивает стабилизацию манипулятора в требуемом положении с заданной точностью при действии возмущений $w(t) = [\sin(3t)(\sin(2t) + \cos(t)) / 10, (\sin(2t) + \cos(t)) / 5]^T$. Однако при возникновении дополнительных моментов на осях звеньев регулятор не может обеспечить стабилизацию манипулятора в заданном положении и требуется дополнительная компенсация неизвестных входных моментов. Поэтому на основе теоремы 2 был получен наблюдатель с постоянной матрицей

$$L = \begin{bmatrix} 11.993 & 61.694 & -0.892 & -2.035 & 42.125 & 7.812 \\ -0.892 & -0.473 & 13.605 & 51.844 & -5.286 & 46.467 \end{bmatrix}^T, \text{ который}$$

восстанавливает как вектор состояния, так и неизвестные входы при измерениях углов θ_1, θ_2 . На рис. 1. показаны изменения углов θ_1, θ_2 звеньев манипулятора с регулятором по состоянию при действии тех же воз-

мущений и дополнительных входных моментов, заданных как

$$v_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 8, \\ \text{sign}(\cos(t/2)/2), & t \geq 8, \end{cases} \quad v_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 8, \\ \text{sign}(\sin(t/3)/4), & t \geq 8. \end{cases} \quad (14)$$

На рис. 2 и 3 показаны графики изменения входных моментов $v_1(t)$, $v_2(t)$, и их оценки, полученные с помощью наблюдателя.

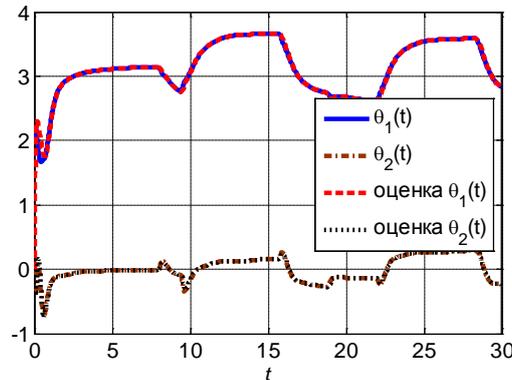


Рис. 1

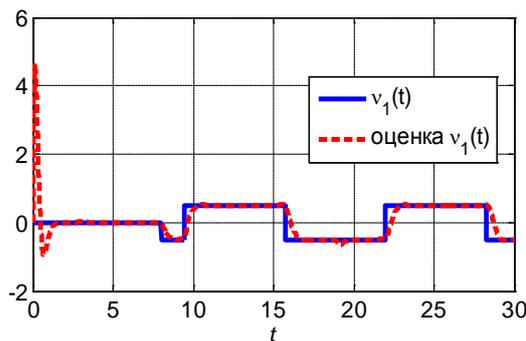


Рис. 2

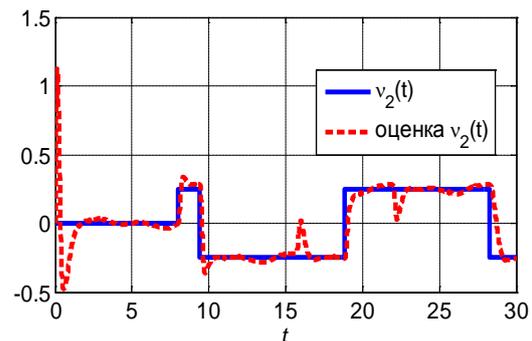


Рис. 3

С целью компенсации входных моментов на основе теоремы 1 получен регулятор с постоянными коэффициентами усиления $K = (-634.892 \quad -135.654 \quad -175.243 \quad -55.507)$, $K_1 = (-91.617 \quad -16.571)$ в виде комбинированной обратной связи по состоянию и входным воздействиям (7). На рис. 4 представлены графики изменения углов θ_1, θ_2 звеньев манипулятора в нелинейной системе с регулятором в виде комбинированной обратной связи по состоянию наблюдателя $u(t) = K\hat{x}(t) + K_1\hat{v}(t)$ при действии возмущений $w(t)$ и входных моментов (14).

На основе теоремы 1 получен регулятор в виде комбинированной обратной связи (7) с зависимыми от времени коэффициентами из условия минимальности следа матрицы эволюционирующего инвариантного

эллипсоида при учете неопределенных ограниченных возмущений. На рис. 5 представлены графики изменения углов θ_1, θ_2 звеньев манипулятора в нелинейной системе с регулятором с переменными коэффициентами в виде комбинированной обратной связи по состоянию наблюдателя

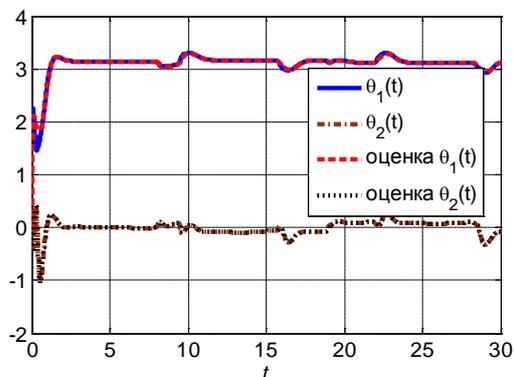


Рис. 4

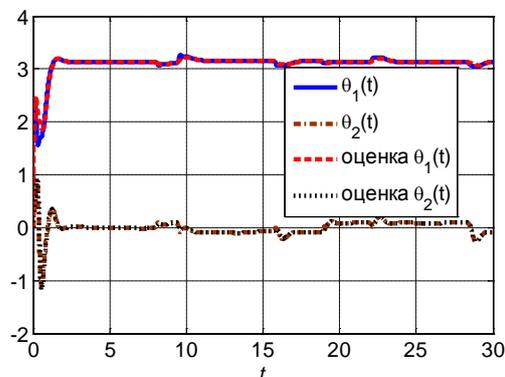


Рис. 5

Изменение коэффициентов усиления регулятора в зависимости от времени представлено на рис. 7 и 8.

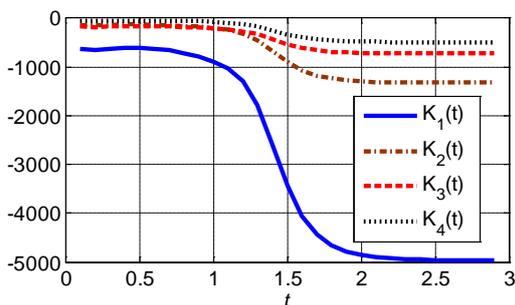


Рис. 6

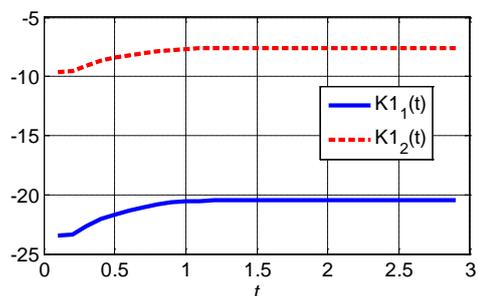


Рис. 7

На рис. 8,9 показаны изменения входных моментов и их оценки, полученные с помощью наблюдателя с переменными коэффициентами.

Сравнивая полученные оценки состояния можно отметить, что наблюдатели с переменными коэффициентами, полученными на основе численного решения задач оптимизации с ДЛМН оказываются более точными в особенности для начальных моментов времени по сравнению с наблюдателями с постоянными коэффициентами. Следует отметить, что при этом существенно возрастает объем вычислений. Чтобы ограничить объем вычислений в случае автономных систем, рекомендуется использовать наблюдатели с переменными коэффициентами только на начальном промежутке времени, после чего использовать регулятор и наблюдатель с постоянными коэффициентами.

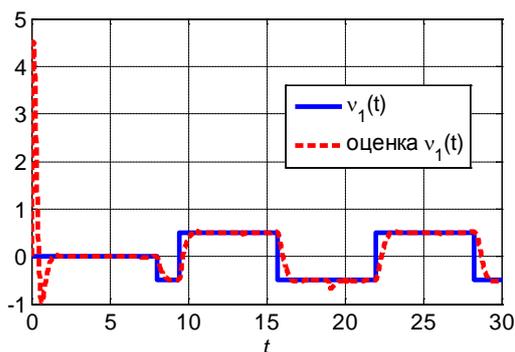


Рис. 8

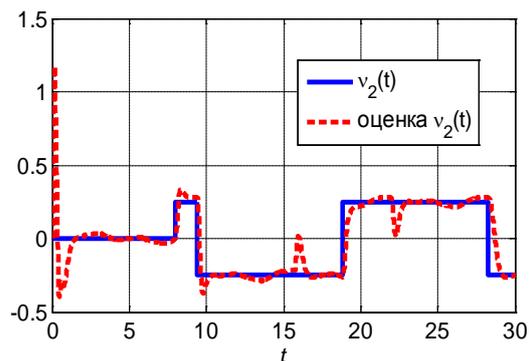


Рис. 9

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-08-05575 а), РФФИ и Правительства Республики Татарстан (проект 17-41-160814 p_a).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Khargonekar, P.P., Nagpal, K.M., and Poolla, K.R., H_∞ Control with Transients// SIAM J. Control Optim.* 1991. V. 29. No. 6. P. 1373–1393.
2. *Баландин Д.В., Коган М.М. Линейные матричные неравенства в задаче робастного H_∞ -управления по выходу // ДАН.* 2004. Т.396. №6. С.759–761.
3. *Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств.* М. Физматлит. 2007.
4. *Коган М.М. Синтез оптимального и робастного управлений с H_∞/γ_0 -критерием АиТ,* 2016. № 8. С. 3–23.
5. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // АиТ.* 2007. №3. С. 106-125.
6. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях.* М.: ЛЕНАНД, 2014.
7. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory.* Philadelphia: SIAM, 1994.
8. *Siljak D.D., Stipanovic D.M. Robust Stabilization of Nonlinear Systems: the LMI Approach // Mathematical Problems in Engineering.* 2000. V.6. P.461–493.
9. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Нелинейные системы с ограниченными или мультипликативными возмущениями // Проблемы устойчивости и управления. Сб. научн. статей, посвященный 80-летию акад. В.М.Матросова.* М.: Физматлит. 2013. С. 270–299.
10. *Amato F., Ariola M., Dorato P. Finite-time Control of Linear Systems Subject to Parametric Uncertainties and Disturbances // Automatica.* 2001. V. 37(9). P. 145–146.

11. *Amato F., Ambrosino R., Ariola M., Cosentino C., De Tommasi G.* Finite time stability and control / Lecture Notes in Control and Information Science. London: Springer-Verlag. 2014.

12. *Маликов А.И.* Оценивание состояния и стабилизация непрерывных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями. // *АиТ.* 2016. № 5. С. 19–36.

13. *Маликов А.И.* Матричные системы сравнения в анализе динамики систем управления со структурными изменениями // *Изв. РАН. Теория и сист. управ.* 1999. № 3. С. 1121.

14. *Маликов А.И.* Матричные системы дифференциальных уравнений с условием квазимонотонности // *Изв. ВУЗов. Математика.* 2000. №8. С.35–45.

15. *Маликов А.И.* Управление на конечном интервале непрерывных неопределенно-нелинейных систем с H_∞ -критерием качества // *Изв. РАН. Теория и сист. управ.* 2017. № 3.

16. *Хлебников М.В.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: комбинированная обратная связь // *АиТ.* 2016. №7. С. 20–32.

17. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // *Доклады академии наук.* 2008. Т. 418. № 6. С. 1–5.

18. *Хлебников М.В.* Робастная фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // *АиТ.* 2009. №1. С.147–161.

19. *Delshad S.S., Johansson A., Darouach M., Gustafsson T.* Robust state estimation and unknown inputs reconstruction for a class of nonlinear systems: Multiobjective approach // *Automatica.* 2016. V. 64. P. 1–7.

20. *Маликов А.И.* Синтез алгоритмов оценивания состояния нелинейных регулируемых систем с применением матричных систем сравнения // *Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева.* 1998. №3. С. 54–59.

21. *Гаркушенко В.И.* К задаче оценивания ограниченных внешних возмущений в системах управления при неполной информации // *Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева.* 2010. № 2. С. 122–127.

22. *Маликов А.И.* Синтез наблюдателей состояния для нелинейных Липшицевых систем с неопределенными ограниченными по L_∞ норме возмущениями // *Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева.* 2016. №3. С. 128-140.

23. *Маликов А.И.* Синтез наблюдателей состояния по результатам измерений для нелинейных Липшицевых систем с неопределенными возмущениями // *АиТ.* 2017. №5. С. 16–35.

24. *Исанькин М.А., Маликов А.И.* Синтез управления по состоянию наблюдателя робота манипулятора с двумя звеньями с нежестким соединением. // *Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева,* 2016. №3. С.112-121.

**О СТАБИЛИЗАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА
В ТОЧКАХ ЛИБРАЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ
ТРЕХ ТЕЛ СИЛАМИ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ**

В.М. Морозов, В.И. Каленова, С.О. Волчков, М.Г. Рак

(НИИ механики МГУ, Россия,
119192, Москва, Мичуринский пр-т, 1)

E-mail: kalen@Imec.msu.ru

**ON STABILIZATION OF SPACECRAFT IN THE LIBRATION POINTS
IN THE RESTRICT THREE-BODY PROBLEM BY SOLAR FORCES**

V.M. Morozov, V.I. Kalenova, S.O. Volchkov, M.G. Rak

(LMSU Institute of Mechanics, Russia, 119192, Moscow, Michurinskiy pr. 1)

Keywords: stabilization, spacecraft, three-body problem, stability, reducible time-varying systems, controllability, control.

Введение. В последние десятилетия возник большой интерес к использованию солнечного паруса для управления движением космических аппаратов (КА) различного назначения. В ряде статей (см., например [1-4]) рассматривался вопрос о применении солнечного паруса в ограниченной задаче трех тел. Одними из первых авторов, рассматривавших эту задачу, были М.Л.Лидов и С.С.Лукиянов [5]. Как известно [6], существуют пять положений относительного равновесия КА так называемых точек либрации. Две точки либрации, называемые треугольными, устойчивы. Три другие точки, называемые коллинеарными, находятся на линии, соединяющей обе притягивающие массы (одна из точек находится между этими массами). Далее будем для определенности считать эти массы Землей и Луной. Среди коллинеарных точек либрации особенный интерес вызывает точка либрации L_2 в системе Земля – Луна, находящаяся «за Луной». Поместив КА в эту точку, можно наблюдать обратную сторону Луны в течение длительного времени. Коллинеарные точки либрации неустойчивы [6]. Поэтому для удержания КА в окрестности коллинеарных точек следует прикладывать управляющие воздействия.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу об управлении движением КА в окрестности коллинеарных точек либрации пространственной ограниченной круговой задачи трех тел. Будем предполагать, что для управления используется сила светового давления, действующая на КА.

Введем невращающуюся систему координат $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ с началом в центре масс двух массивных тел, $O\xi_1\eta_1$ – плоскость движения этих тел, и по-

движную систему координат $O\xi\eta\zeta$, имеющую начало в той же точке и вращающуюся равномерно вокруг оси $O\xi_1(O\xi)$ с угловой скоростью n_λ орбитального движения Луны относительно Земли. Причем ось $O\xi$ выбрана так, что Луна и Земля постоянно находятся на этой оси.

Пусть m_1, m_2 – массы Земли и Луны соответственно. Относительная масса Луны $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$, $\mu = 0.01215$. Выберем единицу массы так, чтобы

$m_1 + m_2 = 1$, и положим $m_1 = 1 - \mu$, $m_2 = \mu$. За единицу расстояния примем расстояние между Землей и Луной; единицу времени выберем так, чтобы гравитационная постоянная равнялась единице. При таком выборе системы единиц угловая скорость подвижной системы равна единице ($n_\lambda = 1$), а координаты точек m_1 и m_2 равны $\xi_1 = -\mu, \xi_2 = 1 - \mu$. Координаты КА обозначим через ξ, η, ζ . Тогда расстояния между КА и точками m_1 и m_2 будут $r_1^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + \eta^2 + \zeta^2$, $r_2^2 = (\xi_2 - \xi)^2 + \eta^2 + \zeta^2$.

Предположим, что в любой момент времени единичный вектор \vec{r}_s , определяющий направление из точки либрации L_j на Солнце, также расположен в плоскости $O\xi_1\eta_1$. Этот вектор равномерно вращается относительно точки O с угловой скоростью $\nu = n_\lambda - n_3$, ($\nu = 0.923$), где n_3 – угловая скорость орбитального движения Земли вокруг Солнца. Вектор \vec{r}_s в проекциях на оси системы координат $O\xi\eta\zeta$ имеет вид

$$\vec{r}_s = (\cos \nu t \quad -\sin \nu t \quad 0)^T.$$

Следуя публикациям [1-3,5], будем считать, что вектор силы воздействия светового давления на «солнечный парус», находящийся на КА, можно представить как

$$\vec{f} = -w(\vec{r}_s, \vec{r}_n)^2 \vec{r}_n, \quad \vec{r}_n = (\cos \gamma \cos \nu t \quad -\cos \gamma \sin \nu t \quad \sin \gamma)^T$$

где w – параметр, характеризующий величину солнечного давления, который является управляющим параметром, единичный вектор нормали \vec{r}_n к плоскости «солнечного паруса», составляет постоянный угол γ с осью $O\xi$.

Уравнения движения КА в ограниченной задаче трех тел с учетом сил светового давления в подвижной системе координат в скалярной форме имеют вид [3]

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} + \frac{\partial U}{\partial \xi} = f_\xi, \quad \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta} = f_\eta, \quad \ddot{\zeta} + \frac{\partial U}{\partial \zeta} = f_\zeta \quad (1)$$

Здесь U – потенциал гравитационных и центробежных сил

$$U = - \left[\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right]$$

Линеаризованные в окрестностях коллинеарных точек либрации $L_j (j=1,2,3)$ уравнения (1) примут вид

$$\begin{aligned} \delta\ddot{\xi} - 2\delta\dot{\eta} - (1 + 2\alpha_j)\delta\xi &= wq_1 \cos vt \\ \delta\ddot{\eta} + 2\delta\dot{\xi} - (1 - \alpha_j)\delta\eta &= -wq_1 \sin vt \\ \delta\ddot{\zeta} + \alpha_j\delta\zeta &= wq_2 \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$\alpha_j = \frac{1-\mu}{(\xi_{L_j} + \mu)^3} + \frac{\mu}{(\xi_{L_j} - (1-\mu))^3}, \quad q_1 = \cos^3 \gamma, \quad q_2 = \cos^2 \gamma \sin \gamma$$

Представим величину светового давления $w(t)$ в виде $w(t) = w_0 + u(t)$, $w_0 = \text{const} > 0$ – номинальная величина, определяемая начальной площадью солнечного паруса, $u(t)$ – величина управляющего воздействия, вызванного изменением площади паруса, $|u(t)| \leq u_0, (u_0 \leq w_0)$.

Уравнения (2) при $u = 0$ имеют периодическое решение [7]

$$\delta\xi_{j*} = a_{\xi j} \cos vt, \quad \delta\eta_{j*} = a_{\eta j} \sin vt, \quad \delta\zeta_{j*} = a_{\zeta j} \quad (a_{\xi j}, a_{\eta j}, a_{\zeta j} = \text{const})$$

Решение задачи стабилизации. Для исследования возможности стабилизации этих решений при помощи сил светового давления введем малые возмущения $\delta\xi = \delta\xi_* + x_1, \delta\eta = \delta\eta_* + x_2, \delta\zeta = \delta\zeta_* + x_3$. В линейном приближении уравнения движения КА можно представить в виде системы уравнений второго порядка [3]

$$\ddot{x} + 2D\dot{x} + Rx = B(t)u. \quad (3)$$

Здесь

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}, \quad D = \begin{Bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad R = \text{diag}(-(1 + 2\alpha_j), -(1 - \alpha_j), \alpha_j), \quad B(t) = \begin{Bmatrix} B_1(t) \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \cos vt \\ -q_1 \sin vt \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

Систему (3) представляет собой две подсистемы, связанные только через управление, причем система для переменных x_1, x_2 нестационарна по управлению, а система для переменной x_3 – стационарна. Первая подсистема относится к классу систем, допускающих преобразование в стационарную систему путем расширения пространства состояний [8,9]. Вектор $B_1(t)$ можно представить в виде

$$B_1(t) = f_1(t)b_1 + f_2(t)b_2, \quad f_1(t) = \cos vt, f_2(t) = \sin vt, \quad b_1 = \begin{Bmatrix} q_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad b_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -q_1 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{f} = Sf, \quad f = \begin{Bmatrix} f_1 & f_2 \end{Bmatrix}^T, \quad S = v \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Bmatrix}$$

Приведем эту подсистему к стационарной системе путем расширения пространства состояний, вводя новые переменные [9]

$$x = F^T(t)y, \quad x = \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 \end{Bmatrix}^T, \quad F^T(t) = \begin{Bmatrix} \cos vt & 0 & \sin vt & 0 \\ 0 & \cos vt & 0 & \sin vt \end{Bmatrix}$$

В переменных y подсистема становится стационарной и принимает вид

$$\ddot{y} + 2G\dot{y} + Ny = Qu \quad (4)$$

с матрицами

$$G = \begin{Bmatrix} 0 & -1 & -v & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -v \\ v & 0 & 0 & -1 \\ 0 & v & 1 & 0 \end{Bmatrix}, \quad N = \begin{Bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & 2v \\ 0 & \beta_2 & -2v & 0 \\ 0 & -2v & \beta_1 & 0 \\ 2v & 0 & 0 & \beta_2 \end{Bmatrix}, \quad Q = \begin{Bmatrix} q_1 \\ 0 \\ 0 \\ -q_1 \end{Bmatrix}$$

$$\beta_1 = -v^2 + 1 + 2\alpha_{i1}, \quad \beta_2 = -v^2 + 1 - \alpha_{i1}.$$

Таким образом, нестационарная система (3) шестого порядка приведена к стационарной системе 10-го порядка, состоящей из системы (4) и уравнения

$$\ddot{x}_3 + a_j x_3 = q_2 u \quad (5)$$

Используя критерий управляемости систем второго порядка [10], можно показать, что стационарная система (4), (5) и, следовательно, система (3) управляемы.

Управление, осуществляющее стабилизацию рассматриваемого положения равновесия КА, можно строить на основании стационарной системы (4), (5).

Система (4),(5) в форме Коши имеет вид

$$\dot{z} = Az + B_z u, \quad z_{(10 \times 1)} = \begin{Bmatrix} y^T & x_3 & \dot{y}^T & \dot{x}_3 \end{Bmatrix}^T$$

$$A = \begin{Bmatrix} O_{44} & 0 & E_4 & 0 \\ O_{14} & 0 & O_{14} & 1 \\ -N & O_{41} & -2G & O_{41} \\ O_{14} & -\alpha_j & O_{14} & 0 \end{Bmatrix}, \quad B_z_{(10 \times 1)} = \begin{Bmatrix} O_{14}^T & 0 & Q^T & q_2 \end{Bmatrix}^T \quad (6)$$

Здесь O_{ks} – нулевые матрицы размерности $k \times s$.

Закон оптимального управления строится из условия минимума квадратичного функционала

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [z(t)^T \Theta z(t) + du^2(t)] dt,$$

где Θ – заданная положительно определенная матрица размерности 10×10 , (в частности $\Theta = E_{10}$) $d = \text{const} > 0$.

Тогда оптимальное управление имеет вид [11]

$$u(t) = -K^T z(t), \quad K^T = \frac{1}{d} B_z^T L \quad (7)$$

Матрица L размерности 10×10 является положительно определенным решением нелинейного матричного алгебраического уравнения Риккати

$$LA + A^T L - \frac{1}{d} L B_z B_z^T L - \Theta = 0.$$

В силу управляемости системы (4), (5) ((6)) управление (7) обеспечит асимптотическую устойчивость замкнутой стационарной системы.

Для того, чтобы ввести управление в исходную нестационарную систему, введем новые вспомогательные переменные x' :

$$\underset{(5 \times 1)}{X} = T(t) Y,$$

$$X = \begin{Bmatrix} x \\ x' \\ x_3 \end{Bmatrix}, \quad Y = \begin{Bmatrix} y \\ x_3 \end{Bmatrix}, \quad \underset{(5 \times 5)}{T}(t) = \begin{Bmatrix} F^T(t) & 0 \\ P^T(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

$$P^T(t) = \begin{pmatrix} -\sin vt & 0 & \cos vt & 0 \\ 0 & -\sin vt & 0 & \cos vt \end{pmatrix}$$

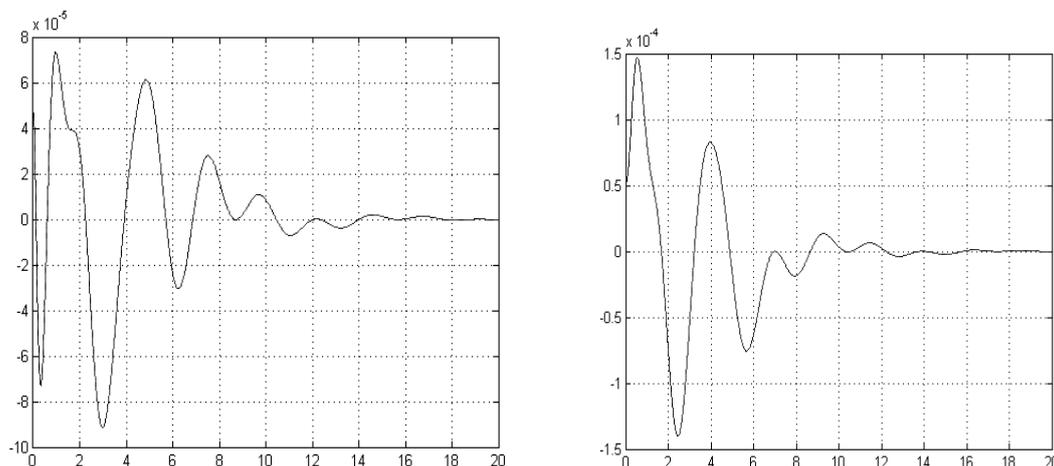
Переход от переменных стационарной системы к исходным переменным можно осуществить по формулам

$$z = \begin{Bmatrix} Y \\ \dot{Y} \end{Bmatrix}, \quad Y = T^{-1}(t) X, \quad T^{-1}(t) = \begin{Bmatrix} F(t) & P(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Тогда управление (7), построенное для стационарной системы, представленное в исходных переменных, вводится в исходную нестационарную систему (3), дополненную уравнением для вспомогательных переменных x' [8], которое, как показано в [9], имеет вид

$$\ddot{x}' + 2D\dot{x}' + Rx' = B_1'(t)u, \quad x' = \begin{Bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{Bmatrix}, \quad B_1'(t) = \begin{Bmatrix} -q_1 \sin vt \\ -q_1 \cos vt \end{Bmatrix}$$

В соответствии с вышеизложенным был построен алгоритм стабилизации и проведено численное моделирование в пакете Matlab, продемонстрировавшее эффективность предложенной методики. Некоторые результаты моделирования для переменных x_1, x_3 приведены на рисунках, где выбран масштаб по координатам $5,2 \cdot 10^{-5} = 20\text{km}$, единица времени: 28 дней = 6,28.



1. C. McInnes. Solar sail Trajectories at the Lunar L2 Lagrange Point// Journal of Spacecraft and Rocket, 1993. Vol. 30. No. 6. pp.782–784,
2. K. Howell and B. Marchand. Natural and Non-Natural Spacecraft Formations Near L1 and L2 Libration Points in the Sun-Earth-Moon Ephemerics System. //Dynamical Systems: An International Journal. 2005. Vol. 20, No. 1. pp. 149–173
3. Bookless J., McInnes C.R. Control of Lagrange point orbits using solar sail propulsion. Acta Astronautica. 2008. V.62, N 2-3, pp. 159-176.
4. R. J. McKay, M.Macdold, J.Biggs and C.McInnes. Survey of Highly-Non-Keplerian Orbits with Low Thrust Propulsion. // JGCD. 2011. Vol. 34 No. 3. pp. 645-666.
5. Лидов М.Л., Лукьянов С.С., Тесленко Н.М. Автоматическая станция в окрестности лунной либрационной точки L_2 . Препринт №116. М.: Ин-т прикл. мат. АН СССР, 1974.
6. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312с.
7. J. Simo, C.R. McInnes. Analysis and Control of Displaced Orbits in the Earth-Moon System.// Proc. 60th Internat. Astonautical Congr. 2009. Corea.
8. Каленова В.И., Морозов В.М., Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. М.: Физматлит, 2010. -208с.

9. Морозов В.М., Каленова В.И., Об управлении линейными нестационарными системами специального вида. Изв. РАН Теория системы управления, 2013, №3. С. 6-15.

10. Laub A.J., Arnold W.F. Controllability and observability criteria for multivariable linear second-order models. IEEE Trans. Automat. Control 1984. V. AC-29. No2.pp. 163-165.

11. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука. 1978. 552с.

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ОДНОКОЛЁСНОГО РОБОТА СПЕЦИАЛЬНОЙ КОНСТРУКЦИИ

В.М. Морозов, А.С. Карчевский

(НИИ Механики МГУ, Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1)

E-mail: moroz@imec.msu.ru

THE STABILITY OF STATIONARY MOTIONS OF THE MONOCYCLE.

V.M. Morozov, A.S. Karchevsky (LMSU Institute of Mechanics, Russia,
119192, Moscow, Michurinskiy pr. 1)

Keywords: monocycle, stability, stationary motions, nonholonomic systems.

Введение. Колёсные экипажи являются распространёнными объектами, механическими моделями которых служат неголономные системы. Среди колёсных экипажей важное место занимают одноколёсные (моноциклы). Публикаций, посвящённых этим роботам, достаточно много (см., например, [1-6]). Особый интерес представляют стационарные движения одноколёсного робота, исследование их устойчивости и возможности их стабилизации при помощи тех или иных управляющих воздействий.

Описание модели. Рассматривается модель одноколёсного робота, состоящая из пяти частей: диска, катящегося по горизонтальной плоскости без проскальзывания; маятника, который может вращаться вокруг оси диска; ротора, вращающегося вокруг оси симметрии маятника; невесомого стержня, зафиксированного на маятнике и перпендикулярного плоскости диска; и материальной точки, которая может перемещаться по этому стержню.

Введём неподвижную систему координат $Sxyz$, где ось Sz – вертикаль, и полужёстко связанную с диском систему $O\xi\eta\zeta$ с началом в его центре. Ось $O\zeta$ направим перпендикулярно плоскости диска, ось $O\eta$ – вдоль линии наибольшего ската, а $O\xi$ так, чтобы получилась правая тройка. Полагаем, что центр диска O , центр масс маятника O_2 , центр масс ротора O_3 и точка крепления стержня O_4 лежат в плоскости диска на одной прямой, являющейся главной осью инерции маятника. Состояние механической системы задаётся восемью обобщёнными координатами: координатами x и y центра диска, углом φ собственного вращения диска вокруг $O\zeta$, углом θ между плоскостью диска и плоскостью Sxy , углом ψ между линией узлов и

осью Sx , углом α поворота ротора, углом β поворота маятника относительно диска, смещением l груза вдоль стержня.

Обозначим M_1, M_2, M_3, m массы диска, маятника, ротора и груза соответственно, R – радиус диска, $L_i = OO_i$, где $2 \leq i \leq 4$; главные центральные моменты инерции диска $J_\xi^d, J_\eta^d, J_\zeta^d$; главные центральные моменты инерции маятника и ротора J_1^p, J_2^p, J_ζ^p и J_1^r, J_2^r, J_ζ^r .

Уравнения движения. Условие непроскальзывания может быть записано в виде следующих неголономных связей:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\dot{\phi}R\cos\psi + \dot{\theta}R\sin\theta\sin\psi - \dot{\psi}R\cos\theta\cos\psi \\ \dot{y} &= -\dot{\phi}R\sin\psi - \dot{\theta}R\sin\theta\cos\psi - \dot{\psi}R\cos\theta\sin\psi\end{aligned}\quad (1)$$

Кинетическая энергия системы имеет вид $T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{l}, \theta, \beta, l)$, т.е. зависит от всех скоростей и трёх координат. Явное выражение для неё мы не приводим здесь из-за его громоздкости.

Выражение для потенциальной энергии:

$$\Pi = gMR\sin\theta + gML\sin\theta\sin\beta + gml\cos\theta.$$

Здесь: $d = L_4, M = M_1 + M_2 + M_3 + m, ML = M_2L_2 + M_3L_3 + mL_4$.

Кинетическая и потенциальная энергии, а также коэффициенты неголономных связей не зависят от x и y , поэтому в качестве уравнений движения были использованы уравнения Чаплыгина [7]. Обозначим $T^*(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{l}, \theta, \beta, l)$ выражение для кинетической энергии, полученное с учётом неголономных связей (1).

Уравнения движения в форме Чаплыгина имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\phi}} &= \gamma_{13} \dot{\psi}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T^*}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\psi}} = -\gamma_{13} \dot{\phi} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\alpha}} &= 0; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T^*}{\partial \beta} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \beta}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{l}} - \frac{\partial T^*}{\partial l} = -\frac{\partial \Pi}{\partial l}\end{aligned}$$

где $\gamma_{13} = \frac{\partial r}{\partial x} |_{(1)} \sin\psi - \frac{\partial r}{\partial y} |_{(1)} \cos\psi$

Стационарные движения. Найдём стационарные движения рассматриваемой системы, характеризуемые тремя постоянными циклическими скоростями ($\dot{\phi} = \omega, \dot{\psi} = \Omega, \dot{\alpha} = \gamma$) и тремя постоянными позиционными координатами ($\theta = \theta_0, \beta = \beta_0, l = l_0$).

Показано, что для всех стационарных движений выполнено условие $\cos\beta_0 = 0$, т.е. ось симметрии маятника расположена вдоль прямой

наибольшего ската. Обозначим $\varepsilon = \pm 1$; плюс соответствует «верхнему» положению маятника $\beta_0 = \pi/2$, а минус – «нижнему» $\beta_0 = -\pi/2$. Уравнения, задающие трёхмерное многообразие стационарных движений, имеют вид:

$$\begin{aligned} & \Omega^2 \left[\left(A + ml_0^2 - C - J_\zeta - 2MLR\varepsilon \right) \cos \theta_0 \sin \theta_0 + m(d\varepsilon + R)l_0 \left(\sin^2 \theta_0 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \cos^2 \theta_0 \right) \right] + \omega \Omega \left[- (C + MLR\varepsilon) \sin \theta_0 - mRl_0 \cos \theta_0 \right] + \Omega \gamma J_1' \varepsilon \cos \theta_0 + \\ & + gml_0 \sin \theta_0 - g(MR + ML\varepsilon) \cos \theta_0 = 0 \quad (2) \\ & -g \cos \theta_0 + \Omega^2 \left(l_0 \sin^2 \theta_0 - d\varepsilon \cos \theta_0 \sin \theta_0 - R \cos \theta_0 \sin \theta_0 \right) + \\ & + \Omega R (-R \sin \theta_0) = 0 \end{aligned}$$

Здесь: $J_\zeta = M_2 L_2^2 + M_3 L_3^2 + M_4 L_4^2 + J_\zeta^p + J_\zeta^r$;

$$J_\varepsilon = M_2 L_2^2 + M_3 L_3^2 + M_4 L_4^2 + J_2^p + J_2^r - J_1^p - J_1^r;$$

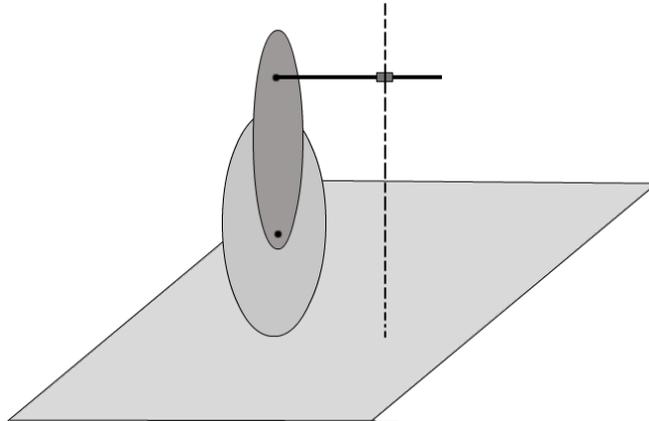
$$C = J_\zeta^d + MR^2;$$

$$A = J_\xi^d + J_1^p + J_1^r.$$

Все решения этих уравнений можно разделить на две группы: движения с наклонным диском и движения с вертикальным.

Первые представляют собой набор прецессий, задаваемых углом наклона диска θ_0 и скоростями поворота диска относительно вертикали Ω и собственного его вращения ω , по которым из уравнений (2) получаются значения l_0 и скорости вращения ротора γ .

Вторая группа состоит из прямолинейного качения (ω произвольна, $\Omega = 0$), верчения на месте вокруг вертикальной оси (Ω произвольна, $\omega = 0$), покоя ($\omega = 0$, $\Omega = 0$), как частного случая, и ещё одного движения, на которое обратим отдельное внимание (см. рис.).



Оно схоже с движением мельничного жёрнова и представляет собой поворот диска вокруг вертикальной оси, проходящей через вынесенный на расстояние l_0 из плоскости маятника груз (в остальных движениях с вертикальным диском $l_0 = 0$). Скорость поворота диска относительно вертикали при таком движении определяется параметрами системы, $\Omega = \pm \sqrt{\frac{gm}{G}}$, где $G = \frac{C + MLR}{R} - m(d\varepsilon + R)$, скорость собственного вращения

определяется из условия непроскальзывания $\omega = \pm \sqrt{\frac{gm}{G}} \frac{l_0}{R}$, а скорость

вращения ротора и l_0 могут варьироваться. Это движение отсутствовало в рассмотренных ранее моделях одноколёсных экипажей [2]. Его существование есть следствие введения груза в модель моноцикла.

Устойчивость. Для исследования устойчивости ряда стационарных движений с вертикальным диском введём вектор возмущений позиционных координат $\mathbf{x} = (\Delta\theta, \Delta\beta, \Delta l)^T$ и циклических скоростей $\mathbf{y} = (\Delta\omega, \Delta\Omega, \Delta\gamma)^T$. Линеаризованная система уравнений возмущённого движения для всех рассмотренных случаев имеет три первых интеграла. Исключая при помощи этих интегралов циклические скорости, получим систему уравнений относительно позиционных координат:

$$A_1 \ddot{\mathbf{x}} + A_2 \dot{\mathbf{x}} + A_3 \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3)$$

Характеристический полином полученной системы имеет вид $a_0 \lambda^6 + a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^2 + a_3 = 0$. Необходимое условие устойчивости заключается в том, чтобы все корни были чисто мнимыми. Для этого необходимо и достаточно выполнение следующих условий: $a_0 > 0$; $a_1 > 0$; $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$; $a_3 > 0$; $4a_2^3 a_0 + 4a_3 a_1^3 - a_1^2 a_2^2 - 18a_0 a_1 a_2 a_3 + 27a_0^2 a_3^2 < 0$.

Для устойчивости прямолинейного качения с маятником наверху необходимо, чтобы центр диска двигался «медленно», то есть его скорость не превышала критического значения, определяемого параметрами системы. При маятнике, опущенном вниз, как и в случае задачи о качении диска без маятника, для устойчивости необходимо, чтобы скорость движения центра диска была выше критической. При таких скоростях движения центра диска можно достичь выполнения необходимых условий устойчивости путём увеличения скоростей вращения ротора. Данные результаты согласуются с результатами, полученными в [2] для модели без груза.

Для особого движения («мельничный жернов») было получено, что при относительно малой массе груза и большой скорости вращения ротора, можно добиться выполнения необходимых условий устойчивости путём выбора достаточно большого радиуса l_0 окружности, описываемой центром диска.

Отдельного внимания заслуживает устойчивость состояния покоя системы (диск вертикален, центр масс маятника расположен на прямой наибольшего ската выше или ниже центра диска, груз на оси маятника, при этом вращается только ротор). Для этого движения в уравнении (3) матрица A_1 является положительноопределённой, матрица A_2 имеет вид матрицы гироскопических сил, а матрица A_3 симметрична. Воспользуемся для исследования устойчивости этого состояния теоремой Кельвина-Четаева [8]. При опущенном вниз маятнике A_3 имеет два положительных и одно отрицательное собственное значение, то есть степень неустойчивости по Пуанкаре нечетна и гироскопическая стабилизация невозможна. Таким образом состояние покоя с опущенным вниз маятником всегда неустойчиво, независимо от скорости вращения ротора. При поднятом вверх маятнике степень неустойчивости равна двум, и разгоном ротора можно добиться выполнения необходимых условий устойчивости такого положения. Однако, присутствие в системе диссипативных сил с полной диссипацией делает гироскопическую стабилизацию невозможной.

Таким образом, для обеспечения устойчивости различных движений одноколёсного робота требуется введение дополнительных управляющих воздействий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sheng Z.Q., Yamafuji K. Study on the stability and motion control of a unicycle, 1 st Report: Dynamics of a human riding a unicycle and its modeling by link mechanism. // JSME International Journal. 1995. Vol. 38. № 2. Pp. 249-259
2. Каленова В.И., Морозов В.М., Шевелева Е.Н. Устойчивость и стабилизация движения одноколесного велосипеда. // МТТ. 2001. Вып. 4
3. Каленова В.И., Морозов В.М. К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем Чаплыгина // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 179-186.
4. Zenkov D.V., Bloch A.M., Marsden J.E. The Lyapunov-Malkin Theorem and Stabilization of the Unicycle with Rider. // Systems & Control Letters. 2002. №45. Pp. 293-302
5. Cardini S.B. A history of the monocycle stability and control from inside the wheel. // IEEE Control Systems. 2006. Vol. 26. № 5. Pp. 22-26.

6. Лебедев Д.А. Об устойчивости и стабилизации движения одноколёсного робота. //Вестник Моск. ун-та сер. 1 мат. мех. 2008. №3. С. 67-70
7. Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И., Трещев Д.В. Теоретическая механика. М.: Академия, 2010.
8. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955.

О ПОСТРОЕНИИ СИЛЬНО УСТОЙЧИВЫХ СИСТЕМ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ

И.А. Мухаметзянов (Российский университет дружбы народов, Россия,
117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6)

E-mail: mukhia@mail.ru

ABOUT CONSTRUCTION OF SYSTEMS OF PROGRAM MOTION WITH STRONG STABILITY

I.A. Mukhametzyanov (Peoples' Friendship University of Russia, 6, Miklukho-
Maklaya str., Moscow, Russia, 117198)

Keywords: principle of feedback on the quasi-acceleration, self-tuning control, unstressed bringing to manifold, finite time, mechanical and generalized systems, strong stability of motion.

Введение. Работа посвящена развитию идей, заложенных в «принципе декомпозиции» [1] и развитых в работах [2-5]. В данной работе предлагается «принцип обратной связи по квазиускорению», с помощью которого строятся универсальные алгоритмы безударной стабилизации за конечное время фазового состояния механических и обобщенных систем, заданного голономными и неголономными программными связями. В отличие от «принципа декомпозиции» [1], решение задачи возможно и при размерности вектора управления, меньшей числа степеней свободы системы. При этом предполагается, что массо-инерционные параметры системы и возмущающие силы известны неточно. Такие системы предложено считать сильно устойчивыми.

Постановка задачи. Рассматривается механическая система, динамика которой описывается уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + Q', \quad (1)$$

где

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q, t) \dot{q} + \dot{q}^T b(q, t) + T_0(q, t) \quad (2)$$

есть кинетическая энергия системы, $q, \dot{q} \in R^n$ – векторы обобщённых координат и скоростей, Q – вектор управляющих обобщённых сил, Q' – вектор неуправляющих активных сил, в том числе случайных возмущений,

которые будем считать непрерывными и ограниченными по величине. Матрица кинетической энергии A положительно определена

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 \leq \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q, t) \dot{q} \leq \lambda_2 \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2, \quad \lambda_v = \text{const} > 0. \quad (3)$$

Элементы $a_{ik}(q, t)$ матрицы $A(q, t)$, вектора $b(q, t)$ и $T_0(q, t)$ предполагаются гладкими.

Пусть программное многообразие системы задано в виде

$$\bar{\omega}_1(q, t) = 0, \quad \dot{\bar{\omega}}_2 = \dot{\omega}_2 + \tilde{a}_2(q, t) = 0, \quad (4)$$

где $\bar{\omega}_1$ – k_1 -мерный, а $\dot{\bar{\omega}}_2$, $\dot{\omega}_2$, \tilde{a}_2 – k_2 -мерные векторы, $\dot{\omega}_2 = \tilde{A}(q, t)\dot{q}$, где $\tilde{A}(q, t)$ – матрица $(k_2 \times n)$ с гладкими элементами, удовлетворяющими условию $\det\|\Omega\Omega^T\| \neq 0$, $\Omega = \|\partial\bar{\omega}_1/\partial q, \tilde{A}\|$ – матрица $(k \times n)$, $k = k_1 + k_2$.

Задача заключается в построении выражения Q , обеспечивающего безударное приведение за конечное время фазового состояния системы (1) в многообразии (4) при любых начальных условиях q_0, \dot{q}_0, t_0 , независимо от конкретного вида $A(q, t)$, $b(q, t)$, $T_0(q, t)$, Q' , используя лишь информацию об отклонениях от многообразия (4), выражаемых через q и \dot{q} . Такие системы будем считать сильно устойчивыми.

Алгоритм управления укороченной системой. Для решения задачи переходим от координат q_v к другим координатам $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k_1}$, являющимся элементами вектора $\bar{\omega}_1$, и квазиординатам $\omega_j (j = k_1 + 1, k_1 + 2, \dots, k)$, где $k = k_1 + k_2$, а также координатам p_1, p_1, \dots, p_{n-k} , ортогональным $\omega_i (i = 1, 2, \dots, k)$.

Введем вместо $\dot{\bar{\omega}}_1$ квазискорости

$$\dot{\bar{\omega}}_1 = \dot{\omega}_1 + \tilde{a}_1, \quad (5)$$

где $\tilde{a}_1 = \mu\bar{\omega}_1$ – вектор с элементами $\mu_v\omega_v$, $\mu = \text{const} > 0 (v = 1, 2, \dots, k_1)$.

Присоединим к ним $\dot{\bar{\omega}}_2 = \dot{\omega}_2 + \tilde{a}_2$. В результате получим k -мерный вектор

$$\dot{\bar{\omega}}^T = (\dot{\bar{\omega}}_1, \dot{\bar{\omega}}_2).$$

Выражая T в виде $T = T_{\tilde{\omega}} + T_p + \tilde{T}_0$ где $T_{\tilde{\omega}} = \dot{\tilde{\omega}}^T A_{\omega} \dot{\tilde{\omega}}/2 + \dot{\tilde{\omega}}^T b_{\tilde{\omega}}$, $\tilde{T}_0 = T_0 + T_{\tilde{\omega}}^0$, $b_{\tilde{\omega}} = b_{\omega} - A_{\omega} \tilde{a}$, $T_{\tilde{\omega}}^{(2)} = \dot{\tilde{\omega}}^T A_{\omega} \dot{\tilde{\omega}}/2$ получим уравнение (1) в квазикоординатах

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{\tilde{\omega}}}{\partial \dot{\tilde{\omega}}} \right) - \frac{\partial T_{\tilde{\omega}}}{\partial \tilde{\omega}} = Q_{\omega} + Q'_{\omega} + \frac{\partial T}{\partial \omega} - \frac{\partial T_{\tilde{\omega}}}{\partial \tilde{\omega}}, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}} \right) - \frac{\partial T}{\partial p} = Q_p + Q'_p. \quad (7)$$

Систему (6) назовем укороченной системой.

Подставляя $\partial T_{\tilde{\omega}} / \partial \dot{\tilde{\omega}} = A_{\omega} \dot{\tilde{\omega}} + b_{\tilde{\omega}}$ в (6), получим

$$\frac{d}{dt} (A_{\omega} \dot{\tilde{\omega}}) + B_{\tilde{\omega}} \dot{\tilde{\omega}} - \frac{\partial T_{\tilde{\omega}}^{(2)}}{\partial \tilde{\omega}} = Q_{\omega} + Q'_{\omega}, \quad (8)$$

где

$$B_{\tilde{\omega}} = \left(\frac{\partial b_{\tilde{\omega}}}{\partial \tilde{\omega}} - \frac{\partial b_{\tilde{\omega}}^T}{\partial \tilde{\omega}} \right), \quad \tilde{Q}'_{\omega} = Q'_{\omega} + \frac{\partial T}{\partial \omega} - \frac{\partial T_{\tilde{\omega}}}{\partial \tilde{\omega}} - \frac{\partial b_{\tilde{\omega}}}{\partial p} \dot{p} - \frac{\partial b_{\tilde{\omega}}}{\partial t} + \frac{\partial T_{\tilde{\omega}}^0}{\partial \tilde{\omega}}.$$

Умножая уравнение (8) скалярно на $\dot{\tilde{\omega}}$, получим

$$\frac{dT_{\tilde{\omega}}^{(2)}}{dt} = \dot{\tilde{\omega}}^T \left(Q_{\omega} + \tilde{Q}'_{\omega} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\omega}}^T \frac{\partial A_{\omega}}{\partial \tilde{\omega}} \dot{\tilde{\omega}} \right) - \frac{1}{2} \dot{\tilde{\omega}}^T \frac{dA_{\omega}}{dt} \dot{\tilde{\omega}}. \quad (9)$$

Вектор обобщённых сил управления выберем в виде

$$Q_{\omega} = U_{\omega} - D \dot{\tilde{\omega}}, \quad D > \frac{1}{2} \left| \frac{dA_{\omega}}{dt} \right|, \quad (10)$$

где

$$U_{\omega} = -\text{sign} \dot{\tilde{\omega}} (U_0 + \dot{\tilde{\omega}}^T D_0 \dot{\tilde{\omega}}), \quad (11)$$

U_0 – постоянный вектор с положительными элементами $U_{0i} > |\tilde{Q}_{\omega}^i|$; $\dot{\tilde{\omega}}^T D_0 \dot{\tilde{\omega}}$ – вектор с элементами $\dot{\tilde{\omega}}^T D_{0i} \dot{\tilde{\omega}}$; D_{0i} и D – определённно положительные матрицы ($k \times k$), удовлетворяющие условию (10) и

$$D_{0i} > \frac{1}{2} \max \left| \frac{dA_{\omega}}{d\tilde{\omega}_i} \right|,$$

$\text{sign}\dot{\omega}$ – диагональная матрица с элементами $\text{sign}\dot{\omega}_i$. При этом правая часть (9) становится определённо отрицательной функцией по $\dot{\omega}$. Следовательно, значение $|\dot{\omega}|$ со временем будет убывать. Заметим, что при выборе U_ω в виде (11) при любых начальных значениях $\dot{\omega}(0)$ время обращения $|\dot{\omega}|$ в нуль будет конечным [1].

Алгоритм самонастраиваемого управления. При выборе управляющей силы (10) четкие рекомендации для назначения величин U_0, D_0, D в (10), (11) до недавнего времени отсутствовали. Следовательно, это обстоятельство не позволяло считать алгоритм управления вполне универсальным. С целью устранения этого недостатка в [8] предложен следующий метод построения самонастраиваемого управления. Представим (8) в виде

$$A_\omega(\omega, p, t)\ddot{\omega} = Q_\omega + \tilde{Q}'_\omega, \quad (12)$$

где \tilde{Q}'_ω – сумма всех векторов неуправляющих обобщённых сил.

Вектор Q_ω обобщённых управляющих сил в правой части (6), (12) ищем в виде

$$Q_\omega = -\text{sign}\dot{\omega}(Q_\omega^0 + \Delta Q_\omega), \quad (13)$$

где $\text{sign}\dot{\omega}$ – диагональная матрица $(k \times k)$ с элементами $\text{sign}\dot{\omega}_v (v = 1, 2, \dots, k)$.

Векторы Q_ω^0 и ΔQ_ω в (13) построим без использования информации об элементах матрицы A_ω и вектора \tilde{Q}'_ω следующим образом. При $t = 0$ сообщаем системе (12) управление

$$Q_\omega = -\text{sign}\ddot{\omega}(\lambda t), \quad (14)$$

где $\text{sign}\ddot{\omega}$ – диагональная матрица с элементами $\text{sign}\ddot{\omega}_v$, λ – k -мерный вектор с достаточно большими элементами $\lambda_v > 0 (v = 1, 2, \dots, k)$. Начиная измерение $\ddot{\omega}(t)$ с момента $t = 0$ до момента t_0 обращения $\ddot{\omega}$ в нуль, при котором правая часть (12) обращается в нуль, и наступает равенство $\tilde{Q}'_\omega(t_0) = -\text{sign}\ddot{\omega}(0)(\lambda t_0)$. Заметим, что в случае $\ddot{\omega}(0) = 0$, имеет место $\tilde{Q}'_\omega(t_0) = 0$ и $t_0 = 0$.

Если $\ddot{\omega}(0) \neq 0$, то $t_0 \neq 0$. Теперь, зная t_0 , при $t = t_0 + \Delta t$, где Δt – бесконечно малая положительная величина, примем значение $|Q_{\omega}^0|$ равным $|Q_{\omega}^0| = \lambda t_0 + \tilde{\Delta}$, где $\tilde{\Delta}$ – задаваемый нами вектор с элементами $\Delta_v > 0$ ($v = 1, 2, \dots, k$). Заметим, что при $t = t_0 + \Delta t$ прежнее значение $\ddot{\omega}(t_0) = 0$ становится равным

$$\ddot{\omega}(t_0 + \Delta t) = -\delta, \quad \delta_v > 0 \quad (v = 1, 2, \dots, k). \quad (15)$$

Из (15) следует, что элементы вектора δ определяются измерением элементов вектора $\ddot{\omega}(t_0 + \Delta t)$. Измерение $\ddot{\omega}_v$ продолжим с момента $t = t_0 + \Delta t$ до тех пор, пока не наступит равенство $\ddot{\omega}_v(t_{1v}) + \delta_{0v} = 0$, где δ_{0v} – элементы вектора $\delta_0 = \gamma \delta$, γ – диагональная матрица с элементами γ_v , $0 < \gamma_v < 1$. В момент времени t_{1v} добавим к $Q_{\omega v}(t_{1v})$ величину $\tilde{\Delta}_v$. Тогда элементы вектора (13) принимают значения

$$Q_{\omega v}(t_{1v} + \Delta t) = -\text{sign} \dot{\omega}_v(t_{1v} + \Delta t) [\lambda_v t_0 + \tilde{\Delta}_v (1 + i_v)], \quad (16)$$

где $i_v = 1$ соответствует очередному номеру 1 времени t_{1v} наступления в первый раз равенства $\ddot{\omega}_v(t_{1v}) + \delta_{0v} \text{sign} \dot{\omega}_v = 0$.

При продолжении измерения $\ddot{\omega}_v$ возможно наступление следующего момента времени t_{2v} , при котором

$$\ddot{\omega}_v(t_{2v}) + \delta_{0v} \text{sign} \dot{\omega}_v = 0. \quad (17)$$

Заметим, что момента времени t_{2v} , удовлетворяющего (17), может и не быть. Если t_{2v} существует, то за i_v в (16) принимается $i_v = 2$.

Таким образом, процедура определения i_v в (16) продолжается до тех пор, пока не наступит время обращения в нуль всех элементов $\dot{\omega}_v$ вектора $\dot{\omega}$. Итак, искомые выражения элементов вектора (13) имеют вид

$$Q_{\omega v}(t_{iv} + \Delta t) = -\text{sign} \dot{\omega}_v(t_{iv} + \Delta t) [\lambda_v t_0 + \tilde{\Delta}_v (1 + i_v)], \quad (18)$$

где $i_v = 1, 2, \dots$; Δt – бесконечно малая положительная величина, соизмеримая со временем, затраченным на измерение $\ddot{\omega}$ в моменты времени t_{iv} .

Таким образом, элементы искоемых векторов в правой части (13) имеют вид

$$Q_{\omega v}^0 = \lambda_v t_0 + \tilde{\Delta}_v, \quad \Delta Q_{\omega v} = \tilde{\Delta}_v i_v \quad v = 1, 2, \dots, k, \quad i_v = 1, 2, \dots$$

В заключение заметим, что предложенный выше способ самонастраиваемого управления можно назвать принципом обратной связи по квазиускорениям в дискретные моменты времени $t = t_{iv} + \Delta t$.

Управление системой в «режиме торможения». Заметим, что в некоторый конечный момент времени \tilde{t}_1 изображающие точки $(\omega_v, \dot{\omega}_v)$, согласно (5), окажутся на линиях разрыва

$$\dot{\omega}_v + \mu_v \omega_v = 0 \quad v = 1, 2, \dots, k_1,$$

представляющих собой уравнения прямых в координатных плоскостях $(\omega_v, \dot{\omega}_v)$. При этом знаки $\omega_v(\tilde{t}_1)$ и $\dot{\omega}_v(\tilde{t}_1)$ будут противоположными.

При $t > \tilde{t}_1$ движения изображающих точек будут происходить по закону

$$\omega_v = \omega_v(\tilde{t}_1) e^{-\mu_v(t-\tilde{t}_1)}$$

асимптотического приближения к началу координат $\omega_v = 0, \dot{\omega}_v = 0$ в скользящем режиме. Следовательно, процесс достижения начала координат будет продолжаться бесконечно долго.

С целью достижения начала координат за конечный промежуток времени с момента \tilde{t}_1 переведем систему в «режим торможения», заменяя элементы вектора (5) на

$$\tilde{\omega}_{3v}(\tau) = -\dot{\omega}_v(\tau) + \dot{\omega}_v(\tilde{t}_1) + \frac{\dot{\omega}_v^2(\tilde{t}_1)}{2\omega_v(\tilde{t}_1)} \tau \operatorname{sign} \dot{\omega}_v(\tau) \quad v = 1, 2, \dots, k_1, \quad (19)$$

где $\tau = t - \tilde{t}_1$. При этом значения ω_v и $\dot{\omega}_v$ обращаются в нуль одновременно в моменты времени

$$\tilde{t}_{2v} = \tilde{t}_1 + \frac{2|\omega_v(\tilde{t}_1)|}{|\dot{\omega}_v(\tilde{t}_1)|} \quad v = 1, 2, \dots, k_1. \quad (20)$$

Заметим, что при этом уравнения линий разрыва будут иметь следующий вид:

$$\dot{\omega}_v^2(\tau) = \dot{\omega}_v^2(\tilde{t}_1) + \frac{\dot{\omega}_v^2(\tilde{t}_1)}{|\omega_v(\tilde{t}_1)|} \omega_v(\tau).$$

Таким образом, приведение системы без удара в терминальное состояние (4) за конечный промежуток времени $\bar{t}_2 = \max \bar{t}_{2v}$ можно осуществить выбором элементов вектора Q_ω в (10) в виде

$$Q_{\omega v} = -\text{sign} \dot{\omega}_{0v} (U_{0v} + \dot{\omega}_0^T D_{0v} \dot{\omega}_0) - (D \dot{\omega})_v \quad v = 1, 2, \dots, k, \quad (21)$$

а в (13) в виде элементов вектора (18), где $\dot{\omega}_0$ – вектор с элементами $\dot{\omega}_{0v} = \dot{\omega}_v \text{sign} \dot{\omega}_v^2 + \dot{\omega}_{3v} \text{sign}(1 - \text{sign} \dot{\omega}_v^2)$; $\dot{\omega}_v$ – элементы вектора $\dot{\omega}^T = (\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2)$; $\dot{\omega}_1$ имеет вид (5), а $\dot{\omega}_2$ – вид (4).

Управление исходной системой. Для управления исходной системой (1) необходимо выразить Q через Q_ω . С этой целью определим сумму элементарных работ δA_ω^a всех активных управляющих сил, совершаемых лишь при вариациях $\delta \omega = \Omega \delta q$, где $\Omega = \|\partial \bar{\omega}_1 / \partial q, \bar{A}\|$ – матрица $(k \times n)$. Приравнивая эту работу $\delta A_\omega^a = Q_\omega^T \delta \omega$ к такой же работе $\delta A^a = Q^T \delta q$, где δq являются вариациями q , обусловленными лишь вариациями $\delta \omega$ в виде $\delta q = \Omega(\Omega \Omega^T)^{-1} \delta \omega$. При этом получаем $Q_\omega = (\Omega \Omega^T)^{-1} \Omega Q$, где Q_ω имеет вид (21).

Если Q задавать в виде $Q = M_0 u$, где $M_0(q, \dot{q}, t)$ – матрица $(n \times r)$, u – r -мерный вектор управления, то при $\det \|M_0^T M_0\| \neq 0$ и $\Omega M_0 \neq 0$ получается следующая система k уравнений для определения r элементов вектора u :

$$(\Omega \Omega^T)^{-1} \Omega M_0 u = Q_\omega.$$

Решение этого уравнения относительно u можно представить в виде [6]

$$u = \bar{\Omega}^T (\bar{\Omega} \bar{\Omega}^T)^{-1} Q_\omega + u_r, \quad (22)$$

где $\bar{\Omega} = (\Omega \Omega^T)^{-1} \Omega M_0$, $\det \|\bar{\Omega} \bar{\Omega}^T\| \neq 0$, u_r – r -мерный вектор, удовлетворяющий условию $\bar{\Omega} u_r = 0$, которое можно представить в виде [6]:

$$u_r = [E - \bar{\Omega}^T (\bar{\Omega} \bar{\Omega}^T)^{-1} \bar{\Omega}] \tilde{u},$$

где E – единичная матрица, \tilde{u} – произвольно задаваемый вектор. Заметим, что при $r = k$ матрица $\bar{\Omega}$ является квадратной. Следовательно, $u_r = 0$, т.к. при этом $E - \bar{\Omega}^T (\bar{\Omega} \bar{\Omega}^T)^{-1} \bar{\Omega} = 0$.

Отсюда следует, что минимальная размерность вектора управления \mathbf{u} в случае $k \leq r$ может быть равна размерности k вектора $\boldsymbol{\omega}$, что является существенным преимуществом перед способом решения поставленной в пункте 2 задачи по принципу декомпозиции [1]. Следует также отметить, что при размерности $r > k$, полагая $u_r = 0$, получим вектор \mathbf{u} с минимальной евклидовой нормой.

Пример. Управление процессом безударного приведения тела в заданную ориентацию режима преследующего движения по принципу пропорциональной навигации. Рассмотрим твердое тело, жестко связанное с подвижной системой координат $CXYZ$, оси которой являются главными центральными осями инерции тела.

Построим главный вектор внешних сил, при котором центр масс C тела движется по принципу пропорциональной навигации [7]:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_v = b\bar{\boldsymbol{\omega}}_e, \quad (23)$$

где $\bar{\boldsymbol{\omega}}_v$ – угловая скорость вращения скорости \bar{V} точки C тела, $\bar{\boldsymbol{\omega}}_e$ – угловая скорость вращения линии визирования \overline{CO} , O – преследуемая точка, b – положительный коэффициент пропорциональности.

Компонента внешних сил, направленная по главной нормали траектории точки C , выражается в виде $F_n = m(\bar{\boldsymbol{\omega}}_e \times \bar{V})$, где m – масса тела.

Подставляя $\bar{\boldsymbol{\omega}}_v = b\bar{\boldsymbol{\omega}}_e$, получим

$$F_n = mb(\bar{\boldsymbol{\omega}}_e \times \bar{V}). \quad (24)$$

Сила \bar{F}_n состоит из двух составляющих

$$\bar{F}_n = \bar{U}_1 + \bar{U}',$$

где \bar{U}_1 – управляющие, а \bar{U}' – неуправляющие.

Следовательно, при управлении центром масс C силой

$$\bar{U}_1 = mb(\bar{\boldsymbol{\omega}}_e \times \bar{V}) - \bar{U}'$$

движение точки C будет происходить в режиме преследующего движения по принципу пропорциональной навигации.

Теперь определим главный момент управляющих сил $U(U_p, U_q, U_r)$ так, чтобы ось CZ тела с ортом \bar{k}_3 из любого положения, удовлетворяющего условию $(\bar{k}_3 \cdot \bar{V}) > 0$, была приведена без удара за конечное время в положение, совпадающее с \bar{V} . При таком положении тела имеет место:

$$\omega_i = \bar{k}_i \cdot \bar{V} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (25)$$

где \bar{k}_i – орты осей CX и CY .

Введём квазискорости (5):

$$\dot{\omega}_i = \dot{\omega}_i + \mu_i(\bar{k}_i \cdot \bar{V}), \quad \mu_i = \text{const} > 0. \quad (26)$$

где $\dot{\omega}_i = \bar{\omega}_0 \cdot (\bar{k}_i \times \bar{V}) + (\bar{k}_i \cdot \dot{\bar{V}})$, $\bar{\omega}_0(p, q, r)$ – угловая скорость тела.

Из (26) следует

$$\bar{\omega}_0 \cdot (\bar{k}_i \times \bar{V}) = \dot{\omega}_i + B_i \quad i = 1, 2, \quad (27)$$

где $B_i = -(\bar{k}_i \cdot \dot{\bar{V}}) - \mu_i(\bar{k}_i \cdot \bar{V})$, $i = 1, 2$. Решение системы (27) имеет вид

$$\bar{\omega}_0 = M(\dot{\omega} + B), \quad (28)$$

где $B(B_1, B_2)$, $M = \Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}$, Ω – матрица (2×3) вида

$$\Omega = \begin{vmatrix} 0 & -(\bar{V} \cdot \bar{k}_3) & (\bar{V} \cdot \bar{k}_2) \\ (\bar{V} \cdot \bar{k}_3) & 0 & -(\bar{V} \cdot \bar{k}_1) \end{vmatrix}.$$

Теперь вектор Q_ω может быть построен с элементами вида (21), где $k = 2$. Зная Q_ω , определим вектор управляющих моментов

$$U = M(M^T M)^{-1} Q_\omega, \quad (29)$$

имеющий минимальную евклидову норму.

Заметим, что в случае равенства нулю одного из компонентов вектора U из (29) следует двумерное управление.

Заключение. Результаты работы можно рассматривать в качестве определенного вклада в теорию самонастраиваемого управления механическими системами, когда целью управления является безударное приведение состояния системы в многообразие, образованное программными связями при неполной информации о массо-инерционных параметрах системы и действующих на нее неуправляющих силах и возмущениях. При этом переходный процесс завершается за конечный промежуток времени. Тем самым программные связи становятся сильно устойчивыми.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (16-08-00558а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пятницкий Е.С. Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Доклады АН СССР. 1988. Том 300. № 2. С. 300-303.
2. Матюхин В.И. Универсальные законы управления механическими системами. М.: МАКС Пресс, 2001. 249 с.

3. Матюхин В.И. Безударный контакт твёрдых тел // ДАН. 2009. Том 427. № 1. С. 44-47.
4. Ананьевский И.М. Непрерывное управление по обратной связи возмущёнными механическими системами // ПММ. 2003. Т.67. Вып.2. С. 163-178.
5. Ананьевский И.М. Синтез непрерывного управления механической системой с неизвестной матрицей инерции // Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. № 3. С. 24-35.
6. Мухаметзянов И.А. Построение уравнений программных движений // Автоматика и телемеханика. 1972. № 10. С. 16-23.
7. Кан В.Л., Кельзон А.С. Теория пропорциональной навигации. Л.: Судостроение. 1965. 423 с.
8. Мухаметзянов И.А. Самонастраиваемое управление процессом безударного приведения состояния механических систем в заданное многообразие // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». 2013. № 3. С.105-112.

СОХРАНЕНИЕ СВОЙСТВА БЕЗОТКАЗНОСТИ СУПЕРВИЗОРА ДЛЯ ДИСКРЕТНО-СОБЫТИЙНОЙ СИСТЕМЫ

Н.В. Нагул (ИДСТУ им. В.М. Матросова СО РАН, Россия,
664033, Иркутск, Лермонтова, 134)

E-mail: sapling@icc.ru

NON-REJECTING PROPERTY PRESERVATION OF SUPERVISOR FOR DISCRETE-EVENT SYSTEM

N.V. Nagul (ISDCT named by V.M. Matrosov, SB RAS,
664033, Irkutsk, Lermontov str., 134)

Keywords: discrete-event systems, properties preservation, logical-algebraic equations.

Введение. В докладе представлено приложение метода логико-алгебраических уравнений (ЛАУ-метода) [1] в области дискретно-событийных систем (ДСС). Понятие ДСС обобщает широкий класс систем, наиболее подходящих для моделирования сложных технологических объектов и процессов, например, коммуникационных и компьютерных сетей, промышленных процессов обработки и производства, транспортных систем, автоматических и робототехнических систем. Отличительной чертой ДСС является рассмотрение эволюции системы как следствия возникновения последовательностей событий, наступающих независимо и мгновенно. Для регулирования поведения ДСС широко используется теория супервизорного управления [2], вобравшая в себя элементы алгебры, логики, теории формальных языков и автоматов. Как правило, в рамках этой теории ДСС формализуется в виде конечного автомата, переходы между состояниями которого интерпретируются как события системы. Некоторые переходы могут быть запрещены и представляют собой управляемые события, в то время как часть переходов может не наблюдаться. Супервизор – это внешнее средство управления ДСС, которое, анализируя наблюдаемые события, формирует управление в виде списка разрешенных в текущем состоянии управляемых событий. Вопросами теории супервизорного управления являются синтез супервизоров с требуемыми свойствами, редукция размерности супервизоров, поиск минимальных множеств наблюдаемых и управляемых событий, гарантирующих существование управления для требуемой спецификации на функционирование ДСС, и др. В докладе будет рассмотрено сохранение свойства безотказности супервизора при преобразовании системы с целью внесения в нее некоторой дополнительной информации.

Метод логико-алгебраических уравнений. Находясь на пересечении динамики систем, алгебры и логики, ЛАУ-метод представляет собой метод математической теории систем, который служит для синтеза критериев сохранения свойств систем, связанных специальными отображениями типа морфизмов. Одно из главных приложений полученных таким образом критериев – возможность редукции изучения сложной системы, скажем D , к изучению некоторой более простой, скажем, D' . Для применения ЛАУ-метода рассматриваемая система представляется в виде многоосновной алгебраической системы специального вида. В [1] введено понятие общей многоосновной алгебраической системы конечного типа (ОМАСК) $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega_F, \Omega_P, \Omega_E \rangle$, где $A = \{A_\lambda \mid \lambda = \overline{1, k}\}$ – семейство базовых множеств, $\Omega_F = \{F_\beta^{n_\beta} \mid F_\beta^{n_\beta} : S_{1\beta}[A] \times S_{2\beta}[A] \times \dots \times S_{n_\beta\beta}[A] \rightarrow S_{n_\beta+1, \beta}[A], \beta = \overline{1, k_F}\}$ – множество функций, $\Omega_P = \{P_\gamma^{n_\gamma} \mid P_\gamma^{n_\gamma} \subseteq T_{1\gamma}[A] \times \dots \times T_{n_\gamma\gamma}[A], \gamma = \overline{1, k_P}\}$ – множество отношений, $\Omega_E = \{E_\delta \mid E_\delta \in U_\delta[A], \delta = \overline{1, k_E}\}$ – множество выделенных элементов. Элементы множества $\Omega_F \cup \Omega_P \cup \Omega_E$ определены на расширенных ступенях Н. Бурбаки над множествами семейства A . Понятия схемы S образования ступени и расширенной ступени $S[A]$ детально изложены в [1].

Затем рассматривается одно из логико-алгебраических уравнений:

$$\mathcal{X} \& \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}', \quad (1)$$

$$\mathcal{X} \& \mathcal{F}' \Rightarrow \mathcal{F}. \quad (2)$$

Здесь \mathcal{F} – формульный предикат, описывающий изучаемое свойство системы D как свойство ОМАСК \mathfrak{A} , \mathcal{F}' – свойство другой алгебраической системы \mathfrak{A}' , соответствующей системе D' , а формула \mathcal{X} – объект поиска. ЛАУ (2) используется в случае необходимости сохранения свойства в направлении, противоположном направлению действия отображений из \mathfrak{A} в \mathfrak{A}'

$$\varphi = \{\varphi_\lambda \mid \varphi_\lambda : A_\lambda \rightarrow A'_\lambda, \lambda = \overline{1, k}\}. \quad (3)$$

ОМАСК $\mathfrak{A}' = \langle A', \Omega_{F'}, \Omega_{P'}, \Omega_{E'} \rangle$ имеет тот же тип, что и \mathfrak{A} , т.е. мощности множеств A и A' , Ω_F и $\Omega_{F'}$, и т.д. соответственно совпадают, а

ступень $S_{1\beta}'[A'](S_{2\beta}'[A'], T_\gamma'[A'], U_\delta'[A']$, соответственно) формируется из множеств A'_λ по тем же схемам, что и $S_{1\beta}[A](S_{2\beta}[A], T_\gamma[A], U_\delta[A]$, соответственно) из множеств A_λ . Не теряя общности, формула \mathcal{F} считается построенной из литералов (*заклучительных формул*, или *з-формул*) \mathcal{F}^v , т.е. атомарных формул \mathcal{F}_+^v или их отрицаний \mathcal{F}_-^v , с помощью связок $\&$, \vee , и типовых кванторов $\tilde{\omega}_\alpha \triangleq \forall z_\alpha : Z_\alpha \triangleq \forall z_\alpha (Z_\alpha \Rightarrow)$ (типовый квантор всеобщности), $\tilde{\omega}_\alpha \triangleq \forall z_\alpha : Z_\alpha \triangleq \exists z_\alpha (Z_\alpha \&)$ (типовый квантор существования), $\alpha = \overline{1, n}$, $v = \overline{1, M}$. Такие формулы называются обобщенными позитивными формулами.

Решение, назовем его \mathcal{R} , выбранного ЛАУ строится алгоритмически. Это решение на месте \mathcal{X} гарантирует сохранение истинностного значения формульного предиката \mathcal{F} при отображении ОМАСК \mathcal{A} в \mathcal{A}' . \mathcal{R} строится в форме традиционных морфизмов, т.е. имеет смысл легко проверяемых условий сохранения отображений и отношений.

Ниже показан способ применения ЛАУ-метода в исследовании управляемых частично-наблюдаемых ДСС. Понятие наблюдаемости языка спецификации, введенное в [3] основоположниками теории супервизорного управления ДСС, было основано на анализе формальных языков, генерируемых ДСС. Однако зачастую помимо сведений о событиях, влияющих на систему, доступна также информация о состоянии системы, предоставленная установленными в ней датчиками и другими средствами технического зрения. В [4] показано, как решение вопроса существования супервизора для ДСС с наблюдаемыми состояниями может быть сведено к решению этого вопроса для ДСС с наблюдением только за событиями. В докладе будет рассмотрен вопрос сохранения одного существенного свойства при переходе между супервизорами, построенными для обоих типов систем.

ДСС под управлением супервизора. Пусть $G = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_m)$ - дискретно-событийная система, моделируемая как генератор формального языка [2]. Здесь Q - множество состояний q ; Σ - множество событий; $\delta: \Sigma \times Q \rightarrow Q$ - функция переходов; $q_0 \in Q$ - начальное состояние; $Q_m \subset Q$ - множество маркированных (выделенных) состояний. Σ^* обозначает множество всех строк над языком Σ , включая пустую строку ε . Язык, генерируемый G , обозначается $L(G)$, $L(G) \triangleq \{w: w \in \Sigma^* \text{ и } \delta(w, q_0) \text{ определено}\}$,

тогда как язык, маркированный G , обозначается $L_m(G)$, $L_m(G) \triangleq \{w: w \in L(G) \text{ и } \delta(w, q_0) \in Q_m\}$. Маркированные строки могут, например, соответствовать некоторым задачам, выполнение которых завершено системой. Теория супервизорного управления предполагает, что наступление части событий может быть запрещено, а супервизор - это средство управления, реализующее необходимые для обеспечения требуемого поведения системы запреты.

Пусть $\Sigma_c \subset \Sigma$ - множество управляемых событий, $\Sigma_{uc} \triangleq \Sigma \setminus \Sigma_c$, $\Sigma_c \cap \Sigma_{uc} = \emptyset$. Формально, супервизор - это пара $J = (S, \phi)$, где $S = (X, \Sigma, \xi, x_0, X_m)$ - детерминированный автомат с входным алфавитом Σ . Изменения состояния S происходят в зависимости от входной цепочки событий, генерируемых G (т.е. слов из $L(G)$), тогда как $\phi: X \rightarrow \Gamma$ - отображение состояний супервизора x в схемы управления $\gamma \in 2^\Sigma$. Супервизор переключает схемы управления так, чтобы ДСС достигла цели управления, описанной некоторым регулярным языком K (спецификацией на поведение ДСС). Если S находится в состоянии x , $\sigma \in \Sigma_c$, то σ разрешено, если $\sigma \in \phi(x)$, и σ запрещено (не может произойти), если $\sigma \notin \phi(x)$. Заметим, что в отличие от ДСС с форсируемыми событиями, разрешенные события не обязательно должны произойти. Очевидно, что ϕ является обратной связью по состоянию. Так как неуправляемые события невозможно запретить, то $\Sigma_{uc} \subseteq \gamma = \phi(x)$. Пусть $\delta_c: \Gamma \times \Sigma \times Q \rightarrow Q$ будет функцией переходов, учитывающей присутствие схем управления, где

$$\delta_c(\gamma, \sigma, q) = \begin{cases} \delta(\sigma, q), & \text{если } \sigma \in \gamma; \\ \text{не определено,} & \text{если } \sigma \notin \gamma. \end{cases}$$

Построим функцию $\xi \times \delta_c: \Sigma \times X \times Q \rightarrow X \times Q$, где $(\xi \times \delta_c)(\sigma, x, q) \triangleq \triangleq (\xi(\sigma, x), \delta_c(\phi(x)\sigma, q))$ определено тогда и только тогда, когда $\delta(\sigma, q)$ определено, $\sigma \in \phi(x)$ и $\xi(\sigma, x)$ определено. Обозначим через $L(J/G)$ язык, порожденный совместной работой объекта управления и супервизора: $L(J/G) \triangleq \{w: w \in \Sigma^* \text{ и } (\xi \times \delta_c)(w, x, q) \text{ определено}\}$. Пусть $L_m(J/G)$ обозначает язык, маркированный супервизором: $L_m(J/G) \triangleq \{w: w \in L(J/G) \text{ и } (\xi \times \delta_c)(w, x_0, q_0) \in X_m \times Q_m\}$. Основная цель супервизорного управления - построить супервизор, такой что $L_m(J/G) = K$.

Пусть $L \subset \Sigma^*$. Префиксное замыкание \bar{L} – это множество всех строк, являющихся префиксами слов из L , т.е. $\bar{L} \triangleq \{s \mid s \in \Sigma^* \text{ и } \exists t \in \Sigma^* : s \cdot t \in L\}$.

Символ \cdot здесь обозначает конкатенацию строк и часто опускается. Язык L замкнут, если $L = \bar{L}$. Если G является генератором, то $L(G)$ замкнут. Пусть $L_c(J/G) \triangleq L(J/G) \cap L_m(G)$ обозначает язык, управляемый супервизором J над G , т.е. набор строк, маркируемых G и сохраняющихся в присутствии J [2].

Определение 1. Супервизор J называется безотказным, если $\bar{L}_c(J/G) = \bar{L}_m(J/G)$.

Безотказность гарантирует, что любая строка $s \in \bar{L}_c(J/G)$, которая может быть дополнена до «задания» в G , может также быть дополнена до строки, маркируемой J .

ДСС с наблюдаемыми состояниями. Пусть G частично наблюдаема, т.е. из всего множества событий выделено множество $\Sigma_o \subset \Sigma$ наблюдаемых событий, $\Sigma_{uo} = \Sigma \setminus \Sigma_o$, $\Sigma_c \cap \Sigma_{uo} = \emptyset$ [4]. Супервизор наблюдает только события из Σ_o и, основываясь на этой информации, разрешает или запрещает управляемые события. Как правило, функция наблюдения определяется как натуральная проекция $P: \Sigma^* \rightarrow \Sigma_o^*$, «стирающая» вхождения ненаблюдаемых символов, хотя существуют и другие информационные отображения: наблюдения масок событий, наблюдение с запаздыванием, динамическое наблюдение и др. Кроме того, в [4] рассмотрена задача супервизорного управления ДСС, когда при частичном наблюдении событий супервизор обладает некоторой информацией о состояниях G . Будем следовать этой постановке с необходимыми изменениями и исправлениями. Предположим, что для каждого $q \in Q$ супервизор наблюдает $y = h(q)$, где $h: Q \rightarrow Y$ – отображение множества Q во множество выходов Y , предоставленных датчиками и т.п. Поскольку для каждой строки, генерируемой G , существует единственная последовательность состояний, посещаемых в результате генерации этой строки, информационное отображение может быть определено расширенной проекцией $P_s: L(G) \rightarrow ((\Sigma_o \cup \{\varepsilon\}) \times Y)^*$, определяемой рекурсивно:

$$P_s(\varepsilon) = (\varepsilon, h(q_0)),$$

$$P_s(s\sigma) = P_s(s) \cdot (P(\sigma), h(\delta(s\sigma, q_0))).$$

В отличие от [4], в этом определении не используется множественное

повторение искусственных событий, соответствующих выходам. Только одна пара вида $(\sigma, y) \in \Sigma \times Y$ включается в наблюдаемую последовательность, поскольку включение более одного выхода, как в [4], является избыточным для формирования управления.

Изменения состояний автомата S зависят теперь от слов $L(G)$ с учетом информационного отображения, поэтому супервизор J реализует отображение $\theta_s: P_s(L(G)) \rightarrow 2^{2^c}$. Здесь $\theta_s(P_s(s))$ представляет собой множество событий, разрешенных γ_s после наблюдения $P_s(s)$, $s \in L(G)$. Целью супервизорного управления является построение такого супервизора, что $L_m(\theta_s/G) = K$. Построим новый генератор

$$G_s = (Q \cup Q', \Sigma \cup Y, \delta_s, q'_0, Q_m),$$

на основе G , изменив его множества событий и состояний. Здесь Q' – множество состояний, дублирующее Q ; $\delta_s: (\Sigma \cup Y) \times (Q \cup Q') \rightarrow Q \cup Q'$ – расширенная функция переходов, где

$$\delta_s(\sigma, q) = \delta(\sigma, q)', \quad \text{если } \sigma \in \Sigma, q \in Q,$$

$$\delta_s(y, q) = q, \quad \text{если } y = h(q), q \in Q,$$

$$\delta_s(y, q') = q, \quad \text{если } y = h(q), q' \in Q',$$

а для других пар значения не определены. Таким образом, супервизор для G_s может использовать информацию о выходе $y = h(q)$, поскольку выход y включен в наблюдаемую строку перед каждым событием. Заметим, что существуют другие способы использования наблюдения за состоянием, например, из [5]. Искусственные события из Y считаются неуправляемыми и наблюдаемыми. Супервизор для G_s реализует отображение $\theta_s: P(L(G_s)) \rightarrow 2^{\Sigma \cup Y}$. Расширим целевой язык K до языка $K_s = T^{-1}(K) \cap L_m(G)$, где $T: (\Sigma \cup Y)^* \rightarrow \Sigma^*$ – проекция.

Лемма 1. Предположим, что $K = \bar{K} \cap L_m(G)$. Тогда

- $\bar{K}_s = T^{-1}(\bar{K}) \cap L(G_s)$,

- $K_s = \bar{K}_s \cap L_m(G_s)$,

- $T(\bar{K}_s) = \bar{K}$.

В [4] показано, что неблокирующий супервизор θ_s , такой что $L_m(\theta_s/G_s) = K_s$, существует тогда и только тогда, когда существует θ_e такой что $L_m(\theta_e/G) = K$, и условия существования θ_s выражаются в терминах управляемости и наблюдаемости K_s . При этом единственным рассмотренным свойством супервизоров θ_s и θ_e являлось свойство неблокирования. Для заполнения этого пробела ниже методом ЛАУ рассматривается сохранение свойства безотказности при переходе от супервизора θ_s к θ_e и обратно.

Сохранение свойств супервизора. Пусть G – ДСС под управлением супервизора $J = (S, \phi)$, учитывающего наблюдение за состоянием, т.е. J реализует отображение $\theta_e: P_s(L(G)) \rightarrow 2^{\Sigma_c}$. Свойство безотказности J (определение 1) неформально может быть записано как

$$\forall s \in \bar{L}_c(J/G) \exists t \in L(J/G) (s \cdot t \in L_m(J/G) \Rightarrow s \cdot t \in L_c(J/G)). \quad (4)$$

Примем во внимание, что $s \cdot t \in L_m(J/G)$ эквивалентно записи

$$s \cdot t \in L(J/G) \ \& \ (\xi \times \delta_c)(t, \xi(P_s(s), x_0), \delta_c(\phi(\xi(P_s(s), x_0)), s, q_0)) \in X_m \times Q_m,$$

учтем эквивалентность $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ и определение языка $L_c(J/G)$. Тогда (4) представляется обобщенной позитивной формулой

$$\mathcal{F} = \forall s: \bar{L}_c(J/G) \exists t: L(J/G) (s \cdot t \notin L(J/G) \vee s \cdot t \in L_m(G) \vee \vee (\xi \times \delta_c)(t, \xi(P_s(s), x_0), \delta_c(\phi(\xi(P_s(s), x_0)), s, q_0))) \notin X_m \times Q_m). \quad (5)$$

Заметим, что здесь выражение « $s \cdot t \in L_m(G)$ » является неформальной записью атомарной формулы $L_m(G)(s \cdot t)$ языка позитивно-образованных формул, $L_m(G)$ – предикатный символ. Атомарная формула $L_m(G)(w)$ истинна только тогда, когда $w \in L_m(G)$, т.е. строка w принадлежит языку, маркированному G . Аналогично, выражение « $s \cdot t \notin L(J/G)$ » является эквивалентной записью отрицания атомарной формулы. Выражение « $\forall s \in \bar{L}_c(J/G)$ » является неформальной записью типового квантора $\forall s: \bar{L}_c(J/G)$. Для простоты изложения мы не различаем предикаты и предикатные символы.

Свойство (5) может рассматриваться как свойство трехосновной алгебраической системы конечного типа $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega_F, \Omega_P, \Omega_E \rangle$, с $A = \{X, Q, \Sigma, Y\}$, $\Omega_F = \{\delta_c, \xi, \phi, \cdot, P_s\}$, $\Omega_P = \{\bar{L}_c(J/G), \{L(J/G), L_m(G), X_m \times Q_m\}$, $\Omega_E = \{x_0, q_0\}$, представленное формулой \mathcal{F} без свободных переменных. Поскольку $\bar{L}_c(J/G), L(J/G), L_m(G) \subseteq \Sigma^N$, то каждый из предикатов $\bar{L}_c(J/G), L(J/G), L_m(G)$ связан со схемой $N(a_3)$. Схемы a_1 и a_2 отвечают предикату $X_m \times Q_m$, т.к. $X_m \times Q_m \subseteq X \times Q$. Схема a_i соответствует базовому множеству A_i , а $N(a_i)$ – последовательности элементов множества A_i [1].

Пусть супервизор для $G_s = (Q \cup Q', \Sigma \cup Y, \delta_s, q'_0, Q_m)$, реализующий отображение $\gamma_s: P(L(G_s)) \rightarrow 2^{\Sigma^c \cup Y}$, есть структура $I_s = (S_s, \phi_s)$, где $S_s = (X_s, \Sigma_s, \xi_s, x_0^s, X_m^s)$, $\phi_s: X_s \rightarrow 2^{\Sigma^s}$, и ОМАСК \mathfrak{A}_s имеет тот же тип, что и ОМАСК \mathfrak{A} . Введем семейство отображений $\varphi = \{\varphi_\lambda | \varphi_\lambda, \lambda = \bar{1}, 4\}$:

$$\varphi_1: X_s \rightarrow X, \varphi_2: Q_s \rightarrow Q, \varphi_3: \Sigma_s \rightarrow \Sigma, \varphi_4: Y_s \rightarrow Y, \quad (6)$$

где $\Sigma_s = \Sigma \cup Y$, $Q_s = Q \cup Q'$, $Y_s = Y$. Чтобы избежать громоздких формальных манипуляций алгоритма построения решения уравнения (1), воспользуемся результатами, полученными в [6]. Для любой формулы $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\bar{x})$ пусть $ex(\mathcal{F})$ ($all(\mathcal{F})$, соотв.) обозначает множество переменных типовых кванторов существования \check{w}_α из \mathcal{F} (всеобщности \widehat{w}_α , соотв.). Пусть Q_{ex} (Q_{all} , соотв.) обозначает множество предикатов, которые формируют типовые условия кванторов по переменным из $ex(\mathcal{F})$ ($all(\mathcal{F})$, соотв.). В случае (5) $Q_{ex} = \{L(J/G)\}$, $Q_{all} = \{\bar{L}_c(J/G)\}$. Множество предикатных символов, которые формируют з-формулы \mathcal{F}_+ , обозначим $pos(\mathcal{F})$, а множество предикатных символов, которые формируют з-формулы \mathcal{F}_- , обозначим $neg(\mathcal{F})$. В (5) $pos(\mathcal{F}) = \{L_m(G)\}$, $neg(\mathcal{F}) = \{L(J/G), X_m \times Q_m\}$. Сформируем множества

$$\begin{aligned} \Omega_{P+} &= Q_{ex} \cup pos(\mathcal{F}) = \{L(J/G), L_m(G)\}, \\ \Omega_{P-} &= Q_{all} \cup neg(\mathcal{F}) = \{\bar{L}_c(J/G), L(J/G), X_m \times Q_m\}, \\ \Omega_{P\pm} &= \Omega_{P+} \cap \Omega_{P-} = \{L(J/G)\}. \end{aligned}$$

Пусть $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ – подмножество индексного множества семейства (3). Нижеследующее определение обобщает на ОМАСК понятие морфизма алгебраических систем и Q -морфизма моделей Р. Линдона [7].

Определение 2. Пусть Θ, Ξ – некоторые множества символов отношений, $\Theta, \Xi \subseteq \Omega_P$, $\Theta \cap \Xi = \emptyset$. Семейство отображений (3) называется I -инъективным $\Theta\Xi$ -морфизмом ОМАСК $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega_F, \Omega_P, \Omega_E \rangle$ в ОМАСК $\mathfrak{A}' = \langle A', \Omega_{F'}, \Omega_{P'}, \Omega_{E'} \rangle$, если

$$1) \langle \varphi \rangle^{S_{n_{\beta+1}, \beta}[A]}(F_{\beta}^{n_{\beta}}(z_1, \dots, z_{n_{\beta}})) = (F_{\beta}^{n_{\beta}})'(\langle \varphi \rangle^{S_{1\beta}[A]}(z_1)$$

...

$$\langle \varphi \rangle^{S_{n_{\beta}, \beta}[A]}(z_{n_{\beta}})), z_1 \in S_{1\beta}[A], \dots, z_{n_{\beta}} \in S_{n_{\beta}, \beta}[A], \beta = \overline{1, k_F};$$

$$2) \langle \varphi \rangle^{U_{\delta}[A]}(E_{\delta}) = E'_{\delta}, \delta = \overline{1, k_E};$$

и для всех $\gamma = \overline{1, k_P}$

$$\langle \varphi \rangle^{T_{1\gamma}[A] \times \dots \times T_{n_{\gamma}\gamma}[A]}(P_{\gamma}^{n_{\gamma}}) \subseteq (P_{\gamma}^{n_{\gamma}})',$$

если $P_{\gamma}^{n_{\gamma}}$ соответствует предикатному символу $P_{\gamma} \in \Theta$;

$$(P_{\gamma}^{n_{\gamma}})' \subseteq \langle \varphi \rangle^{T_{1\gamma}[A] \times \dots \times T_{n_{\gamma}\gamma}[A]}(P_{\gamma}^{n_{\gamma}}),$$

если $P_{\gamma}^{n_{\gamma}}$ соответствует предикатному символу $P_{\gamma} \in \Xi$;

$$\langle \varphi \rangle^{T_{1\gamma}[A] \times \dots \times T_{n_{\gamma}\gamma}[A]}(P_{\gamma}^{n_{\gamma}}) = (P_{\gamma}^{n_{\gamma}})',$$

если $P_{\gamma}^{n_{\gamma}}$ соответствует предикатному символу $P_{\gamma} \in \Omega_P \setminus (\Theta \cup \Xi)$;

и отображения φ_{λ} инъективны для всех $\lambda \in I$.

Здесь символ $\varphi^{|x_i|}(x_i)$ обозначает каноническое распространение отображений (КРО) φ на степень $S[A] = |x_i|$, которой принадлежит переменная x_i [1]. Пусть $I_{S[A]}$ обозначает множество индексов базовых множеств A_{λ} , которые используются для построения степени $S[A]$ по схеме S .

Теорема 1. Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x_1, \dots, x_q)$ – обобщенная позитивная формула со свободными переменными x_1, \dots, x_q , $q \geq 0$. Пусть $I = \bigcup_{S[A]} I_{S[A]}$, где $S[A] = |v|$, v – все переменные вида z_{β} или x_{μ} , входящие в равенства $z_{\alpha} \equiv v$ в z -формулах вида $=_{-}$ или в типовые условия

универсальных кванторов \hat{z}_α , где z_α - определяющая переменная. Тогда выполнимость \mathcal{F} влечет выполнимость \mathcal{F}' при I -инъективном $(\Omega_{p_+} \setminus \Omega_{p_+^+})(\Omega_{p_-} \setminus \Omega_{p_-^+})$ -морфизме $OMACK \mathfrak{A}$ в $OMACK \mathfrak{A}'$.

Теорема говорит о том, что если отображения (6) являются I -инъективным $(\Omega_{p_+} \setminus \Omega_{p_\pm})(\Omega_{p_-} \setminus \Omega_{p_\pm})$ - морфизмом, то свойство безотказности супервизора I_s сохраняется и для супервизора J . Заметим, что для (5) множество $I_{S[A]}$ пусто, так что инъективность отображений не требуется.

Зададим $\varphi_2: Q_s \rightarrow Q$, положив $\varphi_2(q_s) = q$ для $q_s = q$ и $q_s = q'$, φ_4 - тождественным отображением, и пусть $\varphi_3: \Sigma_s \rightarrow \Sigma$ определено как

$$\varphi_3(\sigma_s) = \begin{cases} \sigma, & \text{если } \sigma_s = \sigma \in \Sigma; \\ \varepsilon, & \text{если } \sigma_s = y \in Y, \end{cases}$$

т.е. φ_3 - проекция. Для задания φ_1 используем определение 2. Согласно условию 1), для функции $\xi_s: \Sigma_s \times X_s \rightarrow X_s$ необходимо выполнение равенства:

$$\langle \varphi \rangle^{S_3[A]}(\xi_s(\sigma_s, x_s)) = \xi(\langle \varphi \rangle^{S_1[A]}(\sigma_s), \langle \varphi \rangle^{S_2[A]}(x_s)),$$

где $\langle \varphi \rangle^{S_i[A]}$ - КРО семейства φ над ступенью $S_i[A]$, а S_i - схемы ступеней, соответствующие функции ξ , $i = \overline{1,3}$. В случае ξ это схемы $S_1 = S_3 = a_1$, $S_2 = a_2$. Следовательно, $S_1[A] = S_3[A] = X_s$, $S_2[A] = \Sigma_s$, и получаем условие

$$\varphi_1(\xi_s(\sigma_s, x_s)) = \xi(\varphi_3(\sigma_s), \varphi_1(x_s)). \quad (7)$$

Для функции $\phi_s: X_s \rightarrow 2^{\Sigma_s}$ требуется

$$\widehat{\varphi}_3(\phi_s(x_s)) = \phi(\varphi_1(x_s)). \quad (8)$$

Согласно определению φ_3 , (8) эквивалентно равенству $\phi(\varphi_1(x_s)) = \phi_s(x_s) \setminus Y$ и очевидно коррелирует с [5]. Для функции $\delta_c^s: \Gamma_s \times \Sigma_s \times Q_s \rightarrow Q_s$ должно быть выполнено равенство

$$\varphi_2(\delta_c^s(\phi_s(x_s), \sigma_s, q_s)) = \delta_c(\widehat{\varphi}_3(\phi_s(x_s)), \varphi_3(\sigma_s), \varphi_2(q_s)).$$

Опуская доказательство, заметим, что равенство выполняется без дополнительных ограничений на связь между системами. Аналогичным

образом показывается, что $\varphi_3|^{N}(s_s \cdot_s t_s) = \varphi_3|^{N}(s_s) \cdot \varphi_3|^{N}(t_s)$ и $\varphi_3|^{N}(P_s(t)) = P(\varphi_3|^{N}(t))$.

Согласно условию 2) определения 2, для выделенных элементов требуется условие $\varphi_1(x_0^s) = x_0$, $\varphi_2(q_0^s) = q_0$. Так как по построению $q_0^s = q'_0$, последнее равенство справедливо вследствие определения φ_2 .

Рассмотрим множества $\Omega_{P+} \setminus \Omega_{P+} = \{L_m(G)\}$, $\Omega_{P-} \setminus \Omega_{P+} = \{\bar{L}_c(J/G), X_m \times Q_m\}$. Чтобы удовлетворить определению 2, для предиката $L_m(G)$ необходимо включение $\langle \varphi \rangle^{T[A]}(L_m(G_s)) \subseteq L_m(G)$. Так как $L_m(G_s) \in \Sigma^N$, то включение имеет вид $\varphi_3|^{N}(L_m(G_s)) \subseteq L_m(G)$. Однако более того, по построению языков $L_m(G)$ и $L_m(G_s)$ можно показать, что $\varphi_3|^{N}(L_m(G_s)) = L_m(G)$. Для предиката $L(J/G) \in \Omega_{P+}$ также доказывается равенство $\varphi_3|^{N}(L(J_s/G_s)) = L(J/G)$. Для предикатов из множества $\Omega_{P-} \setminus \Omega_{P+} = \{\bar{L}_c(J/G), X_m \times Q_m\}$ требуется гарантировать включения

$$\bar{L}_c\left(\frac{J}{G}\right) \subseteq \varphi_3|^{N}\left(\bar{L}_c\left(\frac{J_s}{G_s}\right)\right), \quad (9)$$

$$X_m \times Q_m \subseteq \varphi_1 * \varphi_2(X_m^s \times Q_m^s). \quad (10)$$

Для (9) требуемое включение можно доказать без дополнительных условий. Для (10) заметим, что $Q'_m = Q_m$, следовательно, достаточно обеспечить включение $X_m \subseteq \varphi_1(X_m^s)$. Итак, на основании теоремы 1 формулируем следующее утверждение:

Утверждение. Пусть $J_s = (S_s, \phi_s)$ - безотказный супервизор для ДСС G_s . Предположим, что для отображения $\varphi_1: X_s \rightarrow X$ выполнены условия (7), (8), а также $\varphi_1(x_0^s) = x_0$, $X_m \subseteq \varphi_1(X_m^s)$. Тогда супервизор $J = (S, \phi)$ для ДСС G также безотказен.

Заметим, что рассматривая $S_s = (X, \Sigma_s, \xi_s, x_0, X_m)$, где $\xi_s(x_s, \sigma_s) = \xi(x_s, \sigma)$ в случае $\sigma_s = \sigma$ и $\xi_s(x_s, \sigma_s) = x_s$ в случае $\sigma_s = y$, то $\varphi_1: X_s \rightarrow X$ - тождественное отображение, и все условия предложения 1 выполнены. Отметим также, что используя другую теорему из [6], рассматривающую ЛАУ (2), могут быть доказаны включения, обратные включениям из

утверждения 1. Таким образом, если супервизор $J = (S, \Phi)$ для ДСС G безотказен, то супервизор $J_s = (S_s, \Phi_s)$ также безотказен. Объединяя эти результаты, получаем теорему:

Теорема 2. Супервизор $J_s = (S_s, \Phi_s)$ для ДСС G_s безотказен тогда и только тогда, когда супервизор $J = (S, \Phi)$ для ДСС G безотказен.

Заключение. В докладе в рамках теории супервизорного управления ДСС рассмотрено одно из важнейших свойств супервизоров, а именно, вопрос сохранения свойства безотказности супервизора при включении в систему информации об ее состоянии. Полученные результаты демонстрируют применение ЛАУ-метода и показывают, как теоремы о классах свойств, сохраняющихся при морфизмах одного типа, помогают легко получать критерии сохранения по одному только виду формулы, описывающей рассматриваемое свойство, не применяя формальных манипуляций. ЛАУ-метод совмещает в себе алгебраический и логический подходы и подходит для исследования различных динамических систем.

Работа поддержана Российским научным фондом (проект №16-11-00053)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nagul N.V. The logic-algebraic equations method in system dynamics // St. Petersburg Math. J. 2013. Vol. 4(24), pp. 645-662.
2. Ramadge P.J., Wonham W.M. Supervisory control of class of discrete event processes // SIAM J. Control and Optimisation. 1987. Vol. 25(1), pp. 206-230.
3. Lin F., Wonham W.M. On observability of discrete-event systems // Information Sciences. 1988. Vol. 44(3), pp. 173-198.
4. Changwei C., Lin F., Lin Z. Why event observation: observability revisited // Discrete Event Dynamic Systems, 1997. Vol.149, pp. 127-149.
5. Sampath M., Sengupta R., Lafortune S., Sinnamohideen K., Teneketzis D.C. // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 1996, Vol. 4, pp. 105-124.
6. Нагул Н.В. Классы свойств, сохраняемых при морфизмах обобщений многосортных алгебраических систем в исследовании динамики // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. №1(20), с. 185-200.
7. Lyndon R.C. Properties preserved under homomorphism // Pacific J. Math. 1959. Vol. 9, pp. 143-154.

ОДНОВРЕМЕННАЯ ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ МАТРИЦ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ И ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТЬ МНОГОЧЛЕНОВ В ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

М.А. Новиков (ИДСТУ СО РАН им. В.М.Матросова, Россия,
664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134)
E-mail: nma@icc.ru

SIMULTANEOUS DIAGONALIZATION OF QUADRATIC FORM MATRICES AND SIGNDEFINITNES OF POLINOMIAL S IN THE INVESTIGATION OF MOTION STABILITY

М.А. Novickov (Institute of System Dynamics and Control Theory,
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Russia,
664033, Irkutsk, Lermontov str., 134)

Keywords: quadratic form, signdefiniteness, stabilization, characteristic equation, computer algebra.

Введение. Наиболее успешно исследование устойчивости стационарных движений автономных консервативных механических систем вторым методом Ляпунова [1]. Эффективным способом построения функций Ляпунова является связка, составленная из первых интегралов возмущенного движения [2]. Как для линейных, так и нелинейных систем, построение такой функции сводится к пучку из квадратичных форм [3]. Достаточные условия устойчивости, получаемые связкой квадратичных форм, в общем случае, за исключение границы области устойчивости, совпадают с необходимыми. Исследование устойчивости на границе области устойчивости представляет особый теоретический интерес, и при возможности использования критерия знакоопределенности многочленов нескольких переменных оно так же может быть осуществлено вторым методом Ляпунова.

1. Средства к получению достаточных условий устойчивости автономных консервативных систем. В дальнейшем понадобится критерий диагонализруемости двух вещественных симметричных матриц произвольного порядка n .

Теорема 1. Для приведения к диагональным двух вещественных симметричных матриц A и B одним вещественным линейным конгруэнтным преобразованием необходимо и достаточно выполнения двух условий:

1. характеристическое уравнение

$$f(\lambda) = \det(b - \lambda A) = 0 \quad (1.1)$$

имеет только вещественные решения;

2. матрица $(B - \lambda_i A)$ имеет все простые элементарные делители ($i = 1, 2, \dots, n$).

В общем случае матрицы A и B допускаются вырожденными. Приведение к диагональным матрицам $T'AT$ и $T'BT$ осуществляется линейным вещественным конгруэнтным преобразованием $x = Ty$, где матрица T составлена из собственных векторов $A^{(-1)}B$. Знакоопределенность пучка двух форм связана с одновременной диагонализацией матриц форм [4].

Теорема 2. Если A и B нельзя одновременно привести к диагональным одним линейным вещественным конгруэнтным преобразованием, то связка квадратичных форм $K(\sigma, x) = x'(B - \sigma A)x$ не может быть знакоопределенной при всех вещественных σ .

Следовательно, необходимым условием знакоопределенности связки двух квадратичных форм $K(\sigma, x)$ является одновременная диагонализация матриц A и B , приводимых к $A_1 = [a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}]$, $B_1 = [b_{11}, \dots, b_{nn}]$ линейным вещественным конгруэнтным преобразованием. Введем обозначения групп корней: $\lambda_i = b_{ii}/a_{ii} \in \Lambda^{(+)}$ при $a_{ii} > 0$; и $\lambda_i \in \Lambda^{(-)}$ при $a_{ii} < 0$. В предположении неособой матрицы A вопрос о достаточных условиях знакоопределенности связки форм $K(\sigma, x)$ может быть решен следующей теоремой П.А. Кузьмина [3], хотя и не сформулированной в явном виде.

Теорема 3. Для знакоопределенности пучка квадратичных форм $K_1(\sigma, x) = x'(B_1 - \sigma A_1)x$ знакопеременных форм $x'A_1x$ и $x'B_1x$, приведенных к полным квадратам, необходимо и достаточно выполнения одного из условий:

$$1. \lambda_{\max}^{(-)} = \max_{i \in [1; k]} \lambda_i^{(-)} < \sigma < \min_{j \in [k; n]} \lambda_j^{(+)} = \lambda_{\min}^{(+)}; \quad (1.2)$$

$$2. \lambda_{\max}^{(+)} = \max_{j \in [k; n]} \lambda_j^{(+)} < \sigma < \min_{i \in [1; k]} \lambda_i^{(-)} = \lambda_{\min}^{(-)}. \quad (1.3)$$

Первое условие соответствует положительно определенным при $\sigma \in (\lambda_{\max}^{(-)}; \lambda_{\min}^{(+)})$, а второе - отрицательно определенным при $\sigma \in (\lambda_{\max}^{(+)}; \lambda_{\min}^{(-)})$ связкам форм. Эта теорема составляет достаточные условия знакоопределенности связки квадратичных форм. При одной из знакоопределенных форм $V_1(x)$ или $V_2(x)$ нужное значение σ определяет

Замечание 1. При знакоопределенной форме $V_1(x) = x'A_1x$ значение параметра σ для знакоопределенности связки квадратичных форм $K_1(\sigma, x) = x'(B_1 - \sigma A_1)x$, приведенных к полным квадратам форм $V_1(x)$ и $V_2(x)$, определяется:

1. $\sigma > \lambda_{\max}^{(-)}$ в случае отрицательно определенной $V_1(x)$;
2. $\sigma > \lambda_{\max}^{(+)}$ в случае положительно определенной $V_1(x)$.

Полное исследование устойчивости движения будет установлено после проведения анализа устойчивости на границе области устойчивости. Исследование знакоопределенности таких неоднородных выражений опирается на приведенные к установленному виду функции:

$$W(x) = W_{2m}(x_1, x_2, \dots, x_n) + W^*(x_1, \dots, x_{n+l}), \quad x \in R^{n+l}; \quad n, l, m \geq 1, \quad (1.4)$$

где $W_{2m}(x_1, \dots, x_n)$ положительно определена по своим переменным и является формой низшего порядка $2m$, $W^*(x)$ – полином выше $2m$ порядка. Вещественные решения $W(x) = 0$ в окрестности начала координат можно искать в виде параметрических ветвей [5,6]:

$$x_i = \sum_{|p|=L}^{+\infty} b_{i(p)} t^p; \quad L > M; \quad x_{n+j} = \delta_j t_j^M \quad (j=1, 2, \dots, l);$$

$$t^p = t_1^{p_1} \times t_2^{p_2} \times \dots \times t_l^{p_l}; \quad p_j \geq 0; \quad |p| = p_1 + p_2 + \dots + p_l, \quad (1.5)$$

где $\delta_j = -1$ при $x_{n+j} < 0$ и $\delta_j = +1$ в остальных случаях. Целочисленные M и L подбираются в процессе построения [5,6] ветвей решений $W(x) = 0$ и могут уточняться. При подстановке (1.5) в (1.4) получается ряд:

$$W(x(t)) = W_1(t) = A_Q(b_{i(p)}; M; L; t) + \dots,$$

где многоточием обозначены члены выше Q порядка, а $A_Q(b_{i(p)}; M; L; t)$ – форма наименьшего порядка Q по параметру t . Дробь Q/M можно привести к несократимой q/r , и тогда имеет место

Теорема 4. Если

1. а) $q = 2\alpha + 1$ (α – целое) или б) $q = 2\alpha$ и $A_Q(b_{i(p)}; M; L; t)$ – знакопеременная форма при вещественных $b_{i(p)} \in R$, то $W(x)$ знакопеременна;
2. $q = 2\alpha$ и $A_Q(b_{i(p)}; M; L; t) \gg 0$ при вещественных $b_{i(p)} \in R$, то $W(x) \gg 0$;
3. $q = 2\alpha$ и $A_Q(b_{i(p)}; M; L; t) \geq 0$ при вещественных $b_{i(p)} \in R$, то $W(x)$ может быть знакоопределённой или знакопеременной, что определяется членами выше Q порядка.

В конкретных вычислительных задачах выбор наименьших начальных значений часто упрощает анализ.

Теорема 5. При анализе знакоопределённости (1.4) для $m=1$ в разложении (1.5) сразу можно полагать $M=1$, $\delta_j=1$.

Теоремы 1-5 составляют способ исследования устойчивости стационарных движений нелинейных автономных консервативных систем.

2. Об устойчивости перманентных вращений в задаче Бруна. В качестве примера рассматривается движение тяжелого твердого тела с неравными моментами инерции в центральном поле сил ньютонового тяготения в тиссерановском разложении. Движение описывается уравнениями Эйлера-Пуассона [3,7,8]:

$$\begin{cases} A \dot{p} = (B-C)(qr - \mu \gamma_2 \gamma_3), \dot{\gamma}_1 = r \gamma_2 - q \gamma_3, \\ B \dot{q} = (C-A)(rp - \mu \gamma_3 \gamma_1), \dot{\gamma}_2 = p \gamma_3 - r \gamma_1, \\ C \dot{r} = (A-B)(pq - \mu \gamma_1 \gamma_2), \dot{\gamma}_3 = q \gamma_1 - p \gamma_2. \end{cases} \quad (2.1)$$

При описании используются обозначения: A, B, C - главные моменты инерции твёрдого тела, притом $A < B < C$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ - переменные Пуассона; μ - некоторая положительная постоянная. Рассмотрим перманентное вращение вокруг вертикальной наименьшей главной оси:

$$p=q=\gamma_1=\gamma_2=0; \quad r=\omega=const; \quad \gamma_3=1. \quad (2.2)$$

Необходимые условия устойчивости возмущённого движения (2.2) составлены из характеристического уравнения линеаризованной части дифференциальных уравнений возмущённого движения, и выражаются неравенством Белецкого:

$$C^2 \omega^2 \geq \mu [\sqrt{A(C-B)} + \sqrt{B(C-A)}]^2. \quad (2.3)$$

Для системы (2.1) известны четыре первых интеграла [3,4]:

$$\begin{cases} V_0 = A p^2 + B q^2 + C r^2 + \mu (A \gamma_1^2 + B \gamma_2^2 + C \gamma_3^2) = const, \\ V_1 = A p \gamma_1 + B q \gamma_2 + C r \gamma_3 = const, \\ V_2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 - \mu (B C \gamma_1^2 + C A \gamma_2^2 + A B \gamma_3^2) = const, \\ V_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \end{cases}$$

Вводя отклонения от стационарного движения (2.2): $x_1 = p$, $x_2 = q$, $x_3 = r - \omega$, $x_4 = \gamma_1$, $x_5 = \gamma_2$, $x_6 = \gamma_3 - 1$, полагаем недопустимым одновременное обращение в нуль двух отклонений переменных Пуассона. В возмущённом движении первые интегралы переписутся:

$$\begin{cases} \tilde{V}_0 = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + \mu(Ax_4^2 + Bx_5^2 + Cx_6^2) + 2C\omega x_3 + 2\mu Cx_6 = const, \\ \tilde{V}_1 = Ax_1x_4 + Bx_2x_5 + Cx_3x_6 + Cx_3 + C\omega x_6 = const, \\ \tilde{V}_2 = A^2x_1^2 + B^2x_2^2 + C^2x_3^2 - \mu(BCx_4^2 + CAx_5^2 + ABx_6^2) + 2C^2\omega x_3 - 2\mu ABx_6 \\ = const, \tilde{V}_3 = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + 2x_6 = 0. \end{cases}$$

Исключая с помощью интеграла $\tilde{V}_1 = const$ линейные слагаемые в выражениях остальных интегралов, получим:

$$\bar{V}_0 = \tilde{V}_0 - 2\omega\tilde{V}_1 = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 - 2\omega(Ax_1x_4 + Bx_2x_5) + \mu(Ax_4^2 + Bx_5^2 + Cx_6^2) - 2C\omega x_3x_6 + 2C(\mu - \omega^2)x_6 = const,$$

$$\bar{V}_2 = \tilde{V}_2 - 2C\omega\tilde{V}_1 = A^2x_1^2 + B^2x_2^2 + C^2x_3^2 - 2C\omega(Ax_1x_4 + Bx_2x_5) - \mu(BCx_4^2 + CAx_5^2 + ABx_6^2) - 2(\mu AB + C^2\omega^2)x_6 - 2C^2\omega x_3x_6 = const.$$

Подставляя из уравнения $\tilde{V}_3 = 0$ виде ряда $x_6 = -1 + \sqrt{(1-k)} = -\frac{1}{2}k - \frac{1}{8}k^2 - \frac{1}{16}k^3 - \frac{5}{128}k^4 - \dots$ при $k = x_4^2 + x_5^2$ получим в выражениях квадратичных форм $F_1(x) = \bar{V}_0$ и $F_2 = \bar{V}_2$ и $F_2(x)$ неоднородные функции от пяти переменных. В выражениях $F_1(x)$ и $F_2(x)$ выделим квадратичные слагаемые $F_{12}(x)$ и $F_{22}(x)$ с соответствующими матрицами:

$$A_{10} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & -A\omega & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 & -B\omega \\ 0 & 0 & C & 0 & 0 \\ -A\omega & 0 & [C\omega^2 - \mu(C-A)] & 0 & 0 \\ 0 & -B\omega & 0 & 0 & [C\omega^2 - \mu(C-B)] \end{pmatrix},$$

$$B_{10} = \begin{pmatrix} A^2 & 0 & 0 & -AC\omega & 0 \\ 0 & B^2 & 0 & 0 & -BC\omega \\ 0 & 0 & C^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [C^2\omega^2 - \mu B(C-A)] & 0 & 0 \\ 0 & -BC\omega & 0 & 0 & [C\omega^2 - \mu A(C-B)] \end{pmatrix},$$

Из матриц A_{10} и B_{10} составим характеристическое уравнение

$$f_1(\lambda) = \det(B_{10} - \lambda A_{10}) = ABC(C - \lambda) \{(\mu - \omega^2)\lambda^2 + [C\omega^2 - \mu(A + B)]\lambda + AB\mu\}^2 = 0. \quad (2.4)$$

При не всех вещественных решениях уравнения $f_1(\lambda) = 0$ согласно теореме 2 нельзя составить знакоопределенную связку квадратичных форм $x'(B_{10} - \sigma A_{10})x$. По теореме Ляпунова об устойчивости [1] тогда невозможно установить устойчивость движения (2.2). Поэтому для знакоопределённости связки форм $x'(B_{10} - \sigma A_{10})x$ ($x \in R^5$) нужна вещественность корней уравнения (2.4). Вещественные корни уравнения (2.4) возможны только при неотрицательном дискриминанте D_0 квадратного уравнения, равном

$$D_0 = [C\omega^2 - \mu(A+B)]^2 - 4AB\mu(\mu - \omega^2) = C^2\omega^4 + 2\omega^2\mu(2AB - AC - BC) + \mu^2(B-A)^2.$$

Вначале рассматриваются значения $D_0 > 0$ в области $C^2\omega^2 > \mu[\sqrt{A(C-B)} + \sqrt{B(C-A)}]^2$, соответствующей необходимым условиям устойчивости. Уравнение (2.4) здесь имеет корни:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\mu(A+B) - C\omega^2 - \sqrt{D_0}}{2(\mu - \omega^2)}; \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{\mu(A+B) - C\omega^2 + \sqrt{D_0}}{2(\mu - \omega^2)}; \lambda_5 = C,$$

при $D_0 > 0$ соответствующие простым элементарным делителям. Установление соответствия корней по группам $\Lambda^{(+)}$ и $\Lambda^{(-)}$ выполнится после приведения матриц A_{10} и B_{10} к диагональным. Для матриц A_{10} и B_{10} линейное вещественное конгруэнтное преобразование $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)' = T_1(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)'$ осуществляется, в частности, матрицей

$$T_1 = \begin{Bmatrix} \omega(C - \lambda_1) & 0 & \omega(C - \lambda_3) & 0 & 0 \\ 0 & \omega(C - \lambda_2) & 0 & \omega(C - \lambda_4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & (A - \lambda_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (B - \lambda_2) & 0 & (B - \lambda_4) & 0 \end{Bmatrix},$$

$$\det T_1 = \frac{\omega^2(A-C)(B-C)D_0}{(\mu - \omega^2)^2} \neq 0.$$

В результате получим:

$$\tilde{A}_{10} = T_1 A_{10} T_1 = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B}_{10} = T_1 B_{10} T_1 = \begin{pmatrix} g_1 \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_4 \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^2 \end{pmatrix}.$$

где $g_1 = \frac{(C-A)\sqrt{D_0}(R_1 - \sqrt{D_0})}{2(\mu - \omega^2)}$; $g_2 = \frac{(C-B)\sqrt{D_0}(R_2 - \sqrt{D_0})}{2(\mu - \omega^2)}$;

$$g_3 = \frac{(C-A)\sqrt{D_0}(R_1 + \sqrt{D_0})}{2(\mu - \omega^2)}$$
; $g_4 = \frac{(C-B)\sqrt{D_0}(R_2 + \sqrt{D_0})}{2(\mu - \omega^2)}$;

$$R_1 = \omega^2(2A - C) + \mu(B - A); R_2 = \omega^2(2B - C) - \mu(B - A).$$

При этом легко установить: $g_1 g_3 = \frac{(C-A)D_0 A \omega^2}{(\mu - \omega^2)}$; $g_2 g_4 = \frac{(C-B)D_0 B \omega^2}{(\mu - \omega^2)}$.

Очевидно, при $\mu < \omega^2$ будет выполнено: $g_1 g_3 > 0$; $g_2 g_4 > 0$, соответственно, при $\mu > \omega^2$ существуют неравенства: $g_1 g_3 < 0$; $g_2 g_4 < 0$. В любом случае, независимо от соотношений μ и ω^2 имеет место $R_1 > 0$, $R_2 > 0$. Действительно, при $\mu < \omega^2$ выполняется $R_1 > \mu(2A - C) + \mu(B - C) = \mu(A + B - C) > 0$, а при $\mu > \omega^2$ получается $R_1 > \omega^2(2A - C) + \omega^2(B - C) = \omega^2(A + B - C) > 0$. Аналогично получается $R_2 > 0$. Чтобы определить знаки выражений g_1 и g_3 , сравним значения R_1 и $\sqrt{D_0}$. Из вычислений следует: $R_1^2 - D_0 = 4A(C - A)\omega^2(\mu - \omega^2)$.

Для дальнейшего анализа предоставляются такие возможности:

- 1) $\mu < \omega^2$; 2) $\mu > \omega^2$; 3) $\mu = \omega^2$.

В случае первой возможности $R_1 < \sqrt{D_0}$; $R_2 < \sqrt{D_0}$; $g_1 > 0$; $g_2 > 0$; $g_3 > 0$;

$g_4 > 0$. Таким образом, корни уравнения (2.4) относятся к одной группе $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in \Lambda^{(+)}$ и расположены в следующем порядке: $0 < \lambda_5 < \lambda_3 = \lambda_4 < \lambda_1 = \lambda_2$. По замечанию 1 связка квадратичных форм $y'(\tilde{B}_{10} - \sigma \tilde{A}_{10})y$ отрицательно определена при значениях $\sigma > \lambda_1$.

Другая возможность имеет место при $\mu > \omega^2$:

$$\left| \frac{\sqrt{A(C-B)} + \sqrt{B(C-A)}}{C} \right|^2 < \frac{\omega^2}{\mu} < 1.$$

В этом случае $R_1 > \sqrt{D_0}$; $R_2 > \sqrt{D_0}$; $g_1 > 0$; $g_2 > 0$; $g_3 < 0$; $g_4 < 0$. Корни уравнения (2.4) упорядочены: $\lambda_5 < \lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 = \lambda_4$ и распределены по группам: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_5 \in \Lambda^{(+)}$; $\lambda_3, \lambda_4 \in \Lambda^{(-)}$. Здесь выполняется $\lambda_{\max}^{(+)} < \lambda_{\min}^{(-)}$. Следовательно, корни “разделены” по группам корней, и по теореме 3 связка квадратичных форм $y(\tilde{B}_{10} - \sigma \tilde{A}_{10})y$ отрицательно определена при значениях $\sigma \in (\lambda_1; \lambda_3)$.

Рассмотрим последнюю возможность при $\mu = \omega^2$. Матрицы квадратичных форм в этом случае принимают вид:

$$A_{20} = \begin{Bmatrix} A & 0 & 0 & -A\omega & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 & -B\omega \\ 0 & 0 & C & 0 & 0 \\ -A\omega & 0 & 0 & A\omega^2 & 0 \\ 0 & -B\omega & 0 & 0 & B\omega^2 \end{Bmatrix},$$

$$B_{20} = \begin{Bmatrix} A^2 & 0 & 0 & -AC\omega & 0 \\ 0 & B^2 & 0 & 0 & -BC\omega \\ 0 & 0 & C^2 & 0 & 0 \\ -AC\omega & 0 & 0 & \omega_2(C^2 + AB - BC) & 0 \\ 0 & -BC\omega & 0 & 0 & \omega_2(C^2 + AB - AC) \end{Bmatrix}.$$

Из матриц A_{20} и B_{20} составим характеристическое уравнение

$$f_2(\lambda) = \det(B_{20} - \lambda A_{20}) = ABC\omega^4(C-A)(C-\lambda)[(A+B-C)\lambda - AB]^2 = 0.$$

Легко видеть, что матрица A_{20} здесь вырождена, два корня можно считать обращающимися в бесконечность, а остальные три корня являются вещественными: $\lambda_3 = \lambda_4 = \frac{AB}{A+B-C}$; $\lambda_5 = C$.

Можно проверить, что кратные корни, в том числе бесконечные, являются простыми. Для этих матриц линейное невырожденное вещественное конгруэнтное преобразование $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)' = T_2(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)'$ осуществляется, в частности, матрицей

$$T_2 = \begin{Bmatrix} \omega & 0 & \omega(A-C) & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & \omega(B-C) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & B & 0 \end{Bmatrix},$$

$$\det T_2 = \omega^2 C^2.$$

В результате получим:

$$\tilde{A}_{20} = T_2' A_{20} T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{(4)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(4)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_{20} = T_2' B_{20} T_2 = \begin{pmatrix} b_{11}^{(4)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22}^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33}^{(4)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44}^{(4)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^2 \end{pmatrix},$$

где $a_{33}^{(4)} = A\omega^2 k_1^2$; $a_{44}^{(4)} = B\omega^2 k_1^2$; $b_{11}^{(4)} = (A-C)\omega^2 k_1$; $b_{22}^{(4)} = (B-C)\omega^2 k_1$;
 $b_{33}^{(4)} = A^2 B \omega^2 k_1$; $b_{44}^{(4)} = AB^2 \omega^2 k_1$; $k_1 = (A+B-C)$.

При диагональном представлении матриц легко видеть расположение корней по группам $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in \Lambda^{(+)}$. Здесь выполняется $\lambda_5 = C < \lambda_3 = \lambda_4$. Ввиду отрицательных выражений $(-\omega^2(C-A)(A+B-C))$ и $(-\omega^2(C-B) \times (A+B-C))$ достаточно связку квадратичных форм $y(\tilde{B}_{20} - \sigma \tilde{A}_{20})y$ потребовать отрицательно определённой. При положительных диагональных элементах матрицы \tilde{A}_{20} этого можно достичь согласно замечанию 1 при $\sigma > \lambda_4$.

Рассмотрим предельный случай: $\omega^2 C^2 = \mu[\sqrt{A(C-B)} + \sqrt{B(C-A)}]^2$, которому соответствует четырёхкратный вещественный корень уравнения

(2.4): $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{\mu(A+B) - C\omega^2}{2(\mu - \omega^2)} = \lambda_0 > 0$. Можно показать, что крат-

ному корню $\lambda = \lambda_0$ соответствуют не все простые элементарные делители. Связка квадратичных форм $K_2(\sigma, x) = x(B_{20} - \sigma A_{20})x$ здесь имеет вид

$$\frac{A}{A-\sigma} [(A-\sigma)x_1 - \omega(C-\sigma)x_4]^2 + \frac{B}{B-\sigma} [(B-\sigma)x_2 - \omega(C-\sigma)x_5]^2 + C(C-\sigma)x_3^2.$$

При условии $A+B > C$ для $\mu > \omega^2$ следуют неравенства:

$$\sigma - C = \frac{\mu(A+B) - C\omega^2 + 2C(\omega^2 - \mu)}{2(\mu - \omega^2)} = \frac{\mu(A+B-C) + C(\omega^2 - \mu)}{2(\mu - \omega^2)} >$$

$$> \frac{\mu(A+B-C)}{2(\mu - \omega^2)} > 0,$$

откуда легко показать $\sigma > C$. Следовательно, связка

$K(\sigma, x)$ отрицательно постоянна. Для полного анализа знакоопределенности нужно привлечь члены выше второго порядка функций $F_1(x), F_2(x)$. Предварительно введем невырожденную замену переменных: $y_1 = (A-\sigma)x_1 - \omega(C-\sigma)x_4$; $y_2 = (B-\sigma)x_2 - \omega(C-\sigma)x_5$; $y_3 = x_3$; $y_4 = x_4$; $y_5 = x_5$. Дальше для анализа знакоопределенности составим функцию:

$$F_0(\sigma, y) = -(F_2(y) - \sigma F_1(y)) = \frac{A}{\sigma - A} y_1^2 + \frac{B}{\sigma - B} y_2^2 + C(\sigma - C) y_3^2 + \dots,$$

где многоточием обозначены члены выше второго порядка. По теореме 5 параметризация здесь будет следующей: $M = 1$, $L = 2$, $z_1 = a_1 t_1^2 + a_2 t_1 t_2 + a_3 t_2^2 + \dots$, $z_2 = b_1 t_1^2 + b_2 t_1 t_2 + b_3 t_2^2 + \dots$, $z_3 = c_1 t_1^2 + c_2 t_1 t_2 + c_3 t_2^2 + \dots$, $z_4 = t_1$, $z_5 = t_2$, где коэффициенты a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, 3$) вещественные. После подстановки параметризации в выражение $F_0(\sigma, y)$ получим

$$A_4(a_i, b_i, c_i; 1; 2; t) = \frac{A}{A-\sigma} (a_1 t_1^2 + a_2 t_1 t_2 + a_3 t_2^2)^2 + \frac{B}{B-\sigma} (b_1 t_1^2 + b_2 t_1 t_2 + b_3 t_2^2)^2 + C(\sigma - C) (c_1 t_1^2 + c_2 t_1 t_2 + c_3 t_2^2)^2 + C(\sigma - C) \frac{(t_1^2 + t_2^2)}{8}.$$

Так как параметры t_1, t_2 не обращаются тождественно в нуль, то последнее выражение принимает только положительные значения. По второму пункту теоремы 4 форма $F_0(\sigma, y)$ тогда положительно определена при любых вещественных a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, 3$). По теореме Ляпунова об устойчивости [1] перманентное вращение (2.2) в этом случае устойчиво.

Заключение. Знакоопределенная связка квадратичных форм получает достаточные условия устойчивости, с точностью до границы совпадающие с необходимыми, не включая ее. В статье показано, что знакоопределенные связки форм возможны только при одновременной диагонализации входящих в связку матриц. При знакопостоянных связках форм им соответствующие матрицы одновременно не диагонализуются. В таком случае применение знакоопределенности многочленов нескольких переменных позволяет уточнить область достаточных условий устойчивости, присоединяя или исключая границу устойчивости.

Как и в рассмотренном примере, граница устойчивости включается в область достаточных условий при исследовании перманентных вращений волчка Лагранжа. Аналогичные проведенные вычисления для волчка Ковалевской показали не включение границы устойчивости в область достаточных условий.

Подобные ситуации одновременной диагонализации матриц и исследования границ области возникают и для механических систем большей размерности.

Работа выполнена при частичной поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (проект № НШ - 8081.2016.9).

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 15 - 08 - 06680) - А.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Собрание сочинений. Т. 2. - М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 7-263.
2. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. - М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
3. Кузьмин П.А. Малые колебания и устойчивость движения. - М.: Наука, 1973. 206 с.
4. Новиков М.А. О связи диагонализации и знакоопределённости пучка двух квадратичных форм // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2010. № 3 (27). С. 233-241.
5. Уокер Р. Алгебраические кривые. - М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 236 с.
6. Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1979. 255 с.
7. Аппель П. Теоретическая механика. Т.2. - М.: ГИФМЛ, 1960. 487 с.
8. Белецкий В.В. Некоторые вопросы движения твердого тела в ньютоновом поле сил // ПММ. 1957. № 21 (6). С. 749-758.

ВЫНУЖДЕННЫЕ ПРЕДЕЛЬНО ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ В СИСТЕМАХ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ В НЕКОТОРЫХ КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ УСТОЙЧИВОСТИ

В.С. Сергеев

(ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия, 119333, Москва, Вавилова, 40)

E-mail: vssergeev@yandex.ru

FORCED LIMIT PERIODIC MOTIONS IN THE SYSTEMS WITH AFTER-EFFECT AT CERTAIN CASES OF STABILITY

V.S. Sergeev

(CC FRC CSC RAS, Russia, 119333, Moscow, Vavilov str., 40)

Keywords: Volterra integrodifferential equations, limit periodic motions.

Рассматриваются системы, описываемые интегродифференциальными уравнениями типа Вольтерра, с характеристическим уравнением, обладающим парой чисто мнимых корней либо одним нулевым корнем при прочих корнях с отрицательными вещественными частями. Система подвержена действию малого предельно периодического возмущения, заданного непрерывной функцией времени, экспоненциально стремящейся с возрастанием времени к периодическому движению с заданной частотой, которая в случае пары чисто мнимых корней совпадает с частотой колебаний в линеаризованной системе.

Приводятся утверждения о существовании в таких системах предельно периодических движений в двух рассматриваемых критических случаях. Эти движения представляются степенными рядами по определенному малому параметру, величина которого зависит от малого параметра возмущения, и по произвольным начальным значениям некритических переменных задачи.

Систематическое изучение интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра началось в начале 20-го века в работах В. Вольтерра, который дал также приложения этих уравнений к задачам механики деформированного твердого тела [1,2] и математической теории биологии. Теория интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра прилагается также к задачам аэромеханики и аэроупругости.

Периодические решения интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра специального вида, а также некоторые вопросы устойчивости изучались в работах [3-6], где исследовались условия существования

периодических решений, поведение решений на бесконечности, свойство устойчивости по Ляпунову прямым методом Ляпунова или методом интегральных неравенств.

Резонансные периодические решения для механических колебательных систем, моделируемых уравнениями с бесконечным последствием, исследовались в работах [7, 8].

Для уравнений общей структуры, в которых присутствует диссипация, можно выделить семейства вынужденных предельно периодических решений, построение которых в двух критических случаях устойчивости проводится ниже.

1. Критический случай пары чисто мнимых корней. Рассмотрим системы, состояние которых описывается интегродифференциальными уравнениями типа Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \int_0^t K(t-s)x(s)ds + \mu\varphi(t) + F(x, \hat{y}, t), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

с постоянной $(n \times n)$ – матрицей A , непрерывным при $t \geq 0$ интегральным ядром $K(t)$ и непрерывной ограниченной функцией $\varphi(t)$, аналитической по переменным x, \hat{y} в некоторой окрестности нуля функцией $F(x, \hat{y}, t)$ без свободного и линейного членов с постоянными либо экспоненциально стремящимися к постоянным при $t \rightarrow +\infty$ непрерывными коэффициентами. Величина $\mu\varphi(t)$, где $0 < \mu \ll 1$, считается возмущением.

Матрица $K(t)$ при $t \geq 0$ удовлетворяет неравенству

$$\|K(t)\| \leq C \exp(-\beta t), \quad C, \beta \Rightarrow 0. \quad (2)$$

В уравнении (1) \hat{y} – интегральный оператор, заданный соотношением

$$\hat{y} = \int_0^t K_1(t-s)\phi(x, s)ds$$

с интегральным ядром $K_1(t)$ того же типа, что и $K(t)$, и аналитической по x в окрестности точки $x=0$ функцией $\phi(x, t)$ без свободного члена и коэффициентами разложения в степенной ряд такими же, как и у функции $F(x, \hat{y}, t)$.

Будем предполагать, что характеристическое уравнение, отвечающее линеаризованному невозмущенному уравнению (1),

$$\det(A - \lambda E_n + K^*(\lambda)) = 0,$$

где $K^*(\lambda)$ – преобразование Лапласа для $K(t)$, имеет в комплексной полуплоскости $Re\lambda \geq -\beta$ конечное число корней λ'_j ($j = 1, 2, \dots, N; N \geq n$) таких, что

$$\lambda'_{N-1} = i\omega, \lambda'_N = -i\omega, \omega = const > 0, Re\lambda'_k < 0, k = 1, 2, \dots, N - 2.$$

Таким образом, в невозмущенной задаче имеет место критический в теории устойчивости по Ляпунову случай пары чисто мнимых корней [9].

Будем использовать следующие *определения*.

1. Непрерывную при $t \in \mathbb{R}^+$ функцию $f(t)$ будем считать принадлежащей классу $e_1(-\alpha)$, т.е. $f(t) \in e_1(-\alpha)$, если при $t \in \mathbb{R}^+$ выполняется неравенство

$$\|f(t)\| \leq C \exp(-\alpha t), \quad C, \alpha = const > 0.$$

2. Функцию $\Phi(t, s)$, непрерывную на множестве $0 \leq s \leq t < +\infty$, будем предполагать принадлежащей классу $e_2(-\alpha)$, если на этом множестве справедлива оценка

$$\|\Phi(t, s)\| \leq C \exp[-\alpha(t - s)], \quad C, \alpha \Rightarrow 0.$$

3. Будем называть непрерывную при $t \in \mathbb{R}^+$ функцию $f(t)$ экспоненциально предельно периодической и принадлежащей классу $lpe(T, -\alpha)$, если

$$f(t) = f_p(t) + f_e(t), \quad f_e(t) \in e_1(-\alpha), \quad \alpha > 0, \quad (3)$$

где непрерывная функция $f_p(t)$ – периодическая с периодом T .

4. Движения системы (или решения уравнений), описываемые функциями типа (3) и принадлежащие классу $lpe(T, -\alpha)$, будем называть экспоненциально предельно периодическими.

Будем полагать, что в уравнении (1) функция $\varphi(t) \in lpe(2\pi / \omega, -\alpha)$ ($\alpha > 0$), т.е. существует резонанс между периодической частью возмущения и собственными колебаниями линеаризованной невозмущенной системы.

В работе [10] показано, что уравнение (1) допускает семейство экспоненциально предельно периодических решений, зависящее от $n - 2$ произвольных постоянных, представимое степенными рядами по малому параметру и сходящимися рядами Фурье по переменной ωt для периодических частей при условии определенной гладкости функции $\varphi(t)$. Обобщением этого результата является следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть уравнение (1) с аналитической функцией $F(x, \hat{y}, t)$ без свободного и линейного членов и экспоненциально убывающими по t (или

постоянными) коэффициентами, малым возмущением $\mu\varphi(t)$ – непрерывной предельно периодической функцией класса $lpe(T, -\alpha)$ ($\alpha > 0$) с периодом периодической части $T = 2\pi / \omega$ и непрерывным ядром $K(t)$, удовлетворяющим неравенству (2), имеет в комплексной полуплоскости $Re\lambda \geq -\beta$ конечное число корней характеристического уравнения, среди которых пара чисто мнимых $\pm i\omega$, а остальные корни обладают отрицательными вещественными частями.

Тогда при выполнении условий приводимости [9] линейной однородной части уравнения (1) и условий, налагаемых на амплитудные уравнения [10], уравнение (1) допускает семейство экспоненциально предельно периодических решений, зависящее от произвольных начальных значений некритических переменных, а начальные значения критических переменных определяются при разрешении амплитудных уравнений. Решение в некоторой окрестности нуля представляется в форме абсолютно сходящихся степенных рядов по дробным степеням малого параметра μ . Если амплитудное уравнение строится по членам $2k + 1$ - го порядка правой части уравнения, то ряды располагаются по степеням величины $\mu^{1/(2k+1)}$.

Доказательство. Проведем ряд упрощающих преобразований (типа Ляпунова) [9-10] уравнения (1), которые позволяют выделить два уравнения, связанных с критическими переменными $(w'_{n-1}, w'_n) = w'$ (комплексно сопряженными). Уравнение (1) приводится к системе

$$\frac{dw'_k}{dt} = \sum_{s=1}^m h_k^{(s)} r^{2s} w'_k + \mu f'_k(t) + W_k(u, w', y', t) + \mu W'_k(u, w', y', t, \mu), \quad (4)$$

$$\frac{du}{dt} = \Lambda'_2 u + U(u, w', y', t) + \mu f'(t) + \mu U'(u, w', y', t, \mu), \quad (5)$$

где u – вектор некритических переменных, y' – преобразованный оператор \hat{y} , h_{n-1}^s, h_n^s – постоянные, $r^2 = w'_{n-1} w'_n$. Функции $f'_k(t) \in lpe(2\pi / \omega, -\gamma)$ ($k = n - 1, n$), $\gamma > 0$, $f'(t) \in lpe(2\pi / \omega, -\gamma)$, $\Lambda'_2 = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_{n-2})$, W_k, W'_k, U, U' определены в [9,10].

Отметим следующее существенное свойство, относящееся к возмущению и экспоненциально предельно периодическим функциям. Для функции возмущения $\varphi(t)$ имеет место представление вида (3) с периодической частью $\varphi_p(t)$, в которой выделим ее часть с нулевым средним $\varphi_p^*(t)$ по периоду T , полагая

$$\varphi_p^*(t) = \varphi_p(t) - \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_p(s) ds.$$

Тогда интеграл

$$\frac{1}{T} \int_0^T \varphi_p^*(s) ds = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_p(s) ds - \frac{1}{T^2} \int_0^T \varphi_p(s) ds T = 0$$

и, следовательно, ввиду выполнения условия периодичности интеграла от периодической функции интеграл $\frac{1}{T} \int_0^t \varphi_p^*(s) ds$ будет функцией периодической.

Будем считать далее, что выполнено неравенство

$$h_{n-1}^{(m)} h_n^{(m)} \neq 0. \quad (6)$$

Введем в уравнения (4), (5) малый параметр ε , полагая при $j = n-1, n$

$$w'_j = \varepsilon v_j, \quad u = \varepsilon v, \quad v = (v_1, \dots, v_{n-2}) \quad \mu = \varepsilon^{2m+1}, \quad (7)$$

и представим решение уравнений в форме

$$v_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_i^{(k)}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

В аналогичном виде запишем начальные значения $v_{0j} = v_{0j}(\varepsilon)$ ($j = n-1, n$) критических переменных

$$v_{0j}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_{0j}^{(k)}, \quad (9)$$

которые будут определяться из условий разрешимости поставленной задачи.

На основании интегральных формул, следующих из уравнений, получаем при $k = 0$ и $j = n-1, n; i = 1, 2, \dots, n-2$

$$v_j^{(0)} = v_{0j}^{(0)}, \quad v_i^{(0)}(t) = v_{0i} \exp(\lambda_i' t), \quad (10)$$

где постоянные v_{0i} – произвольны, а постоянные $v_{0j}^{(0)}$ ($j = n-1, n$) будут определяться из условий разрешимости амплитудных уравнений.

Далее последовательно определяются все члены разложений (8), (9) до значения $2m-1$ включительно. Они обладают свойствами (10) и для $k = 1, 2, \dots, 2m-1; j = n-1, n; i = 1, 2, \dots, n-2$ справедливы включения

$$v_j^{(k)}(t) \in lpe(T, -\gamma), \quad v_i^{(k)}(t) \in e_1(-\gamma), \quad \gamma > 0, \quad T = 2\pi / \omega.$$

Пусть $k = 2m$.

Для определения функций $v_j^{(2m)}(t)$ ($j = n-1, n$) имеем соотношения

$$v_j^{(2m)}(t) = v_{0j}^{(2m)} + \int_0^t (h_j^{(m)} r_0^{2m} v_{0j}^{(0)} + f_j'(\tau) + \tilde{W}_j^{(2m+1)}(\tau)) d\tau, \quad (11)$$

в которых $r_0^2 = v_{0n-1}^{(0)} v_{0n}^{(0)}$, функции $f_j'(t) = f_{pj}'(t) + f_{ej}'(t)$, где $f_{ej}'(t) \in e_1(-\gamma)$ ($\gamma > 0$), и $\tilde{W}_j^{(2m+1)}(t)$ – известные функции, такие, что $\tilde{W}_j^{(2m)}(t) \in e_1(-\gamma)$.

Подынтегральная функция в выражении (11) – экспоненциально предельно периодическая. Она может содержать постоянные члены (комплексно сопряженные) α_{n-1} и α_n .

Рассмотрим общий случай, когда постоянная

$$\alpha_{n-1} \alpha_n \neq 0. \quad (12)$$

Условия отсутствия у функций $v_j^{(2m)}(t)$ (11) секулярного (линейно растущего по t) члена порождают амплитудные уравнения в первом приближении

$$h_j^{(m)} r_0^{2m} v_{0j}^{(0)} + \alpha_j = 0, \quad j = n-1, n. \quad (13)$$

Уравнения (13) имеют решение

$$v_{0j}^{(0)} = -\frac{\alpha_j}{h_j^{(m)} r_0^{2m}}, \quad r_0^2 = \left(\frac{\alpha_{n-1} \alpha_n}{h_{n-1}^{(m)} h_n^{(m)}} \right)^{\frac{1}{2m+1}}, \quad j = n-1, n. \quad (14)$$

При выполнении условий (14) справедливы соотношения

$$v_j^{(2m)}(t) \in lpe(T, -\gamma), \quad \gamma > 0, \quad T = 2\pi / \omega, \quad j = n-1, n.$$

Для $k = 2m+1, \dots$ при включении секулярных членов в амплитудные уравнения выполняется

$$v_i^{(2m)}(t) \in lpe(T, -\gamma), \quad i = 1, \dots, n.$$

Все проведенные преобразования от уравнения (1) к системе (4), (5) содержат в качестве коэффициентов экспоненциально предельно периодические функции t либо интегралы от переменных с интегральными ядрами $K'(t, s) \in e_2(-\gamma)$ ($\gamma > 0$) и при переходе к исходной переменной x в (1) дают ряды по параметру ε с экспоненциально предельно периодическими функциями t .

Сходимость построенных рядов по малому параметру доказывается методом мажорантных функций.

2. Критический случай одного нулевого корня. Рассмотрим интегродифференциальное уравнение (1) и сохраним относящиеся к нему условия первого раздела.

Будем предполагать, что характеристическое уравнение имеет в комплекс-

ной полуплоскости $Re\lambda \geq -\beta$ конечное число корней $\lambda'_j, j = 1, 2, \dots, N; N \geq n$ и $\lambda'_N = 0, Re\lambda'_k < 0, k = 1, 2, \dots, N - 1$.

Проведем ряд преобразований [11, 12] уравнения (1), которые позволяют выделить постоянную Ляпунова для невозмущенного уравнения в критическом случае одного нулевого корня. Тогда исходное уравнение (1) в новых переменных $u = (u_1, \dots, u_{n-1}), u_n$ (критическая переменная) приведет к системе

$$\frac{du_n}{dt} = g_m u_n^m + U_n^{(2)} + U_n^{(m+1)} + \mu U_n(u, u_n, t, \mu) + \mu f'_n(t), \quad (15)$$

$$\frac{du}{dt} = \Lambda'_1 u + U(u, u_n, t) + \mu U'(u, u_n, t, \mu) + \mu f'(t),$$

где g_m – постоянная Ляпунова ($m \geq 2$), U, U' – $n-1$ -векторы и $f'(t), f'_n(t) \in lpe(T, -\gamma) (\gamma > 0)$, $\Lambda'_1 = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_{n-1})$.

Интегральный оператор $U_n^{(2)} = U_n^{(2)}(u, u_n, t)$ не имеет линейных членов и содержит члены до порядка m включительно, которые тождественно равны нулю, когда $u = 0$. Степенные ряды по параметру v для $U(vu, vu_n, t)$ и $U_n^{(m+1)}(vu, vu_n, t)$ начинаются с квадратичных членов и членов $m+1$ -го порядка соответственно. Оператор $U(0, vu_n, t)$ не имеет членов до m -го порядка включительно. Операторы $U'(u, u_n, t, \mu), U_n = U_n(u, u_n, t, \mu)$ появляются в ходе преобразования интегральных членов уравнений процедурой интегрирования по частям.

Введем в уравнения (15) малый параметр ε соотношениями

$$u_n = \varepsilon v_n, u = \varepsilon v, \mu = \varepsilon^m, v = (v_1, \dots, v_{n-1})$$

и будем строить экспоненциально предельно периодические решения $v^{(k)} = (v_1^{(k)}, \dots, v_{n-1}^{(k)})$ уравнений (15) и начальное значение v_{n0} критической переменной в виде рядов

$$v_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_n^{(k)}(t), v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v^{(k)}(t), v_{n0} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_{n0}^{(k)},$$

определяемых на основании интегральных соотношений, следующих из уравнений (15).

Коэффициенты $v_{n0}^{(k)}$ вычисляются последовательно из условия удовлетворения амплитудного уравнения в каждом приближении.

При $k = 0, \dots, m-2$ имеем

$$v_n^{(k)}(t) = \hat{v}_n^{(k)} + \tilde{v}_n^{(k)}(t), \quad \hat{v}_n^{(k)} =, \quad \tilde{v}_n^{(k)}(t) \in e_1(-\gamma), \quad \gamma > 0.$$

Пусть

$$\alpha \neq 0, \quad \alpha = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f_n'(\tau) \tau.$$

Полагая $k = m-1$, приходим к амплитудному уравнению

$$g_m(v_{n0}^{(0)})^m + \alpha = 0, \tag{16}$$

удовлетворение которого позволяет исключить появление секулярного члена в данном приближении.

Показывается, что построение $v^{(k)}(t), v_n^{(k)}(t) (k = m, \dots)$ с включением в амплитудное уравнение секулярных членов из выражений для $v_n^{(k)}(t)$ дает $v_n^{(k)}(t), v^{(k)}(t) \in lpe(T, -\gamma) (\gamma > 0)$.

Доказательство сходимости построенных степенных рядов проводится методом мажорантных функций.

Теорема 2. Пусть для уравнения (1), (3) с неравенством (2) в критическом случае одного нулевого корня выполняются условия приводимости линейной однородной части уравнения к уравнению с постоянными коэффициентами. Пусть малое возмущение $\mu f(t)$ является экспоненциально предельно периодическим.

Тогда при условии $\alpha \neq 0$ уравнение допускает семейство экспоненциально предельно периодических решений в форме степенных рядов по параметру $\varepsilon = \mu^{1/m}$, если амплитудное уравнение (16) строится на основании уравнений в форме (15). Решение зависит от $n-1$ произвольных начальных значений не критической подсистемы, а начальное значение критической переменной строится в виде ряда по степеням ε , коэффициенты которого определяются на основании амплитудного уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Volterra V.* Sur les équations integro-différentielles et leurs applications// Acta Math. 1912. T. 35. N. 4. P. 295-354.
2. *Volterra V.* Theory of Functionals and Integrals and Integro-Differential Equations. N.Y.: Dover, 1959. = *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304с.
3. *Быков Я.В.* О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. Фрунзе: Изд-во Киргиз. гос. ун-та, 1957. 327 с.
4. *Быков Я.В., Иманалиев М.* О периодических решениях интегро-

дифференциальных уравнений. // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. Фрунзе: Изд-воАНКирг. ССР, Вып. 1. 1961. С. 145-158.

5. *Burton T.A.* Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations. Orlando: Acad. Press. 1985. 337 p.

6. *Быков Я.В., Рузикулов Д.* Периодические решения дифференциальных и интегродифференциальных уравнений и их асимптотики. Фрунзе: Изд-во Илим, 1986. 281 с.

7. *Рябов Ю.А., Хусанов Д.Х.* Периодические решения интегро-дифференциального уравнения второго порядка в нерезонансном случае // Укр. мат. ж. 1982. Т. 34. № 5. С. 644-647.

8. *Хусанов Д.Х.* К конструктивной и качественной теории функционально-дифференциальных уравнений. Ташкент: Фан, 2002. 256 с.

9. *Сергеев В.С.* О неустойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней для одного класса систем с последействием // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 1. С. 79-86.

10. *Сергеев В.С.* О предельно периодических движениях в некоторых системах с последействием при резонансе // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 2. С. 221-231.

11. *Сергеев В.С.* О неустойчивости нулевого решения одного класса интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 8. С. 1443–1454.

12. *Сергеев В.С.* Об устойчивости в системах с последействием при наличии особенностей в интегральных ядрах // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 6. С. 968–978.

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ПРИ ИМИТАЦИИ ГРУППОЙ БЕСПИЛОТНЫХ АППАРАТОВ АГРЕГАТНЫХ СОСТОЯНИЙ ВЕЩЕСТВА

С.В. Тихонов, Р.Т. Сиразетдинов (КНИТУ-КАИ, Россия,
420111, Казань, К.Маркса, 10)
E-mail: gil266825@gmail.com

STABILITY OF MOTION IN AGGREGATE STATE OF MATTER IMITATION BY A GROUP OF UNMANNED VEHICLES

S.V. Tikhonov, R.T. Sirazetdinov (KNRTU-KAI,
420111, Kazan, K.Marx str., 10)

Keywords: swarm, group of unmanned vehicles, two-level control, decentralized group control, information interaction, aggregate states of matter, distributed control, stability of motion

Введение.

В настоящее время роботизированные системы распространяются повсеместно и охватывают все больше сфер человеческой деятельности. Использование групп беспилотных аппаратов (БА) открывает новые возможности и подходы применения таких систем. А уровень современной науки и техники, в том числе электроники и вычислительной техники, позволяет создавать малоразмерные автономные аппараты и использовать их в составе крупных мультиагентных систем [1]. Такие системы способны выполнять те же практические задачи и при этом имеют ряд преимуществ. К этим преимуществам относятся и малая стоимость, и меньшая уязвимость группы БА как системы, связанная с тем, что, при потере нескольких БА, группа останется способной выполнить задачу, незаметность для людей, для радаров, связанная с малоразмерностью каждого БА и возможностью рассредоточиться в пространстве при передвижении группой. Кроме того возникают новые свойства группы БА как системы, позволяющие выполнять и другие виды задач, невыполнимые или трудновыполнимые одним БА, например, оперативное обеспечение мобильной телекоммуникационной связи, радиоэлектронная разведка и радиоэлектронная борьба, распугивание стаи птиц на аэродромах, картографирование, мониторинг и пр.

В качестве принципов управления, в первую очередь, рассматривают централизованное управление, которое с увеличением количества БА встречает все больше трудностей. Наличие центрального управляющего БА делает систему более уязвимой и менее надежной, так как достаточно какого-либо сбоя в работе центрального аппарата, и вся группа теряет управляемость. Таким образом, при достаточно большом размере группы

стае и используемый закон управления рассмотрим движение БА в газообразном АС. При этом не будем учитывать дополнительные внешние воздействия и целеуказания.

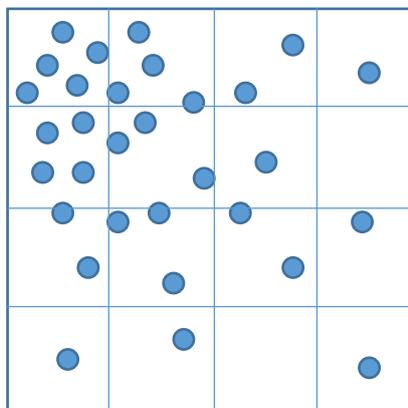


Рис. 2. Мгновенное расположение БА в пределах заданной области

Нами был разработан программный модуль, позволяющий моделировать движение группы БА в виде трех агрегатных состояний. Используя его, мы опробовали различные виды законов управления, такие как закон Гука, закон Кулона, гиперболический, экспоненциальный и квадратичный законы. Также в законы управления при необходимости добавлялся коэффициент демпфирования для уменьшения колебательности системы.

При столкновении аппаратов или их выходе за допустимые границы моделирование прекращается с указанием причины остановки.

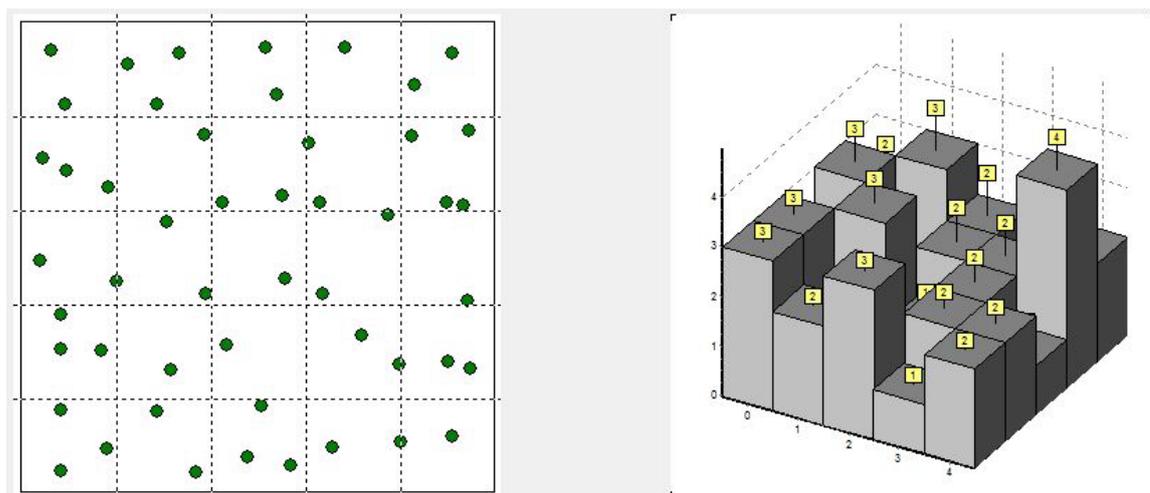


Рис. 3. Вид программного модуля при моделировании движения группы БА в газообразном АС

Так же при моделировании появилась возможность оценивать переходные процессы, происходящие внутри стаи. Для этого введем понятие

БА применение принципов централизованного управления, когда каждый БА непосредственно «подчиняется» более «старшему», становится нецелесообразным, дорогим, и даже нереализуемым.

Отсюда следует актуальность проблемы разработки децентрализованного управления большой группой, или стаей, беспилотных аппаратов, когда подается единая команда стае, и каждый БА отрабатывает эту команду самостоятельно [2].

Проблемой группового управления в РФ занимаются давно. Это и управление групповым движением самолетов, группировкой кораблей, и проблема синтеза пространственно-распределенных систем, управление пространственно-распределенными подвижными наземными объектами и т.д. В КНИТУ-КАИ на кафедре Динамики процессов и управления в течение многих лет ведутся исследования, связанные с проблемой оптимизации и устойчивости систем с распределенными параметрами, математического моделирования и управления сложными, трансформирующимися системами [3-8]. Данная статья является продолжением этих исследований и связана с математическим моделированием такой сложной, пространственно-распределенной, трансформирующейся системы, как большая группа БА.

Постановка задачи.

Рассмотрим двухуровневый принцип организации управления группой БА. Верхний уровень предполагает централизованное командование оператором, либо формирование целеуказаний автоматизированной системой, в целом для группы БА. На нижнем уровне каждый БА самостоятельно отрабатывает свои алгоритмы движения на основе заданной общегрупповой цели и взаимного положения относительно ближайших БА. Таким образом, внутреннее взаимодействие аппаратов происходит независимо от оператора.

Итак, требуется разработать низкоуровневые методы управления группой БА, состоящей из большого числа аппаратов, и взаимодействия между БА. Все аппараты в группе должны быть полностью идентичны. Они полностью должны повторять друг друга в конструкции и алгоритмах, а их действия зависят как от общей для всей группы команды, так и от взаимного расположения.

Движение аппаратов в стае должно быть устойчивым в том смысле, что:

- аппараты не должны сталкиваться между собой;
- каждый аппарат должен находиться в зоне информационного обмена хотя бы с одним другим аппаратом;
- движение аппаратов в группе не должно носить колебательный расходящийся характер;

- если заданы допустимые границы местоположения группы, то аппараты не должны «выскакивать» за эти границы.

На каждый БА со стороны среды накладываются ограничения, например, препятствия, которые БА должен облететь. Также для каждого конкретного БА накладываются ограничения все соседние БА. Это и минимально допустимое или заданное расстояние между БА, и «видимость» БА хотя бы одним другим БА, для возможности передачи информации и предотвращения потери БА группой, и т.д. Дополнительные ограничения могут быть переданы группе в задании.

В рамках данной работы будем рассматривать такой перспективный вид беспилотного летательного аппарата, как коптер, а в частности квадрокоптер. Этот вид аппаратов набирает все большую популярность, ввиду его простоты и дешевизны. Квадрокоптер способен взлетать и садиться вертикально, зависать в требуемой точке, менять направление тяги без поворота вокруг собственной оси. Такие аппараты очень удобны для решения задач, подобных нашей.

Групповое движение беспилотных аппаратов.

Нами предполагается двухуровневый принцип организации управления группой БА. Основной идеей управления группой БА является имитация группой БА агрегатного состояния (АС) вещества. На нижнем уровне управления алгоритмы управления каждого БА составлены так, чтобы группа в целом для оператора представлялась либо как твердое тело, либо как жидкость, либо как газ. Тогда команды высокого уровня становятся оператору интуитивно понятными.

При реализации группового управления БА целью ставится не моделирование реальных свойств вещества в соответствующем АС, а имитация тех ключевых свойств АС вещества, которые могут быть полезными при управлении группой БА. Рассмотрим эти ключевые свойства.

При «твердом» АС группа БА имеет неизменную структуру. Все БА жестко располагаются в заданных местах или на заданных расстояниях относительно друг друга. Каждый БА может немного колебаться относительно заданного положения. Система управления каждого БА самостоятельно отработывает свое заданное положение.

Группа БА в виде «жидкости» движется компактно, при этом БА не имеют фиксированных позиций в группе и свободно меняются между собой. Группа БА, обтекая или просачиваясь, обходит препятствия. Одним из ограничивающих условий для состояния «жидкости» является минимально допустимое расстояние между БА, чтобы не было соударений БА.

Группа БА в «газообразном» АС имеет такое ключевое свойство, как стремление равномерно занять максимальную область. Одним из ограни-

чивающих условий на максимальный объем является радиус видимости БА друг друга – БА не могут удаляться на большее расстояние.

Будем рассматривать движение стаи под действием алгоритмов нижнего уровня. Группа БА имитирует движение частиц вещества под действием его внутренних сил. Результирующая этих сил и будет требуемой тягой каждого БА. При этом система управления БА рассчитывает силы, которые действовали бы на него, если бы он был частицей вещества, находит их результирующую и обрабатывает ее действие тягой. Величины действующих сил вычисляются в соответствии с заданным законом движения.

В общем случае все силы, действующие внутри группы, можно разделить на силы притяжения и отталкивания. БА могут притягиваться или отталкиваться как друг от друга, так и от определенной точки пространства. Например, для предотвращения потери связи или столкновения между квадрокоптерами.

На данном этапе работы примем несколько допущений. Рассмотрим движение аппаратов только в горизонтальной плоскости. Каждый БА будем моделировать материальной точкой (рис. 1). Вектор тяги, имитирующий действие внешних сил, может иметь произвольную длину и направление, но накладывается дополнительное ограничение на максимальную тягу.

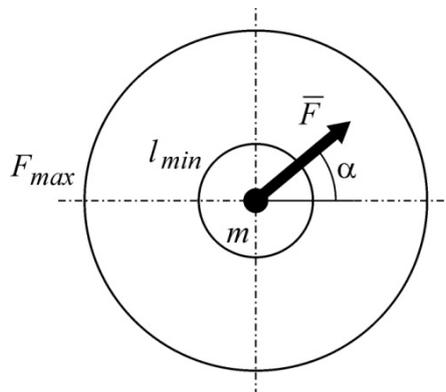


Рис. 1. Представление модели БА в виде материальной точки

Обозначения: m – масса БА; F_{max} – максимально допустимая длина вектора тяги БА; l_{min} – минимально допустимое расстояние между соседними БА; \vec{F} – вектор тяги, действующий на БА; α – угол поворота вектора тяги.

Представим ограниченную внешнюю среду в виде квадрата, внутри которой движутся БА в газообразном АС. Поделим допустимую область на более мелкие подобласти (рис. 2). Удобное количество подобластей может меняться в каждом конкретном случае. Оно зависит как от количества аппаратов, участвующих в моделировании, так и от размера внешних границ.

Аппараты хаотично двигаются внутри заданной области, равномерно распределяясь по ней. Задавая размеры границ, количество аппаратов в

плотности БА. Плотность каждой подобласти равна количеству БА, находящихся в ней, поделенному на площадь этой подобласти:

$$\rho_{\text{обл}} = n / S_{\text{обл}} ; \quad (1)$$

Тогда средняя плотность будет равна:

$$\rho_{\text{общ}} = n_{\text{общ}} / S_{\text{общ}} ; \quad (2)$$

Время, за которое значение плотностей достигнет допустимых пределов и больше не выйдет за них, и будем считать критерием оптимальности переходного процесса.

Моделирование проводилось в 3 этапа:

- На первом этапе, используя различные виды законов управления и коэффициенты в них, моделировалось движение БА из какого-то случайного положения. При этом начальные скорости всех БА были нулевыми.
- На втором этапе, в случайное время моделирование приостанавливалось и в систему добавлялось некоторое количество БА. После чего моделирование продолжалось. Скорости ранее моделируемых аппаратов были в этот момент не нулевыми, в отличие от добавленных БА.
- На заключительном этапе, моделирование велось по тому же принципу, что и во втором, но в момент приостановки БА не добавлялись в систему, а исключались из нее.

В ходе исследования мы пришли к выводу, что нелинейные законы показывают себя лучше, чем линейные. При их использовании снижается риск столкновения БА и их выхода за допустимые границы. Но у них есть и недостатки. Тяга быстро может достичь максимальных значений. После чего аппарат становится менее управляемым, пока не покинет зону близости с соседом.

Для получения необходимых видов переходных процессов при каждом законе управления могут использоваться коэффициенты усиления и демпфирования. Подбором подходящих коэффициентов получаем устойчивую и оптимальную в нашем понимании систему.

Заключение.

В данной работе предложен подход к организации управления большими группами БА. Он основан на децентрализованном управлении и имитации группой БА агрегатных состояний вещества. Это позволяет управлять большой группой БА с помощью интуитивно понятных высокоуровневых команд. При этом алгоритмы поведения, т.е. управления, каждого БА достаточно автономны и просты. Управление осуществляется на основе информации об относительном положении ближайших БА в соот-

ветствии с заданными законами взаимодействия. Выбор законов взаимодействия БА находится в руках проектировщика. В настоящее время авторами исследованы несколько видов взаимодействия БА, в том числе по закону Гука, закону Кулона, гиперболическому закону и др. В ходе выполнения работы был разработан программный модуль, позволяющий моделировать управление группой БА в виде трех агрегатных состояний. А также была исследована устойчивость группы как системы материальных точек при различных законах их взаимодействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарасов В.Б. От многоагентных систем к интеллектуальным организациям. М.: Эдиториал УРСС, 2002, 352 с.
- 2.2. Каляев И. А., Капустян С. Г., Гайдук А. Р. Самоорганизующиеся распределенные системы управления группами интеллектуальных роботов, построенные на основе сетевой модели / Управление большими системами. Специальный выпуск 30.1 "Сетевые модели в управлении". М.: ИПУ РАН, 2010, с.605-639.
3. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука. 1977, 480 с.
4. Сиразетдинов Т.К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Наука, 1987, 232 с.
5. Дегтярев Г.Л., Маликов А.И., Сиразетдинов Т.К. Сиразетдинов Р.Т. Исследования по устойчивости и управлению в КГТУ им. А.Н. Туполева-КАИ. Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева, 2007. №3, с.90-97.
6. Сиразетдинов Р.Т. Математическое моделирование развития системы однотипных объектов с учетом интенсивности их эксплуатации (На примере самолетно-вертолетного парка). Изв. ВУЗов. Сер. "Авиационная техника". Казань, 1994, №1, с.63-68.
7. Сиразетдинов Р.Т. Математическое моделирование мощности инфраструктуры сложных систем. Известия академии наук. Теория и системы управления, 1998. №3, с.96-104.
8. Миронов А.Б. Управление большими группами беспилотных аппаратов на основе имитации агрегатного состояния вещества. Науч. рук. Сиразетдинов Р.Т. // «XXI Туполевские чтения (школа молодых ученых)»: Международная молодежная научная конференция, 19-21 ноября 2013 г.: материалы конференции. – Т. I. – Казань: Изд-во Казан. Гос. Техн. Ун-та, 2013. с. 341-343.
9. Duarte, M., Oliveira, S. M., and Christensen, A. L. (2014b). Hybrid control for large swarm of aquatic drones. In 14th International Conference on the Synthesis & Simulation of Living Systems (ALIFE), pages 785–792. MIT Press, Cambridge, MA.

10. Rodrigues, T., Duarte, M., Oliveira, S. M., and Christensen, A. L. (2015). Beyond onboard sensors in robotic swarms: Local collective sensing through situated communication. In 7th International Conference on Agents and Artificial Intelligence (ICAART). SciTePress, Lisbon, Portugal. In press.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ЗАМЫКАНИЯ

М.И. Тлеубергенов (ИМММ, Казахстан, 050010, Алматы, Пушкина, 125)
E-mail: marat207@mail.ru

Г.Т. Ибраева (Военный институт СВО им. Т. Бегельдинова,
030012, Актобе, А. Молдагуловой, 16)
E-mail: gulmira_ibraeva@mail.ru

ON SOLVABILITY OF INVERSE STOCHASTIC PROBLEM OF CLOSURE

M.I. Tleubergenov (IMMM, Kazakhstan, 050010, Almaty, Pushkin str., 125)
G.T. Ibraeva (Military Institute of Forces of Air Defense named by T. Begeldi-
nov, 032012, Aktobe, A. Moldagulova str., 16)

Keywords: inverse problems, stochastic differential equations, integral manifold

Получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи замыкания в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка со случайными возмущениями из класса процессов с независимыми приращениями, с вырождающейся относительно части переменных диффузией и с заданными свойствами, зависящими лишь от части переменных.

Основы теории и общие методы решения обратных задач дифференциальных систем восходят к работам [1,2] и продолжают разрабатываться (см.[3-7] и др.) для детерминированных систем, уравнения которых являются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Так, в работе Еругина [1] строится множество ОДУ, которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа, впоследствии, оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых ОДУ. В работах [2-7] изложены постановка, классификация обратных задач дифференциальных систем и их решение в классе ОДУ.

В работах [8-10] обратные задачи динамики рассматриваются при дополнительном предположении о наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов и, в частности, методом квазиобращения решены: 1) *основная обратная задача динамики* – построение множества стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, обладающих заданным интегральным многообразием; 2) *задача вос-*

становления уравнений движения – построение множества управляющих параметров, входящих в заданную систему стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, по заданному интегральному многообразию; и 3) *задача замыкания уравнений движения* – построение множества замыкающих стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито по заданной системе уравнений и заданному интегральному многообразию.

Другие важные (но отличные от задачи, рассматриваемой в настоящей работе) обратные задачи при наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов рассмотрены в [11,12]. Так, основная (согласно классификации Галиуллина [2]) обратная задача с вырождающейся диффузией решается в [11] методом разделения, а стохастическая задача восстановления исследуется в [12] методом квазиобращения.

В работах [10,13] рассматривается одна из обратных задач – задача построения множества замыкающих стохастических дифференциальных уравнений Ито по заданному интегральному многообразию в предположении, что

- 1) заданные и замыкающие уравнения являются уравнениями с вырождающейся диффузией;
- 2) заданное интегральное многообразие зависит от всех переменных;
- 3) случайные возмущения принадлежат классу независимых винеровских процессов (как частный случай процессов с независимыми приращениями).

В настоящей работе в отличие от [10,13] предполагается, что, во-первых, заданное интегральное многообразие зависит лишь от части переменных и, во-вторых, случайные возмущения принадлежат более общему классу, а именно классу процессов с независимыми приращениями.

Постановка общей задачи. Пусть задано множество

$$\Lambda(t): \lambda(y, v, t) = 0, \quad \text{где } \lambda = \lambda(y, v, t) \in C_{yvt}^{111}, \quad \lambda \in R^m \quad (1)$$

и стохастическое дифференциальное уравнений Ито первого порядка

$$\begin{cases} \dot{y} = g_1(y, v, w, t), \\ \dot{z} = g_2(y, v, w, t) + \sigma_1(y, v, w, t)\dot{\xi}. \end{cases} \quad (2)$$

Требуется достроить систему замыкающих уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{v} = g_3(y, v, w, t), \\ \dot{w} = g_4(y, v, w, t) + \sigma_2(y, v, w, t)\dot{\xi}, \end{cases} \quad (3)$$

так, чтобы множество (1.1) было интегральным многообразием системы уравнений (1.2), (1.3).

Здесь $y \in R^{l_1}$, $z \in R^{l_2}$, $v \in R^{p_1}$, $w \in R^{p_2}$, $l_1 + l_2 + p_1 + p_2 = n$, σ_1 и σ_2 – матрицы соответственно размерности $(l_2 \times k)$ и $(p_2 \times k)$, $\{\xi_1(t, \omega), \dots, \{\xi_1(t, \omega)_k\}$ – система случайных процессов с независимыми приращениями, которую, следуя [14], можно представить в виде суммы процессов: $\xi = \xi_0 + \int c(x)P^0(t, dx)$, где $\xi = (\xi_1^T, \dots, \xi_k^T)^T$ – векторный процесс с независимыми приращениями, $\xi_0 = (\xi_{10}^T, \dots, \xi_{k0}^T)^T$ – векторный винеровский процесс; P^0 – пуассоновский процесс; $P^0(t, dx)$ – число скачков процесса P^0 в интервале $[0, t]$, попадающих на множество dx ; $c(x)$ – векторная функция, отображающая пространство R^n в пространство значений R^k процесса $\xi(t)$ при любом t .

Предполагается, что заданные вектор-функции g_1, g_2 и заданная матрица σ_1 , а также искомые вектор-функции g_3, g_4 и искомая матрица σ_2 – непрерывны по t и липшицевы по x во всем пространстве R^n , где $x = (y^T, z^T, v^T, w^T)^T$. Эти условия обеспечивают в R^n существование и единственность до стохастической эквивалентности решения $x(t)$ системы уравнений (1.1), (1.2) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [14].

В настоящей работе для решения стохастической задачи замыкания используется метод квазиобращения [3].

Для решения поставленной задачи дополнительно предположим, что вектор-функции g_1 и g_3 такие, что $g_1 \in C_{yzvwt}^{12111}$, $g_3 \in C_{yzvwt}^{11211}$.

Предварительно, по правилу стохастического дифференцирования Ито [14, с.204] сложной функции в случае процесса с независимыми приращениями последовательно вычислим $\dot{\lambda}$, а затем $\ddot{\lambda}$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \dot{v}, \\ \ddot{\lambda} &= \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial y} \dot{y} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial v} \dot{v} + \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial y} + \dot{y}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial y} + \dot{v}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial v} \right) \dot{y} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \ddot{y} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial y} + \dot{y}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v \partial y} + \dot{v}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v \partial v} \right) \dot{v} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \ddot{v}. \end{aligned} \quad (4)$$

Раскроем выражения $\frac{\partial \lambda}{\partial y} \ddot{y}$ и $\frac{\partial \lambda}{\partial v} \ddot{v}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \ddot{y} &= \frac{\partial \lambda}{\partial y} \left[\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial g_1}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial g_1}{\partial v} \dot{v} + \frac{\partial g_1}{\partial w} \dot{w} \right] = \\ &= \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial y} g_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial z} (g_2 + \sigma_1 \dot{\xi}) + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial v} g_3 + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial w} (g_4 + \sigma_2 \dot{\xi}) + \\ &\quad + \frac{\partial \lambda}{\partial y} (S_{1z}^y + S_{2z}^y + S_{3z}^y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \ddot{v} &= \frac{\partial \lambda}{\partial v} \left[\frac{\partial g_3}{\partial t} + \frac{\partial g_3}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial g_3}{\partial v} \dot{v} + \frac{\partial g_3}{\partial w} \dot{w} \right] = \\ &= \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial g_3}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial g_3}{\partial y} g_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial g_3}{\partial z} (g_2 + \sigma_1 \dot{\xi}) + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial g_3}{\partial v} g_3 + \\ &\quad + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial g_3}{\partial w} (g_4 + \sigma_2 \dot{\xi}) + \\ &\quad + \frac{\partial \lambda}{\partial v} (S_{1w}^v + S_{2w}^v + S_{3w}^v), \end{aligned}$$

где $S_{1z}^y = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_1}{\partial z \partial z} : \sigma_1 \nu_0 \sigma_1^T$;

$$\begin{aligned} S_{2z}^y &= \int [g_1(y, z + \sigma_1 c(x), v, w, t) - g_1(y, z, v, w, t) - \\ &\quad - \frac{\partial g_1(y, z, v, w, t)}{\partial z} \sigma_1 c(x)] \nu_p(t, x) dx; \end{aligned}$$

$$S_{3z}^y = \int [g_1(y, z - \sigma_1 c(x), v, w, t) - g_1(y, z, v, w, t)] d\dot{P}^0(t, dx);$$

$$S_{1w}^v = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_3}{\partial v \partial v} : \sigma_2 \nu_0 \sigma_2^T;$$

$$\begin{aligned} S_{2w}^v &= \int [g_3(y, z, v, w + \sigma_2 c(x), t) - g_3(y, z, v, w, t) - \\ &\quad - \frac{\partial g_3(y, z, v, w, t)}{\partial w} \sigma_2 c(x)] \nu_p(t, x) dx; \end{aligned}$$

$$S_{3w}^v = \int [g_3(y, z, v, w - \sigma_2 c(x), t) - g_3(y, z, v, w, t)] d\dot{P}^0(t, dx).$$

А под $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_1}{\partial z \partial z} : D$, следуя [14], понимается вектор, элементами которого служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $g_{1\mu}(y, v, w, t)$ вектора $g_1(y, v, w, t)$ по компонентам z на матрицу D , где $D = \sigma_1 \nu_0 \sigma_1^T$.

Введем следующие обозначения

$$G = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial y} \dot{y} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial v} \dot{v} + \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial y} + \dot{y}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial y} + \dot{v}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial v} \right) \dot{y} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial v} + \dot{y}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v \partial y} + \dot{v}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v \partial v} \right) \dot{v} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial g_3}{\partial t} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial g_3}{\partial y} \right) g_1 +$$

$$+ \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial g_3}{\partial z} \right) g_2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial v} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial g_3}{\partial v} \right) g_3 + \frac{\partial \lambda}{\partial y} (S_{1z}^y + S_{2z}^y + S_{3z}^y) +$$

$$+ \frac{\partial \lambda}{\partial v} (S_{1w}^v + S_{2w}^v + S_{3w}^v), \quad g = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial w} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial g_3}{\partial w} \right) g_4, \quad (5)$$

$$F = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial g_3}{\partial z} \right) \sigma_1, \quad f = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial w} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial g_3}{\partial w} \right) \sigma_2 \quad (6)$$

Тогда используя обозначения (5) и (6) уравнение возмущенного движения (4) можно переписать в виде

$$\ddot{\lambda} = G + g + (F + f)\dot{\xi}. \quad (7)$$

Далее, введем произвольные функции Еругина [1]: m -мерную вектор-функцию A и $(m \times k)$ - матрицу B , обладающие свойством $A(0,0, y, z, v, w, t) \equiv 0$, $B(0,0, y, z, v, w, t) \equiv 0$, такие, что имеет место

$$\ddot{\lambda} = A(\lambda, \dot{\lambda}, y, z, v, w, t) + B(\lambda, \dot{\lambda}, y, z, v, w, t)\dot{\xi}, \quad (8)$$

где ξ - тот же процесс с независимыми приращениями, входящий в (3).

На основе уравнений (7) и (8) приходим к соотношениям

$$\begin{cases} g = A - G, \\ f = B - F, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial w} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial g_3}{\partial w} \right) g_4 = A - G, \\ \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial w} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial g_3}{\partial w} \right) \sigma_2 = B - F, \end{cases} \quad (9)$$

из которых нужно определить вектор-функции управления g_3, g_4 и матрицу σ_2 .

Для разрешения задачи требуется

Лемма 1 [3, с. 12-13]. Совокупность всех решений линейной системы

$$H\mathcal{G} = g, H = (h_{\mu k}), \mathcal{G} = (\mathcal{G}_k), g = (g_\mu), \mu = \overline{1, m}, k = \overline{1, n}, m \leq n, \quad (10)$$

где матрица H имеет ранг равный m , определяется выражением

$$\mathcal{G} = s[HC] + H^+ g. \quad (11)$$

Здесь s – произвольная скалярная величина, $[HC] = [[h_1 \dots h_m \ c_{m+1} \dots c_{n-1}]$ есть векторное произведение векторов $h_\mu = (h_{\mu k})$ и произвольных векторов $c_\rho = (c_{\rho k}), \rho = \overline{m+1, n-1}$; $H^+ = H^T (HH^T)^{-1}$, H^T – матрица, транспонированная к H .

Положим вектор-функцию g_3 равной произвольной функции $\varphi = \varphi(y, z, v, w, t)$ из класса $\varphi \in C_{yzvwt}^{11121}$. Тогда перепишем (9) в виде

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial w} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) g_4 = A - G, \\ \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial w} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) \sigma_2 = B - F, \end{cases} \quad (12)$$

По формуле (9) леммы 1 из соотношений (12) определим искомые вектор-функцию g_4 и столбцы σ_{2i} матрицы σ_2 в виде

$$g_4 = s_1 \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial w} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) C \right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial w} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right)^+ (A - G), \quad (13)$$

$$\sigma_{2i} = s_2 \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial w} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) C \right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial g_1}{\partial w} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right)^+ B_i, \quad i = \overline{1, k}, \quad (14)$$

где B_i – i -ый столбец матрицы B .

Следовательно, справедлива теорема

Теорема 1. Для того чтобы дифференциальное уравнение первого порядка типа Ито (2) имело заданное интегральное многообразие (1) необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты замыкающих стохастических дифференциальных уравнений g_4 имели вид (13) при произвольной вектор-функции $g_3 = \varphi(y, z, v, w, t)$ из класса C_{yzvwt}^{11121} , а столбцы σ_{2i} матрицы диффузий σ_2 удовлетворяли условию (14).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикладная математика и механика. – М., 1952. – Т.10, вып. 6. – С.659-670.
2. Галиуллин А.С. Методы решения обратных задач динамики. – М.: Наука, 1986. – 224 с.
3. Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. Уравнения программных движений. – М.: Изд-во РУДН, 1986. – 88 с.
4. Мухарлямов Р.Г. О построении систем дифференциальных уравнений движения механических систем // Дифференциальные уравнения. – М., 2003. – Т. 39, № 3. – С. 343-353.
5. Абрамов Н.В., Мухарлямов Р.Г., Киргизбаев Ж.К. Управление динамикой систем с программными связями. Монография. – Нижневартовск: Изд-во Нижневарт. гос. ун-та. 2013. – 202 с.
6. Mukharlyamov R.G. Simulation of Control Processes, Stability and Stabilization of Systems with Program Constraints // Journal of Computer and Systems Sciences International. –2015. –Vol.54, No.1, –pp.13-26.
7. Llibre J., Ramirez R. Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications. Springer International Publishing Switzerland. –2016. –266 p.
8. Тлеубергенов М.И. Об обратной задаче динамики при наличии случайных возмущений // Известия МН-АН РК. Серия физико-математическая. –Алматы, 1998. – № 3. – С. 55–61.
9. Тлеубергенов М.И. Об обратной задаче восстановления стохастических дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. – М., 2001. – Т.37, № 5. – С. 714–716.
10. Тлеубергенов М.И. Об обратной стохастической задаче замыкания // Доклады МН-АН РК. – Алматы, 1999. –№ 1. – С. 53–60.
11. Тлеубергенов М.И., Ибраева Г.Т. Об основной обратной задаче дифференциальных систем с вырождающейся диффузией // Украинский математический журнал. – Киев, 2013. – Т. 65, № 5. – С. 712-716.
12. Тлеубергенов М.И. К обратной стохастической задаче восстановления // Дифференциальные уравнения. – М., 2014. –Т. 50. –№ 2. –С. 269–273.
13. Ибраева Г.Т., Тлеубергенов М.И. К задаче замыкания дифференциальных систем с вырождающейся диффузией // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. – М., 2008. – № 1. – С. 12–19.
14. Пугачев В.С., Сеницын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. –М.: Наука, 1990. –632 с.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

Е.А. Кудашова, И.В. Кудашкина, Л.В. Федорова

Ульяновский государственный университет

Аннотация. В настоящей работе рассмотрена задача об устойчивости дискретной модели типа Вольтерра. С помощью метода сравнения для разностных систем найдены достаточные условия асимптотической устойчивости.

Ключевые слова: дискретная модель, Уравнения Вольтерра динамики популяций, метод сравнения, устойчивость.

Распространенной моделью ряда нелинейных систем и процессов являются дифференциальные, функционально-дифференциальные уравнения, предложенные к рассмотрению в работах В. Вольтерра [1]. Соответствующими разностными уравнениями могут быть описаны модели в медицине, экономике и других естественных, а так же, технических науках [2-7]. За основу исследования примем эпидемиологическую модель из монографии [8].

Рассмотрим две различные популяции, где инфицированные члены одной популяции могут заражать здоровых членов другой популяции. Простая дискретная модель течения болезни с учетом нестационарности имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = a_{12}(n)x_2(n)(1-x_1(n)) + a_{11}(n)x_1(n) \\ x_2(n+1) = a_{21}(n)x_1(n)(1-x_2(n)) + a_{22}(n)x_2(n) \end{cases} \quad (1)$$

где $n \in \mathbb{Z}^+$, x_1 и x_2 – относительные инфицированные члены популяции, $0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1$, $a_{jk}, j, k = 1, 2$ – коэффициенты, характеризующие процесс заражения для которых могут быть приняты следующие условия $0 < \varepsilon \leq a_{jk}(n) \leq 1 - \varepsilon$.

Множество $\Gamma = \{0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ для системы (1) является инвариантным для любых значений $x(n_0) = x_0, (n_0, x_0) \in \mathbb{Z}^+ \times \Gamma$, соответствующих решений $x(n, n_0, x_0) \in \Gamma$ для всех $n \geq n_0$.

Уравнения (1) предкомпактны, соответствующие предельные уравнения имеют аналогичный вид:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = a_{12}^*(n)x_2(n)(1-x_1(n)) + a_{11}^*(n)x_1(n) \\ x_2(n+1) = a_{21}^*(n)x_1(n)(1-x_2(n)) + a_{22}^*(n)x_2(n) \end{cases} \quad (2)$$

В качестве векторной функции Ляпунова можно взять функцию

$$V = (V_1, V_2)^T, \quad V_1 = x_1, \quad V_2 = x_2$$

здесь $(\cdot)^T$ – операция транспонирования.

Уравнения для V_1 и V_2 совпадают с (1) и (2), а система сравнения имеет вид

$$\begin{cases} w_1(n+1) = a_{11}(n)w_1 + a_{12}(n)w_2 - Q_1 \\ w_2(n+1) = a_{21}(n)w_1 + a_{22}(n)w_2 - Q_2 \end{cases} \quad (3)$$

При этом, в принятых обозначениях, функции $Q_1 = a_{12}(n)x_1x_2$, $Q_2 = a_{21}(n)x_1x_2$, откуда предельные функции Q_1^* и Q_2^* соответственно задаются равенствами

$$\begin{aligned} Q_1^* &= a_{12}^*(n)x_1(n)x_2(n), \quad Q_2^* = a_{21}^*(n)x_1(n)x_2(n) \\ a_{jk}^*(n) &= \lim_{m \rightarrow \infty} a_{jk}(m+n) \end{aligned} \quad (4)$$

Положим $A(n) = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) \end{pmatrix}$. Решение $w_1 = w_2 = 0$ системы

$w(n+1) = A(n)w(n)$ будет равномерно устойчивым, если для любого $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ и $k \geq k_0$

$$\left\| \prod_{j=k_0}^k A(j) \right\| \leq M = \text{const} \quad (5)$$

где $\|B\| = \max(|b_{jk}|)$.

Множество $\{Q_1^* = Q_2^* = 0\} = \{x_1(n) = 0 \text{ или } x_2(n) = 0\}$ не содержит решений (2), кроме $x_1 = x_2 = 0$. На основании теоремы об асимптотической устойчивости из [9] находим, что условия (5) достаточно для глобальной равномерной асимптотической устойчивости состояния $x_1 = x_2 = 0$ системы (1).

Иное достаточное условие асимптотической устойчивости можно вывести на основе функции Ляпунова.

$$V(x_1, x_2) = \alpha|x_1| + \beta|x_2| = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

Находим

$$\begin{aligned} V(n+1) &= \alpha x_1(n+1) + \beta x_2(n+1) = (\alpha a_{11}(n) + \beta a_{21}(n))x_1(n) + \\ &+ (\alpha a_{12}(n) + \beta a_{22}(n))x_2(n) - (\alpha a_{12}(n) + \beta a_{21}(n))x_1(n)x_2(n) = \mu(n)V(n) - Q \\ Q &= (\alpha a_{12}(n) + \beta a_{21}(n))x_1x_2 \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{cases} \alpha a_{11}(n) + \beta a_{21}(n) \leq \alpha \mu(n) \\ \alpha a_{12}(n) + \beta a_{22}(n) \leq \beta \mu(n) \end{cases} \quad (6)$$

где полагаем, что $\mu(n) > 0$ есть некоторая функция, удовлетворяющая соотношению

$$\prod_{j=n_0}^n \mu(j) \leq m_0 = \text{const}, \forall n > n_0, n_0 \in \mathbb{Z}^+ \quad (7)$$

Находим, что при условиях (6) и (7) решение $w = 0$ соответствующего уравнения сравнения

$$w(n+1) = \mu(n)w(n)$$

равномерно устойчиво, а множество $Q^* = (\alpha a_{12}^*(n) + \beta a_{21}^*(n))x_1 x_2$, согласно теореме из [9], не содержит решений (2), кроме $x_1 = x_2 = 0$. И таким образом, условия (6) и (7) достаточны для глобальной равномерной асимптотической устойчивости $x_1 = x_2 = 0$ системы (1).

Представим неравенства (6) в виде

$$\begin{cases} a_{11}(n) + \frac{\beta}{\alpha} a_{21}(n) \leq \mu(n) \\ \frac{\alpha}{\beta} a_{12}(n) + a_{22}(n) \leq \mu(n) \end{cases} \quad (8)$$

Обозначив $\frac{\beta}{\alpha} = \gamma$, $\gamma \in (0, \infty)$ и разрешив полученную систему относительно γ , получим, что эти условия выполняются, если функция $\mu(n)$ удовлетворяет соотношениям

$$\mu(n) \geq a_{11}(n) + \gamma a_{21}(n), \quad \mu(n) \geq a_{22}(n) + \frac{1}{\gamma} a_{12}(n)$$

Соответственно условия (7) обращаются в условие: существует такое число $\gamma > 0$, при котором

$$\prod_{j=n_0}^n \max \left\{ a_{11}(j) + \gamma a_{21}(j), a_{22}(j) + \frac{1}{\gamma} a_{12}(j) \right\} \leq m_0 = \text{const} \quad \forall n > n_0, n_0 \in \mathbb{Z}^+ \quad (9)$$

Замечание 1. Для постоянной матрицы $A(n) = A_0 = \text{const}$ условия (5) или (9) обращаются в условия $\lambda_{\max}(A_0) \leq 1$, здесь $\lambda_{\max}(A_0)$ - наибольшее собственное значение матрицы A_0 . Что соответственно совпадает с необ-

ходимым и достаточным условием для автономной системы (1) из [8], записанного в виде

$$1 - (a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \geq 0 \quad (10)$$

Если вместо условия (5) матрица $A(n)$ удовлетворяет условию вида:

$$\left\| \prod_{j=kn}^{(k+1)m} A(j) \right\| \geq 1 + \varepsilon,$$

для некоторых $m \in \mathbb{Z}^+$ и $\varepsilon > 0$ и $\forall k \in \mathbb{Z}^+$, тогда несложно найти, что состояние $x_1 = x_2 = 0$ системы (1) неустойчиво.

При постоянных $a_{jk} = const, j, k = 1, 2$ и нарушении условий (10) система (1) имеет ненулевое стационарное решение

$$x_1 = x_1^0 = 1 - \frac{(a_{21} - a_{22} + 1)(1 - a_{12})}{(a_{12} - a_{11} + 1)a_{21}},$$

$$x_2 = x_2^0 = 1 - \frac{(a_{11} - a_{12} + 1)(1 - a_{22})}{(a_{21} - a_{22} + 1)a_{11}}$$

В общем случае системы (1) это решение существует, если коэффициенты $a_{jk}(n)$ удовлетворяют соотношениям

$$1 - \frac{(a_{21}(n) - a_{22}(n) + 1)(1 - a_{12}(n))}{(a_{11}(n) - a_{12}(n) + 1)a_{21}(n)} = b_{11}^0 = const < 1,$$

$$1 - \frac{(a_{11}(n) - a_{12}(n) + 1)(1 - a_{22}(n))}{(a_{21}(n) - a_{22}(n) + 1)a_{11}(n)} = b_{22}^0 = const < 1.$$

Исследуем вопрос об устойчивости как этого возможного стационарного состояния, так и любого другого решения системы (1)

$$x_1 = x_{10}^*(n), \quad x_2 = x_{20}^*(n) \quad (11)$$

Вводим возмущения

$$\tilde{x}_1(n) = x_1 - x_{10}^*(n), \quad \tilde{x}_2(n) = x_2 - x_{20}^*(n)$$

Уравнения возмущенного движения будут иметь следующий вид

$$\tilde{x}_1(n+1) = a_{12}(n)(1 - x_{10}^*(n))\tilde{x}_2(n) + (a_{11}(n) - a_{12}(n)x_{20}^*(n))\tilde{x}_1(n) - a_{12}(n)\tilde{x}_2(n)\tilde{x}_1(n)$$

$$\tilde{x}_2(n+1) = a_{21}(n)(1 - x_{20}^*(n))\tilde{x}_1(n) + (a_{22}(n) - a_{21}(n)x_{10}^*(n))\tilde{x}_2(n) - a_{21}(n)\tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n) \quad (12)$$

Рассмотрим задачу об исследовании устойчивости нулевого решения на основе функции Ляпунова вида:

$$\begin{aligned}\tilde{V}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) &= \alpha|\tilde{x}_1| + \beta|\tilde{x}_2|, \quad \alpha, \beta > 0 \\ \tilde{V}(n+1, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) &\leq (\alpha|a_{11} - a_{12}x_{20}^*| + \beta a_{21}(1 - x_{20}^*))|\tilde{x}_1(n)| + \\ &+ (\alpha a_{12}(1 - x_{10}^*) + \beta|a_{22} - a_{21}x_{10}^*|)|\tilde{x}_2(n)| - \\ &- (\alpha a_{12} + \beta a_{21})|\tilde{x}_1(n)||\tilde{x}_2(n)| \leq \mu_1(n)\tilde{V}(n) + \mu_2(n)\tilde{V}^2(n)\end{aligned}$$

если

$$\begin{cases} \alpha|a_{11} - a_{12}x_{20}^*| + \beta a_{21}(1 - x_{20}^*) \leq \alpha\mu_1(n) \\ \alpha a_{12}(1 - x_{10}^*) + \beta|a_{22} - a_{21}x_{10}^*| \leq \beta\mu_1(n) \\ 4\frac{\alpha a_{12} + \beta a_{21}}{\alpha\beta} \leq \mu_2(n) \end{cases} \quad (13)$$

Соответственно, имеем следующее уравнение сравнения

$$w(n+1) = \mu_1(n)w(n) + \mu_2(n)w^2(n) \quad (14)$$

Глобальная равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения этого уравнения достаточна для глобальной равномерной асимптотической устойчивости решения (12).

Решение $w = 0$ будет локально равномерно асимптотически устойчиво, если для $\mu_1(n)$ имеет место соотношение

$$\prod_{j=k_0}^{k_0+k} \mu_1(j) \leq \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0 + N = N(\varepsilon) > 0, k_0 \in \mathbb{Z}^+ \quad (15)$$

Таким образом, согласно теореме 1 первые два неравенства (13) и соотношение (15) достаточны для равномерной асимптотической устойчивости решения $\tilde{x} = 0$ системы (12).

Перепишем указанные условия из (13) в виде

$$\begin{aligned} |a_{11} - a_{12}x_{20}^*| + \frac{\beta}{\alpha}a_{21} - \frac{\beta}{\alpha}a_{21}x_{20}^* &\leq \mu_1(n) \\ |a_{22} - a_{21}x_{10}^*| + \frac{\alpha}{\beta}a_{12} - \frac{\alpha}{\beta}a_{12}x_{10}^* &\leq \mu_1(n) \end{aligned}$$

Полагая $\beta/\alpha = \gamma$, находим, что эти условия будут выполнены, если функция $\mu_1(n)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \mu_1(n) &\geq \mu_1^*(n) \equiv |a_{11} - a_{12}x_{20}^*| + \gamma a_{21}(1 - x_{20}^*) \\ \mu_1(n) &\geq \mu_1^{**}(n) \equiv |a_{22} - a_{21}x_{10}^*| + \frac{1}{\gamma}a_{12}(1 - x_{10}^*) \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая требования (15), получаем, что решение (12) будет локально равномерно асимптотически устойчиво, если найдется число $\gamma > 0$, такое что

$$\prod_{j=k_0}^n \max\{\mu_1^*(j), \mu_1^{**}(j)\} \leq \varepsilon \quad \forall k > k_0 + N, N = N(\varepsilon), k_0 \in \mathbb{Z}^+$$

При постоянных значениях a_{jk} , полагая $\mu = 1$, отсюда имеем условия асимптотической устойчивости стационарного режима, совпадающие с соответствующим результатом из [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-08482).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра.— М.: Наука, 1976.— 286 с.
2. Богданов А. Ю. Дискретные динамические системы: проблемы устойчивости и управления / А. Ю. Богданов // Ульяновск: УлГТУ, 2008.- 262 с.
3. Родионов, А. М. Притяжение для дискретных уравнений, приложение к динамике популяций / А. М. Родионов // Автоматика и телемеханика.— 2000.— № 2.— С. 76-85.
4. Родионов, А. М. О некоторых дискретных моделях межвидового взаимодействия А. М. Родионов // Автоматика и телемеханика.— 2000.— № 12.— С. 122-129.
5. Rondoni L. Autocatalytic reactions as dynamical systems on the interval / L. Rondoni // J. Math. Phys. - 1993.- Vol. 34.- no. 11.- Pp. 5238-5251.
6. Sedaghat H. A class of nonlinear second order difference equations from macroeconomics / H. Sedaghat // Nonlinear Anal. Theory, Methods, Appl.— 1997.— Vol. 29.— no. 5.— Pp. 593-603.
7. Simonovits A. Chaotic dynamics of economic systems /A. Simonovits // Szigma. – 1985. – Vol. 18.— Pp. 267–277.
8. LaSalle J.P. Stability of difference equations. In a Study in Ordinary Differential Equations (edited by J. K. Hale), Studies in Mathematical Series, Mathematical Association of America, 1977.
9. Перегудова О.А., Кудашова Е.А. Метод векторных функций Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости разностных систем // Научно-технический вестник Поволжья. – 2015. – № 1. – С.118-120.
10. LaSalle J.P. The stability and control of discrete processes. (Applied mathematical sciences; vol. 62), Springer-Verlag, 1986. – 147 p.

МЕТОД ПРЕДЕЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

И.А. Финогенко (ИДСТУ им. В.М. Матросова СО РАН, Россия,
664033, Иркутск, ул. Лермонтова 134, а/я 292

E-mail: fin@icc.ru

I.A. Finogenko (ISDCT named by V.M. Matrosov SB RAS, Russia,
664033, Irkutsk, Lermontov str. 134, Post Box 292

Keywords: method of limiting differential equations, limiting differential inclusion, Lyapunov's function, a principle of invariancy, differential equation with discontinuous right-hand part.

1. Введение. В работе исследуется асимптотическое поведения решений неавтономных систем, представленных в форме дифференциальных уравнений и включений в рамках прямого метода Ляпунова. Предполагается, что производная функции Ляпунова неположительна. Вывод, который из этого следует для автономных систем, состоит в том, что правые предельные множества решений принадлежат наибольшему инвариантному подмножеству из множества нулей производной функции Ляпунова. Этот результат известен, как принцип инвариантности Ла-Салля (см. [1, стр. 190]).

Теорема (J.P. LaSalle). Пусть $x(t)$ – решение уравнения $\dot{x} = f(x)$ с непрерывной функцией $f(x)$ в правой части, $V(x)$ – локально липшицева функция такая, что $D^+V(x) \leq 0$. Тогда пересечение ω -предельного множества $\Lambda^+(x)$ решения $x(t)$ с областью Ω определения функции $f(x)$ содержится в объединении всех непродолжимых орбит из множества $E = \{x \in \Omega : D^+V(x) = 0\}$.

Ранее функции Ляпунова со знакопостоянной производной использовались в известной теореме Барбашина-Красовского [2] об асимптотической устойчивости положений равновесия автономных систем. При этом требовались некоторые дополнительные предположения на саму функцию Ляпунова или анализ множества $E = \{x \in R^n : \dot{V}(x) = 0\}$ нулей производной функции Ляпунова в силу уравнения на наличие в ней целых траекторий. Эту теорему (вместе с теоремой Ла-Салля) также иногда характеризуют, как принцип инвариантности.

В настоящее время принцип инвариантности распространен и на другие классы автономных систем, таких, как системы с последействием, дифференциальные включения и др. Но при рассмотрении неавтономных систем возникают трудности, которые могут быть выявлены уже при кратком анализе схемы доказательства теоремы Ла-Салля. Во-первых,

существенным является то, что множество $\Lambda^+(x)$ обладают некоторыми свойствами типа инвариантности (в формулировке теоремы Ла-Салля вместо множества всех непродолжимых орбит можно рассматривать наибольшее полуинвариантное подмножество из E). Для неавтономных уравнений ω -предельные множества свойствами инвариантности не обладают. Во-вторых, становится неясным, что понимать под множеством нулей производной функции Ляпунова, так как эта производная зависит не только от x , но также и от переменной t .

Попытки преодолеть эти трудности и перенести принцип инвариантности на неавтономные уравнения

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1)$$

привели к понятиям предельных уравнений, порождаемых сдвигами (трансляциями) $f^\tau(t, x) = f(t + \tau, x)$ функций $f(t, x)$.

Сейчас этот подход известен, как метод предельных уравнений [3], который в сочетании с прямым методом Ляпунова позволяет эффективно исследовать асимптотическое поведение решений неавтономных систем. Эти исследования восходят к работам [4-8] по топологической динамике неавтономных дифференциальных уравнений. Распространение метода предельных уравнений на более широкие классы систем ставит прежде всего вопрос о структуре и методах построения предельных уравнений. Здесь мы исследуем этот вопрос применительно к дифференциальным включениям и дифференциальным уравнениям с разрывной правой частью. Полученные результаты носят форму обобщений принципа инвариантности Ла-Салля.

2. Постановка задачи. Кратко метод предельных уравнений состоит в следующем. Пусть $x(t)$ – решение уравнения (1) и последовательность точек $t_k \rightarrow +\infty$. Обозначим $y_k(t) = x(t + t_k)$ для всех $k = 1, 2, \dots, t \geq 0$. Тогда функции $y_k(t)$ являются решениями уравнений

$$\dot{y}_k(t) = f(t + t_k, y_k(t)).$$

При определенных условиях теорема Арцела позволяет для любого отрезка $I = [0, T]$ выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность из последовательности функций $y_k(t)$. Возникает вопрос о том, какому уравнению удовлетворяет предельная функция $y(t)$. Очевидно, что $y(t) \in \Lambda^+(x)$ и поэтому ответ на этот вопрос дает некоторое свойство типа инвариантности множества $\Lambda^+(x)$.

При этом $f(t + t_{k_i}, x) \rightarrow f'(t, x)$ и предельное уравнение определяется в виде:

$$\dot{x} = f'(t, x),$$

и функция $y(t)$ является его решением. Если $V(t, x)$ – функция Ляпунова, удовлетворяющая неравенству $V(t, x) \leq w(t, x) \leq 0$, то некоторый аналог принципа инвариантности для неавтономного уравнения (1) может быть установлен в терминах так называемой предельной пары (f', w') .

В данной статье изучаются неавтономные дифференциальные включения

$$\dot{x} \in F(t, x). \quad (2)$$

Относительно переменной t предполагается лишь то, что для каждого фиксированного x многозначное отображение $t \rightarrow F(t, x)$ имеет измеримый селектор. В частности, это имеет место в теории разрывных по переменным (t, x) систем (1) при определении решения в смысле А.Ф. Филиппова. В этой ситуации при построении предельных отображений возникают трудности принципиального характера и возможности использования каких-либо теорем и фактов математического (в том числе многозначного) анализа о сходимости функциональных последовательностей далеко не очевидны.

В наших исследованиях предельные отображения построены на выводе, который можно сделать из следующей теоремы Дэви [9] о сходимости последовательности абсолютно непрерывных функций $y_k(t)$.

Теорема (J.L. Davy). Пусть последовательность $\{y_k(\cdot)\}$ абсолютно непрерывных функций $y_k : I \rightarrow R^n$, $I = [a, b]$, удовлетворяет следующим условиям:

1) $y_k(t) \rightarrow y(t)$ при любом фиксированном $t \in I$;

2) $P\dot{y}_k(t)P \leq g(t)$ для почти всех $t \in I$, где $g : I \rightarrow R^1$ – суммируемая по Лебегу функция.

Тогда $y(t)$ – абсолютно непрерывная функция, такая, что

$$\dot{y}(t) \in \bigcap_{n \geq 1} \overline{co} \bigcup_{k \geq n} \dot{y}_k(t) \quad (3)$$

для почти всех $t \in I$, где \overline{co} – символ выпуклой замкнутой оболочки множества.

Введем в рассмотрение многозначное, вообще говоря, отображение

$$F'(t, x) = \bigcap_{n \geq 1} \overline{co} \bigcup_{k \geq n} F(t + t_k, x).$$

В силу формулы (3) для предельной функции $y(t)$ выполняется

$$\dot{y}(t) \in \bigcap_{n \geq 1} \overline{co} \bigcup_{k \geq n} F(t + t_k, y_k)$$

и при некоторых дополнительных условиях на правую часть включения (3) функция $y(t)$ является решением дифференциального включения

$$\dot{x} = F'(t, x) \quad (4)$$

Следовательно, $F'(t, x)$ можно охарактеризовать, как предельное многозначное отображение для многозначной функции $F(t, x)$, а включение (4) – как предельное дифференциальное включение.

Мы изучаем свойства предельных многозначных отображений и предельные дифференциальные включения (4) применительно к задаче (2) и в сочетании с прямым и методом Ляпунова получаем теоремы о локализации правых предельных множеств решений, что дает возможность изучать асимптотическое поведение решений. Мы исследуем упомянутые выше задачи для дифференциальных уравнений (1) с разрывной по переменным (t, x) функцией f , решения которых понимаются в смысле А.Ф. Филиппова [10]. Относительно переменной t в общем случае для измеримой по переменным (t, x) функции $f(t, x)$ какой-либо зависимости отображения $F(t, x)$ не установлено. Можно утверждать лишь то, что многозначная функция $t \rightarrow F(t, x)$ имеет измеримый селектор.

3. Свойства предельных многозначных отображений. Приведем некоторые определения и обозначения. Пусть R^n – n – мерное векторное пространство. Через $A^\varepsilon = \{x : d(x, A) < \varepsilon\}$ обозначается ε – окрестность множества A и через \bar{A} – замыкание множества A . Через $\text{conv}R^n$ обозначается совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств из R^n . Если X – метрическое пространство с метрикой $\rho(\cdot, \cdot)$, то отображение $G : X \rightarrow \text{conv}R^n$ будем называть *полу непрерывным сверху* в точке x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $\rho(x, x_0) < \delta$, выполняется $G(x) \subset (G(x_0))^\varepsilon$. Полу непрерывность сверху на множестве означает наличие у отображения этого свойства в каждой точке этого множества.

Пусть $J = [a, b]$ – отрезок числовой прямой R^1 с мерой Лебега μ . Отображение $H : J \rightarrow \text{conv}R^n$ измеримо, если для него выполняется свойство Лузина (см. [11, с. 62-65]). Измеримое многозначное отображение имеет измеримый селектор: существует измеримая функция $h : J \rightarrow R^n$, такая, что $h(t) \in H(t)$ для всех $t \in J$. Многозначное отображение называется измеримым, если его сужение на любой отрезок J измеримо.

При построении предельных многозначных отображений мы придерживаемся схемы, изложенной во введении и основанной на теореме Дэви. Поэтому вначале рассмотрим ограниченное многозначное

отображение $H(t) = F(t, x)$, определенное для всех $t \in R^1$ при произвольном фиксированном x . Обозначим

$$H^*(t) = \bigcap_{b \geq 0} \overline{co} \cup_{a \geq b} H(t+a), H'(t) = \bigcap_{n \geq 1} \overline{co} \cup_{k \geq n} H(t+t_k),$$

где $t_n \rightarrow +\infty$ – произвольная последовательность (одна и та же для любых (t, x))

Следующая лемма показывает, какими свойствами, вытекающими лишь из определения, обладает отображение $H'(t)$

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1. Для любого фиксированного t множества $H^*(t)$ и $H'(t)$ непустые, выпуклые и компактные.

2. Множество $H^*(t)$ не зависит от t : $H^*(t) = H^*(t')$ для всех $t, t' \in R^1$. (В дальнейшем будем пролагать, что $H^*(t) = H^*(0)$ для всех t и обозначать $H^*(0)$ символом H^* .)

3. Для любой последовательности $t_n \rightarrow +\infty$ выполняется $H'(t) \subset H^*$ для любого t .

4. Если отображение $H = h(t)$ однозначен, то отображение $h'(t)$ в общем случае многозначно и множество h^* содержит более одной точки. При этом значение h^* (соответственно, $h'(t)$) будет однозначно тогда и только тогда, когда существует предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t)$. (соответственно, тогда и только тогда, когда существует предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(t+t_n)$).

5. Множество H^* представляет собой выпуклую замкнутую оболочку всех предельных значений функций $h(t) \in H(t)$ при условии, что $t \rightarrow +\infty$.

6. При любом фиксированном t множество $H'(t)$ представляет собой выпуклую замкнутую оболочку всех предельных точек последовательностей векторов $z_k \in H(t+t_k)$, где $\{t_k\}$ – последовательность, которая определяет отображение $H'(t)$.

Лемма 2. *Если $H(t)$ измеримо, то $H'(t)$ измеримо и если $H(t)$ имеет измеримый селектор, то $H'(t)$ имеет измеримый селектор.*

4. Предельное дифференциальное включение. Свойства отображения $F'(t, x)$ относительно переменной t установлены в леммах 1 и 2, в которых для фиксированного x следует положить $H(t) = F(t, x)$.

Установим свойства предельных многозначных отображений относительно переменной x . Вначале сформулируем условия, которые используются в дальнейшем для изучения включения (2).

A1. Для каждой (t, x) . множество $F(t, x)$ непусто и компактно.

A2. При почти каждом фиксированном t многозначное отображение $x \rightarrow F(t, x)$ полунепрерывно сверху.

A3. Для любого x существует измеримый селектор многозначного отображения $t \rightarrow F(t, x)$.

A4. Для любого ограниченного множества $Q \subset R^n$ существует константа M такая, что для любых $(t, x) \in R^1 \times Q$ и $f \in F(t, x)$ выполняется неравенство $PfP \leq M$.

A5. Для любого x и $\varepsilon > 0$ существуют числа $\delta > 0$ и γ , такие, что $F(t, x') \subset (F(t, x))^\varepsilon$ для всех $t > \gamma$ и $Px' - xP < \delta$.

Замечание 1. При выполнении условий A1–A4 и дополнительном условии выпуклости значений многозначного отображения $F(t, x)$ задача (2) для любых начальных данных (t_0, x_0) имеет локальное решение (см., например, [11]). При этом любое решение может быть продолжено на правый максимальный промежуток существования $[t_0, \omega)$ и любое ограниченное непродолжимое решение определено на промежутке $[t_0, +\infty)$. Отметим также, что условие A5 требуется для изучения только свойств предельного многозначного отображения $F'(t, x)$ относительно переменной x . Оно означает, что $\lim_{t \rightarrow +\infty, x' \rightarrow x} \rho(F(t, x'), F(t, x)) = 0$ и всегда выполняется, если $F(t, x)$ полунепрерывно сверху в каждой точке x равномерно относительно переменной t , т.е. A5 можно рассматривать, как некоторое усиление условия A2.

Будем говорить, что множество $D \subset R^n$ квазиинвариантно, если для любого $y \in D$ существует решение $x(t)$ включения (4) с некоторым предельным многозначным отображением $F'(t, x)$ в правой части, такое, что $x(0) = y$ и $x(t) \in D$ для всех $t \geq 0$.

Множество всех ω -предельных точек решения $x(t)$ включения (2) обозначим $\Lambda^+(x)$.

Теорема 1. Пусть правая часть дифференциального включения (2) удовлетворяет условиям A1–A5. Тогда:

1. Правая часть предельного дифференциального включения (4) удовлетворяет условиям A1–A4.

2. Предельное дифференциальное включение (4) для любых начальных

данных (t_0, x_0) имеет локальное решение и любое его ограниченное непродолжимое вправо решение определено на правом максимальном промежутке существования $[t_0, +\infty)$.

3. Для любого ограниченного решения $x(t)$ включения (2), для любой последовательности $t_k \rightarrow +\infty$, $t_k \geq t_0$, $k = 1, 2, \dots$ и для любого числа $T > 0$ из последовательности функций $y^k(t) = x(t + t_k)$, $t \in I = [0, T]$, можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность.

4. Предел $y(t)$ любой равномерно сходящейся на отрезке I последовательности функций $y^k(t)$ является решением включения (4) с предельным относительно последовательности $\{t_k\}$ многозначным отображением $F'(t, x)$ в правой части и выполняется начальное условие $y(0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x(t_k)$.

5. Для любого ограниченного решения $x(t)$ включения (2) множество $\Lambda^+(x)$ непусто, компактно, связно, квазиинвариантно и выполняется условие $d(x(t), \Lambda^+(x)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, где d означает расстояние от точки до множества в пространстве R^n .

Замечание 2. Для однозначных отображений $F(t, x)$ условия А2 и А3 совпадают с условиями Каратеодори и в рамках предположений теоремы 1 предельные (в общем случае многозначные) отображения $F'(t, x)$ удовлетворяют условиям Каратеодори.

5. Обобщение принципа инвариантности. Пусть $V : R^1 \times R^n \rightarrow R^1$ – непрерывно дифференцируемая функция. Производную $\dot{V}^+(t, x)$ функции $V(t, x)$ в силу дифференциального включения (2) определим следующим равенством:

$$\dot{V}^+(t, x) = \sup_{y \in F(t, x)} (\langle \nabla_x V, y \rangle + V_t),$$

где $\nabla_x V$ – градиент функции V по переменной x , V_t – частная производная по t , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – знак скалярного произведения.

Через $w : R^1 \times R^n \rightarrow R^+$ будем обозначать измеримую по t , непрерывную по x и ограниченную на каждом множестве $R^1 \times K$ функцию, где $K \subset R^n$ – компактное множество. В дальнейшем предполагаем, что для функции $w(t, x)$ выполняется условие А5.

Теорема 2. Пусть для многозначного отображения $F(t, x)$ выполняются условия А1–А5, $x(t)$ – ограниченное решение включения (2) с ω -предельным множеством $\Lambda^+(x)$, Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая функция $V(t, x)$, ограниченная

снизу на каждом множестве вида $R^1 \times Q$, где $Q \subset R^n$ – компактное множество, такая, что для каждого x и для почти всех t выполняется неравенство

$$\dot{V}^+(t, x) \leq -w(t, x).$$

Тогда для каждой точки $y \in \Lambda^+(x)$ существуют предельные отображения w', F' (соответствующие одной и той же последовательности $t_n \rightarrow +\infty$) и решение $y(t)$ включения (1) с начальным условием $y(0) = y$ такое, что $y(t) \in \Lambda^+(x)$ для всех $t \geq 0$ и $w'(t, y(t)) = 0$ для почти всех $t \geq 0$.

Обозначим

$$\alpha(x) = \liminf_{t \rightarrow +\infty} w(t, x).$$

Теорема 3. Пусть выполняются все условия теоремы 2. Тогда для любого ограниченного решения $x(t)$ включения (2) множество $\Lambda^+(x)$ принадлежит наибольшему квазиинвариантному подмножеству множества

$$E_w = \{x \in R^n : \alpha(x) = 0\}.$$

6. Дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями. Общий случай. К дифференциальным включениям с условиями А1–А4 приводят дифференциальные уравнения с разрывными (измеримыми) правыми частями при общем определении решений в смысле А.Ф. Филиппова. В этом разделе для измеримой по переменным (t, x) функции $f(t, x)$ через $F(t, x)$ обозначается выпуклая замкнутая оболочка множества всех предельных значений функции $f(t, x')$, когда $x' \rightarrow x$, пробегая почти всю окрестность точки x . Тогда многозначное отображение $x \rightarrow F(t, x)$ полунепрерывно сверху, а для отображения $t \rightarrow F(t, x)$ при каждом фиксированном x известно лишь то, что оно имеет измеримый селектор.

Следуя [10, с. 66], запишем наиболее общую схему доопределения измеримой по совокупности аргументов (t, x) функции $f(t, x)$, определенной в некоторой области $G \subset R^{1+n}$. Предположим, что для каждой ограниченной замкнутой области $D \subset G$ существует почти всюду конечная функция $m(t)$ такая, что почти всюду в D выполняется $Pf(t, x)P \leq m(t)$ и определим множество

$$F(t, x) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\text{co}} f(t, x^\delta \setminus N_0(t)) \quad (12)$$

где для почти всех t функция $x \rightarrow f(t, x)$ аппроксимативно непрерывна на множестве $N_0(t) \subset G_t$ нулевой меры, G_t – сечение множества G плоскостью $t = \text{const}$.

Под *решением* уравнения (1) с измеримой по (t, x) функцией $f(t, x)$ в правой части понимается решение дифференциального включения (2) с многозначной функцией $F(t, x)$, определенной равенством (12) и называется обобщенным решением уравнения (1) или решением в смысле Филиппова.

Мы предполагаем, что область G представляет собой все пространство R^{1+n} . Через $Z(t, x)$ обозначим множество всех предельных значений функции $f(t, x')$ при условии, что $x' \rightarrow x$, $x' \notin N_0(t)$.

Теорема 4. Пусть $f(t, x)$ определена почти всюду и измерима на пространстве R^{1+n} и для каждого ограниченного множества $Q \subset R^n$ ограничена на множестве точек $(t, x) \in R^1 \times Q$. Тогда для многозначного отображения $F(t, x)$, определенного равенством (12) выполняются условия A1–A4. Если дополнительно для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\gamma > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$f(t, x') \in Z^\varepsilon(t, x) \quad (13)$$

для всех $t > \gamma$ и $x' \in x^\delta \setminus N_0(t)$, то для предельного многозначного отображения F' выполняются условия A1–A4 и для любого ограниченного решения $x(t)$ уравнения (1) множество $\Lambda^+(x)$ квазиинвариантно.

Пусть $V : R^1 \times R^n \rightarrow R^1$ – непрерывно дифференцируемая и ограниченная снизу на каждом множестве вида $R^1 \times K$ функция, где $K \subset R^n$ – компактное множество.

Теорема 5. Пусть $f(t, x)$ – определенная почти всюду и измеримая на пространстве R^{1+n} функция, для которой выполняется условие (13) и для почти всех t и $x \notin N_0(t)$ справедливо неравенство

$$\dot{V} \stackrel{\Delta}{=} V_t + \langle \nabla_x V, f(t, x) \rangle \leq -w(t, x).$$

Тогда для любого ограниченного решения уравнения (1) с ω -предельным множеством $\Lambda^+(x)$ и для каждой точки $y \in \Lambda^+(x)$ существуют предельные отображения w', F' (соответствующие одной и той же последовательности $t_n \rightarrow +\infty$) и решение $y(t)$ включения (4) с начальным условием $y(0) = y$ такое, что $y(t) \in \Lambda^+(x)$ для всех $t \geq 0$ и $w'(t, y(t)) = 0$ для почти всех $t \geq 0$.

Теорема 6. Пусть выполняются все условия теоремы 5. Тогда для любого ограниченного решения $x(t)$ уравнения (1) множество $\Lambda(x)$ принадлежит наибольшему квазиинвариантному подмножеству множества

$$E_w = \{x \in R^n : \alpha(x) = 0\},$$

где $\alpha(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{t \in (b, +\infty)} w(t, x)$ для любой точки x .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. – 300 с.
2. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. – 240 с.
3. Мартынюк А.А., Като Д., Шестаков А.А. Устойчивость движения: метод предельных уравнений. Киев: Наукова думка, 1990. – 256 с.
4. Artstein Z. Topological dynamics of an ordinary differential equation // J. Differ. Equations. – 1977. – Vol. 23. – P. 216–223.
5. Artstein Z. Topological dynamics of an ordinary differential equations // J. Differ. Equations. – 1977. Vol. 23. – P. 224–243.
6. Artstein Z. The limiting equations of nonautonomous ordinary differential equations // J. Differ. Equations. – 1977. Vol. 25. – P. 184–202.
7. Artstein Z. Uniform asymptotic stability via limiting equations // J. Differ. Equations. – 1978. Vol. 27. – P.172–189.
8. Sell G.R. Nonautonomous differential equations and topological dynamics. 1, 2 // Trans. Amer. Vath. Soc. – 1967. Vol. 22. – P. 241–283.
9. Davy J.L. Properties of solution set of a generalized differential equation // Bull. Austral. Math. Soc. – 1972. Vol. 6. – P. 379–398.
10. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука. 1985, – 224 с.
11. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005. – 215 с.
12. Финогенко И.А. Принцип инвариантности для неавтономных функционально-дифференциальных включений // Труды ИММ УрО РАН. – 2014. – Т. 20. – №1. – С. 271–284.
13. Финогенко И.А. Предельные дифференциальные включения и принцип инвариантности для неавтономных систем // Сиб. мат. журнал. – 2014. – Т. 20. № 1. – С. 271–284.
14. Финогенко И.А. Предельные функционально-дифференциальные включения и принцип инвариантности для неавтономных систем с запаздыванием // Доклады АН. – 2014. – Т. 455. № 6. – С. 637–639.

15. Финогенко И.А. Метод предельных дифференциальных уравнений для неавтономных разрывных систем // Доклады АН. – 2016. – Т.466. №1. – С. 16–19.

16. Финогенко И.А. Принцип инвариантности для неавтономных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями // Сиб. Мат. Журнал. – 2016. – Т.57. – №4 – С. 913–927.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
НЕАВТОНОМНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ
В СЛУЧАЯХ КРАТНЫХ РЕЗОНАНСОВ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА**

О.В. Холостова (МАИ (НИУ), Россия,
125993, Москва, Волоколамское ш., 4)

E-mail: kholostova_o@mail.ru

**FORMAL STABILITY INVESTIGATION
IN NON-AUTONOMOUS HAMILTONIAN SYSTEMS
IN THE CASES OF MULTIPLE FOURTH-ORDER RESONANCES**

O. V. Kholostova (MAI (NRU), Russia,
125993, Moscow, Volokolamskoe shosse, 4)

Keywords: Hamiltonian system, multiple resonances, strong and weak resonances, formal stability

Постановка задачи. Модельные гамильтонианы. Рассмотрим движения неавтономной, 2π -периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Будем предполагать, что начало координат фазового пространства – положение равновесия, устойчивое в линейном приближении; характеристические показатели $\pm i\lambda_j$ соответствующей ли-неаризованной системы уравнений возмущенного движения чисто мнимые.

Пусть величины $\lambda_j, 2\lambda_j, \lambda_1 \pm \lambda_2$ не являются целыми числами, т.е. в системе отсутствуют резонансы первого и второго порядков. Тогда квадратичная часть гамильтониана может быть приведена к нормальной форме и функция H представлена в виде

$$H(q_j, p_j, t) = \frac{1}{2}\lambda_1(q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}\lambda_2(q_2^2 + p_2^2) + H_3 + H_4 + O_5. \quad (1)$$

Здесь q_j и p_j ($j=1, 2$) — обобщенные координаты и импульсы, $H_k(q_j, p_j, t)$ ($k=3,4$) — совокупность слагаемых k -й степени, а O_5 — совокупность слагаемых не менее пятой степени по q_j, p_j, t с 2π -периодическими по t коэффициентами.

Пусть, кроме того, в системе отсутствуют резонансы третьего порядка, но при этом одновременно реализуются два или три резонанса четвертого порядка, для которых выполняются соотношения (m_1, m_2, ℓ — целые числа)

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 = \ell, \quad |m_1| + |m_2| = 4. \quad (2)$$

Назовем резонанс основным, если в резонансном соотношении (2) присутствует только одна из величин λ_j , и комбинационным, если в (2) имеются обе величины λ_1 и λ_2 [1]. Назовем резонанс сильным, если он может привести к неустойчивости в системе, и слабым, если он не приводит к неустойчивости [2]. Основные резонансы всегда являются сильными; комбинационный резонанс будет сильным, если в соответствующей ему гармонике присутствует знак плюс, и слабым при наличии знака минус.

Анализ показывает, что возможны пять вариантов кратных (двух или трех) резонансов четвертого порядка: 1) основной (сильный) и комбинационный (сильный) резонансы; 2) основной (сильный) и комбинационный (слабый) резонансы; 3) два комбинационных резонанса, сильный и слабый; 4) три комбинационных резонанса, два сильных и один слабый; 5) три комбинационных резонанса, один сильный и два слабых.

При помощи последовательности канонических преобразований для каждого из этих случаев можно осуществить нормализацию слагаемых третьей и четвертой степеней в гамильтониане (1) с учетом имеющихся резонансов, после чего уничтожить квадратичную часть гамильтонианов и записать резонансные гармоники (в слагаемых четвертой степени) в виде, не содержащем времени.

В «полярных» координатах φ_j, r_j , задаваемых формулами $\tilde{q}_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j$, $\tilde{p}_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j$, получим пять типов преобразованных гамильтонианов:

$$\begin{aligned}
 H^{(1,2)} &= c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + ar_1^2 \cos 4\varphi_1 + br_1^{1/2}r_2^{3/2} \times \\
 &\times \cos(\varphi_1 \pm 3\varphi_2) + O_{5/2}; \\
 H^{(3)} &= c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + cr_1^{3/2}r_2^{1/2} \cos(3\varphi_1 + \varphi_2) + \\
 &+ br_1^{1/2}r_2^{3/2} \cos(\varphi_1 - 3\varphi_2) + O_{5/2}; \\
 H^{(4,5)} &= c_{20}r_1^2 + [c_{11} + d \cos(2\varphi_1 \mp 2\varphi_2 + \kappa)]r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + \\
 &+ cr_1^{3/2}r_2^{1/2} \cos(3\varphi_1 \pm \varphi_2) + br_1^{1/2}r_2^{3/2} \cos(\varphi_1 \pm 3\varphi_2) + O_{5/2}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

где c_{ij} , a , b , c , d , κ — постоянные величины. Сдвигом угловых переменных φ_1 , φ_2 и величины κ всегда можно добиться положительности резонансных коэффициентов a , b , c , d . Слагаемые $O_{5/2}$ — совокупности членов пятой и более высоких степеней относительно $r_j^{1/2}$ ($j=1,2$), периодические по времени (с разными периодами) и 2π -периодические по φ_1 , φ_2 . Полученные гамильтонианы характерны для рассматриваемых здесь случаев кратных резонансов четвертого порядка. Приближенные гамильтонианы

$H_0^{(j)}$ ($j = 1, \dots, 5$), получаемые из (3) путем отбрасывания последних слагаемых, будем называть модельными.

Будем далее считать, что значения параметров c_{ij} , a , b , c , d в модельных гамильтонианах находятся в зоне устойчивости каждого из имеющихся в соответствующей модельной системе сильных резонансов (в предположении, что другие резонансы отсутствуют) [3]:

$$|c_{20}| > |a| \quad (H_0^{(1)}, H_0^{(2)}), \quad |c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}| > 3\sqrt{3}|b| \quad (H_0^{(1)}, H_0^{(4)}), \quad (4)$$

$$|9c_{20} + 3c_{11} + c_{02}| > 3\sqrt{3}|c| \quad (H_0^{(3)}, H_0^{(4)}), \quad |c_{20} + c_{11} + c_{02}| > |d| \quad (H_0^{(5)}).$$

Цель данной работы – получить критерии формальной устойчивости положений равновесия $r_1 = r_2 = 0$ систем с гамильтонианами (3).

Критерии формальной устойчивости. При отсутствии резонансов достаточным условием формальной устойчивости рассматриваемой здесь неавтономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы является знакоопределенность квадратичной формы

$$c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 \quad (5)$$

для всех $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$ [4]. При этом, очевидно, коэффициенты c_{20} и c_{02} должны быть одного знака, далее будем считать их положительными. Тогда условие знакоопределенности сводится к двум случаям:

$$1) c_{11} > 0 \quad \text{или} \quad 2) c_{11} < 0, \quad \Delta = c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} < 0. \quad (6)$$

Пусть эти условия выполнены и для коэффициентов гамильтонианов (3); найдем, при каких условиях эти гамильтонианы будут знакоопределенными функциями для всех $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$.

На первом этапе получим условия знакоопределенности модельных гамильтонианов. Если $r_2 = 0$ (и $r_1 > 0$), то при сделанных предположениях модельные гамильтонианы положительны. При $r_2 \neq 0$ введем обозначение $x = (r_1 / r_2)^{1/2}$ и представим модельные гамильтонианы в виде $r_2^2 f_j(x)$, где $f_j(x)$ – многочлены четвертой степени относительно x , причем индекс j может принимать значения 1, 2, 3, относящиеся соответственно к случаям 1)-2), 3), 4)-5), а

$$f_1 = (c_{20} + a\alpha)x^4 + c_{11}x^2 + b\beta x + c_{02} \quad (\alpha = \cos 4\varphi_1, \beta = \cos(\varphi_1 \pm 3\varphi_2)), \quad (7)$$

$$f_2 = c_{20}x^4 + c\gamma x^3 + c_{11}x^2 + b\beta x + c_{02} \quad (\gamma = \cos(3\varphi_1 + \varphi_2), \beta = \cos(\varphi_1 - 3\varphi_2))$$

$$f_3 = c_{20}x^4 + c\gamma x^3 + (c_{11} + d\delta)x^2 + b\beta x + c_{02} \quad (\gamma = \cos(3\varphi_1 \pm \varphi_2), \beta = \cos(\varphi_1 \pm 3\varphi_2),$$

$$\delta = \cos(2\varphi_1 \mp 2\varphi_2 + \kappa))$$

Величины $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ в этих соотношениях будем рассматривать как параметры, принимающие произвольные значения из диапазона $[-1, 1]$. Найдем, при каких дополнительных ограничениях на коэффициенты c_{ij}, a, b, c, d (кроме условий (4) и (6)) функции (7) принимают положительные значения при всех $x > 0$ и всех значений $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ из указанного диапазона. Эти условия, очевидно, и будут представлять условия формальной устойчивости модельных гамильтонианов.

Анализ функции $f_1(x)$. Элементарный анализ коэффициентов функции $f_1(x)$ показывает, что при произвольных α и δ эти функции либо не имеют корней на положительной полуоси $x \geq 0$, либо могут иметь два корня. Переход от первой возможности ко второй осуществляется для тех значений параметров α и δ , для которых многочлены $f_1(x)$ и $f_1'(x)$ имеют общие корни на положительной полуоси $x \geq 0$. Это означает, что результат $R_1(\alpha, \beta)$ двух многочленов, имеющий вид

$$R_1(\alpha, \beta) = (c_{20} + \alpha a)^2 F_1, \\ F_1 = 27(c_{20} + \alpha a)(\beta b)^4 - 4c_{11} \left[36c_{02}(c_{20} + \alpha a) - c_{11}^2 \right] (\beta b)^2 - \quad (8) \\ - 16c_{02} \left[4c_{02}(c_{20} + \alpha a) - c_{11}^2 \right]^2,$$

должен обратиться в нуль. Из уравнения $F_1 = 0$ находим связь между параметрами α и δ :

$$\beta^2(\alpha) = \frac{2\{c_{11}[36c_{02}(c_{20} + \alpha a) - c_{11}^2] + [12c_{02}(c_{20} + \alpha a) + c_{11}^2]^{3/2}\}}{27b^2(c_{20} + \alpha a)}. \quad (9)$$

График зависимости $\beta = \beta(\alpha)$ состоит из двух симметричных относительно оси абсцисс ветвей, причем на верхней ветви функция монотонно возрастает и на нижней монотонно убывает при условии $|\alpha| \leq 1$. Общие положительные корни двух многочленов в случае $c_{11} > 0$ появляются для точек нижней ветви, а в случае $c_{11} < 0$ могут соответствовать точкам обеих ветвей.

Если выполняется условие $\beta^2(-1) > 1$, то квадрат $|\alpha| \leq 1, |\beta| \leq 1$ допустимых значений параметров α и δ будет целиком лежать между указанными ветвями и для всех его точек результат (8) сохраняет постоянный знак (и в нуль не обращается). Тогда, как и в случае $\alpha = \delta = 0$, модельные гамильтонианы $H_0^{(1)}$ и $H_0^{(2)}$ являются положительно определенными функциями для всех $r_1 \geq 0, r_2 \geq 0$.

Указанное условие сводится к неравенству

$$b^2 < \frac{2\{c_{11}[36c_{02}(c_{20} - a) - c_{11}^2] + [12c_{02}(c_{20} - a) + c_{11}^2]^{3/2}\}}{27(c_{20} - a)}, \quad (10)$$

которое определяет, при заданных значениях величин c_{20} , c_{11} , c_{02} , иско- мую область в плоскости параметров a , b .

В случае 1) из (6) эта область существует во всем рассматриваемом диапазоне $0 < a < c_{20}$ изменения параметра a и представляет собой прямо- угольную трапецию с криволинейной верхней границей, с концами в точ- ках $(0, b_*)$ и $(c_{20}, 2\sqrt{c_{11}c_{02}})$. Величина b_* определяется из соотношения

$$b_*^2 = \frac{2\left[c_{11}(36c_{02}c_{20} - c_{11}^2) + (12c_{02}c_{20} + c_{11}^2)^{3/2}\right]}{27c_{20}}, \quad 11$$

причем справедлива оценка

$$2\sqrt{c_{11}c_{02}} < b_* \leq \frac{|c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}|}{3\sqrt{3}}, \quad (12)$$

в которой знак равенства реализуется при выполнении условия $c_{11} = 3c_{02} - c_{20}$.

В случае 2) из (6) область имеет вид треугольника с криволинейной верхней границей и с вершинами в точках $(0, 0)$, $(0, b_*)$ и $(a_*, 0)$, где $a_* = |\Delta|/(4c_{02}) < c_{20}$; в этом случае диапазон изменения параметра a умень- шается.

Отметим, что для модельной системы с гамильтонианом $H_0^{(1)}$ в обоих случаях найденная область целиком содержится в области, где оба резо- нанса устойчивы (см. соотношения (4), (12)).

Анализ функции $f_2(x)$. Аналогично предыдущему анализу, найдем ре- зультант многочленов $f_2(x)$ и $f_2'(x)$ относительно x и построим соответ- ствующее геометрическое место точек в плоскости параметров \mathcal{O} и \mathcal{U}_ρ . За- тем определим условие, при котором в построенную область может быть вписан квадрат $|\beta| \leq 1$, $|\gamma| \leq 1$. Это условие задается неравенством

$$\begin{aligned} & 27c_{02}^2c^4 + 2(2b^2 - 9c_{11}c_{02})bc^3 + [(6c_{20}c_{02} - c_{11}^2)b^2 + 4c_{02}c_{11}(36c_{20}c_{02} - c_{11}^2)]c^2 - \\ & - 2c_{20}[9c_{11}b^2 - 8c_{02}(12c_{20}c_{02} + 5c_{11}^2)]bc + \\ & + c_{20}[27c_{20}b^4 - 4c_{11}(36c_{20}c_{02} - c_{11}^2)b^2 - 16c_{02}\Delta^2] < 0, \end{aligned} \quad (13)$$

описывающим при заданных c_{20}, c_{11}, c_{02} область значений параметров b, c , в которой гамильтониан $H_0^{(3)}$ является положительно определенным. Данная область представляет собой треугольник с криволинейной верхней границей и вершинами в точках $(0, 0)$, $(b_*, 0)$ и $(0, c_*)$, где $c_* = b_* \sqrt{c_{20} / c_{02}}$. Аналогично (12), справедлива оценка

$$c_* \leq \frac{|9c_{20} + 3c_{11} + c_{02}|}{3\sqrt{3}}, \quad (14)$$

причем знак равенства выполняется при условии $c_{11} = 3c_{20} - c_{02}$.

Анализ функции $f_3(x)$. Рассмотрим свойства функции $f_3(x)$ для точек пространства параметров δ, γ, β , принадлежащих кубу $|\beta| \leq 1, |\gamma| \leq 1, |\delta| \leq 1$. При фиксированной значении $\delta = \delta_0$ функция $f_3(x)$ совпадет с функцией $f_2(x)$, если в последней сделать замену c_{11} на $c_{11} + d\delta_0$. Как в предыдущем пункте, в плоскости параметров δ, γ строим кривые, на которых результат многочленов $f_3(x)$ и $f_3'(x)$ (при $\delta = \delta_0$) обращается в нуль. При различных δ_0 получаем систему вложенных друг в друга фигур, причем фигуры, соответствующие меньшим значениям δ_0 , заключены внутри фигур, соответствующих большим значениям δ_0 . Выбираем фигуру, отвечающую $\delta_0 = -1$, и находим условие, при котором в нее может быть вписан квадрат $|\beta| \leq 1, |\gamma| \leq 1$. Тогда в часть трехмерного пространства параметров δ, γ, β , ограниченную поверхностями $R_3 = (\beta, \gamma, \delta)$ ($R_3 = (\beta, \gamma, \delta)$ – результат многочленов $f_3(x)$ и $f_3'(x)$), можно вписать упомянутый куб.

Отсюда следует, что условие знакоопределенности модельных гамильтонианов $H_0^{(4)}$ и $H_0^{(5)}$ получается из условия (13), в котором сделана замена c_{11} на $c_{11} - d$:

$$\begin{aligned} & 27c_{02}^2c^4 + 2[2b^2 - 9(c_{11} - d)c_{02}]bc^3 + \\ & + [(6c_{20}c_{02} - (c_{11} - d)^2)b^2 + 4c_{02}(c_{11} - d)(36c_{20}c_{02} - (c_{11} - d)^2)]c^2 - \\ & - 2c_{20}[9(c_{11} - d)b^2 - 8c_{02}(12c_{20}c_{02} + 5(c_{11} - d)^2)]bc + \\ & + c_{20}[27c_{20}b^4 - 4(c_{11} - d)(36c_{20}c_{02} - (c_{11} - d)^2)b^2 - 16c_{02}((c_{11} - d)^2 - 4c_{20}c_{02})^2] < 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Неравенство (15) при заданных c_{20}, c_{11}, c_{02} задает область в пространстве величин b, c, d , в которой гамильтонианы $H_0^{(4)}$ и $H_0^{(5)}$ определены положительно. Максимальные значения величин b, c, d на ограничивающей эту область поверхности достигаются при пересечении этой поверхности с осями координат и равны соответственно b_*, c_*, d_* , где b_* и c_*

определены выше, а $d_* = c_{11} + 2\sqrt{c_{20}c_{02}}$. Для величин b_* и c_* справедливы оценки (12) и (14), а для d_* имеем неравенство $d_* \leq c_{20} + c_{11} + c_{02}$, в котором знак равенства реализуется при условии $c_{20} = c_{02}$.

Таким образом, как и в предыдущих случаях, найденная область знакоопределенности модельных гамильтонианов $H_0^{(4)}$ и $H_0^{(5)}$ содержится внутри области устойчивости каждого из имеющихся в системе сильных резонансов.

Вернемся к рассмотрению полных систем с гамильтонианами (3). Наличие кратных резонансов четвертого порядка означает, что в этих системах есть резонансы, вообще говоря, всех четных порядков выше четвертого. Можно продолжить нормализацию полных гамильтонианов в слагаемых всех степеней, начиная с пятой, с учетом этих резонансов. Несложно показать, что замена переменных, уничтожающая время в резонансных слагаемых четвертого порядка, уничтожает его также и во всех остальных резонансных гармониках.

Нормализованные таким образом гамильтонианы, являясь формальными интегралами соответствующих им автономных систем, при достаточно малых неотрицательных значениях r_1, r_2 остаются положительно определенными функциями этих величин, если коэффициенты нормальной формы в членах четвертой степени гамильтониана возмущенного движения удовлетворяют соответствующему условию (10), (13) или (15). Эти неравенства и составляют условия формальной устойчивости положения равновесия $r_1 = r_2 = 0$ полной системы в соответствующем резонансном случае.

Приложения. 1. Ранее [5] случаи кратного резонанса четвертого порядка были исследованы в задаче об устойчивости относительного равновесия на вертикали двойного маятника, точка подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания произвольной частоты и амплитуды. В плоскости параметров задачи точки кратного резонанса лежат в областях, где при отсутствии резонансов данное равновесие формально устойчиво. Установлено, что в этих точках выполнены представленные в докладе критерии, поэтому относительное равновесие маятника для соответствующих им значений параметров также формально устойчиво.

2. Рассмотрим движение динамически симметричного спутника — твердого тела относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на эллиптической орбите произвольного эксцентриситета. Ранее [6] в предположении, что геометрия масс спутника отвечает тонкой пластинке, проведен подробный нелинейный анализ устойчивости

стационарного вращения спутника вокруг оси динамической симметрии, расположенной перпендикулярно плоскости орбиты (цилиндрической прецессии). В докладе исследуется устойчивость данного частного движения для не рассмотренных в [6] случаев кратных резонансов четвертого порядка. Изучаются случаи, когда точки кратного резонанса лежат в областях, где при отсутствии резонансов имеет место формальная устойчивость. Проверено 19 точек кратных резонансов четвертого порядка; установлено, что для каждой из них выполняется соответствующий критерий формальной устойчивости, полученный в докладе.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00068) в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
2. Куницын А.Л., Маркеев А.П. Устойчивость в резонансных случаях. Итоги науки и техники. ВИНТИ. Сер. Общая механика. Т.4. С. 58-139.
3. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
4. Glimm J. Formal stability of Hamiltonian systems // Comm. Pure Appl. Math. 1964. V. 17. № 4. P. 509--526.
5. Холостова О.В. Задачи динамики твердых тел с вибрирующим подвесом. М. – Ижевск: Ин-т компьют. исследований, 2016. 308 с.
6. Холостова О.В. Об устойчивости цилиндрической прецессии спутника в одном частном случае // Космич. исслед. 2008. Т. 46. № 3. С.270-278.

УСТОЙЧИВОСТЬ СТУПЕНЧАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ПРОДОЛЬНЫХ УДАРАХ

Ф.Г. Шигабутдинов (КГАСУ, Россия,
420043, РТ, Казань, ул. Зеленая, 1)

E-mail: shigfg@mail.ru

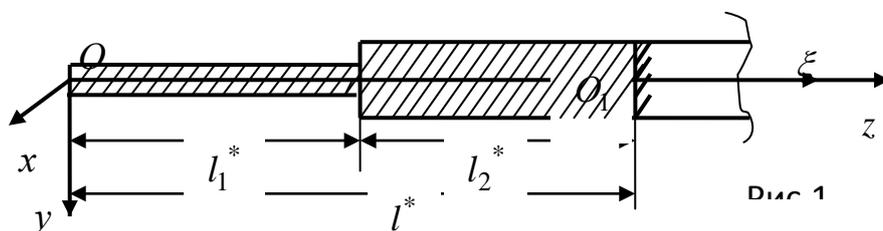
STEPPED STRUCTURAL COMPONENTS STABILITY AT LONGITUDINAL IMPACTS

F.G. Shigabutdinov (KSUAE, Republic of Tatarstan,
420043, Kazan, Zelenaya str.,1)

Keywords: axial impact, rod, impact elastic buckling.

Введение. В работе приводится методика исследования устойчивости упругих полубесконечных стержней при продольном ударе с учетом неоднородности напряженного состояния по длине стержня, вызванной как изменениями в размерах поперечного сечения, так и продольной нагрузкой, изменяющейся с течением времени. В отличие от задач статики, в которых искомой, как правило, является критическая нагрузка, в динамических задачах задается сила удара, а искомой может являться критическая длина потери устойчивости. Под критической длиной будем понимать наименьшую из сжатых продольной волной длин, на которой возникают поперечные движения.

Постановка задачи. Рассмотрим модельную задачу о потере устойчивости тонкого прямого стержня со ступенчатым изменением размеров поперечных сечений с двумя осями симметрии, модулем упругости E , плотностью материала ρ , под действием продольно приложенной к торцу силы P , которая мгновенно достигнув своего максимального значения, остается затем постоянной вплоть до потери устойчивости.



Продольную ось Oz направим вдоль оси стержня в направлении удара, начало координат примем в центре тяжести поперечного сечения, воспринимающего удар. Стержень располагается в области $z \geq 0$. Пусть u и w –

перемещения точек оси стержня в продольном и поперечном (прогиб) направлениях. В этих обозначениях уравнения продольно – поперечных движений стержня со ступенчатым изменением поперечного сечения принимают вид [1],[2],[3]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + a_0^2 \frac{1}{F} \frac{dF}{dz} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(EJ_x \frac{d^2 w}{dz^2} \right) - \frac{d}{dz} \left(N \frac{dw}{dz} \right) + \rho F \frac{d^2 w}{dt^2} = 0 \quad (2)$$

Здесь ρ , F – постоянная для всего стержня плотность материала стержня и переменная площадь поперечного сечения, соответственно, $a_0^2 = E / \rho$ - квадрат скорости продольной упругой волны.

Решение уравнения (1) для стержня постоянного сечения при начальных и граничных условиях вида: $u = 0$, $\dot{u}_t = 0$, при $t = 0$ и $\sigma(0) = \sigma_m$ при $z = 0$, $t \geq 0$ известно [1],[2]. Картина такова: вдоль стержня с момента времени $t = 0$ начинает распространяться упругая продольная волна сжатия. За фронтом волны образуется сжатая зона с увеличивающейся длиной l^* , с постоянной величиной деформаций, с продольной силой $N = -P$. Перед фронтом продольной волны – невозмущенный участок. Эти результаты примем для описания напряженного состояния за фронтом продольной волны ступенчатого стержня.

1. Для определения функций, аппроксимирующих прогибы w , рассмотрим вспомогательную задачу о статической устойчивости возмущенного участка стержня, на котором стержень сжат силой P , прикладываемой в задаче удара. Соответствующие длины обозначаются теми же буквами, но без звездочки. Предполагается, что потеря устойчивости может произойти на заштрихованной части стержня. В противном случае задача сведется к потере устойчивости стержня постоянного сечения [4].

В отличие от обычной постановки задачи статики, где длина – известная величина, будем считать продольную нагрузку заданной по закону, вытекающему из решения уравнения (1). Пусть на конце, по которому наносится удар, поставлены условия шарнирного опирания, на фронте продольной волны – условия жесткого защемления, а на границе первого и второго участков – условия сопряжения:

$$z = 0, \quad w = 0, \quad w''_{zz} = 0. \quad (3) \quad \xi = 0, \quad w = 0, \quad w'_z = 0. \quad (4)$$

$$z = l_1 \quad (\xi = -l_2), \quad w_1 = w_2, \quad w'_{1z} = w'_{2\xi}, \quad EJ_{1x} w''_{1z} = EJ_{2x} w''_{2\xi}, \quad (5)$$

$$EJ_{1x} w'''_{1z} = EJ_{1x} w'''_{1z} \pm Pw'_z, \quad \xi = z - l \quad (6)$$

Решения уравнения (2) без инерционного члена на первом и втором участках имеют вид:

$$w_k(z) = A_k \sin \alpha_k z_k + B_k \cos \alpha_k z_k + C_k + D_k, \quad (7)$$

где $k = 1, 2$, $z_1 = z$, $z_2 = \xi$, $\alpha_1^2 = P / EJ_{1x}$, $\alpha_2^2 = P / EJ_{2x}$. Удовлетворяя граничным условиям и вводя обозначения $q_1 = \alpha_1 l_1$, $q_2 = \alpha_2 l_2$, $\beta = J_{2x} / J_{1x}$, приходим к системе линейных однородных уравнений относительно неизвестных постоянных A_1, C_1, A_2, B_2 .

$$\begin{aligned} A_1 \cdot \sin q_1 + C_1 l_1 + A_2 (\sin q_2 - q_2) + B_2 (1 - \cos q_2) &= 0; \\ \alpha_1 A_1 \cos q_1 + C_1 + \alpha_2 A_2 (1 - \cos q_2) - \alpha_2 B_2 \sin q_2 &= 0; \\ -\alpha_1^2 A_1 \sin q_1 - \alpha_2^2 \beta A_2 \sin q_2 + \alpha_2^2 \beta B_2 \cos q_2 &= 0; \\ -\alpha_1^3 A_1 \cos q_1 + \alpha_2^3 A_2 \beta \cos q_2 + \alpha_2^3 B_2 \beta \sin q_2 &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $q_1 = \alpha_1 \cdot l_1$, $q_2 = \alpha_2 \cdot l_2$, $\alpha_1^2 = P / EJ_{1x}$, $\alpha_2^2 = P / EJ_{2x}$, $\beta = J_{2x} / J_{1x}$, E – модуль упругости материала.

Условия существования решения однородной системы уравнений (8) позволяет, одной стороны, решить статическую задачу устойчивости. С другой стороны, используя (8) можно все константы выразить через одну из них. Выражая все постоянные через постоянную A_2 , получим:

$$w_1(z) = A_2 (b_3 \sin \alpha_1 z + b_4 z / l_1), \quad (9)$$

$$w_2(\xi) = A_2 \left[(\sin \alpha_2 \xi - \alpha_2 \xi) - b_1 (\cos \alpha_2 \xi - 1) / b_2 \right]. \quad (10)$$

$$\text{Здесь } b_1 = \frac{\beta \alpha_2^2 \sin \alpha_2 l_2}{\alpha_1^2 \sin \alpha_1 l_1} + \frac{\sin \alpha_2 l_2 - \alpha_2 l_2 - l_1 (\alpha_2 - \alpha_2 \cos \alpha_2 l_2)}{\sin \alpha_1 l_1 - \alpha_1 l_1 \cdot \cos \alpha_1 l_1},$$

$$b_2 = \frac{\beta \alpha_2^2 \cos \alpha_2 l_2}{\alpha_1^2 \sin \alpha_1 l_1} + \frac{(1 - \cos \alpha_2 l_2) + l_1 \alpha_2 \sin \alpha_2 l_2}{\sin \alpha_1 l_1 - \alpha_1 l_1 \cdot \cos \alpha_1 l_1};$$

$$b_3 = \frac{\beta \alpha_2^2 \sin \alpha_2 l_2}{\alpha_1^2 \sin \alpha_1 l_1} - \frac{\beta \alpha_2^2 \cos \alpha_2 l_2}{\alpha_1^2 \sin \alpha_1 l_1} \cdot \frac{b_1}{b_2},$$

$$b_4 = \frac{b_1}{b_2} (1 - \cos \alpha_2 l_2) + \alpha_2 l_2 - \sin \alpha_2 l_2 - b_3 \sin \alpha_1 l_1.$$

Функции (9) и (10) с точностью до постоянной A_2 определяют прогибы в статической задаче потери устойчивости, удовлетворяющие граничным условиям (3) - (6).

2. Переходя к решению динамической задачи и допуская выпучивание на возмущенном участке длиной l^* , уравнение (2) заменим уравнением типа уравнения Бубнова-Галеркина ($z = l^* + \xi$):

$$\int_0^{l_1^*} \left(\rho F_1 \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial t^2} + EJ_{1x} \frac{\partial^4 w_1^*}{\partial z^4} + P^* \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial z^2} \right) \delta w_1^* dz + \int_{-l_2^*}^0 \left(\rho F_2 \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial t^2} + EJ_{1x} \frac{\partial^4 w_2^*}{\partial \xi^4} + P^* \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial \xi^2} \right) \delta w_2^* d\xi = 0. \quad (11)$$

Здесь звездочками помечены величины динамической задачи. В качестве прогибов примем функции, подсказанные решением соответствующей статической задачи (9), (10):

$$w_1^*(z, t) = A_2(t) \left(b_3 \sin \frac{q_1}{l_1^*} z + b_4 z / l_1^* \right), \quad (12)$$

$$w_2^*(\xi, t) = A_2(t) \left[\left(\sin \frac{q_2}{l_2^*} \xi - \frac{q_2}{l_2^*} \xi \right) - \left(\cos \frac{q_2}{l_2^*} \xi - 1 \right) \frac{b_1}{b_2} \right]. \quad (13)$$

Функции (12), (13) удовлетворяют всем приведенным ранее граничным условиям при $z = 0$, $\xi = 0$ и при $\xi = -l_2^*$. Подставляя функции прогибов (12) и (13) в уравнение (11) приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для амплитуды A_2 :

$$\begin{aligned} & (\rho F_1 \bar{\varphi}_1 + \rho F_2 \bar{\psi}_1) \ddot{A}_2 + \left\{ \left[EJ_{1x} \left(\frac{q_1}{l_1^*} \right)^4 b_3 \bar{\varphi}_2 + EJ_{2x} \left(\frac{q_1}{l_1^*} \right)^4 \bar{\varphi}_2 \right] + \right. \\ & \left. + P \left[\left(\frac{q_2}{l_2^*} \right)^2 \bar{\psi}_3 - \left(\frac{q_1}{l_1^*} \right)^2 b_3 \bar{\varphi}_2 \right] \right\} \cdot A_2 = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Где $\bar{\varphi}_1 = \varphi_1 / l_1^*$, $\bar{\varphi} = \varphi_2 / l_1^*$, $\bar{\psi}_1 = \psi_1 / l_2^*$, $\bar{\psi}_2 = \psi_2 / l_2^*$, $\bar{\psi}_3 = \psi_3 / l_2^*$. Отметим, что функции $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$, $\bar{\psi}_1$, $\bar{\psi}_2$, $\bar{\psi}_3$ не содержат длины l_1^*, l_2^*, l^* ($l^* = l_1^* + l_2^*$) динамической задачи. Функции b_1, b_2, b_3, b_4 получены при построении решений статической задачи (9), (10). Функции $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ вводятся для облегчения вычислений при интегрировании уравнения (11). Все они имеют громоздкий вид. В качестве примера приведем выражение для φ_1 .

$$\bar{\varphi}_1 = b_3^2 \bar{\varphi}_{11} + 2b_3 b_4 \frac{\bar{\varphi}_{12}}{l_1^*} = b_4^2 \frac{\varphi_{13}}{l_1^{*2}},$$

где $\varphi_{11} = \int_0^{l_1^*} \sin^2 \frac{q_1 z}{l_1^*} dz$; $\varphi_{12} = \int_0^{l_1^*} z \cdot \sin \frac{q_1 z}{l_1^*} dz$; $\varphi_{13} = \int_0^{l_1^*} z^2 dz$.

Как видно из приведенных соотношений, все они вычисляются на стадии решения статической задачи.

Решение уравнения (14) будем искать в виде:

$$A_2 = B \cdot \exp(\lambda t), \text{ где } B = \text{const}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), после элементарных преобразований получим выражение для показателя экспоненты λ функции $A_2(t)$.

$$\lambda^2 = - \frac{\left[\left[EJ_{1x} \left(\frac{q_1}{l_1^*} \right)^4 b_3 \bar{\varphi}_2 + EJ_{2x} \left(\frac{q_2}{l_2^*} \right)^4 \bar{\psi}_2 \right] + P \left[\left(\frac{q_2}{l_2^*} \right)^2 \bar{\psi}_3 - \left(\frac{q_1}{l_1^*} \right)^2 \bar{\varphi}_2 \right] \right]}{(\rho F_1 \bar{\varphi}_1 + \rho F_2 \bar{\psi}_1)} \quad (16)$$

Как видно из (15), величина λ определяет темп возрастания амплитуды и является функцией двух величин – приложенной на торце стержня силы P и длины, на которую распространилась продольная волна сжатия l^* . В нашем случае длина тонкого участка в динамической задаче l_1^* постоянна и принимается равной длине l_1 статической задачи. Другими словами, эта величина входит в исходные данные. Длина $l_2^* = a_0(t - t_1)$, где t - текущее время, истекшее от момента приложения ударной нагрузки. $t_1 = l_1 / a_0$ - время пробега продольной волны вдоль участка длиной l_1 . Введем отношение $l_1 / l_2^* = \eta$. Тогда $l_1 = \eta l_2^*$. Подставляя последнее соотношение в (16) получим:

$$\lambda^2 = - \frac{\left[\left[EJ_{1x} \left(\frac{q_1}{\eta l_2^*} \right)^4 b_3 \bar{\varphi}_2 + EJ_{2x} \left(\frac{q_2}{l_2^*} \right)^4 \bar{\psi}_2 \right] + P \left[\left(\frac{q_2}{l_2^*} \right)^2 \bar{\psi}_3 - \left(\frac{q_1}{\eta l_2^*} \right)^2 \bar{\varphi}_2 \right] \right]}{(\rho F_1 \bar{\varphi}_1 + \rho F_2 \bar{\psi}_1)} \quad (17)$$

Критическую силу при которой становится возможна потеря устойчивости по статическому критерию (по Эйлеру) можно получить из (17), полагая $\lambda = 0$. Тогда

$$P_{кр}^{Эйл} = \frac{\left[EJ_{1x} \left(\frac{q_1}{\eta} \right)^4 b_3 \bar{\varphi}_2 + EJ_{2x} \cdot q_2^4 \cdot \bar{\psi}_2 \right]}{\left[q_2^2 \cdot \bar{\psi}_3 - \left(\frac{q_1}{\eta} \right)^2 \bar{\varphi}_2 \right] l_2^{*2}} \quad (18)$$

В задачах удара легче определить величину прикладываемой силы. Поэтому актуальной становится и другая форма записи соотношения (18):

$$l_2^{*2} = \frac{\left[EJ_{1x} \left(\frac{q_1}{\eta} \right)^4 b_3 \bar{\varphi}_2 + EJ_{2x} \cdot q_2^4 \cdot \bar{\psi}_2 \right]}{\left[q_2^2 \cdot \bar{\psi}_3 - \left(\frac{q_1}{\eta} \right)^2 \bar{\varphi}_2 \right] \cdot P_{кр}^{Эйл}} \quad (19)$$

В работе [5] М. А. Лаврентьевым и А. Ю. Ишлинским было показано, что при поперечном выпучивании стержней при ударе конечные формы волнообразования соответствуют тем формам прогибов, которые обладают наибольшим темпом возрастания амплитуды. Поэтому, следуя принятому в [4] критерию потери устойчивости, под критической длиной динамической задачи будем понимать ту наименьшую длину $l_{2,дин}^*$, начиная с которой возможно появления поперечных волн с максимальной скоростью возрастания их амплитуд. Исследуя на экстремум функцию λ по параметру $\mu = (1/l_2^*)^2$, получим выражение для динамической критической нагрузки.

$$P_{кр}^{дин} = \frac{2 \cdot \left[EJ_{1x} \left(\frac{q_1}{\eta} \right)^4 b_3 \bar{\varphi}_2 + EJ_{2x} \cdot q_2^4 \cdot \bar{\psi}_2 \right]}{\left[q_2^2 \cdot \bar{\psi}_3 - \left(\frac{q_1}{\eta} \right)^2 \bar{\varphi}_2 \right] \cdot l_{2,дин}^{*2}} \quad (20)$$

Как видим, $P_{кр}^{дин} = 2P_{кр}^{Эйл}$ и $l_{2,дин}^* = \sqrt{2}l_2^{*Эйл}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пономарев С.Д. и др. Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. Т.2. М. 1952г.

2.Рахматуллин Х.А., Демьянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматлит, 1961г., 396с.

3.Алфутон Н.А., Колесников К.С. Устойчивость движения и равновесия. М.: Изд.-во МГТУ им Н.Э. Баумана, 2003г. 252с.

4. Терегулов И.Г., Шигабутдинов Ф.Г. Устойчивость упруго – пластического стержня при динамическом нагружении. – В сб. Прочность и жесткость тонкостенных конструкций., вып. 2, Казань: 1977г., с. 77-86. / Сборник деп. в ВИНТИ №4101-77 Деп. от 25.10.77г./

5.Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем. ДАН СССР, 1949г., т.64, №6, с.779-782.

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ

О.Д. Юрьева (УлГУ, Россия, 432970, Ульяновск,
ул. Льва Толстого, 42)

E-mail: YurjevaOD@mail.ru

А.А. Порватова (УлГУ, Россия, 432970, Ульяновск,
ул. Льва Толстого, 42)

E-mail: alesya.porvatova@yandex.ru

ON THE MATHEMATICAL MODEL OF THE DYNAMICS OF BIOLOGICAL SYSTEM WITH DELAY

O.D. Yurjeva (Ulsu, Russia, 432970, Ulyanovsk, Leo Tolstoy str., 42)

A.A. Porvatova (Ulsu, Russia, 432970, Ulyanovsk, Leo Tolstoy str., 42)

Keywords: dynamics of biological systems, system with delay, mathematical model, nonlinear systems, stability.

Введение. Проблема прогнозирования динамики (главным образом, устойчивости, ограниченности и других «устойчиво-подобных» свойств) биологических систем – одна из основных проблем в экологии. Поэтому актуальными проблемами являются задачи нахождения новых признаков устойчивости моделей динамики популяций, установление границ устойчивости в пространстве параметров.

Эта задача особенно интересна в случае, когда рассматриваемая модель учитывает те или иные виды последствий, возникающие в реальных процессах. Уравнения с запаздыванием, используемые для описания моделей, характеризуются гораздо более сложной динамикой своих решений и более сложными методами исследования по сравнению с обыкновенными дифференциальными уравнениями. Сложность динамики таких моделей обуславливает множество нерешенных теоретических вопросов, требующих решения, а также необходимость привлечения численных методов исследования; последние, в свою очередь, имеют определённую специфику и нуждаются в адекватной программной реализации.

В работе исследуется влияние запаздывающего времени на динамику одной из модификаций двух-видового взаимодействия типа «хищник-жертва» с учетом коэффициента отлова жертв, учитывающего эффект последствий.

Постановка задачи

Общей математической моделью динамики двух взаимодействующих видов служат уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)[r_1 - ax(t) - by(t)] - H \\ \dot{y}(t) = -r_2y(t) + cx(t - \tau)y(t - \tau), \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – это численности (плотности популяций) жертв и хищников соответственно, r_1 – коэффициент роста популяции жертв, r_2 – коэффициент смертности популяции хищников, b – коэффициент влияния хищничества на переменную x , c – коэффициент влияния хищничества на переменную y , H – постоянный коэффициент отлова особей x (жертв), $a=r_1/K_x$, где K_x – постоянная, зависящая от плотности. Запаздывание $\tau \geq 0$ – константа, в предположении, что изменение числа хищников зависит от числа жертв и хищников в какой-либо предыдущий момент времени.

Модель, в которой $H = 0$, была предложена и проанализирована Вангерски и Каннингемом [7]. Результаты, представленные в данной работе, справедливы и для $H = 0$.

Положение равновесия (x^*, y^*) системы (1) задаётся равенствами (2), если $cr_1r_2 - ar_2^2 - Hc^2 \geq 0$

$$x^* = \frac{r_2}{c}, \quad y^* = \frac{cr_1r_2 - ar_2^2 - Hc^2}{bcr_2}. \quad (2)$$

Показатель отлова H возрастает, а y^* постоянно уменьшается до тех пор, пока H не достигнет критического уровня отлова:

$$H = x^*(r_1 - ax^*),$$

при котором y^* достигает нуля.

Пусть $X = x - x^*$, $Y = y - y^*$. Тогда линеаризованная система примет вид

$$\dot{X}(t) = (r_1 - 2ax^* - by^*)X(t) - bx^*Y(t), \quad (3)$$

$$\dot{Y}(t) = cy^*X(t - \tau) - r_2Y(t) + cx^*Y(t - \tau).$$

Её характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + p\lambda + r + (s\lambda + q)e^{-\lambda\tau} = 0, \quad (4)$$

где $p = r_2 - r_1 + 2ax^* + by^*$,

$$q = cx^*(r_1 - 2ax^* - by^*) + bcx^*y^*,$$

$$r = -r_2(r_1 - 2ax^* - by^*),$$

$$s = -cx^*.$$

1) При $\tau = 0$ характеристическое уравнение примет вид

$$\lambda^2 + (p + s)\lambda + q + r = 0. \quad (5)$$

Корни уравнения (5) отрицательны и действительны тогда и только тогда, когда

$$p + s > 0 \text{ и } q + r > 0. \quad (6)$$

2) При $\tau \neq 0$, ($\lambda = i\omega$ – это корень уравнения (4)), имеем

$$-\omega^2 + qe^{-i\omega\tau} + pi\omega + r + is\omega e^{-i\omega\tau} = 0,$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} r - \omega^2 - s\omega \sin(\omega\tau) + q \cos(\omega\tau) &= 0, \\ p\omega + s\omega \cos(\omega\tau) + q \sin(\omega\tau) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Упростив систему (7), получим полином четвёртого порядка

$$\omega^4 + (p^2 - s^2 - 2r)\omega^2 + r^2 - q^2 = 0, \quad (8)$$

из которого находим

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{s^2 - p^2 + 2r \pm \sqrt{(s^2 - p^2 + 2r)^2 - 4(r^2 - q^2)}}{2}. \quad (9)$$

Отсюда следует, что, если условия

$$p^2 - s^2 - 2r > 0 \text{ и } r^2 - q^2 > 0 \quad (10)$$

выполняются, то уравнение (9) не имеет положительных решений; значит, характеристическое уравнение (4) не имеет чисто мнимых корней. Неравенства (6) гарантируют, что все корни уравнения (5) имеют отрицательные действительные части.

Лемма 1. Если для (4) выполнены условия (6) и (10), то положение равновесия (x^*, y^*) локально асимптотически устойчиво для всех $\tau \geq 0$.

Из (9) следует, что имеется только одно положительное решение ω_1^2 при

$$r^2 - q^2 < 0. \quad (11)$$

Если

$$r^2 - q^2 > 0, s^2 - p^2 + 2r > 0 \text{ и } (s^2 - p^2 + 2r)^2 > 4(r^2 - q^2), \quad (12)$$

то имеется 2 положительных решения $\omega_{1,2}^2$. Подставляя $\omega_{1,2}^2$ в систему (8) и решая её относительно τ , получаем

$$\tau_j^{\pm} = \frac{1}{\omega} \pm \arctg \left(\frac{\omega_{\pm} (pq - rs + s\omega_{\pm}^2)}{ps\omega_{\pm}^2 + (r - \omega_{\pm}^2)q} \right) + \frac{2j\pi}{\omega_{\pm}}, j = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Лемма 2. Если условия (6) и (11) выполняются, то уравнение (4) с $\tau = \tau_j^+$ имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\omega_+$. Если же выполняются условия (6) и (12) и $\tau = \tau_j^+$ ($\tau = \tau_j^-$ соответственно), то уравнение (4) имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\omega_+$ (и $\pm i\omega_-$ соответственно).

Можно показать, что условия трансверсальности

$$\frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}\lambda_j^+(\tau_j^+) > 0, \quad \frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}\lambda_j^-(\tau_j^-) > 0$$

выполнены. Ввиду этого, τ_j^\pm являются бифуркационными значениями.

Утверждение 1. Пусть τ_j^\pm задаётся уравнением (13).

1) Если выполнены условия (6) и (10), то положение равновесия (x^*, y^*) системы (1) локально асимптотически устойчиво при всех $\tau \geq 0$.

2) Если выполнены условия (6) и (11), то положение равновесия (x^*, y^*) системы (1) локально асимптотически устойчиво при $\tau < \tau_0$ и неустойчиво при $\tau > \tau_0$. При $\tau = \tau_0$ происходит бифуркация Хопфа.

3) Если выполняются (6) и (12), то существует положительное число k , в зависимости от которого положение равновесия устойчиво или неустойчиво.

Подробнее, при

$$\tau \in [0, \tau_0^+), (\tau_0^-, \tau_1^+), \dots, (\tau_{k-1}^-, \tau_k^+),$$

положение равновесия (x^*, y^*) системы (1) устойчиво, а при $\tau \in [\tau_0^+, \tau_0^-), (\tau_1^+, \tau_1^-), \dots, (\tau_{k-1}^+, \tau_{k-1}^-), (x^*, y^*)$ неустойчиво.

Бифуркация происходит при $\tau = \tau_j^\pm, j = 0, 1, 2, \dots$

Численные исследования

Опираясь на качественное исследование выше, выберем параметры, которые обеспечивают устойчивость положения равновесия системы без запаздывания. Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(t)[20 - x(t) - y(t)] - 7, \\ \frac{dy}{dt} &= -15y(t) + 3x(t - \tau)y(t - \tau), \end{aligned} \tag{14}$$

$$r_1 = 20, a = 1, b = 1, H = 7, r_2 = 15, c = 3.$$

Положение равновесия системы:

$$x^* = \frac{r_2}{c} = 5, \quad y^* = \frac{cr_1r_2 - ar_2^2 - Hc^2}{bcr_2} = \frac{68}{5} = 13,6.$$

Критический уровень отлова жертв $H = 5(20 - 5) = 75$.

Линеаризованная система имеет вид:

$$\dot{X}(t) = -8,6X(t) - 5Y(t),$$

$$\dot{Y}(t) = 40,8X(t - \tau) - 15Y(t) + 15Y(t - \tau).$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + p\lambda + r + (s\lambda + q)e^{-\lambda\tau} = 0,$$

здесь

$$p = r_2 - r_1 + 2ax^* + by^* = 18,6,$$

$$q = cx^*(r_1 - 2ax^* - by^*) + bcx^*y^* = 150,$$

$$r = -r_2(r_1 - 2ax^* - by^*) = 54,$$

$$s = -cx^* = -15.$$

При $\tau = 0$ характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 3,6\lambda + 204 = 0.$$

Корни данного характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2} = -1,8 \pm 0,2i\sqrt{5019}.$$

Модель Вангерски – Каннингема численно реализована с помощью пакета программ Matlab 7 [1].

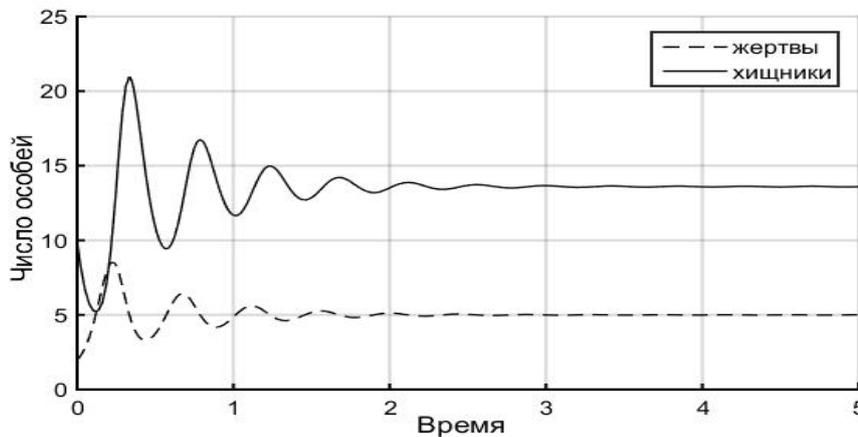


Рис. 1. Зависимость числа особей хищников и жертв в модели без запаздывания

При $\tau \neq 0$, если $\lambda = i\omega$ – корень уравнения, имеем

$$-\omega^2 + 150e^{-i\omega\tau} + 18,6i\omega + 54 - 15i\omega e^{-i\omega\tau} = 0,$$

откуда

$$54 - \omega^2 + 15\omega \sin(\omega\tau) + 150 \cos(\omega\tau) = 0,$$

$$18,6\omega - 15\omega \cos(\omega\tau) + 150 \sin(\omega\tau) = 0.$$

Упростив систему, получим полином четвёртого порядка

$$\omega^4 + 12,96\omega^2 - 19584 = 0,$$

из которого находим

$$\omega_+^2 = 133,6128, \omega_-^2 = -146,5728.$$

По формуле (13) находим критическое значение $\tau_0 = 0.0385$. Итак, при $\tau < 0.0385$ положение равновесия локально асимптотически устойчиво.

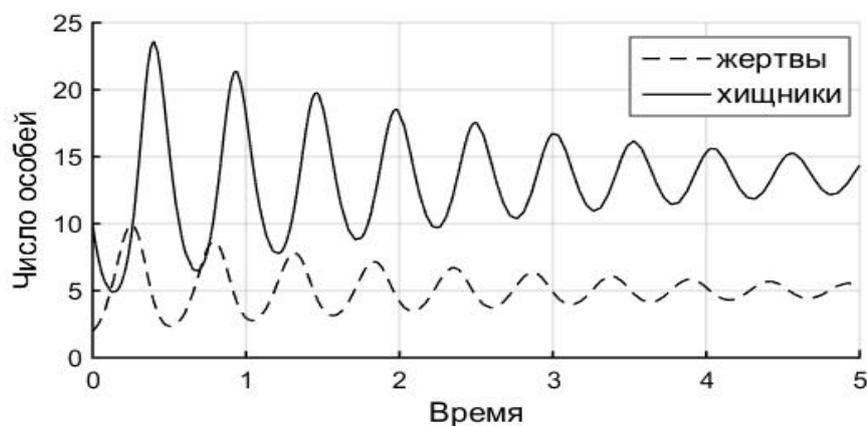


Рис. 2. Зависимость числа особей хищников и жертв в модели с запаздыванием $\tau < 0.0385$

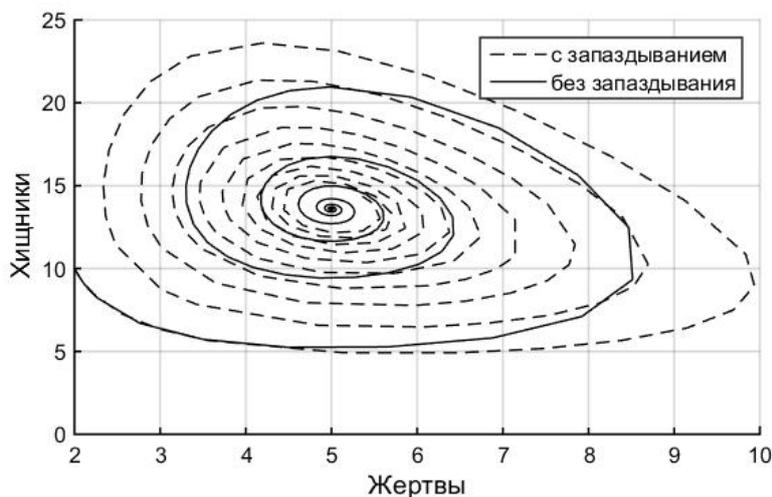


Рис. 3. Фазовые портреты моделей «хищник – жертва» с запаздыванием и без запаздывания $\tau < 0.0385$

При $\tau = 0.0385$ положение равновесия теряет устойчивость.

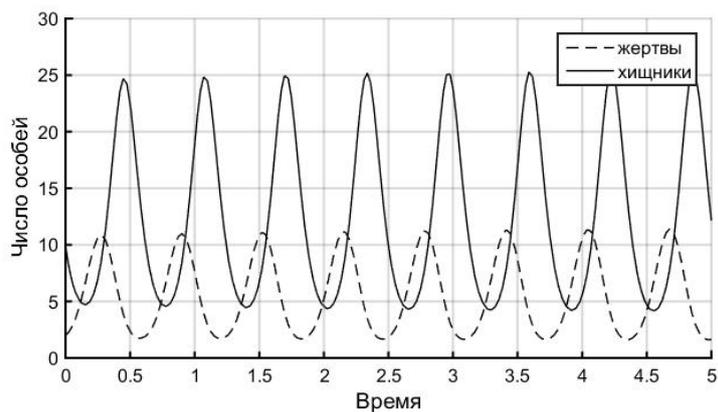


Рис. 4. Зависимость числа особей хищников и жертв в модели с запаздыванием $\tau < 0.0385$

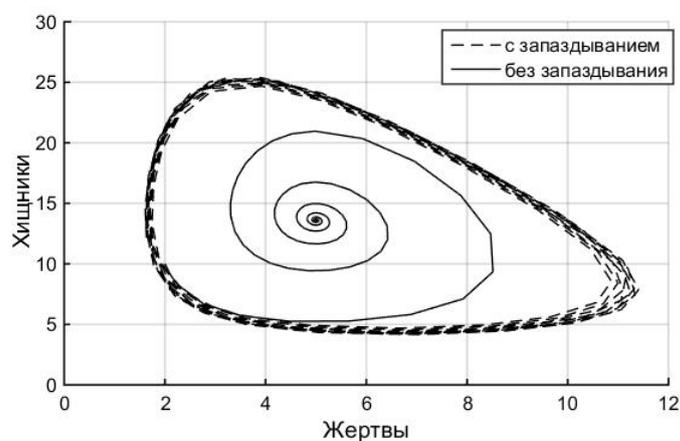


Рис. 5. Фазовые портреты моделей «хищник – жертва» с запаздыванием $\tau = 0.0385$ и без запаздывания

При $\tau > 0.0385$ положение равновесия становится неустойчивым и наблюдаются бифуркационные периодические решения.

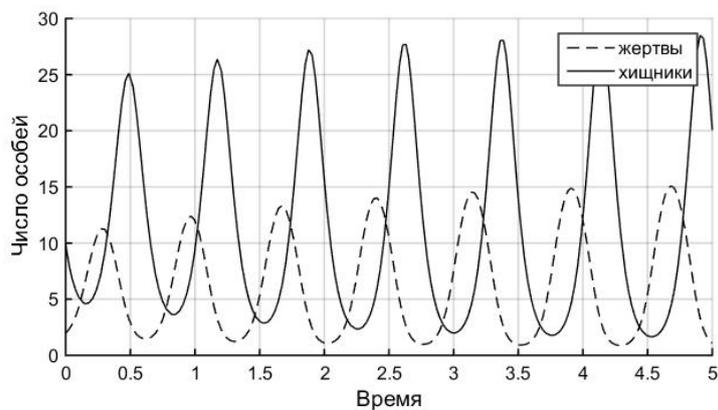


Рис. 6. Зависимость числа особей хищников и жертв в модели с запаздыванием $\tau > 0.0385$

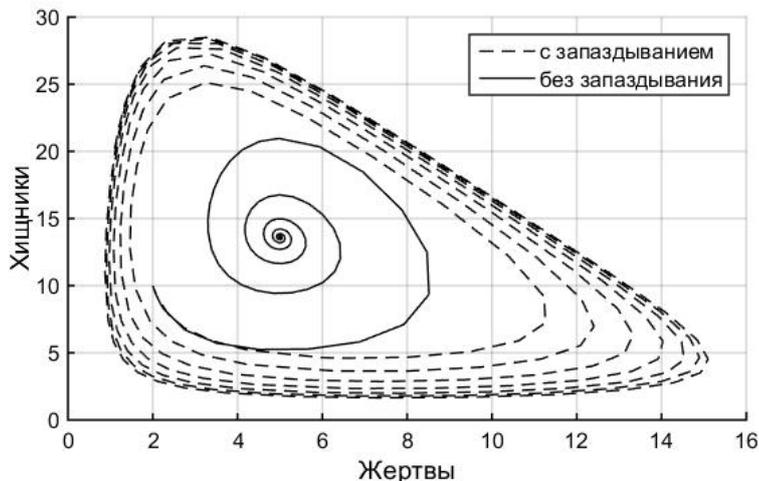


Рис. 7. Фазовые портреты моделей «хищник – жертва» с запаздыванием $\tau > 0.0385$ и без запаздывания

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ануфриев И. Е., Смирнов А. Б., Смирнов Е. Н. MATLAB 7. – СПб.:БВХ, 2005. 1104 с.
2. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях: Пер. с англ. -М.: Мир, 1983. 399 с.
3. Clark C.W. Mathematical Bioeconomics. The Optimal Management of Renewable Resources. –Wiley-interscience, 1990. 400 p.
4. Cushing J. M. Predator-prey interactions with time delays // Journal of Mathematical Biology, 1976, №3.p. 369-380.
5. Hale J.K. Theory of Functional Differential Equations. - Springer, 1997. 335 p.
6. Martin A., Ruan S. Predator-prey models with delay and prey harvesting//Journal of Mathematical Biology, 2001, vol. 43, №3.p. 247-267.
7. Wangersky P.J., Cunningham W.J. Time lag in prey-predator population models // Ecology, 1957,№38.P.136–139.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Алексеев А.Ф., Тихонов А.И.</i> Разработка и реализация алгоритмов нечеткого управления с применением метода векторных функций Ляпунова	3
<i>Анашкин О.В., Седова Н.О.</i> Предельные множества одного семейства систем с импульсным воздействием	12
<i>Андреев А.С., Макаров Д.С.</i> О стабилизации программных стационарных движений системы с циклическими координатами	20
<i>Андреев А.С., Перегудова О.А., Раков С.Ю.</i> Синтез нелинейного интегрального регулятора на основе уравнений Вольтерра	27
<i>Байрамов Ф.Д., Байрамов Б.Ф.</i> Об устойчивости одного класса гибридных систем с сосредоточенными и распределёнными параметрами	36
<i>Бакланов Ф.Ю., Морозов В.М., Йоханн Дамбек.</i> Методология анализа наблюдаемости в линейных нестационарных системах	43
<i>Баландин Д.В., Малкин С.А.</i> Об устойчивости электромагнитного подвеса ротора в пространстве параметров управления	53
<i>Банищиков А.В.</i> О гироскопической стабилизации положения равновесия спутника с гравитационным стабилизатором	62
<i>Бардин Б.С.</i> О трансцендентном случае в задаче об устойчивости периодической гамильтоновой системы с одной степенью свободы при наличии резонанса	72
<i>Батхин А.Б.</i> Проблема формальной устойчивости положения равновесия многопараметрической системы Гамильтона	78
<i>Брынцева Т.А.</i> Частотные оценки шага дискретизации в нелинейных гибридных системах	87
<i>Булкина Е.А., Фирсов А.Н.</i> Численно-аналитический метод решения обратной задачи устойчивости для технических систем с несколькими неопределёнными параметрами	99

<i>Дегтярев Г.Л., Алексеев Ф.Ф., Широков П.С., Алексеев А.Ф. Методы и алгоритмы нейронечеткого управления динамическими системами в условиях неопределенности с приложением к задачам добычи и подготовки нефти</i>	107
<i>Демидова А.В., Дружинина О.В., Масина О.Н. Исследование устойчивости и численное моделирование стохастических систем популяционной динамики</i>	113
<i>Досаев М.З., Климина Л.А., Hwang Sh.-Sh. Об установившихся режимах движения гребной лодки</i>	124
<i>Ефремов А.А. , Козлов В.Н. Достаточные условия устойчивости систем ограничения перетоков по линиям энергообъединений</i>	131
<i>Емельянова Ю.П., Емельянов М.А. Анализ слабой устойчивости повторяющихся процессов методом векторной функции Ляпунова</i>	139
<i>Жуматов С.С. Об устойчивости программного многообразия с компактной окрестностью систем автоматического управления</i>	148
<i>Каленова В.И., В.М. Морозов В.И. Стабилизация относительного равновесия спутника при помощи магнитных моментов</i>	155
<i>Климина Л.А., Локишин Б.Я., Селюцкий Ю.Д. Применение метода Пуанкаре-Понтрягина в окрестности неизолированных равновесий порождающей системы</i>	163
<i>Маликов А.И. Метод оценивания состояния и синтеза управления с компенсацией возмущений для неавтономных липшицевых систем</i>	169
<i>Морозов В.М., Каленова В.И., Волчков С.О., Рак М.Г. О стабилизации космического аппарата в точках либрации ограниченной задачи трех тел силами светового давления</i>	181
<i>Морозов В.М., Карчевский А.С. Устойчивость стационарных движений одноколесного робота специальной конструкции</i>	188
<i>Мухаметзянов И.А. О построении сильно устойчивых систем программного движения</i>	194
<i>Нагул Н.В. Сохранение свойства безотказности супервизора для дискретно-событийной системы</i>	204
<i>Новиков М.А. Одновременная диагонализация матриц квадратичных форм и знакоопределенность многочленов в исследовании устойчивости движения</i>	216

<i>Сергеев В.С.</i> Вынужденные предельно периодические движения в системах с последействием в некоторых критических случаях устойчивости	227
<i>Тихонов С.В., Сиразетдинов Р.Т.</i> Устойчивость движения при имитации группой беспилотных аппаратов агрегатных состояний вещества	236
<i>Глеубергенов М.И., Ибраева Г.Т.</i> О разрешимости обратной стохастической задачи замыкания	244
<i>Кудашова Е.А., Кудашкина И.В., Федорова Л.В.</i> Об устойчивости дискретной модели типа Вольтерра	251
<i>Финогенко И.А.</i> Метод предельных дифференциальных включений в задаче об устойчивости неавтономных систем	257
<i>Холостова О.В.</i> Исследование формальной устойчивости неавтономных гамильтоновых систем в случаях кратных резонансов четвертого порядка	268
<i>Шигабутдинов Ф.Г.</i> Устойчивость ступенчатых элементов конструкций при продольных ударах	276
<i>Юрьева О.Д., Порватова А.А.</i> Об одной математической модели динамики биологических систем с учетом последействия	283

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА,
УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ

ТРУДЫ XI МЕЖДУНАРОДНОЙ
ЧЕТАЕВСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

ТОМ 2

Секция 2. УСТОЙЧИВОСТЬ

13 – 17 июня 2017 г.

*Статьи воспроизводятся с оригиналов, представленных авторами,
и Издатель не несет ответственности за содержание статей*

Ответственный за выпуск В.Н. Милёхин
Компьютерная верстка – Н.Н. Семёнова
Дизайн обложки – Н.Н. Семёнова

Подписано в печать 05.06.17.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 17,2. Тираж 300 экз. Заказ Б 34.

Издательство КНИТУ-КАИ
420111, Казань, К. Маркса, 10

ISBN 978-5-7579-2229-4



Для заметок

Для заметок