



115-летию со дня рождения Н.Г. Четаева
и памяти академика АН РТ
Т.К. Сиразетдинова
посвящается

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ

ТРУДЫ XI МЕЖДУНАРОДНОЙ
ЧЕТАЕВСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

ТОМ 3

Секция 3. УПРАВЛЕНИЕ

Часть I

Казань, 13 – 17 июня 2017 г.

Министерство образования и науки Российской Федерации
Российская академия наук
Министерство образования и науки Республики Татарстан
Национальный комитет по автоматическому управлению
Академия наук Республики Татарстан
Научный совет РАН по теории управляемых процессов и автоматизации
Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова
Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ»

*115-летию со дня рождения Н.Г. Четаева
и памяти академика АН РТ
Т.К. Сиразетдинова посвящается*

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ

ТРУДЫ XI МЕЖДУНАРОДНОЙ ЧЕТАЕВСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

ТОМ 3

Секция 3. УПРАВЛЕНИЕ

Часть I

13 – 17 июня 2017 г.



Казань 2017

УДК 531.01 (063) + 531.391.5 (063) + 004 (063)

ББК 22.211 + 22.236.37 + 32.97

Ан 64

Ан 64 **Аналитическая механика, устойчивость и управление:**
труды XI Международной Четаевской конференции. Т. 3. Секция 3.
Управление. Ч. I. Казань, 13 – 17 июня 2017 г. – Казань: КНИТУ-
КАИ, 2017. – 236 с.

ISBN 978-5-7579-2231-7 (т. 3, ч. I)

ISBN 978-5-7579-2230-0 (т. 3)

ISBN 978-5-7579-2227-0

Представлены доклады, посвященные актуальным проблемам теории и практики управления сложными динамическими системами, в том числе по методам оптимального управления, теории игр, интеллектуальному управлению в условиях неопределенности.

Использование опубликованных материалов будет способствовать расширению связей и повышению эффективности отечественных и зарубежных научно-образовательных центров в области управления.

УДК 531.01 (063) + 531.391.5 (063) + 004 (063)

ББК 22.211 + 22.236.37 + 32.97

Редакционная коллегия:

Васильев С.Н., академик РАН

Козлов В.В., академик РАН

Дегтярёв Г.Л., академик АН РТ, д.т.н., профессор

Балоев А.А., д.т.н., профессор

Валишин Н.Т., к.ф.-м.н., доцент

Ответственные секретари:

Хасанов А.Ю., к.т.н., доцент

Петрув И.В.

ISBN 978-5-7579-2231-7 (т. 3, ч. I)

ISBN 978-5-7579-2230-0 (т. 3)

ISBN 978-5-7579-2227-0

© Авторы, перечисленные в содержании, 2017

© Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ОТОПИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

В.М. Абдуллаев (Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, AZ1010, г. Баку, пр. Азадлыг, 20; Институт систем управления НАН Азербайджана, AZ1141, г.Баку, ул. Б.Вахабзаде, 9)
E-mail: vaqif_ab@rambler.ru

ON A PROBLEM OF CONTROL OF A HEATING SYSTEM WITH FEEDBACK

V.M. Abdullayev (Azerbaijan State Oil and Industrial University, AZ1010, Baku, Azadlig Avenue 20; Institute of Control Systems of the Azerbaijan National Academy of Sciences, AZ1141, Baku, B.Vahabzade str. 9)
E-mail: vaqif_ab@rambler.ru

Keywords: optimal control, feedback control, loaded differential equation, retarded argument.

Введение. В работе исследуется проблема управления нагревательным аппаратом для нагрева теплоносителя, который обеспечивает подачу тепла в замкнутую систему теплоснабжения. Рассматривается задача синтеза управления объектом с распределенными параметрами на специальных классах управляющих воздействий. Специфика исследуемой задачи, описываемой уравнением гиперболического типа первого порядка заключается в том, что в ее краевых условиях участвует запаздывающий во времени аргумент.

Математическая модель управляемого процесса приводится к точно нагруженному гиперболическому уравнению. В работе получены формулы для градиента функционала, предложены схемы численного решения, приведены результаты численных экспериментов.

Постановка задачи. Процесс нагрева теплоносителя в печи системы теплоснабжения можно описать уравнением переноса [1,2]:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \alpha[\vartheta(t) - u(x, t)], (x, t) \in \Omega = (0, l) \times (0, T], \quad (1)$$

где $u = u(x, t)$ – температура теплоносителя в точке x нагревательного аппарата в момент времени t ; l – длина трубки нагревательного аппарата, в котором обогревается теплоноситель; a – скорость движения теплоносителя в системе теплоснабжения, величина которой постоянна для всех точек системы теплоснабжения; α – заданное значение коэффициента теплообмена между печью и теплоносителем в нагревательном аппарате; $\vartheta(t)$ – температура внутри печи, посредством которой осуществляется управле-

ние процессом нагрева теплоносителя, удовлетворяющая технологическому ограничению:

$$\underline{\vartheta} \leq \vartheta(t) \leq \bar{\vartheta}. \quad (2)$$

Пусть L - длина системы теплоснабжения и нагретому в печи теплоносителю необходимо время $T^{зан.} = L/a$ с тем, чтоб вернуться в начало печи, т.е.

$$u(0, t) = (1 - \gamma(t))u(l, t - T^{зан.}), \quad t > 0, \quad (3)$$

$\gamma(t)$ – величина, определяющая потери тепла в процессе движения в теплосети. Исходя из практических соображений, она удовлетворяет очевидному условию:

$$0 \leq \gamma(t) \leq 1. \quad (4)$$

Обозначим множество значений потерь тепла, удовлетворяющих (3), (4), через Γ , предполагая, что задана функция плотности $\rho_{\Gamma}(\gamma)$ на этом множестве.

Пусть начальное условие задано в следующей форме:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l]. \quad (5)$$

Задача управления процессом нагрева теплоносителя заключается в необходимости поддержания температуры печи, обеспечивающей определенную температуру V теплоносителя на выходе печи при всевозможных допустимых значениях потерь тепла γ .

Пусть в произвольных L точках $\xi_i \in [0, l]$, $i = 1, 2, \dots, L$ нагревательного аппарата установлены датчики, в которых проводятся замеры температуры непрерывно:

$$u_i(t) = u(\xi_i, t), \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

или в заданные дискретные моменты времени

$$u_{ij} = u(\xi_i, t_j), \quad t_j \in [0, T], \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

Для построения системы управления нагревом печи с непрерывной обратной связью рассмотрим следующий вариант системы регулирования температуры:

$$\vartheta(t) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \lambda_i \tilde{k}_i [u(\xi_i, t) - \tilde{z}_i],$$

где $\tilde{k}_i$ – коэффициент усиления; $\tilde{z}_i$ – эффективная температура в точке ξ_i , за величиной отклонения от которой должен вестись контроль в этой точке; $\lambda_i = \text{const}$ – весовой коэффициент, определяющий важность замера в точке ξ_i , $i = 1, 2, \dots, L$,

$$\lambda \in \Lambda = \left\{ \lambda \in E^L: 0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad \sum_{i=1}^L \lambda_i = 1 \right\}.$$

Введя комплексные параметры:

$$k_i = \frac{\lambda_i \tilde{k}_i}{L}, \quad z_i = \frac{\lambda_i \tilde{k}_i z_i}{L}, \quad i = 1, 2, \dots, L,$$

формула для температуры, примет вид:

$$\vartheta(t) = \sum_{i=1}^L k_i [u(\xi_i, t) - z_i]. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (1), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \\ = \alpha \left[\sum_{i=1}^L k_i [u(\xi_i, t) - z_i] - u(x, t) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

Минимизируемый критерий качества управления зададим в следующем виде:

$$\begin{aligned} J(\xi, k, z; \gamma) &= \int_{\Gamma} I(\xi, k, z; \gamma) \rho_{\Gamma}(\gamma) d\gamma, \\ I(\xi, k, z; \gamma) &= \beta_1 \int_0^T [u(l, t; \xi, k, z, \gamma) - V]^2 dt + \\ &+ \sigma_1 \|\xi - \xi^0\|_{R^L}^2 + \sigma_2 \|k - k^0\|_{R^L}^2 + \sigma_3 \|z - z^0\|_{R^L}^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, проблема управления нагревом теплоносителя в печи с обратной связью приведена к задаче оптимального управления, описываемой нагруженным дифференциальным уравнением (9) с краевым условием с запаздывающим аргументом (3).

На оптимизируемые управляющие параметры ξ, k, z , учитывая переобозначения (8), имеются ограничения, исходя из их технического, технологического назначения

$$0 \leq \xi_i \leq l, \quad \underline{k}_i \leq k_i \leq \bar{k}_i, \quad \underline{z}_i \leq z_i \leq \bar{z}_i, \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad (12)$$

Здесь $\underline{k}_i, \bar{k}_i, \underline{z}_i, \bar{z}_i, \quad i = 1, 2, \dots, L$, -заданные величины.

Поставленная проблема приведена к задаче параметрического оптимального управления нагруженным дифференциальным уравнением [3-6]. С целью ее численного решения с применением итерационных методов оптимизации первого порядка получены следующие формулы компонент градиента функционала как по координатам размещения датчиков состояния, так и по значениям соответствующих введенных в (8) коэффициентов «усиления» в функции линейной обратной связи:

$$\begin{aligned} grad_{\xi_i} J &= \int_{\Gamma} \left\{ -\alpha k_i \int_0^T u_x(\xi_i, t) \left(\int_0^l \psi(x, t) dx \right) dt + 2\sigma_1(\xi_i - \xi_i^0) \right\} \rho_{\Gamma}(\gamma) d\gamma, \\ grad_{k_i} J &= \\ &= \int_{\Gamma} \left\{ -\alpha \int_0^T (u(\xi_i, t) - z_i) \left(\int_0^l \psi(x, t) dx \right) dt + 2\sigma_2(k_i - k_i^0) \right\} \rho_{\Gamma}(\gamma) d\gamma, \\ grad_{z_i} J &= \int_{\Gamma} \left\{ \alpha k_i \int_0^T \int_0^l \psi(x, t) dx dt + 2\sigma_3(z_i - z_i^0) \right\} \rho_{\Gamma}(\gamma) d\gamma. \end{aligned}$$

Здесь $i = 1, 2, \dots, L$, $\psi(x, t)$ решение следующей сопряженной начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} \psi_t(x, t) + a\psi_x(x, t) &= a\psi(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \\ \psi(x, T) &= 0, \quad x \in [0, l], \\ \psi(l, t) &= -\frac{2}{a}(u(l, t) - V), \quad t \in (T - T^{зан}, T], \\ \psi(l, t) &= -\frac{\alpha}{a}(1 - \gamma)\psi(0, t + T^{зан}) - \frac{2}{a}(u(l, t) - V), \quad t \in (0, T - T^{зан}], \end{aligned}$$

а в точках ξ_i , $i = 1, 2, \dots, L$ при $t \in [0, T]$ удовлетворяла условиям:

$$\psi^-(\xi_i, t) = \psi^+(\xi_i, t) - \frac{\alpha}{a} k_i \int_0^l \psi(x, t) dx, \quad i = 1, 2, \dots, L.$$

Приведены результаты численных экспериментов, полученных при решении тестовых задач, проведен численный анализ влияния погрешностей замеров состояния процесса на полученные значения оптимальных значений параметров синтезируемого управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: "Наука", 1977. 735 с.

2. Ray W.H. Advanced Process Control, McGraw-Hill Book Company, (1981), 376 p.

3. Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М. Об одном подходе к синтезу управления процессами с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика, 2012, №9, с.3-19.

4. Abdullayev V.M., Aida-zade K.R. Numerical solution of optimal control problems for loaded lumped parameter systems // Comput. Math. and Math. Phys. 2006. Vol. 46, N9. Pp 1487-1502.

5. Abdullayev V.M., Aida-zade K.R. Numerical method of solution to loaded nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations // Comput. Math. and Math. Phys. 2014. Vol. 54, N1. Pp 1096-1109.

6. Abdullayev V.M., Aida-zade K.R. Finite Difference Methods for Solving Loaded Parabolic Equations // Comput. Math. and Math. Phys. 2016. Vol. 56, N1. Pp 93-105.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ РАЗМЕЩЕНИЯ ТОЧЕК ЗАМЕРА ПРИ УПРАВЛЕНИИ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

К.Р. Айда-заде (Бакинский Государственный Университет, AZ1148, г.Баку, ул. акад. З. Халилова, 23; Институт Систем Управления НАН Азербайджана, AZ1141, г.Баку, ул. Б.Вахабзаде, 9)
E-mail: kamil_aydazade@rambler.ru

В.М. Абдуллаев (Азербайджанский Государственный Университет Нефти и Промышленности, AZ1010, г. Баку, пр. Азадлыг, 20; Институт Систем Управления НАН Азербайджана, AZ1141, г.Баку, ул. Б.Вахабзаде, 9)
E-mail: vaqif_ab@rambler.ru

NUMERICAL SOLUTION TO THE PROBLEM OF OPTIMIZATION OF THE PLACEMENT OF MEASUREMENT POINTS UNDER FEED- BACK CONTROL

K.R. Aida-zade (Baku State Univeristy, AZ1148, Baku, acad. Z. Khalilov str., 23; Institute of Control Systems of the Azerbaijan National Academy of Sciences, AZ1141, Baku, B.Vahabzade str. 9)
E-mail: kamil_aydazade@rambler.ru

V.M. Abdullayev (Azerbaijan State Oil and Industrial University, AZ1010, Baku, Azadlig Avenue 20; Institute of Control Systems of the Azerbaijan National Academy of Sciences, AZ1141, Baku, B.Vahabzade str. 9)
E-mail: vaqif_ab@rambler.ru

Keywords: loaded differential equation, control point, reaction to loading, optimal control, feedback, gradient projection method.

Введение. В данной работе на примере управления процессом нагрева стержня в печи с обратной связью приводится постановка задачи оптимального размещения заданного количества датчиков съема текущей температуры на стержне, находящегося в печи, для оптимальной подачи в нее тепла.

Отметим, что работ в направлении оптимизации размещения точек контроля с точки зрения качества управления процессом с обратной связью практически нет, несмотря на большую важность исследуемой проблемы. Это можно объяснить сложностью как адекватной формулировки математической постановки задачи, так и исследования, численного решения задач оптимального управления с обратной связью относительно объектов с распределенными параметрами [1-3].

Предлагаемый подход к решению поставленной проблемы приводит к задаче параметрического оптимального управления нагруженными диффе-

ренциальными уравнениями. Для ее численного решения с применением итерационных методов оптимизации первого порядка ниже получены формулы компонент градиента функционала как по координатам размещения датчиков состояния, так и по значениям соответствующих введенных коэффициентов «усиления» в функции линейной обратной связи.

Постановка задачи. Рассматривается управляемый процесс последовательного нагрева однородных одинаковых стержней заданной длины l в печи [1-3]:

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + \alpha[v(t) - u(x, t)], \quad (x, t) \in \Omega = (0, l) \times (0, T), \quad (1)$$

$$u_x(0, t) = -\lambda[v(t) - u(0, t)], \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$u_x(l, t) = \lambda[v(t) - u(l, t)], \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Здесь $u(x, t)$ – дважды непрерывно дифференцируемая по $x \in (0, l)$ почти всюду непрерывно дифференцируемая по $t \in (0, T)$ функция, определяющая температуру стержня в точке x в момент времени t ; $v(t)$ – температура печи в момент времени t , являющаяся управляющей кусочно-непрерывной функцией, значения которой удовлетворяют технологическим ограничением:

$$\underline{v} \leq v(t) \leq \bar{v}, \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

α, λ – коэффициенты теплообмена между температурой внутри печи и соответственно внутренними точками стержня и его концами; $a^2 = \text{const}$ – коэффициент теплопроводности стержня.

Для простоты будем предполагать, что начальная температура каждого стержня постоянна по длине, но значение точно не известно. Пусть известны диапазон множества возможных значений начальных температур стержней $B = [\underline{B}, \overline{B}]$:

$$u(x, 0) = b \in B, \quad x \in [0, l], \quad (5)$$

и функция плотности распределения начальных температур на этом множестве:

$$\rho_B(b) \in [0; 1], \quad b \in B.$$

Пусть в L точках стержня $\xi_i \in [0, l]$, $i = 1, 2, \dots, L$, в процессе нагрева непрерывно во времени проводятся замеры температуры $u(\xi_i, t)$, $t \in [0, T]$, по результатам которых должна назначаться температура внутри печи $v(t)$.

Температуру, которую необходимо поддерживать в печи в момент времени t в зависимости от результатов текущих замеров в наблюдаемых точках, определим по формуле [3]:

$$v(t) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \tilde{v}_i \tilde{k}_i [u(\xi_i, t) - \bar{z}_i],$$

где $\tilde{v}_i > 0$ – весовой коэффициент важности учета для управления замера температуры в точке ξ_i ; $\tilde{k}_i$ – коэффициент усиления; $\bar{z}_i$ – эффективная температура в точке ξ_i , за величиной отклонения от которой должен вестись контроль в этой точке; $i = 1, 2, \dots, L$.

Введя комплексные параметры:

$$k_i = \frac{\tilde{v}_i \tilde{k}_i}{L}, \quad z_i = \frac{\tilde{v}_i \tilde{k}_i \bar{z}_i}{L}, \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad (6)$$

формула для температуры, поддерживаемой внутри печи, примет вид:

$$v(t) = \sum_{i=1}^L k_i [u(\xi_i, t) - z_i]. \quad (7)$$

Векторы параметров $k = (k_1, k_2, \dots, k_L)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_L)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_L)$ будем называть управляющими параметрами обратной связи, которые требуется выбрать таким образом, чтоб минимизировался следующий целевой функционал:

$$J(\xi, k, z, T) = \int_B I(\xi, k, z, T; b) \rho_B(b) db, \quad (8)$$

$$I(\xi, k, z, T; b) = \beta_1 \int_0^l \mu(x) [u(x, T; \xi, k, z, b) - V(x)]^2 dx +$$

$$+ \sigma_1 \|\xi - \xi^0\|_{R^L}^2 + \sigma_2 \|k - k^0\|_{R^L}^2 + \sigma_3 \|z - z^0\|_{R^L}^2. \quad (9)$$

Здесь: $u(x, t) = u(x, T; \xi, k, z, b)$ – решение начально-краевой задачи (1)-(3), (6) при допустимых значениях управляющих параметров ξ, k, z ; β_1 – заданный весовой коэффициент; $V(x)$ – желаемое конечное распределение температуры по стержню; $\mu(x)$ – заданная весовая функция; $\sigma_i, i = 1, 2, 3, \xi^0, k^0, z^0$ – параметры регуляризации. Длительность процесса нагрева T в зависимости от постановки задачи может быть как заданной, так и оптимизируемой величиной.

Функционал (8) определяет значение критерия качества управления процессом нагрева усредненного по всем стержням, учитывая отсутствие

информации о точном значении начальной температуры каждого стержня в отдельности перед подачей его в печь.

На оптимизируемые управляющие параметры ξ, k, z, T , учитывая переобозначения (6), могут быть наложены ограничения, исходя из их технического, технологического назначения

$$\begin{aligned} 0 \leq \xi_i \leq l, \underline{k}_i \leq k_i \leq \bar{k}_i, \\ \underline{z}_i \leq z_i \leq \bar{z}_i, \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad 0 \leq T \leq \bar{T}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\underline{k}_i, \bar{k}_i, \underline{z}_i, \bar{z}_i, \quad i = 1, 2, \dots, L, \bar{T} > 0$ -заданные величины.

Подставляя управление $v(t)$ в виде (6) в краевую задачу (1)-(3) получим:

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + \alpha \left[\sum_{i=1}^L k_i [u(\xi_i, t) - z_i] - u(x, t) \right], (x, t) \in \Omega, \quad (11)$$

$$u_x(0, t) = -\lambda \left[\sum_{i=1}^L k_i [u(\xi_i, t) - z_i] - u(0, t) \right], t \in [0, T], \quad (12)$$

$$u_x(l, t) = \lambda \left[\sum_{i=1}^L k_i [u(\xi_i, t) - z_i] - u(l, t) \right], \quad t \in [0, T]. \quad (13)$$

Обозначим через $y \in R^{3L+1}$ $(3L + 1)$ -мерный вектор оптимизируемых параметров $y = (\xi, k, z, T)$, являющихся аргументами целевого функционала (8).

При заданных значениях параметров y задача (11)–(13), (5) относится к классу точечно-нагруженных начально-краевых задач, различные аспекты которых исследовались, например, в работах [4-6].

Для численного решения нагруженных задач вида (1)–(3), (5) при каких-либо заданных допустимых функциях управления $v(t)$ в работах [4-7] было исследовано применение метода прямых и различные схемы метода конечных разностей.

В целом рассматриваемую задачу (5), (8)–(13) можно отнести к параметрической задаче оптимального управления нагруженной системой с распределенными параметрами, оптимизируемыми в которой являются три L -мерных вектора ξ, k, z и время завершения процесса T .

Для численного решения полученной задачи параметрического оптимального управления нагруженной системой с распределенными параметрами, а именно, для построения минимизирующей последовательности $y^v, v=0, 1, \dots$, предлагается использовать методы оптимизации первого порядка, например, метод проекции градиента, который запишем в виде

$$y^{v+1} = P_{(10)}[y^v - \gamma_v \text{grad}(J(y^v))], v = 0, 1, \dots, \quad (14)$$

Здесь $P_{(10)}(y)$ - оператор проектирования $(3L + 1)$ -мерной точки $y = (\xi, k, z, T)^*$ на множество, определенное ограничениями (10); «*» – знак транспонирования; $\gamma_v > 0$ – шаг в направлении спроектированного антиградиента. Начальное приближение y^0 может быть произвольным, в частности, удовлетворяющим условиям (10). Учитывая простоту структуры допустимого множества оптимизируемых параметров, определенного ограничениями (10), оператор проектирования имеет конструктивный характер и легко реализуем.

Для построения процедуры (14) необходимо получить формулы для компонент градиента функционала (8), (9) по оптимизируемым параметрам:

$$\begin{aligned} & \text{grad } J(y) \\ &= \left(\frac{\partial J(\xi, k, z, T)}{\partial \xi}, \frac{\partial J(\xi, k, z, T)}{\partial k}, \frac{\partial J(\xi, k, z, T)}{\partial z}, \frac{\partial J(\xi, k, z, T)}{\partial T} \right)^*. \end{aligned}$$

В работе получены формулы компонент градиента функционала как по координатам размещения датчиков состояния, так и по значениям соответствующих введенных в (8) коэффициентов «усиления» в функции линейной обратной связи:

$$\begin{aligned} \text{grad}_{\xi_i} I &= k_i \int_0^T \left[-a^2 \lambda (\psi(l, t) + \psi(0, t)) - \alpha \int_0^l \psi(x, t) dx \right] u_x(\xi_i, t) dt + \\ &+ 2\sigma_1 (\xi_i - \xi_i^0), i = 1, 2, \dots, L, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{grad}_{k_i} I &= \int_0^T (u(\xi_i, t) - z_i) \left[-\alpha \int_0^l \psi(x, t) dx - a^2 \lambda (\psi(0, t) + \psi(l, t)) \right] dt + \\ &+ 2\sigma_2 (k_i - k_i^0), \quad i = 1, 2, \dots, L, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{grad}_{z_i} I &= k_i \int_0^T \left[\alpha \int_0^l \psi(x, t) dx + a^2 \lambda (\psi(0, t) + \psi(l, t)) \right] dt + \\ &+ 2\sigma_3 (z_i - z_i^0), \quad i = 1, 2, \dots, L, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{grad}_T I = 2\beta_1 \int_0^l \mu(x) (u(x, T) - V(x)) u_t(x, T) dx. \quad (18)$$

Здесь $\psi(x, t)$ решение следующей сопряженной начально-краевой задачи:

$$\psi_t(x, t) = -a^2 \psi_{xx}(x, t) + \alpha \psi(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (19)$$

$$\psi(x, T) = -2\beta_1 \mu(x)(u(x, T) - V(x)), \quad x \in [0, l], \quad (20)$$

$$\psi_x(0, t) = \lambda \psi(0, t), \quad t \in [0, T], \quad (21)$$

$$\psi_x(l, t) = -\lambda \psi(l, t), \quad t \in [0, T]. \quad (22)$$

а в точках $\xi_i, i = 1, 2, \dots, L$ при $t \in [0, T]$ удовлетворяла условиям:

$$\begin{aligned} \psi_x^-(\xi_i, t) = \psi_x^+(\xi_i, t) - \lambda(\psi(0, t) + \psi(l, t))k_i - \\ - \frac{\alpha}{a^2} k_i \int_0^l \psi(x, t) dx, i = 1, 2, \dots, L, \quad (23) \\ \psi^+(\xi_i, t) = \psi^-(\xi_i, t). \end{aligned}$$

Для численного решения краевых задач с учетом их специфических особенностей: прямой (11)–(13), (5) и сопряженной (19)–(23), что необходимо на каждой итерации процедуры (14) при решении исходной задачи оптимизации, можно использовать методы сеток или прямых, исследованные в [5,6].

Предложенные в работе постановка задачи и подход к получению расчетных формул для ее численного решения могут быть распространены на случаи управления с обратной связью многими другими процессами и описываемых другими типами уравнений с частными производными и начально-краевыми условиями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ray W.H. Advanced Process Control, McGraw-Hill Book Company, 1981, 376 p.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: "Наука", 1977. 735 с.
3. Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М. Об одном подходе к синтезу управления процессами с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. 2012. №9. С.3-19.
4. Алиханов А.А, Березков А.М., М.Х.Шхануков – Лафшиев. Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т.48. №9. С.1619-1628.

5. *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* О численном решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т.44. №9. С.1585-1595.

6. *Abdullayev V.M., Aida-zade K.R.* Finite Difference Methods for Solving Loaded Parabolic Equations // Comput. Math. and Math. Phys. 2016. Vol. 56, №1. Pp. 93-105.

7. *Abdullaev V.M., Aida-zade K.R.* Numerical solution of optimal control problems for loaded lumped parameter systems // Comput. Math. and Math. Phys. 2006. Vol. 46, №9. Pp. 1487-1502.

МЕТОДЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ И СИНТЕЗ НЕЧЕТКИХ ЛОГИЧЕСКИХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ СЛОЖНЫХ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННЫХ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ОЦЕНКОЙ ОБЛАСТИ АДЕКВАТНОСТИ ПОЛУЧЕННЫХ МОДЕЛЕЙ¹⁾

Ф.Ф. Алексеев (КНИТУ-КАИ, Россия, 420111, Казань, К.Маркса, 10)

E-mail: falekseev@mail.ru

METHODS OF DECOMPOSITION AND SYNTHESIS OF FUZZY LOGICAL REGULATORS FOR COMPLEX DECENTRALIZED INTELLIGENT CONTROL SYSTEMS WITH EVALUATION OF ADEQUACY OF OBTAINED MODELS

F.F. Alekseev (KNPTU-KAI, 420111, Kazan, K.Marx str., 10)

Keywords: fuzzy logic controller, Lyapunov vector function, discrete nonlinear control systems

Введение. Разрабатываются методы декомпозиции и синтеза нечетких логических регуляторов для сложных децентрализованных интеллектуальных систем управления с оценкой области адекватности полученных моделей. Методы декомпозиции и синтеза децентрализованных интеллектуальных систем управления рассматриваются в работах Шильяка Д. Рассмотрим в основном децентрализованные методы декомпозиции (с децентрализованной пересекающейся декомпозицией).

Рассматриваются вопросы анализа и синтеза динамических свойств типа устойчивости (dd_0 -устойчивости множеств и т.д.) [1] на основе метода векторных функций Ляпунова нелинейных систем управления при наличии неопределенностей с учетом запаздываний. Для моделирования, анализа и синтеза таких систем выбирается нелинейная комбинированная, конечно-разностная или нечеткая модель Такаги-Сугено (Т-S-модель). Проводится синтез нечетких логических регуляторов (НЛР). В отличие от этих работ в настоящей работе синтез проводится на основе нечетких векторных функций Ляпунова (ВФЛ). Дополнительно применяется для уточнения нечеткой аппроксимации также регулятор с применением нейросетей на основе радиальных базисных функций (RBF NN).

1. Общая постановка задачи

Многие известные модели систем с дискретным временем (обыкновенные разностные уравнения, алгоритмы минимизации, конечные автоматы) сводятся к вычислительному процессу. Пусть система управления

описывается системой конечно-разностных уравнений (вычислительным процессом (ВП) [1],[7] или динамическим процессом общего вида).

$$C_{s+1}x_{s+1} = f_s(x(s), x(s - \tau_1(s)), \dots, x(s - \tau_p(s)), \varphi^1(s, \sigma_s), \varphi^2(s - \tau_1(s), \sigma(s - \tau_1(s))), \dots, \varphi^2(s - \tau_p(s), \sigma(s - \tau_p(s))), b, u_1, u_2), 0 \leq \tau_i(s) \leq \tau, i = 1, \dots, p. \quad (1.1)$$

Здесь $\varphi^1(s, \sigma_s) \in R^{m^1}$, $\varphi^2(s, \sigma_s) \in R^{m^2}$ - нелинейные вектора, удовлетворяющие условиям: $0 \leq \varphi_j^l(s, \sigma_{sj}) \sigma_{sj} \leq k_j^l \sigma_{sj}^2, 0 < k_j^l < \infty, j = \overline{1, m^l}, k_j^l$ - постоянные числа, $l = 1, 2$ (класс N_ϕ), $x_s \in R^n, s_0 \in Z^0 \subset Z, s \in Z_{s_0} = \{s \in Z_{s_0}: s_0 \leq s\}$, $b \in B$ - параметры (или постоянно-действующие возмущения); $Z = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$; $u_1: Z \times X \rightarrow U_1 \subseteq R^{m^1}$ - управление (четкое); $u_2: Z \times X \rightarrow U_2 \subseteq R^{m^2}$ - управление, определяемое нечетким логическим регулятором (НЛР); C_{s+1} - последовательность функций (операторов), действующих из X_b^s в X_b^s . Модель системы может быть обобщена в терминах временных шкал. По методу Т-С-систем [3] введем систему правил:

. T-S-Plant rule i: IF z_1 is μ_{i1} AND ... AND z_{ip} is μ_{ip} THEN

$$C_{is+1}x_{s+1} = f_{is}^a(x(s), x(s - \tau_1(s)), \dots, x(s - \tau_p(s)), \varphi_i^1(s, \sigma_s), \varphi_i^2(s - \tau_1(s), \sigma(s - \tau_1(s))), \dots, \varphi_i^2(s - \tau_p(s), \sigma(s - \tau_p(s))), b_i, u_1, u_2), 0 \leq \tau_i(s) \leq \tau, i = 1, \dots, p, \\ \sigma_s = C_{1i}(s)x_s + \sum_{j=1}^p C_{2j}^i(s)x(s - \tau_j(s)), \quad (1.1a) \\ x(s) = \psi(s), s \in [-\tau, 0], \tau_i(s) \leq \tau, i = 1, 2, \dots, r,$$

ELSE IF z_1 is μ_{i1} AND ... AND z_{ip} is μ_{ip} THEN

$$C_{is+1}x_{s+1} = f_{is}^{\hat{a}}(x(s), x(s - \tau_1(s)), \dots, x(s - \tau_p(s)), \varphi_i^1(s, \sigma_s), \varphi_i^2(s - \tau_1(s), \sigma(s - \tau_1(s))), \dots, \varphi_i^2(s - \tau_p(s), \sigma(s - \tau_p(s))), b_i, u_1, u_2), 0 \leq \tau_i(s) \leq \tau, i = 1, \dots, p, \\ \sigma_s = C_{1i}(s)x_s + \sum_{j=1}^p C_{2j}^i(s)x(s - \tau_j(s)), \quad (1.1b) \\ x(s) = \psi(s), s \in [-\tau, 0], \tau_i(s) \leq \tau, i = 1, 2, \dots, r$$

...

ELSE IF z_1 is μ_{i1} AND ... AND z_{ip} is μ_{ip} THEN....

$$C_{is+1}x_{s+1} = f_{is}^{\hat{a}}(x(s), x(s - \tau_1(s)), \dots, x(s - \tau_p(s)), \varphi_i^1(s, \sigma_s), \varphi_i^2(s - \tau_1(s), \sigma(s - \tau_1(s))), \dots, \varphi_i^2(s - \tau_p(s), \sigma(s - \tau_p(s))), b_i, u_1, u_2), 0 \leq \tau_i(s) \leq \tau, i = 1, \dots, p, \\ \sigma_s = C_{1i}(s)x_s + \sum_{j=1}^p C_{2j}^i(s)x(s - \tau_j(s)), \quad (1.1B) \\ x(s) = \psi(s), s \in [-\tau, 0], \tau_i(s) \leq \tau, i = 1, 2, \dots, r$$

где μ_{ij} нечеткое множество, $x \in R^n$ – вектор состояния системы; $u(s)$ вход, $\sigma_s \in R^m$ – выход, C_{1i}, C_{2j}^i – постоянные матрицы, r – число *IF – THEN* правил, $z_1(s), \dots, z_p(s)$ – входные переменные НЛР (the premise variables). $\tau_j(s) \leq \tau, j = 1, 2, \dots, p$.

Как правило, используется более простой случай:

. T-S-Plant rule i: IF z_1 is μ_{i1} and ... and z_{ip} is μ_{ip} THEN

$$\begin{aligned} C_{is+1}x_{s+1} &= f_{is}(x(s), x(s - \tau_1(s)), \dots, x(s - \tau_p(s)), \varphi_i^1(s, \sigma_s), \varphi_i^2(s - \tau_1(s), \sigma(s - \tau_1(s))), \dots, \\ &\quad \varphi_i^2(s - \tau_p(s), \sigma(s - \tau_p(s))), b_i, u_1, u_2), \quad 0 \leq \tau_i(s) \leq \tau, \quad i = 1, \dots, p, \\ \sigma_s &= C_{1i}(s)x_s + \sum_{j=1}^p C_{2j}^i(s)x(s - \tau_j(s)), \\ x(s) &= \psi(s), s \in [-\tau, 0], \tau_i(s) \leq \tau, i = 1, 2, \dots, r, \quad (1.2) \end{aligned}$$

где μ_{ij} нечеткое множество, $x \in R^n$ – вектор состояния системы; $u(s)$ вход, $\sigma_s \in R^m$ – выход, C_{1i}, C_{2j}^i – постоянные матрицы, r – число *IF – THEN* правил, $z_1(s), \dots, z_p(s)$ – входные переменные НЛР (the premise variables). $\tau_j(s) \leq \tau, j = 1, 2, \dots, p$.

На практике используется многозначная логика с расширенным алфавитом.

Метод ВФЛ широко применяется для анализа и синтеза динамических систем, является одним из точных математических методов, позволяющих исследовать широкий класс непрерывных, дискретных и гибридных систем управления. Рассмотрим комбинацию методов ФЛ и нечеткой математики. Для типовых задач теории управления. Модель системы рассмотрим в виде

$$\dot{x} = \bar{A}x + Bu, \quad u = Cx,$$

$\bar{A}, B, C$ – постоянные матрицы.

Представим систему в виде $\dot{x} = Ax$, $A = \bar{A} + BC$, для таких систем используем вектор-функцию Ляпунова [1].

$$V = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}^T$$

$$V_i(x, h, \dot{h}) = x^T \left[P_i^1(h) + P_i^2(\dot{h}) \right] x,$$

где $P_i^1 = \sum_{j=1}^r h_j P_j^1$, $P_i^2 = \sum_{j=1}^r \dot{h}_j P_j^2$.

$$h_j(z(t)) = \frac{\omega_j(z(t))}{\sum_j^r \omega_j(z(t))}, \quad \omega_j(z(t)) = \prod_{k=1}^p \mu_k^j(z_k(t)).$$

Вычислим производную компонент функции Ляпунова в силу системы

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, h, \dot{h}) &= x^T \left[\dot{P}^1(h) + \dot{P}^2(\dot{h}) + A^T(h)P^1(h) + A^T(h)P^2(\dot{h}) + P^1(h)A(h) + P^2(\dot{h})A(h) \right] x = \\ &= x^T \Theta(h, \dot{h}, \ddot{h}) x \end{aligned}$$

По методу Т-S-систем введем систему правил для нечеткого регулятора:

Т-S-Regulator rule i: IF z_1 is μ_{i1} and ... and z_{ip} is μ_{ip} THEN

$$u_2(s) = -F_i x_s, i = 1, 2, \dots, r.$$

Для всей системы управление (согласно НЛР) имеет вид

$$u(s) = -\sum_{i=1}^r w_i(z(s)) F_i x_s / \sum_{i=1}^r w_i(z(s)) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(s)) F_i x_s. \quad (1.3)$$

Для заданной пары $(x(s), u(s))$ выход нечеткой системы представляется в виде $(C_{s+1}^f$ - последовательность функций (операторов) из X_b^s в X_b^s . В частном случае C_{s+1}^f совпадает с C_{is+1} .

$$\begin{aligned} C_{s+1}^f x_{s+1} &= \left\{ \sum_{i=1}^r w_i(z(s)) [f_s(x(s), x(s-\tau_1(s)), \dots, x(s-\tau_p(s)), \varphi_i^1(s, \sigma_s), \varphi_i^2(s-\tau_1(s), \sigma(s-\tau_1(s))), \dots, \right. \\ &\quad \left. \varphi_i^2(s-\tau_p(s), \sigma(s-\tau_p(s))), b_i, u_1, u_2) \right] \} / \sum_{i=1}^r w_i(z(s)) = \\ &\sum_{i=1}^r h_i(z(s)) [f_s(x(s), x(s-\tau_1(s)), \dots, x(s-\tau_p(s)), \varphi_i^1(s, \sigma_s), \varphi_i^2(s-\tau_1(s), \\ &\quad \sigma(s-\tau_1(s))), \dots, \varphi_i^2(s-\tau_p(s), \sigma(s-\tau_p(s))), b_i, u_1, u_2) \}, \quad (1.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \left\{ \sum_{i=1}^r w_i(z(s)) [C_{1i}(s) x_s + \sum_{j=1}^p C_{2j}^i(s) x(s-\tau_j(s))] \right\} / \sum_{i=1}^r w_i(z(s)) = \\ &\sum_{i=1}^r h_i(z(s)) [C_{1i}(s) x_s + \sum_{j=1}^p C_{2j}^i(s) x(s-\tau_j(s))], \quad (1.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_i(z(s)) &= \prod_{j=1}^r \nu_{ij}(z_j(s)), \quad h_i(z(s)) = w_i(z(s)) / \sum_{i=1}^r w_i(z(s)). \quad \sum_{i=1}^r w_i(z(s)) > 0 \quad \forall \\ s, \quad h_i(z(s)) &\geq 0, i = 1, 2, \dots, r, \quad \sum_{i=1}^r h_i(z(s)) = 1 \quad \forall s. [1] \end{aligned}$$

Рассмотрим разностное неравенство с линейной разностной системой вида

$$v_{\tilde{n}s+1} = A_{\tilde{n}}(s) v_{\tilde{n}s} \quad [1],$$

где $A_c(s)$ – ω -периодическая матрица, $A_{\tilde{n}}(s) = (a_{ij}^c(s))$, с ВФЛ

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_{m_c})^T, \quad (1.6)$$

где компоненты ВФЛ, например, имеют вид $v_i = (C_i x_s)^T P_i C_i x_s$, $P_i = P_i^T > 0$ постоянные матрицы.

Теорема 1.1. Если существуют числа матрицы $P_i, i = 1, m_c$ такие, что выполняется

$$\begin{aligned} & -\sum_{j=1}^r h_j(z(s)) F_j x_s] P_{i_c} f_s(x(s), x(s - \tau_1(s)), \dots, x(s - \tau_p(s)), \varphi_i^1(s, \sigma_s), \\ & \varphi_i^2(s - \tau_1(s), \sigma(s - \tau_1(s))), \dots, \varphi_i^2(s - \tau_p(s), \sigma(s - \tau_p(s))), b_i, u_1, \\ & -\sum_{j=1}^r h_j(z(s)) F_j x_s] + x_s^T P_{i_c} x_s \geq 0, \end{aligned}$$

$i_c = \overline{1, n_c}$, $\sigma_s = C x_s$, $P_{\alpha i_c} = a_{i1}^c P_1 + \dots + a_{in_c}^c P_{n_c}$, $P_{i_c} > 0, i_c = \overline{1, n_c}$ - постоянные матрицы, то система (1.5) обладает свойством dd_0 -устойчивости [1] (нам здесь достаточно асимптотической устойчивости).

Аналогично может быть записана теорема с нечеткой ВФЛ с двумя вышеуказанными квадратичными слагаемыми относительно обобщенных координат и обобщенных скоростей.

2. Алгоритм синтеза на основе ВФЛ

Вычислительный процесс (ВП) [1]

$$C_{i+1} x_{i+1} = f_i(x_i, \dots, x_{i_0}, b), i \in Z_{i_0}, b \in B, x_{i_0} \in \Omega_b^{0i_0} \subseteq \Omega_b^{i_0} \quad (2.1)$$

может быть записан как управляемый вычислительный процесс

$$C_{i+1} x_{i+1} = f_i(x_i, \dots, x_{i_0}, b^0, u(\cdot)), i_0 \in Z^0, i \in Z_{i_0}, b^0 \in B^0, u(\cdot) \in U, x_{i_0} \in \Omega_{b^0}^{0i_0} \quad (2.2)$$

Пусть ВП (2.2) может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} C_{i+1} x_{i+1} = f_i(x_i, \dots, x_{i_0}, b^0) + \bar{f}_i(x_i, \dots, x_{i_0}, b^0) u(\cdot), i_0 \in Z^0, i \in Z_{i_0}, b^0 \in B^0, u(\cdot) \in U, \\ x_{i_0} \in \Omega_{b^0}^{0i_0} \quad (2.3) \end{aligned}$$

Выбирается квадратичная ВФЛ (1.6) $v = (v_1, v_2, \dots, v_{m_c})^T$ с компонентами $v_i = (C_i x_s)^T P C_i x_s, i = 1, \dots, m_c$, вычисляется первая разность компоненты v_i

$$\begin{aligned} \Delta v_j = C_{i+1} x_{i+1}^T P_j x_{i+1} - C_i x_i^T P_j x_i = \\ \{ f_i^T(x_i, \dots, x_{i_0}, b^0) + u_i^T \bar{f}_i^T(x_i, \dots, x_{i_0}, b^0) \} P_j \{ (f_i(x_i, \dots, x_{i_0}, b^0) + \\ + \bar{f}_i(x_i, \dots, x_{i_0}, b^0) u_i) \} - C_i x_i^T P_j C x_i \end{aligned}$$

и составляется выражение [6]

$$\begin{aligned} f_i^T P_j f_i + 2 f_i^T P_j \bar{f}_i u_i + u_i^T \bar{f}_i^T P_j \bar{f}_i u_i - \\ (f_{i-1}^T P_j f_{i-1} + 2 f_{i-1}^T P_j \bar{f}_{i-1} u_{i-1} + u_{i-1}^T \bar{f}_{i-1}^T P_j \bar{f}_{i-1} u_{i-1}) \leq \\ \leq a_{i1}^c x_i^T P_1 x_i + a_{i2}^c x_i^T P_2 x_i + \dots + a_{im_c}^c x_i^T P_{m_c} x_i, \end{aligned}$$

откуда получается

$$u_i^T \bar{A}_i u_i + \bar{B}_i u_i + \bar{C}_i - u_{i-1}^T \bar{A}_{i-1} u_{i-1} - \bar{B}_{i-1} u_{i-1} - \bar{C}_{i-1} \leq 0$$

при обозначениях

$$\bar{A}_i = \bar{f}_i^T(\cdot) P_j f_i(\cdot); \bar{B}_i = 2 f_i^T(\cdot) P_j \bar{f}_i(\cdot); \bar{C}_i = f_i^T(\cdot) P_j f_i(\cdot) - \sum_{j=1}^{m_c} x_i^T P_j x_i;$$

$$\bar{A}_{i-1} = \bar{f}_{i-1}^T(\cdot) P_j f_{i-1}(\cdot); \bar{B}_{i-1} = 2 f_{i-1}^T(\cdot) P_j \bar{f}_{i-1}(\cdot); \bar{C}_{i-1} = f_{i-1}^T(\cdot) P_j f_{i-1}(\cdot).$$

Обозначим $U_i = u_i^T \bar{A}_i u_i + \bar{B}_i u_i + \bar{C}_i - u_{i-1}^T \bar{A}_{i-1} u_{i-1} - \bar{B}_{i-1} u_{i-1} - \bar{C}_{i-1}$. Вычисляется первый дифференциал $dU = 2du_i^T \bar{A}_i u_i + du_i^T \bar{B}_i - 2du_{i-1}^T \bar{A}_{i-1} u_{i-1} - du_{i-1}^T \bar{B}_i$.

Откуда получается

$$2\bar{A}_i u_i + \bar{B}_i^T - 2\bar{A}_{i-1} u_{i-1} - \bar{B}_i = 0. \text{ В векторно-матричной форме}$$

$$\begin{pmatrix} 2\bar{A}_i & 0 \\ 0 & -2\bar{A}_{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_i^T \\ -\bar{B}_{i-1}^T \end{pmatrix} = 0,$$

откуда получается

$$\begin{pmatrix} u_i \\ u_{i-1} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{A}_i & 0 \\ 0 & -\bar{A}_{i-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{B}_i^T \\ -\bar{B}_{i-1}^T \end{pmatrix} = 0$$

Можно учесть всю предысторию

$$\begin{pmatrix} u_i \\ u_{i-1} \\ u_{i-2} \\ u_{i-3} \\ \dots \\ u_{m_c-1} \\ u_{m_c} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{A}_i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{A}_{i-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{i-2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{A}_{i-3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{A}_{i_0+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\bar{A}_{i_0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{B}_i^T \\ -\bar{B}_{i-1}^T \\ \bar{B}_{i-2}^T \\ -\bar{B}_{i-3}^T \\ \dots \\ \bar{B}_{i_0+1}^T \\ -\bar{B}_{i_0}^T \end{pmatrix}$$

Замечание. Знак меняется согласно формуле $(-1)^{2m-1}, i=1, m_c$.

3. Система с секторными нелинейностями

Рассматривается система с секторными нелинейностями [6]

$$x_{s+1} = Ax_s + B\varphi(\sigma) + B_1 u_s, \sigma = Cx, \quad (3.1)$$

где $A - n \times n$ -, $B - n \times m$ -, $B_1 - n \times m_1$ -, $C - m \times n$ - постоянные матрицы, $\varphi(\sigma) \in N_\varphi$. Опять рассматриваем квадратичную ВФЛ $v = (v_1, v_2, \dots, v_{m_c})^T$ с компонентами $v_i = x_s^T P_j x_s$, $j=1, \dots, m_c$. Первая разность i -й компоненты v_i в силу (3.1)

$$\Delta v_i = x_s^T G_i x_s + 2\varphi^T B^T P A x_s + \varphi^T B^T P B \varphi + 2x_s^T B^T P B_1 u + 2x_s^T A^T B u_s + u_s^T B^T P_i B u_s, \\ A^T P_i A - P_i = G_i.$$

Записывается разностная система $\Delta v < A^c v$, где $\Delta v_s = (\Delta v_{s1}, \Delta v_{s2}, \dots, \Delta v_{sm_c})^T$ - вектор первых разностей в силу (3.1), или

$$\begin{aligned} x_s^T G_i x_s + 2\varphi^T B^T P A x_s + \varphi^T B^T P B \varphi + 2x_s^T B^T P B_1 u + 2x_s^T A^T B u_s + u_s^T B^T P_i B u_s \leq \\ \leq a_{i1}^c v_1 + a_{i2}^c v_2 + \dots + a_i^c v_{m_c}. \end{aligned}$$

Преобразуем к виду, позволяющему найти локально-оптимальное управление

$$\begin{aligned} u_s^T B^T P_i B u_s + 2(x_s^T B^T P B_1 + x_s^T A^T B) u_s + x_s^T G_i x_s + \\ + 2\varphi^T B^T P A x_s + \varphi^T B^T P B \varphi - \sum_{j=1}^{m_c} a_{ij}^c x_s P_j x_s \leq 0 \end{aligned}$$

Разностное уравнение теперь запишем в виде $u_s^T \bar{A} u_s + \bar{B} u_s + \bar{C} \leq 0$, где обозначено

$$\begin{aligned} \bar{A}_i = B^T P_i B (> 0); \bar{B}_i = 2(x_s^T B^T P B_1 + x_s^T A^T B); \\ \bar{C}_i = x_s^T G_i x_s + 2\varphi^T B^T P A x_s + \varphi^T B^T P B \varphi - \sum_{j=1}^{m_c} a_{ij}^c x_s P_j x_s \end{aligned}$$

Обозначим $U_i = u_s^T \bar{A}_i u_s + \bar{B}_i u_s + \bar{C}_i$. Вычислим первый дифференциал

$$dU_i = du^T \bar{A}_i u_s + u^T \bar{A}_i du_s + du_s^T \bar{B}_i^T = 2du_s^T \bar{A}_i u_s + du_s^T \bar{B}_i^T,$$

откуда получается

$$2\bar{A}_i u_s + \bar{B}_i^T = 0 \quad i=1, \dots, m_c \quad \text{Или}$$

$$2\bar{A}_1 u_s + \bar{B}_1^T = 0; \quad 2\bar{A}_2 u_s + \bar{B}_2^T = 0; \quad 2\bar{A}_3 u_s + \bar{B}_3^T = 0.$$

Откуда получим разностное неравенство

$$u_s \leq -\frac{1}{2} \bar{A}^{-1} \bar{B}^T$$

при выполнении достаточных условий экстремума $d^2 U_i > 0$, $i=1, \dots, m_c$, где

$$d^2 U_i = 2du_s^T \bar{A}_i u_s > 0, \quad i=1, \dots, m_c. \quad \text{Обозначим } Q_i = -\frac{1}{2} \bar{A}^{-1} - m_c \times m_c - \text{матрица,}$$

$\bar{B}$ - $1 \times n$ - матрица. Тогда

$$\begin{aligned} u_1 < q_{11} \bar{b}_1 + q_{12} \bar{b}_2 + \dots + q_{1m_c} \bar{b}_{m_c}; \quad u_2 < q_{21} \bar{b}_1 + q_{22} \bar{b}_2 + \dots + q_{2m_c} \bar{b}_{m_c}; \\ \dots \\ u_{m_c} < q_{m_c 1} \bar{b}_1 + q_{m_c 2} \bar{b}_2 + \dots + q_{m_c m_c} \bar{b}_{m_c}. \end{aligned}$$

На основе работы [2] запишется система правил при описанных в [2] функциях принадлежности (см. рис.). Управление выбирается на основе

выражения $u = \frac{\sum_{i=1}^r A_i u_i}{\sum_{i=1}^r A_i}$, $A_i = \alpha_i$, $\alpha_i \neq 0$, с применением введенных функций принадлежности.

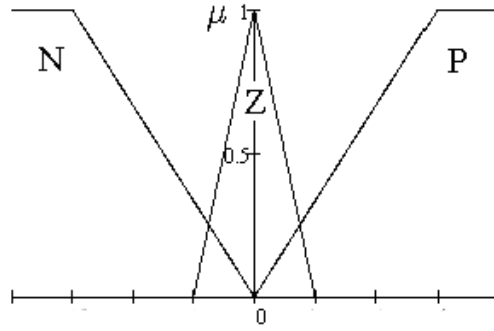


Рис.1. Функции принадлежности x_1 и x_2

4. Линейная дискретная система управления

Для линейной системы

$$x_{s+1} = Ax_s + Bu_s, \quad (4.1)$$

$A - n \times n$ – $B - n \times m$ – постоянные матрицы. ВФЛ также выбирается в виде $v = (v_1, v_2, \dots, v_{m_c})^T$ с компонентами $v_i = x_s^T P_j x_s$, $j = 1, \dots, m_c$; $A^T P_i A - P_i = G_i$.

Выбирается линейная разностная система $\Delta v < A^c v$, $\Delta v_s = (\Delta v_{s1}, \Delta v_{s2}, \dots, \Delta v_{sm_c})^T$.

Или $x_s^T G_i x_s + 2x_s^T A^T B u_s + u_s^T B^T P_i B u_s \leq a_{i1}^c v_1 + a_{i2}^c v_2 + \dots + a_i^c v_{m_c}$ или

$u_s^T B^T P_i B u_s + 2x_s^T A^T B u_s \leq \sum_{j=1}^{m_c} a_{ij}^c x_s^T P_j x_s - x_s^T G_i x_s$, $i = 1, \dots, m_c$. Введем обозначения

$$\bar{A} = B^T P_i B \quad (> 0); \quad \bar{B} = 2x_s^T A^T B; \quad \bar{C}_i = \sum_{j=1}^{m_c} a_{ij}^c x_s^T P_j x_s - x_s^T G_i x_s.$$

Разностное уравнение принимает вид

$$u_s^T \bar{A} u_s + \bar{B} u_s - \bar{C}_i \leq 0$$

Обозначим $U_i = u_s^T \bar{A}_i u_s + \bar{B}_i u_s + \bar{C}_i$. Вычислим первый дифференциал

$$dU = du^T \bar{A}_i + u^T \bar{A}_i du_s + du_s^T \bar{C}_i = 2du_s^T \bar{A}_i u_s + du_s^T \bar{B}_i.$$

Из уравнений

$$2\bar{A}_i u_s + \bar{B}_i^T = 0, i = 1, \dots, m_c \text{ или}$$

$$2\bar{A}_{1-i} u_s + \bar{B}_1^T = 0; \quad 2\bar{A}_2 u_s + \bar{B}_2^T = 0; \quad \dots \quad 2\bar{A}_{m_c} u_s + \bar{B}_{m_c}^T = 0;$$

определяется регулятор

$$u_s = -\frac{1}{2} \bar{A}_i^{-1} \bar{B}_i^T$$

при выполнении достаточного условия экстремума

$$d^2 U_i > 0 \text{ или } d^2 U_i = 2du_s^T \bar{A}_i du_s > 0 \text{ или } \bar{A}_i > 0, i = 1, \dots, m_c.$$

Аналогично запишется теорема ($Q_i = -\frac{1}{2}\bar{A}_i^{-1}, \bar{A}_i = B^T P_i B$ (> 0);
 $\bar{B} = 2x_s^T A^T B$;

$$\bar{C}_i = \sum_{j=1}^{m_c} a_{ij}^c x_s P_j x_s - x^T G_i x_s).$$

На каждом интервале дискретности применим нейросетевую добавку для нейронечеткой аппроксимации системы управления, основанной на Т-S-модели. FLC-регулятор и RBF NN –регулятор в случае правильной настройки в процессе управления устраняют автоматически все ошибки аппроксимацию. Выбранный вариант (RBF NN –регулятор) позволяет в реальном времени проводить необходимую настройку. Выберем нейронную сеть, основанную на радиально-базисных функциях (RBF NN controller)/(RBF сеть). RBF NN [8] предназначена для аппроксимации функций, заданных в неявном виде, набором шаблонов. RBF NN имеет единственный скрытый слой, только нейроны скрытого слоя имеют нелинейную активационную функцию. Для настройки выбираем для рассмотрения уже синтезированный процесс на основе модального синтеза или на основе LQR-метода или FLC-нечеткого регулятора. Рассмотрим следующие обозначения: $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ - вектор координат центра активационной функции нейрона скрытого слоя; σ_j - ширина окна активационной функции j -

го нейрона скрытого слоя; $f(X, c) = e^{\frac{-\sum_{j=1}^n (X_j - c_j)^2}{\sigma^2}}$ - радиально-симметричная активационная функция нейрона скрытого слоя; $\omega_{i,j}$ - вес связи между i -м нейроном исходного слоя j -м нейроном скрытого слоя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. Под ред. А.А.Воронова, В.М.Матросова. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат.лит., 1987. 312 с.
2. Tomescu M.-L. Preitl S. , Precup R.-E., Tar J.K.. Stability analysis Method for fuzzy Control Systems Dedicated Controlling Nonlinear Processes. Acta Polytechnica Hungarica. V. 4. No. 3. 2007. Pp. 127-141.
3. Takagi T., Sugeno M.. Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control. IEEE Trans. Systems Man Cybernet. 15 (1) 1985. Pp. 116-132.
4. Cao Y.-Y., Frank P.M.. Stability and synthesis of nonlinear time-dlay systems via linear Takagi-Sugeno fuzzy models. Fuzzy Sets and Systems. 124 (2001) 213-229. Pp. 213-229.

5. Алексеев Ф.Ф., Бильченко Г.Г., Бородин В.М.. Теоремы об устойчивости управляемых систем. В кн.: Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1991. С. 11-20

6. Алексеев Ф.Ф., Алексеев А.Ф., П.С.Широков П.С. Синтез нелинейных нечетких систем управления на основе метода векторных функций Ляпунова. Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием. Москва, РУДН. 23-27 апреля 2012 г. Москва. Российский университет дружбы народов. 2012. С. 160-162.

7. Mozelli L.A., Palhares R.M. Stability analysis of Takagi-Sugeno fuzzy systems via LMI: methodologies based on a new fuzzy Lyapunov function. Revista Controle & Automacao/Vol.22 no.6/Novembro e Dezembro 2011, pp.664-676.

МОДИФИЦИРОВАННАЯ РЕВЕРСИВНАЯ ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНАЯ МОДУЛЯЦИИ

А.У. Алпаров, канд. техн. наук, доцент (КНИТУ-КАИ,
г. Казань).E-mail: askar_706@mail.ru

А.Е. Благов, ст. преподаватель (КНИТУ-КАИ,
г. Казань), mail: bae311265@mail.ru

MODIFIED REVERSIBLE PULSE WIDTH MODULATION

A. Alparov Ph.D., Associate Professor,
KNPTU-KAI, Kazan

A. Blagov Senior Lecturer,
KNPTU-KAI, Kazan

Keywords: modulation; pulse; static characteristic; dead band.

При использовании ЭВМ для управления электродвигателями постоянного тока, пропорциональными электрогидравлическими или пневматическими клапанами и другими исполнительными устройствами в сложных системах управления (таких как управление летательными аппаратами, судовыми системами или силовыми установками [2 с.88]), требующими реверсирования тока или его изменения проходящего через нуль, применяется широтно-импульсная модуляция (ШИМ).

В основном используются два вида реверсивной ШИМ. Модуляция, когда в выходном сигнале модулятора постоянная составляющая изменяется за счет изменения соотношения между длительностями положительного T_+ и отрицательного T_- импульсов чаще всего при постоянном периоде сигнала T (Рис 1). При этом амплитуды положительного и отрицательного импульсов одинаковы $U_{\text{пит}}$, а соотношение между T_+ и T_- характеризуется коэффициентом команды $K_k = \frac{T_+ - T_-}{T}$. Постоянная составляющая выходного сигнала $U_{\text{вых ср}} = U_{\text{пит}} \times K_k$. Такой вид ШИМ называется ДРМ-2 [1, с.242]

Другой вид реверсивной ШИМ называется ОРМ [1, с.242] и при такой модуляции для изменения постоянной составляющей выходного сигнала изменению подвергается соотношение между длительностью импульса T_n и паузы (Рис 2), при чем в выходном сигнале присутствуют импульсы одной полярности, зависящей от необходимой полярности выходного сигнала.

ла. Коэффициент команды для ОРМ определяется выражением $K_k = \frac{T_n}{T}$, где T_n – длительность импульса, а T – постоянный период сигнала. Длительность паузы равна $T_n = T - T_{\text{и}}$.

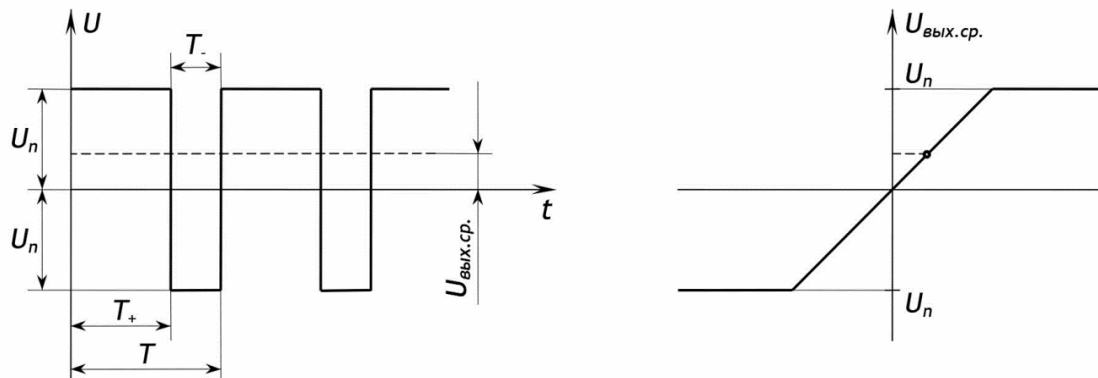


Рис. 1. ДРМ-2

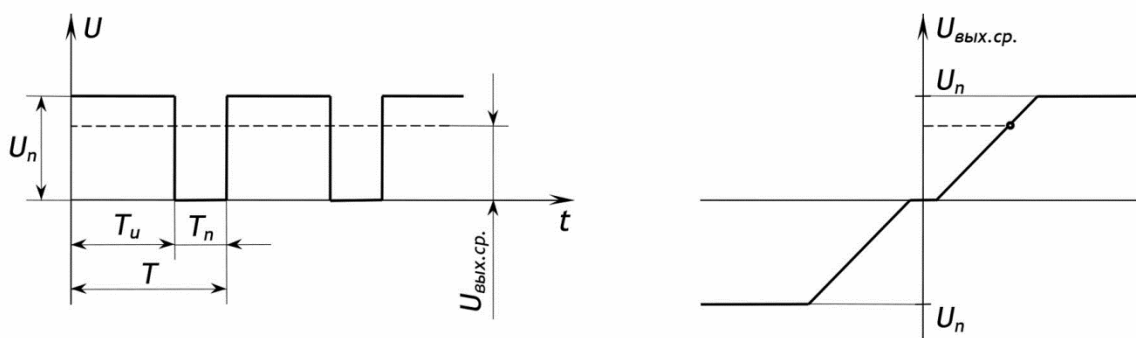


Рис. 2. ОРМ

Сравнение методов модуляции ДРМ-2 и ОРМ позволяет сделать вывод, что эти виды модуляции имеют свои недостатки и преимущества.

1. КПД ДРМ-2 зависит от величины K_k и при $K_k \geq 1$, без учета потерь на ключах, стремиться к 100%, По мере уменьшения K_k увеличивается длительность импульсов полярности противоположной полярности K_k за счет уменьшения длительность импульсов полярности совпадающей с полярностью K_k Таким образом, все больше становится время реверсирования тока нагрузки, что снижает КПД. При $K_k \rightarrow 0$ коэффициент полезного действия ДРМ-2 теоретически и практически стремится к 0, так как среднее значение тока нагрузки равно нулю, а потребление тока определяется только напряжением питания и сопротивлением нагрузки. Но при этом статическая характеристика модулятора проходит через нуль и не имеет зоны не чувствительности.

При малых K_k в модуляторе ОРМ необходимо формировать весьма малые длительности T_n , что вызывает появление аппаратных и схемных

нических проблем и вследствие этого появление зоны нечувствительности в статической характеристике модулятора вблизи нуля. При модуляции ДРМ-2 этой проблемы нет.

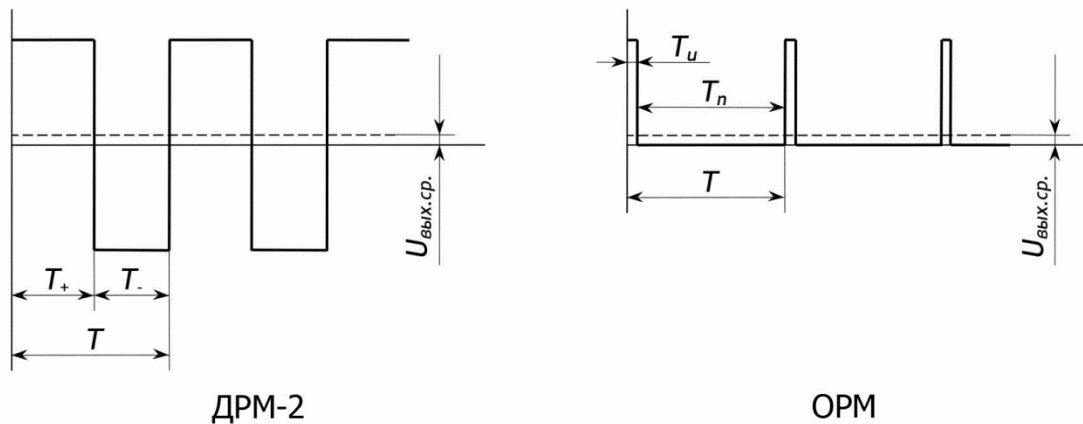


Рис. 3. Вид выходного сигнала при малом K_k

2. В модуляторе ДРМ-2 существует аппаратная проблема «сквозного» тока. Суть проблемы в следующем: нагрузка модулятора включается в мостовую схему из четырех управляемых ключей, причем в любой момент времени должны быть открыты только два ключа, определяя направление протекания тока через нагрузку.

Вследствие не идеальности ключей время открывания и закрывания ключей не равны нулю и в процессе переключения полярности тока, протекающего через нагрузку, открытыми могут оказаться все четыре ключа (Рис 4).

В этот момент нагрузка и источник питания модулятора оказываются замкнутым на параллельную цепь из двух последовательно включенных открытых ключей. При малом омическом сопротивлении ключей защита блока питания отключает модулятор или, при отсутствии защиты, происходит авария.

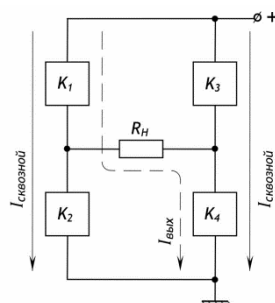


Рис. 4. Включение нагрузки

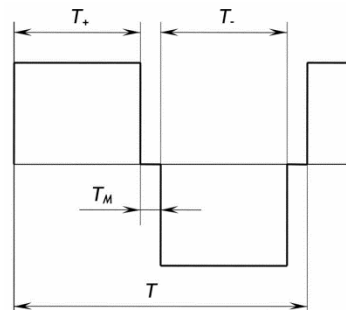


Рис. 5. «Мертвое» время

Для устранения «сквозного» тока необходимо введение «мертвого» времени T_m , (Рис 5) когда при переключении все четыре ключа моста за-

крыты. Продолжительность этого времени должна превышать время переключения управляющих ключей и зачастую не превышает $0,01 \div 0,03$ периода T . Максимальное значение $U_{\text{вых ср}}$ при $K_k = 1$ уменьшается на величину напряжения на двух открытых ключах моста и ещё, из-за наличия «мертвого» времени, на $2 \div 6\%$ относительно $U_{\text{пит}}$.

В данной работе предлагается реализовать алгоритм формирования ШИМ сигнала сочетающий точность и аппаратную реализуемость ДРМ-2 при малых K_k и преимущества высокого КПД ОРМ при больших сигналах. Назовем такой вид модуляции **М**одифицированной **Р**еверсивной широтно импульсной **М**одуляцией (МРМ).

При больших $K_k \geq \beta$, где β зависит от характера нагрузки и аппаратных возможностей, сигнал ШИМ формируется как сигнал ОРМ, однополярные импульсы переменной длительности при постоянном периоде $T = T_{\text{и}} + T_{\text{п}}$. При $K_k < \beta$ сигнал ШИМ двух полярный, но отличается от ДРМ-2 тем что импульсы одной полярности, совпадающей по знаку с K_k , имеют постоянную длительность равную $(T_{\text{и}} + T_{\text{п}})\beta = T\beta$, а импульсы другой полярности имеют длительность определяемую из соотношения $K_k = \frac{T_+ - T_-}{T}$, где $T = T_+ + T_- = T_{\text{и}} + T_{\text{п}}$.

При формировании МРМ по такому алгоритму при $K_k > \beta$ сохраняется высокий КПД ОРМ, а при $K_k < \beta$ сохраняется высокая точность и воспроизводимость нуля не хуже чем в ДРМ-2 (Рис 6). Оценить величину коммутационных потерь, определяющих КПД без учета потерь на ключах моста, при $K_k = 0$ можно как те же потери что и в ДРМ-2, но уменьшенные в $1/\beta^2$

раза. Потери при $\beta > K_k > -\beta$ изменяются от максимума, определенного при $K_k = 0$, до 0 на краях этого диапазона. Тепловые потери в ключах, в зависимости от физической природы применяемых в ключах элементов, определяются падением напряжения на них. Что составляет $1,4 \div 2$ вольта для ключей на биполярных транзисторах, тиристорах или IGBT или зависят от тока и $R_{\text{ds(on)}}$ -сопротивления ключа в открытом состоянии, которое может составлять от единиц до сотен мОм в ключах на основе MOSFET.

Другие вопросы, связанные с состоянием нагрузки и ключей в процессе коммутации и в паузе между импульсами, могут решаться схемотехническими, аппаратными или программными методами, не затрагивая алгоритмов модуляции. При размыкании ключей коммутирующих нагрузку индуктивного характера возникает ЭДС самоиндукции, которая может привести к электрическому пробоему одного или реже нескольких ключей, и вторая проблема – нагрузка, оставшаяся разомкнутой в паузе между импульсами. Если решение защиты от пробоя ключей решается схемотехническими методами, то решение проблемы поведения нагрузки в паузе между импульсами не так просто.

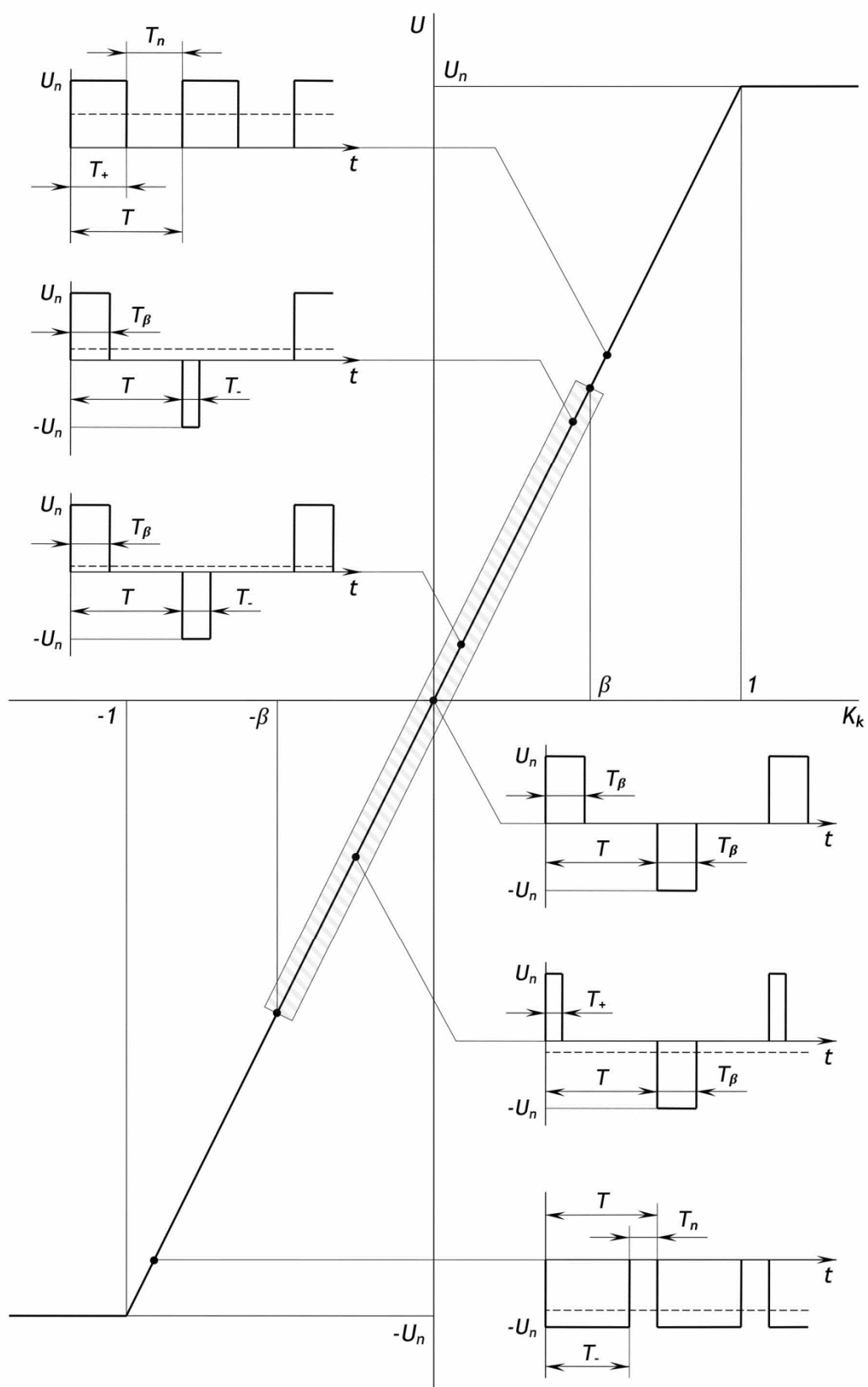


Рис. 6. Выходные сигналы при МРМ

Если нагрузка модулятора электродвигатель, то его якорь, замкнутый на сопротивление, находится в режиме динамического торможения и создает тормозящий момент пропорциональный скорости вращения и обратно пропорциональный сопротивлению в цепи якоря. Если цепь якоря разомкнута, то якорь ведет себя как тело, с некоторым трением вращающееся по инерции на оси. Величины момента трения и момента динамического торможения могут различаться на порядки. Если двигатель работает в условиях, когда нагрузка на его валу может существенно изменяться, динамика его поведения может зависеть от состояния, в каком находится двигатель при паузах ШИМ. Следовательно, надо обеспечить возможность, при необходимости, программно создавать режим динамического торможения, закорачивая нагрузку во время паузы между импульсами.

Предлагается следующая схема (Рис 7) МРМ-модулятора с микропроцессором, элементами гальвано развязки, ключами на MOSFET с драйверами диодами искра гашения (для уменьшения ЭДС самоиндукции).

При $|\dot{K}_k| \geq 1$ ключи в зависимости от полярности K_k открыты постоянно. В интервале $1 > |\dot{K}_k| > \beta$ сигнал, управляющий ключами, на время зависящее от величины K_k . подается в цепи управления ключей K_1 , K_4 или K_2 , K_3 определяя полярность выходного напряжения.

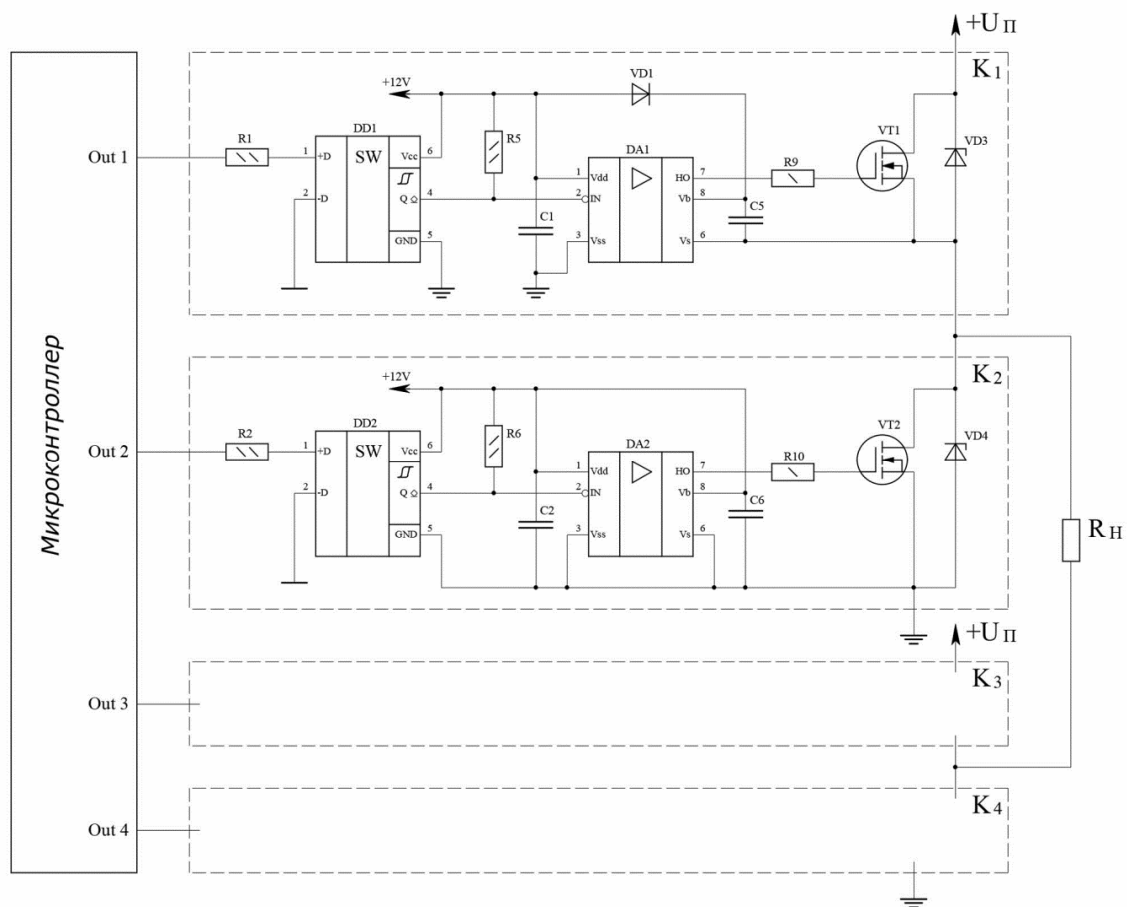


Рис. 7. Схема МРМ модулятора

При необходимости использования в паузе режима динамического торможения, в алгоритм модуляции вводится «мёртвое» время и на время паузы включаются в открытое состояние ключи моста K_1 , K_3 или K_2 , K_4 (Рис 7). По окончании режима динамического торможения после «мёртвого» времени вновь включаются ключи на подачу тока в нагрузку. Таким образом в нагрузке протекают импульсы тока одной полярности чередуясь с паузами в течении которых, при необходимости, может осуществляться режим динамического торможения.

При $\square K_k \square \leq \beta$ сигнал, управляющий ключами, на время импульса T_i зависящее от K_k , подается в цепи управления ключей K_1 , K_4 или K_2 , K_3 , определяя полярность и среднюю величину выходного напряжения модулятора. При $K_k \leq \beta$ необходимость введения «мертвого» времени и режима динамического торможения не возникает так как импульсы чередуются с паузами, а момент динамического торможения на валу двигателя при малых скоростях незначителен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маханько А.А. Особенности формирования ШИМ сигналов в микропроцессорных системах управления // Технические науки - от теории к практике. – Новосибирск: Ассоциация научных сотрудников "Сибирская академическая книга", 2016. – № 6 (54) – С. 20-29.
2. Маханько А. А., Соколова Г. П. Бесклапанный четырёхтактный двигатель внутреннего сгорания // Знание. – Киев: Serenity-Group, 2016. – № 5-1 (34) – С. 87-92.
3. Михальченко Г. Я., Муликов Д. С., Михальченко С. Г. Определение границ устойчивости нелинейных импульсных систем силовой электроники // Электромеханические преобразователи энергии: Материалы VII Международной научно-технической конференции – Томск, 14–16 октября 2015 г. / Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2015. – С 238-245

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ ЦЕЛИ В ОПТИЧЕСКОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЕ

С.Х. Аль Барри (КНИТУ-КАИ, Россия, 420111, Казань, К.Маркса, 10)

E-mail: samoalb@gmail.com

IDENTIFICATION PARAMETERS OF ANGULAR MOVEMENT TARGET MODEL IN THE OPTICAL TRACKING SYSTEM

S.H. Al Barry (KNPTU-KAI, 420111, Kazan, K.Marx str., 10)

Keywords: an optical device on a movable base, identification parameters of the movement target model, prediction the movement of the target

Введение. Задача оценивания координат и скоростей подвижных объектов по последовательности измерений, формируемых радиолокационной или оптико-электронной системой, является основной задачей для любой системы слежения за целью. Для ее решения разработано значительное число алгоритмов, базирующихся, в основном, на известном рекуррентном алгоритме фильтра Калмана, эффективно реализуемом на цифровых вычислителях [1,2]. Однако при решении прикладных задач не всегда удается обеспечить заданную точность оценивания или предсказания положения цели. Обусловлено это в первую очередь нелинейным характером моделей движения цели и измерений. При этом упрощение нелинейных моделей, например, при использовании расширенного фильтра Калмана, может существенно снизить эффективность алгоритмов оценивания и предсказания значений координат и скоростей в реальных системах слежения за целями.

В связи с этим в данном докладе предлагается алгоритм предсказания углового положения цели для оптической следящей системы с использованием нелинейной модели ее углового движения. При этом предполагается, что на конечном интервале времени слежения цель движется прямолинейно с постоянной скоростью, что часто имеет место на практике.

Постановка задачи. Рассматривается пространственная модель движения цели в неподвижной системе координат $S_0(x_0, y_0, z_0)$, связанной с землей, которая принимается инерциальной. При этом оси x_0, y_0 расположены в плоскости горизонта, ось z_0 направлена вертикально вверх.

Будем полагать, что на интервале времени $[t^{(k)}, t^{(k+1)}]$, $k = 0, 1, 2, \dots$ цель движется с постоянной скоростью по прямой линии, проекции которой на плоскости системы координат S_0 не проходят через начало координат.

Рассмотрим сначала проекцию траектории движения цели на горизонтальную плоскость $S_0(x_0, y_0, 0)$. При этом, как показано на рис. 1, точка С

движется с постоянной скоростью V_C . Введем вспомогательную систему координат $S'_0(x'_0, y'_0, 0)$ так, чтобы ось Ox'_0 была параллельна проекции траектории движения цели.

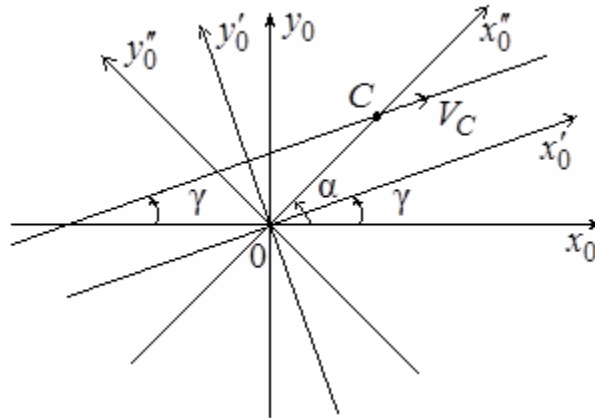


Рис. 1. Проекция прямолинейной траектории движения цели (точка C) на плоскость $S_0(x_0, y_0, 0)$

Тогда здесь можно записать:

$$\begin{aligned} x'_0 &= x_0 \cos \gamma + y_0 \sin \gamma, \\ y'_0 &= -x_0 \sin \gamma + y_0 \cos \gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \gamma) = \frac{x'_0}{y'_0}. \quad (2)$$

Продифференцируем выражение (2) с учетом (1), $\gamma = \text{const}$, $y'_0 = \text{const}$, из которого получим уравнение для угла азимута:

$$\dot{\alpha} = a_\alpha \sin^2(\alpha - \gamma) = a_0 + a_1 \sin 2\alpha + a_2 \cos 2\alpha, \quad (3)$$

где $a_\alpha = \frac{-\dot{x}'_0}{y'_0}$, $a_0 = 0,5a_\alpha$, $a_1 = -a_0 \sin 2\gamma$, $a_2 = -a_0 \cos 2\gamma$ – постоянные коэффициенты.

Введем вектора $a = [a_0 \ a_1 \ a_2]^T$, $\varphi(\alpha) = [1 \ \sin 2\alpha \ \cos 2\alpha]^T$, тогда уравнение (3) можно записать в виде:

$$\dot{\alpha} = a^T \varphi(\alpha). \quad (4)$$

Поскольку по условию задачи оптический прибор следит за движением цели с заданной точностью, введем подвижную систему координат $S''_0(x''_0, 0, z_0)$, где ось координаты x''_0 проходит через точку C (рис.1).

Тогда аналогично получим уравнение для угла места:

$$\dot{\theta} = b_0 \sin^2(\theta - \beta) = b_0 + b_1 \sin 2\theta + b_2 \cos 2\theta, \quad (5)$$

где $b_0 = \frac{-\dot{\tilde{x}}'_0}{\dot{\tilde{z}}'_0}$, $b_0 = 0,5b_0$, $\tilde{x}'_0 = x''_0 \cos \beta + z_0 \sin \beta$, $x''_0 = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha$, $\tilde{z}'_0 = \text{const}$,

$b_1 = -b_0 \sin 2\beta$, $b_2 = -b_0 \cos 2\beta$, β – постоянный угол (аналогичный углу γ).

Выражение для производной $\dot{\tilde{x}}'_0$ будет иметь вид:

$$\dot{\tilde{x}}'_0 = \left[(\dot{x}_0 \cos \alpha + \dot{y}_0 \sin \alpha) + (-x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha) \dot{\alpha} \right] \cos \beta + \dot{z}_0 \sin \beta.$$

Учитывая, что $-x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha = 0$, $\dot{x}_0 \cos \alpha + \dot{y}_0 \sin \alpha = \dot{l}$, где $l = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, получим:

$$\dot{\tilde{x}}'_0 = \dot{l} \cos \beta + \dot{z}_0 \sin \beta.$$

Уравнение (5) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & b_0 + b_1 \sin 2\theta + b_2 \cos 2\theta + b_3 \sin \alpha + b_4 \cos \alpha + \\ & + b_5 \sin(\alpha - 2\theta) + b_6 \cos(\alpha - 2\theta) + b_7 \sin(\alpha + 2\theta) + b_8 \cos(\alpha + 2\theta), \end{aligned} \quad (6)$$

где $b_i, i = \overline{0,8}$ – постоянные коэффициенты. С помощью векторов

$$\psi(\theta, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \sin 2\theta & \cos 2\theta & \sin \alpha & \cos \alpha & \sin(\alpha - 2\theta) & \cos(\alpha - 2\theta) & \sin(\alpha + 2\theta) & \cos(\alpha + 2\theta) \end{bmatrix}^T,$$

$b = [b_0 \ b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \ b_6 \ b_7 \ b_8]^T$ уравнение (6) можно переписать в виде:

$$\dot{\theta} = b^T \psi(\theta, \alpha). \quad (7)$$

Если предположить, что на интервале времени $[t^{(k)}, t^{(k+1)}]$ значение $\dot{l} \approx \text{const}$, то в уравнении (5) коэффициенты b_0, b_1, b_2 будут постоянными и можно записать:

$$\dot{\theta} = b^T \psi(\theta), \quad (8)$$

где $b = [b_0 \ b_1 \ b_2]^T$, $\psi(\theta) = [1 \ \sin 2\theta \ \cos 2\theta]^T$.

Таким образом, для принятых условий движения цели задача определения положения цели сводится к идентификации неизвестных постоянных векторов a и b .

Решение задачи. Рассмотрим способ оценивания координат $\hat{a}$, $\dot{\hat{a}}$ и $\hat{\theta}$ на интервале времени $[t^{(k)}, t^{(k+1)}]$ за время наблюдения Δt_n по результатам измерений в дискретные моменты времени $t_i = iT$ при $i = \overline{0, N}$; $t_0 = t^{(k)}$ с периодом дискретности $T = \Delta t_n / N$:

$$\alpha_n(t_i) = \alpha(t_i) + \xi_\alpha(t_i), \quad (9)$$

$$\theta_{\text{и}}(t_i) = \theta(t_i) + \xi_{\theta}(t_i), \quad (10)$$

Здесь ξ_{α} , ξ_{θ} – помехи измерений от датчиков углов поворотного устройства оптического прибора и гироскопических датчиков углов поворота основания прибора, вызванного упругими колебаниями транспортного средства.

Оценивания углов проводится независимо, поэтому приведем способ их оценки на примере угла азимута. Также как и в работе [3] будем использовать вспомогательную линейную модель движения цели, которая является достаточно универсальной в различных приложениях [4]. Отметим, что в отличие от работы [3], здесь в оптической следящей системе проводится измерение не координат цели, а ее угловое положение.

Для дискретных моментов времени $t_i = iT$ уравнение модели для угла α_i имеет вид:

$$\begin{aligned} x_i &= Ax_{i-1} + bw_i, \\ z_i &= h^T x_i + v_i, \end{aligned} \quad (11)$$

где $x_i = [\alpha_i \quad \dot{\alpha}_i]^T$ – вектор состояния, $\dot{\alpha}_i$ – угловая скорость; $z_i = \alpha_{\text{и}}(t_i)$ – измеряемый выход; $w_i \sim N(0, Q)$ и $v_i \sim N(0, R)$ – входной сигнал и помеха измерения в виде белого шума с нулевым средним и дисперсией Q и R соответственно; $A = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0,5T^2 \\ T \end{bmatrix}$, $h^T = [1 \quad 0]$.

Оценка вектора состояния $\hat{x}_i$ для сравнения проводится с помощью двух фильтров: ансамбльный фильтр Калмана (АФК) [5] и робастный фильтр Калмана (РФК) [6]. При этом полученные оценки вектора $\hat{x}_i$ используются в уравнении (3) для идентификации вектора параметров a или параметров a_{α} , γ в реальном времени.

Идентификации вектора параметров a модели (3) проводится с помощью линейного метода наименьших квадратов (МНК) [7], а для оценки параметров a_{α} , γ используется метод Левенберга-Марквардта [8].

Результаты моделирования. Для проверки работоспособности предложенных алгоритмов проведено моделирование следящей системы по углу азимута, рассмотренной в работе [9].

Движение цели задается по уравнению (3) при значениях $a_{\alpha} = 11,45$ град/с, $\gamma = 18$ град. В модели (11) приняты значения: период дискретности $T = 0,001$ сек; $Q = 10$, $R = 0,328$ (СКО шума измерения $v_i = \xi_{\alpha}(t_i)$ равно 0,573 град).

Результаты моделирования алгоритмов оценивания АФК и РФК для вектора x_i модели (11), с использованием процессора Intel(R) (Core(TM) i5 CPU@2.4GHz), приведены на рис. 2. При этом для текущей оценки вектора $\hat{x}_i$ по алгоритму АФК потребовалось $5,5 \times 10^{-5}$ сек, а по алгоритму РФК – 2×10^{-5} сек, что существенно меньше значения периода дискретности T .

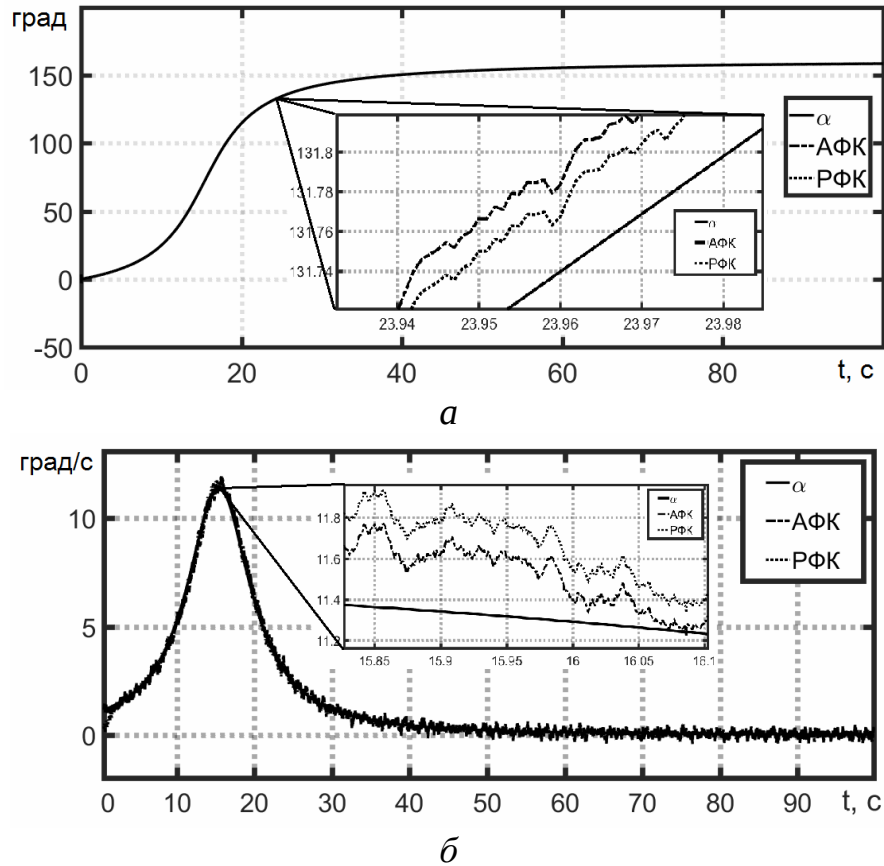


Рис. 2. Значения координат движения цели и их оценки: а – для текущего значения α и оценки $\hat{\alpha}$; б) – для текущего значения $\dot{\alpha}$ и оценки $\hat{\dot{\alpha}}$.

С помощью полученных оценок $\hat{\alpha}$, $\hat{\dot{\alpha}}$ по алгоритмам АФК и РФК проведено оценивание параметров модели (3).

В таблице 1 приведены значения оцениваемых параметров с помощью алгоритмов АФК, РФК и МНЛ, МЛМ за время идентификации [1;15] и [1;18] сек.

Таблица 1

Значения оцениваемых параметров $\hat{a}_\alpha$, $\hat{\gamma}$

Метод	АФК[1;15] сек		РФК[1;15] сек		АФК[1;18] сек		РФК[1;18] сек	
	$\hat{a}_\alpha$	$\hat{\gamma}$	$\hat{a}_\alpha$	$\hat{\gamma}$	$\hat{a}_\alpha$	$\hat{\gamma}$	$\hat{a}_\alpha$	$\hat{\gamma}$
МНК	11,57	16,28	11,43	17,91	11,76	15,68	11,56	17,56
МЛМ	11,08	18,82	11,66	17,10	11,41	17,88	11,61	17,27

В таблице 2 приведены значения оцениваемых параметров с помощью АФК, РФК и МНЛ, МЛМ за время идентификации [1; 15] и [1; 18] сек при заданных значениях $a_\alpha = 28,65$ град/с, $\gamma = 36$ град.

Таблица 2

Значения оцениваемых параметров $\hat{a}_\alpha, \hat{\gamma}$

Метод	АФК[1;15] сек		РФК[1;15] сек		АФК[1;18] сек		РФК[1;18] сек	
	$\hat{a}_\alpha$	$\hat{\gamma}$	$\hat{a}_\alpha$	$\hat{\gamma}$	$\hat{a}_\alpha$	$\hat{\gamma}$	$\hat{a}_\alpha$	$\hat{\gamma}$
МНК	27,61	31,55	28,98	34,73	27,72	31,68	29,12	34,93
МЛМ	27,92	23,12	29,43	35,65	28,79	33,93	29,43	35,68

С помощью алгоритмов АФК, РФК и МЛМ с нелинейной моделью (3) проведено моделирование предсказания положения цели при заданных значениях ее параметров $a_\alpha = 11,45$ град/с, $\gamma = 18$ град. При этом предполагается, что начиная с момента времени $t_{j_0} = 15$ сек цель становится невидимой (измерения (9) не проводятся) и с помощью алгоритма МЛМ оцениваются параметры $\hat{a}_\alpha, \hat{\gamma}$, и строится предсказание ее углового положения по модели (3). Результаты моделирования представлены на рис. 3.

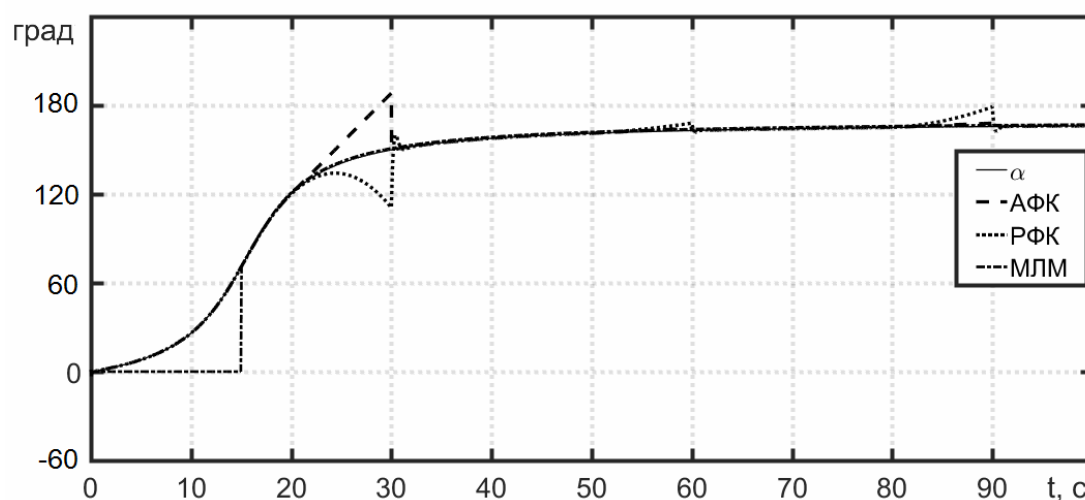


Рис. 3. Оценки и предсказания фильтры АФК, РФК и результаты моделирования МЛМ для реального угла α

Из результатов моделирования рис. 3 следует, что наилучшее предсказание положения цели здесь достигается с помощью алгоритмов РФК и МЛМ. При этом наибольшая ошибка предсказания углового положения цели на интервале времени [15; 100] сек не превышает 1 град, что дает возможность дальнейшего слежения за целью при появлении ее оптического изображения.

Для сравнения на рис. 3 показаны результаты предсказания положения цели с помощью алгоритмов АФК и РФК с использованием линейной модели (11) при потере цели на интервалах времени [20; 30], [50; 60] и [80;

90] сек. При этом наибольшая ошибка предсказания возникает на интервале времени [20; 30] и равна 37 град для алгоритма АФК, и 32,5 град для алгоритма РФК. Отметим, что на рис. 3 нелинейный характер отклонения оценки угла $\hat{\alpha}$ по алгоритму РФК связан с расширением модели (11) с учетом модели возмущения.

Повышение точности оценивания параметров может быть получено с помощью других известных методов, но при этом требуется большее число выполняемых операций. Так, например, при использовании метода Estimation gray box [10], реализованного в MatLab, с алгоритмов РФК наибольшая ошибка предсказания углового положения не превышает 0,15 град, но при этом не удастся использовать данный алгоритм в режиме реального времени. Однако при использовании специализированных аппаратно-программных средств быстроедействие данного алгоритма может быть повышено для практического использования в реальном времени.

Аналогично с помощью указанных алгоритмов определяются оценки параметров модели (5) или (6).

Выводы. Таким образом, в докладе предложен алгоритм предсказания углового положения цели для оптической следящей системы с использованием нелинейной модели ее углового движения. С помощью моделирования проведен сравнительный анализ известных алгоритмов оценивания угла и угловой скорости движения цели, а также алгоритмов идентификации параметров модели цели. Показано, что с помощью предложенных алгоритмов удастся обеспечить более высокую точность предсказания углового положения цели по сравнению с известными алгоритмами при наличии помех измерений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alireza T., Niazi S. State Estimation for Target Tracking Problems with Nonlinear Kalman Filter Algorithms // International Journal of Computer Applications. Volume 98, No.17, July 2014. P. 30–36.
2. Einicke G. A. Smoothing, Filtering and Prediction-Estimating the past, present and future // New York: InTech. – 2012. – 276 p.
3. Chen J.F., Shi Z.G., Hong S.H., and Chen K.S. Grey prediction based particle filter for maneuvering target tracking // Progress In Electromagnetics Research, Vol. 93, 2009. P. 237 – 254.
4. Li X.R., Jilkov V.P. Survey of maneuvering target tracking| Part I: Dynamic models // IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, Vol. 39, No. 4, 2003. P. 1333–1364.
5. Simon D. Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches. Hoboken, NJ: Wiley, June 2006. – 552 p.

6. Kwon S.J., Chung W.K. Perturbation compensator based robust tracking control and state estimation of mechanical systems. Korea Institute of Industrial Technology, Springer, Berlin, 2004. – 146 p.

7. Wen Shen. An Introduction to Numerical Computation. World Scientific Publishing. 2015. – 250 p.

8. Madsen K., Nielsen H.B., Tingleff O. Methods for non-linear least squares problems. DTU, April 2004. – 58 p.

9. С.Х. Аль Барри, В.М. Бородин, В.И. Гаркушенко. Синтез управления оптическим прибором, установленным на транспортном средстве // Труды XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20-24 августа 2015 года. С. 138 – 140.

10. Bohlin, Torsten P. Practical Grey-box Process Identification: Theory and Applications. Springer Science & Business Media. 7 September 2006.

ГАРАНТИРОВАННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Б.И. Ананьев (ИММ им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Россия, 620990,
Екатеринбург, Ковалевской, 16)
E-mail: abi@imm.uran.ru

GUARANTEED FILTERING FOR LINEAR SYSTEMS OF NEUTRAL TYPE

B.I. Ananyev (IMM named after N.N. Krasovskii UB of RAS, Russia, 620990,
Yekaterinburg, Kovalevskaya str., 16)

Keywords: guaranteed filtering, neutral type systems.

Введение. Рассматривается гарантирующий подход к задаче оценивания состояний линейных систем нейтрального типа. Предполагается, что начальное состояние неизвестно, а нормы неопределённых детерминированных возмущений в системе ограничены заданным числом. Вводятся бесконечномерные информационные множества в подходящем гильбертовом пространстве и исследуются их свойства. Рассмотрены некоторые частные случаи и примеры. Изучение проблемы оценивания состояний линейных дифференциальных систем в бесконечномерных пространствах к настоящему моменту имеет достаточно длинную историю. Достаточно общий подход монографии [1] получил дальнейшее развитие в [2-6]. Основным математическим аппаратом здесь служит теория замкнутых операторов в гильбертовом пространстве и полугрупп класса C_0 . Будем рассматривать частично наблюдаемую и автономную систему нейтрального типа

$$\frac{d}{dt} Dz_t(\cdot) = Lz_t(\cdot) + Bv(t), \quad y(t) = Gz_t(\cdot) + Cv(t), \quad (1)$$

где $z_t(s) = z(t+s)$, D , L -- операторы, действующие на непрерывные функции по формулам

$$D\phi(\cdot) = \phi(0) - \int_{-1}^0 d[\mu(s)]\phi(s), \quad L\phi(\cdot) = \int_{-1}^0 d[\eta(s)]\phi(s),$$

с функциональными матрицами $\mu(\cdot)$, $\eta(\cdot)$, элементы которых имеют ограниченную вариацию, $\mu(0) = 0$. Более подробно о матрицах см. [7]. Здесь и далее $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $v(t) \in \mathbb{R}^p$; матрицы B , C имеют подходящие размеры. Далее предполагается лишь два вида оператора G : либо $G\phi(\cdot) = G\phi(0)$, либо $G\phi(\cdot) = G\phi(-1)$, где G -- матрица подходящего размера.

Систему (1) будем рассматривать в гильбертовом пространстве $H = \mathbb{R}^n \times L^2(-1, 0; \mathbb{R}^n)$. Известно [7], что решение системы (1) с начальной функцией $\phi \in C(-1, 0; \mathbb{R}^n)$ можно представить как

$$\begin{aligned} z(t) - \int_0^t d[k(t-s)]z(s) &= f(t), \quad k(t) = \mu(-t) + \int_0^t \eta(-s)ds, \\ f(t) &= D\phi(\cdot) + \int_{-1}^{-t} d[\mu(s)]\phi(t+s) + \int_0^t \int_{-1}^{-\tau} d[\eta(s)]\phi(\tau+s)d\tau + \int_0^t Bv(s)ds. \end{aligned} \quad (2)$$

Используя резольвенту ρ : $\rho(t) = -k(t) + \int_0^t d[\rho(t-s)]k(s) = -k(t) + \int_0^t d[k(t-s)]\rho(s)$,

окончательно представляем решение как

$$z(t) = f(t) - \int_0^t d[\rho(t-s)]f(s). \quad (3)$$

Однако в отличие от уравнений запаздывающего типа непрерывное решение (3) имеет лишь ограниченную вариацию и не является абсолютно непрерывной функцией. Поэтому сделаем

Предположение 1. Производная функции $\mu(t)$ имеет вид $\dot{\mu}(t) = A_0(t) + \sum_{i=1}^N A_{-i} \delta(t - \tau_i)$, $\tau_1 = -1 < \tau_2 < \dots < \tau_N < 0$ и элементы матриц $A_0(\cdot)$ принадлежат пространству $L^2(-1, 0; \mathbb{R}^n)$. Здесь $\delta(t - \tau)$ – дельта функция Дирака.

При предположении 1, так же, как и в [6], оказывается, что решение системы (1) уже будет абсолютно непрерывной функцией с производной из $L^2_{loc}(0, \infty; \mathbb{R}^n)$, если начальная функция ϕ непрерывна и имеет производную из L^2 . Теперь систему (1) можно записать в гильбертовом пространстве H как

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t), \quad y(t) = Gx(t) + Cv(t), \quad (4)$$

где $Bv = [Bv; 0]$, $G = [0, G]$ и A -- инфинитезимальный генератор C_0 -полугруппы T_t , определяемый следующим образом: $Ax(t) = [Lz_t(\cdot); dz_t(\tau)/d\tau]$, $x(t) = [u(t); z_t(\cdot)]$.

Здесь и далее используются обозначения, принятые в Матлабе: $[A; B]$ - означает совокупность операторов или векторов, записанных в столбец, символ $[A, B]$ -- означает совокупность операторов или векторов, записанных в строку. Область определения $D(A) = \{[u; \phi(\cdot)]: \phi(\cdot) \in W^{1,2}, u = D\phi(\cdot)\}$ замкнутого оператора A плотна в пространстве H , поскольку пространство Соболева $W^{1,2}$ состоит из абсолютно непрерывных функций с производной из $L^2(-1, 0; \mathbb{R}^n)$ и выполняется предположение 1. Для любого

отрезка $[0, T]$, любой входящей функции $v(\cdot) \in L^2(0, T; \mathbb{R}^p)$ и всякого начального условия $x_0 \in D(A)$ существует единственное решение системы (1), (2) представимое в виде

$$x(t) = T_t x_0 + \int_0^t T_{t-\tau} B v(\tau) d\tau, \quad (5)$$

причём $x(\cdot)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая уравнениям (1), (3), (5). Данный результат доказан в [7], см. также [8]. Из представлений (2), (3) следует, что существует также и обобщённое решение в случае, например, разрывных кусочно-непрерывных начальных данных, если интегралы понимать в смысле Лебега-Стилтьеса. Однако такое решение будет уже разрывным.

Предположим, что начальное состояние системы (1) или (5) полностью неизвестно, а неопределённая входная функция $v(\cdot)$ ограничена по норме, то есть $\|v(\cdot)\|_{L^2(0, T; \mathbb{R}^p)} \leq \nu$, $\nu > 0$. Цель настоящей работы – описать информационное множество системы (2), состоящее из всех векторов $x(T) \in H$, для которых найдутся начальное условие x_0 и функция $v(\cdot)$, реализующие измеренный сигнал $y(\cdot)$ почти всюду. Рассмотрены также конечномерные аппроксимации задачи и некоторые примеры. Данная задача для конечномерных систем исследовалась в книге [9] и обобщалась во многих последующих работах, составивших теорию гарантированного оценивания [10-12]. Для бесконечномерных систем запаздывающего типа в работах [13] и [14] получены определяющие соотношения и выведены уравнения, определяющие параметры информационного множества. Системы с частными производными исследовались в [15].

Наблюдаемость уравнений нейтрального типа. Изложим вначале некоторые общие факты об уравнениях нейтрального типа. Введём матрицу $\Delta(\lambda) = \lambda D e^{\lambda^-} - L e^{\lambda^-}$ и характеристическое уравнение $\det \Delta(\lambda) = 0$. Все комплексные корни характеристического уравнения образуют спектр $\sigma(A)$ оператора A . Спектр $\sigma(A)$ – счётное множество. Для всякого вектора $v \in \ker \Delta(\lambda)$, где $\lambda \in \sigma(A)$, функция $[D e^{\lambda^-} v; e^{\lambda^-} v] \in D(A)$ является собственным вектором, соответствующим числу λ . Спектр $\sigma(A)$ целиком находится в левой полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \leq \kappa\}$ для некоторого $\kappa > 0$. Ещё один полезный результат заключается в следующем. Пусть M_λ – обобщённое собственное подпространство, содержащее все подпространства $\ker(\lambda I - A)^k$, $k = 0, 1, \dots$. Тогда $M_\lambda = \ker(\lambda I - A)^k$ для некоторого целого k , причём пространство M_λ конечномерно. Здесь и далее I – тождественный оператор. Доказательства этих фактов изложены в [7]. Также как в [5] введём гильбертово

пространство $H_1 = D(A)$ с нормой $\|\phi\|_1 = \|(\lambda I - A)\phi\|_H$, где $\lambda \in \rho(A)$, $\rho(A)$ – резольвентное множество. Все такие нормы эквивалентны для всякого $\lambda \in \rho(A)$, а также они эквивалентны граф-норме. Пространство H_1 плотно и непрерывно вложено в основное пространство H . Это пространство H расширяется до пространства H_{-1} путём пополнения по резольвентной норме $\|\phi\|_{-1} = \|(\lambda I - A)^{-1}\phi\|_H$, где $\lambda \in \rho(A)$. Имеем $H \subset H_{-1}$, причём вложение плотно и непрерывно. Пусть $L(H)$ – пространство непрерывных линейных операторов из H в H . Тогда, если $L \in L(H)$, $LD(A) \subset D(A)$, то $L \in L(H_1)$. Сопряжённый оператор A^* имеет те же свойства, что и A . Если $L \in L(H)$, $L^*D(A^*) \subset D(A^*)$, то оператор L имеет единственное расширение $\tilde{L} \in L(H_{-1})$. Сам оператор A также допускает расширение в следующем смысле. Во-первых, отметим, что $A \in L(H_1, H)$. Во-вторых, существует единственное расширение $\tilde{A} \in L(H, H_{-1})$ для оператора A . Более того, операторы $(\lambda I - A)^{-1} \in L(H, H_1)$ и $(\lambda I - \tilde{A})^{-1} \in L(H_{-1}, H)$ унитарны для $\lambda \in \rho(A)$. Доказательства даны в [5]. Из сказанного вытекает, что ввиду $T_t D(A) \subset D(A)$, имеем $T_t \in L(H_1)$. Но более важно, что операторы $\tilde{T}_t = (\lambda I - \tilde{A})T_t(\lambda I - \tilde{A})^{-1} \in L(H_{-1})$ образуют C_0 -полугруппу с генератором $\tilde{A}$. Беря степени резольвент, можно строить пространства-итерации H_k и H_{-k} .

Теперь перейдём к понятиям наблюдаемости. Для этого рассмотрим систему (4) с $v(\cdot) = 0$. Введём оператор $Kx_0 = GTx_0$, рассматриваемый в пространстве $L(H_1, L^2(0, T; \mathbb{R}^m))$. Система (A, G) называется на $[0, T]$, если $Kx_0 = 0$ влечёт $x_0 = 0$, то есть в том случае, когда $\ker K = 0$. Система (A, G) называется непрерывно наблюдаемой на $[0, T]$, если

$$\int_0^T \|GT_t x_0\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \geq \gamma^2 \|T_T x_0\|_H^2, \quad (6)$$

для некоторой константы γ и всех $x_0 \in D(A)$. Понятие наблюдаемости в виде (6) будет для нас основным, поскольку мы рассматриваем информационные множества в момент T . Отметим, что оператор G является конечномерным, но неограниченным в H и не замкнутым. Однако этот оператор допустим в том смысле, что $\int_0^T \|GT_t x_0\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \leq \kappa^2 \|x_0\|_H^2$, $\forall x_0 \in D(A)$. Здесь даже можно перейти к расширению H_{-1} пространства H и заменить T_t на $\tilde{T}_t$ норму $\|\cdot\|_H$ на $\|\cdot\|_{-1}$. Всё это выполняется при предположении 1 с учётом оценок для резольвенты в представлении (3), [7]. Понятие финальной непрерывной наблюдаемости является двойственным понятию полной управляемости. Весьма часто двойственное V' к гильбертовому V не отождествляется с

ним по теореме Рисса, а значение функционала функционала на элементе v записывается в виде $\langle v, u \rangle_{V, V'}$. В этом смысле двойственным к пространству H_1 является пространство H_{-1}^d , которое совпадает с пополнением H по норме $\|\phi\|_1^d = \|(\bar{\lambda}I - A^*)^{-1}\phi\|_H$, $\bar{\lambda} \in \rho(A^*)$. Таким образом, сопряжённый оператор K^* удовлетворяет следующему соотношению

$$\langle Kx_0, u(\cdot) \rangle_{L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} = \langle x_0, K^*u(\cdot) \rangle_{H_1, H_{-1}^d}.$$

Обратимся ещё к вычислению сопряжённого оператора A^* . Сопряжённое к (2) вольтеррово уравнение имеет вид

$$w(s) + \int_s^0 w(r) d[k(r-s)] = g(s), \quad s \leq 0. \quad (7)$$

Здесь функции $w(\cdot), g(\cdot)$ – n -векторные строки, а функция $k(\cdot)$ определена в (2). Решение уравнения (7) записывается с помощью резольвенты из (3): $w(s) = g(s) + \int_s^0 g(r) d[\rho(r-s)]$. В общем случае даже в условиях предположения 1 получить генератор в гильбертовом пространстве для полугруппы, порождаемой уравнением (7), совсем не просто. Сделаем это в одном частном случае.

Лемма 1. Пусть оператор $D\phi(\cdot) = \phi(0) - A_{-1}\phi(-1) - \int_{-1}^0 A_0(s)\phi(s)ds$, а $L\phi(\cdot) = \int_{-1}^0 A_1(s)\phi(s)ds$, где матричная функция A_i имеет те же свойства, что и A_0 . Тогда гильбертов сопряжённый оператор A^* с плотной областью определения $D(A^*) = \{[v, z(\cdot)]: z(0)A_{-1} = z(-1), z(\cdot) \in W^{1,2}\}$ в H определяется как $A^*[v, z(\cdot)] = [z(0), z(0)A_0(\cdot) + vA_1(\cdot) - \dot{z}(\cdot)]$.

Доказательство. Рассмотрим подробнее скалярное произведение

$$\begin{aligned} \langle A^*[v, z(\cdot)], [u; \phi(\cdot)] \rangle &= z(0)u + \int_{-1}^0 (z(0)A_0(s) + vA_1(s) - \dot{z}(s))\phi(s)ds \\ &= vL\phi(\cdot) + \int_{-1}^0 z(s)\dot{\phi}(s)ds = \langle [v, z(\cdot)], A[u; \phi(\cdot)] \rangle, \end{aligned}$$

где произведено интегрирование по частям и учтена область определения операторов. Полученное равенство доказывает лемму.

Условие (6) также трудно проверить. При условиях леммы 1 в [6] доказан следующий результат.

Теорема 1. Система (1), (4) с выходом $y(t) = Gz(t-1)$ финально непрерывно наблюдаема тогда и только тогда, когда выполняются два условия: $\ker[\Delta(\lambda); G] = \{0\}$ для всех комплексных λ ; $\ker[\lambda I - A_{-1}; G] = \{0\}$ для всех комплексных $\lambda \neq 0$.

В случае выхода $y(t) = Gz(t)$ достаточно потребовать $\det A_{-1} \neq 0$. Тогда оператор T_t является даже группой. В общем случае проблема критерия

финальной полной наблюдаемости не решена, и далее условие (7) будет постулироваться.

Абстрактное решение задачи. Пусть даны линейные ограниченные операторы $T_i: B_i \rightarrow H$, $M_i: B_i \rightarrow B$, $i = 0, 1$, где B_i , $i = 0, 1$, B, H -- действительные гильбертовы пространства. Рассмотрим уравнения

$$x = T_0\phi + T_1v, \quad y = M_0\phi + M_1v, \quad (8)$$

в которых элемент v подчинён априорным ограничениям

$$\|v\|_{B_1} \leq \nu, \quad (9)$$

где $\|\cdot\|_{B_1}$ -- норма в B_1 . Введём ряд определений.

Определение 1. Пара $[\phi; v]$ называется совместимой с элементом y , если второе равенство в (8) и неравенство (9) выполняются для этой пары. Множество всех совместимых пар обозначается через Φ_y .

Определение 2. Множество $X_y \subset H$ называется информационным множеством, совместимым с элементом y , если оно является образом множества совместимых пар Φ_y согласно первому равенству в (8), то есть $X_y = \{x \in H: x = T_0\phi + T_1v, [\phi; v] \in \Phi_y\}$.

Если задан реализовавшийся элемент y , то введённые множества не пусты, выпуклы и множество Φ_y замкнуто. Для дальнейшего сделаем следующее

Предположение 2.1. Оператор $S = M_1 M_1^*$ имеет ограниченный обратный в пространстве B .

Введём новое скалярное произведение в пространстве B следующим образом $\langle f, g \rangle_1 = \langle f, S^{-1}g \rangle$, где $\langle \cdot; \cdot \rangle$ -- исходное произведение. Соответствующая норма обозначается как $P \cdot P_1$. Опишем структуру множества Φ_y .

Лемма 2. Пара $[\phi; v] \in \Phi_y$ тогда и только тогда, когда

$$v = v^0 + \tilde{v}, \quad \tilde{v} \in \ker M_1, \quad v^0 = M_1^* S^{-1}(y - M_0\phi), \\ \|v\|^2 = \|v^0\|^2 + \|\tilde{v}\|^2 \leq \nu^2. \quad (10)$$

Доказательство. Отметим, что $\|v^0\| = \|y - M_0\phi\|_1 \leq \nu$. Если условия (10) выполняются, то $\|v\| \leq \nu$ в силу $v^0 \perp \tilde{v}$. Так как этот факт имеет место, второе равенство в (8) очевидно, и поэтому $[\phi; v] \in \Phi_y$. Пусть последнее включение выполнено. Ввиду соотношений

$$M_1 v^0 = y - M_0\phi, \quad v - v^0 = \tilde{v} \in \ker M_1, \quad v^0 \perp \tilde{v},$$

мы получаем условия (10).

Следствие 1. Элемент $x \in X_y$ тогда и только тогда, когда

$$x = T_1 M_1^* S^{-1} y + (T_0 - T_1 M_1^* S^{-1} M_0) \phi + T_1 \Pi_1 v, \|y - M_0 \phi\|_1^2 + \|v\|^2 \leq v^2, \quad (11)$$

где $\Pi_1 = I - M_1^* S^{-1} M_1$ -- ортогональная проекция B_1 на $\ker M_1$.

Вообще говоря, множество X_y не замкнуто. Однако его опорная функция $\rho(f, X_y) = \sup \{ \langle f, x \rangle : x \in X_y \}$, характеризующая выпуклое множество с точностью до замыкания, [16], может быть вычислена при следующем предположении.

Предположение 3.2 Элемент $f \in H$ является наблюдаемым направлением, то есть $T_0^* f \in \text{im} M_0^*$, где символ $\text{im} A$ означает образ оператора A .

Такие направления существуют, если выполнено условие непрерывной наблюдаемости

$$\|M_0 \phi\|_B \geq \gamma \|T_0 \phi\|_H, \quad \forall \phi \in B_0, \quad \gamma > 0. \quad (12)$$

При этом условии из [1] следует включение $\text{im} T_0^* \subset \text{im} M_0^*$, и, значит, любое $f \in H$ является наблюдаемым направлением. Рассмотрим более слабое, чем (12), условие

$$\|M_0 \phi\|_B \geq \gamma |\langle f, T_0 \phi \rangle|, \quad \forall \phi \in B_0, \quad \gamma > 0. \quad (13)$$

Условие (13) эквивалентно предположению 3.

Подсчитаем опорную функцию по наблюдаемому направлению. Вначале максимизируем по v , затем по ϕ , имея в виду соотношения (11). Обозначим Π ортогональную проекцию B на $\overline{\text{im} M_0}$ по отношению к скалярному произведению $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$. Имеем

$$\begin{aligned} \rho(f | X_y) &= \sup \{ \langle f, x \rangle : x \in X_y \} = \langle f, T_1 M_1^* S^{-1} y \rangle + \sup \{ \langle \lambda \\ &- S^{-1} M_1 T_1^* f, M_0 \phi \rangle + (v^2 - \|y^\perp\|_1^2 - \|\Pi y - M_0 \phi\|_1^2)^{1/2} \langle f, P f \rangle^{1/2} \} \\ &= \langle \Pi^* \lambda + (I - \Pi^*) S^{-1} M_1 T_1^* f, y \rangle + (\langle f, P f \rangle + \|\Pi(S \lambda \\ &- M_1 T_1^* f)\|_1^2)^{1/2} (v^2 - \|y^\perp\|_1^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$y^\perp = (I - \Pi) y, \quad P = T_1 \Pi_1 T_1^*, \quad M_0^* \lambda = T_0^* f. \quad (15)$$

При вычислении мы использовали элементарные равенства $\max_z \{ \langle f, z \rangle + (v^2 - \|z\|^2)^{1/2} a \} = \max_\alpha \{ \|f\| \alpha + (v^2 - \alpha^2)^{1/2} a \} = v(\|f\|^2 + a^2)^{1/2}$. Максимум достигается при $\alpha^0 = v \|f\| (\|f\|^2 + a^2)^{-1/2}$, $z^0 = \alpha^0 f \|f\|^{-1}$. Итак, приходим к заключению.

Теорема 2. При предположении 3 опорная функция множества X_y конечна и определяется формулами (14), (15).

Из этой теоремы следует, что если предположение 3 выполняется для каждого $f \in H$, то есть $\text{im} T_0^* \subset \text{im} M_0^*$, то множество X_y ограничено по норме (см. [17]) для каждого реализовавшегося элемента $y \in B$. Для ненаблюдаемых направлений справедлива

Теорема 3. Если $f \in H$ -- ненаблюдаемое направление, то опорная функция $\rho(f | X_y) < +\infty$ тогда и только тогда, когда $T_0^* f \perp \ker M_0$ и $\|y^\perp\|_1 = \nu$. В последнем случае множество $X_y = \{x\}$, то есть состоит из единственной точки x .

Доказательство. Если $\langle T_0^* f, \phi \rangle > 0$ для некоторого $\phi \in \ker M_0$, то из (11) будет следовать, что $\rho(f | X_y) = +\infty$. Предположим, что $T_0^* f \perp \ker M_0$ и элемент $f \in H$ является ненаблюдаемым направлением. Согласно (13), тогда существует последовательность $\{\phi_n\}$ такая, что $0 < n P M_0 \phi_n P < \langle f, T_0 \phi_n \rangle \forall n = 1, 2, \dots$. Полагая $\tilde{\phi}_n = \alpha \phi_n / \|M_0 \phi_n\|$, $q_n = \tilde{\phi} + \tilde{\phi}_n$, $\|M_0 \tilde{\phi}_n\| = \alpha > 0$, мы выберем элемент $\tilde{\phi}$ и число α так, что $\|Py - M_0 q_n\|_1^2 < \nu^2 - \|y^\perp\|_1^2 \forall n$. Мы можем сделать это, если $\|y^\perp\|_1 < \nu$. Ввиду неравенства $\langle f, T_0 \tilde{\phi}_n \rangle \geq \alpha n$ из (11) немедленно следует, что $\rho(f | X_y) = +\infty$. Наконец, если $\|y^\perp\|_1 = \nu$, то $X_y = \{x\}$, где x имеет вид, как в (11) с $\nu = 0$, $M_0 \phi = Py$.

Рассмотрим регулярные аппроксимации множества X_y . Множество $X_y^{\varepsilon k}$ называется εk -информационным, если оно состоит из всех элементов x , определяемых формулой (11) при условии

$$\varepsilon \|\phi\|_{B_0}^2 + \|y - M_0 \phi\|_1^2 + \|\nu\|_{B_1}^2 \leq \nu^2 + k. \quad (16)$$

Для каждого $k > 0$ замкнутые выпуклые множества $X_y^{\varepsilon k} \neq \emptyset$, если число $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Имеем включение $X_y^{\varepsilon_1 k} \subset X_y^{\varepsilon_2 k}$, если $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Более того, $\bigcup_{\varepsilon > 0} X_y^{\varepsilon k} = X_y^{0k}$, где X_y^{0k} -- множество, определяемое (11), (16) с $\varepsilon = 0$. Если условие предположения 3 выполняется, опорная функция последнего множества имеет вид (14), (15) с $\nu^2 + k$ вместо ν^2 .

Найдём опорную функцию замкнутого множества $X_y^{\varepsilon k}$. Так же, как делали в формуле (14), получаем

$$\begin{aligned} \rho(f | X_y^{\varepsilon k}) = & \langle f, T_1 M_1^* S^{-1} y \rangle + \sup_{\phi} \{ \langle f, (T_0 - T_1 M_1^* S^{-1} M_0) \phi \rangle + (\nu^2 \\ & + k - \|y - M_0 \phi\|_1^2 - \varepsilon \|\phi\|_1^2)^{1/2} \langle f, P f \rangle^{1/2} \} = \langle f, Q_1^\varepsilon y \rangle + (\nu^2 + k \\ & - \langle y, (id - P^\varepsilon) y \rangle_1)^{1/2} \langle f, Q_2^\varepsilon f \rangle^{1/2}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned}
Q_1^\varepsilon &= T_1 M_1^* S^{-1} (I - \Pi^\varepsilon) + T_0 \overline{M_\varepsilon} M_0^* S^{-1}, \quad Q_2^\varepsilon = P + K^\varepsilon, \\
\Pi^\varepsilon &= M^\varepsilon S^{-1}, \quad K^\varepsilon = (T_0 - T_1 M_1^* S^{-1} M_0) \overline{M_\varepsilon} (T_0^* - M_0^* S^{-1} M_1 T_1^*), \\
M^\varepsilon &= M_0 \overline{M_\varepsilon} M_0^*, \quad \overline{M_\varepsilon} = (M_0^* S^{-1} M_0 + \varepsilon I)^{-1}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Лемма 3. Оператор Q_2^ε является самосопряжённым и неотрицательно определённым. Операторы M^ε и Π^ε из (18) сильно сходятся к M^0 и $\Pi = M^0 S^{-1}$, соответственно, при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательство. Оператор Π^ε самосопряжённый, так как $\langle \Pi^\varepsilon f, g \rangle_1 = \langle \Pi^\varepsilon f, S^{-1} g \rangle = \langle f, \Pi^\varepsilon g \rangle_1$. Оператор M^ε удовлетворяет условиям: $M^{\varepsilon_1} \leq M^{\varepsilon_2}$, если $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$,

$$M^\varepsilon = S - (S^{-1} + \varepsilon^{-1} S^{-1} M_0 M_0^* S^{-1})^{-1} \leq S.$$

Поэтому, [18], существует строгий предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M^\varepsilon f = M^0 f \quad \forall f$, где M^0 - ограниченный самосопряжённый оператор. Покажем, что $M^0 S^{-1} = \Pi$, то есть последний оператор представляет ортогональную проекцию из формулы (14). Если $f = M_0 l$, то $\langle f, \Pi^\varepsilon f \rangle_1 = \langle f, f \rangle_1 - \varepsilon \langle l, l \rangle + \varepsilon^2 \langle l, \overline{M_\varepsilon} l \rangle$. Переходя к пределу в этом равенстве, мы получаем, что самосопряжённый по отношению к $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ оператор $I - M^0 S^{-1}$ становится нулевым на подпространстве $\overline{\text{im} M_0}$. Кроме того, $M^0 S^{-1} f = 0$, если $f \in \ker(M_0^* S^{-1}) = (\text{im} M_0)^\perp$. Следовательно, отсюда следует, что $M^0 S^{-1} = \Pi$. Итак, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Pi^\varepsilon f = \Pi f \quad \forall f$, если сходимость рассматривается по норме пространства B .

Из формул (14), (15), (17), (18) и леммы 3 немедленно следует, что

$$\lim_{\varepsilon, k \rightarrow 0} \rho(f | X_y^{\varepsilon k}) = \rho(f | X_y) \tag{19}$$

для наблюдаемых направлений f . Более того, если система (8) непрерывно наблюдаема, то есть $\text{im} T_0^* \subset \text{im} M_0^*$, то мы имеем эквивалентное равенство (см. [1]) $T_0 = \Lambda M_0$ для некоторого линейного ограниченного оператора $\Lambda: B \rightarrow H$. Поэтому, $\lambda = \Lambda^* f$ и сходимость в (19) равномерна по всем f , $\|f\| = 1$. Ввиду того, что хаусдорфово расстояние между выпуклыми множествами может быть выражено через опорные функции, [9], мы получаем, что для каждого допустимого элемента y и $k > 0$ множества $X_y^{\varepsilon k} \rightarrow X_y^{0k}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в метрике Хаусдорфа, если последнее множество ограничено. Кроме того, $X_y^{0k} \rightarrow X_y$ при $k \rightarrow 0$ в той же самой метрике.

Приложение к системам нейтрального типа. Отметим сразу, что в данной статье не рассматриваются численные методы и конечномерные

аппроксимации задачи. Это будет сделано в последующих работах. Система (8) имеет вид

$$x(T) = T_T x_0 + \int_0^T T_{T-\tau} B v(\tau) d\tau, \quad y(\cdot) = G T_\cdot x_0 + C v(\cdot). \quad (20)$$

Здесь можно рассматривать различные сочетания пространств. Например, $x(T) \in H = H$, $x_0 \in B_0 = H_1$, $y(\cdot) \in B = L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$, или, рассматривая обобщённое решение, считать, что $B_0 = H$. Переходя к расширениям, полагаем $B_0 = H = H_{-1}$. Предположение 2 обеспечивается условием $CC' > 0$, где C' -- транспонированная матрица. Рассмотрим подробнее частный случай, когда оператор T_t является группой, что невозможно для уравнений запаздывающего типа. В условиях леммы 1 и теоремы 1 это выполняется при $\det A_{-1} \neq 0$. Пусть также в уравнениях движения и измерения содержатся разные возмущения, стеснённые совместным ограничением, и $C = I$, то есть система (20) принимает вид

$$x(T) = T_T x_0 + \int_0^T T_{T-\tau} B v(\tau) d\tau, \quad y(\cdot) = G T_\cdot x_0 + w(\cdot), \quad (21)$$

$$\int_0^T (\|v(t)\|^2 + \|w(t)\|^2) dt \leq \nu^2.$$

Выражая в (21) x_0 и $w(\cdot)$ через $x(T)$ и подставляя их в неравенство, находим явное описание информационного множества через решение оптимизационной задачи

$$\min_{v(\cdot)} \int_0^T (\|v(t)\|^2 + \|y(t) - G T_t (T_T^{-1}(x(T) - \int_0^T T_{T-\tau} B v(\tau) d\tau))\|^2) dt \leq \nu^2, \quad (22)$$

которая имеет достаточно простое решение.

Ограничимся простым иллюстрирующим примером. Рассмотрим одномерную систему $\dot{z}(t) - \dot{z}(t-1) = v(t)$, $y(t) = z(t) + w(t)$, где $v(\cdot)$ и $w(\cdot)$ стеснены ограничениями, как в (21). Здесь имеем $z(t) = z(t-1) + u(t)$, где $u(t) = D\phi + \int_0^t v(s) ds$, $D\phi = \phi(0) - \phi(-1)$. В пространстве H отождествляем все функции, для которых $D\phi = 0$ и норма в $L^2(-1, 0; \mathbb{R})$ разности этих функций равна нулю. Полагаем $\nu = 1$, $T = 2$. Нас интересуют все совместимые с сигналом состояния $z_2(\cdot) \in L^2(-1, 0; \mathbb{R})$. Задача, подобная (22), примет вид

$$\min_{v(\cdot), D\phi} \left\{ \int_0^2 v^2(t) dt + \int_1^2 (y(t) - z(t))^2 dt + \int_1^2 (y(t-1) - z(t) - u(t))^2 dt \right\} \leq 1.$$

Множество совместимых состояний $z_2(\cdot)$ представляет собой эллипсоид в пространстве $L^2(-1, 0; \mathbb{R})$. Пусть теперь $v(\cdot) = 0$, и нам надо

найти информационное множество $X_y \subset H$. Тогда в последней формуле минимизация отсутствует, и полученное неравенство в точности описывает совокупность совместимых пар $[Dz_2(\cdot); z_2(\cdot)]$. Здесь $Dz_2(\cdot) = D\phi$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-11-10146).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Curtain R.F., Pritchard A.J.* Infinite Dimensional Linear Systems Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1978.
2. *Curtain R.F., Zwart H.* An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory. New York: Springer-Verlag, 1995.
3. *Bensoussan A. et al.* Representation and Control of Infinite Dimensional Systems. Boston: Birkhäuser, 2007.
4. *Salamon D.* Control and Observation of Neutral Systems. Research Notes in Math., vol. 91. Boston: Pitman, 1984.
5. *Tucsnak M., Weiss G.* Observation and Control for Operator Semigroups. Basel: Birkhäuser, 2009.
6. *Rabah R.* Exact null controllability, complete stabilizability and exact final observability: the case of neutral type systems, <http://arxiv.org/abs/1607.01155v1>.
7. *Hale J.K., Lunel S.M.V.* Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1993.
8. *Delfour M.C., Karakchou J.* State Space Theory of Linear Time Invariant Systems with Delays in State, Control, and Observation Variables // JMAA, 1987, 125, С. 361-399.
9. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределённости. Москва: Наука, 1977.
10. *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Dynamics and Control of Trajectory Tubes: Theory and Computation, SCFA, Birkhäuser, 2014, 445 p.
11. *Филиппова Т. Ф.* Дифференциальные уравнения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной динамической управляемой системы // Тр. ИММ УрО РАН, 16:1 (2010), 223–232.
12. *Гусев М.И.* О методе штрафных функций в задаче построения множеств достижимости управляемых систем с фазовыми ограничениями // Тр. ИММ УрО РАН, 19:1 (2013), 81–86.
13. *Ананьев Б.И., Пищулина И.Я.* Минимаксная квадратичная фильтрация для систем с запаздыванием. // Дифференциальные системы управления. Ред. А.В. Кряжмский. Уральский научный центр, 1979, с. 3-12.

14. *Anan'ev B.I.* A Guaranteed Filtering Scheme for Hereditary Linear Systems // Journal of Math. Systems, Estimation and Control. V. 8, No. 3, 1998, pp. 1-20.

15. *Kurzhanski A.B., Khapalov A.Yu.* An Observation Theory for Distributed-Parameter Systems // Journal of Math. Systems, Estimation and Control. V. 1, No. 4, 1991, pp. 389-440.

16. *Иоффе А.Д., Тухомиров В.М.* Теория экстремальных задач. Москва: Наука, 1974.

17. *Danford N., Schwartz J.T.* Linear Operators. Part 1, Interscience, 1958.

18. *Riesz F., Sz.-Nagi B.* Lecons D'Analyse Fonctionnelle. Akademiai Kiado, Budapest, 1972.

О ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

A.T. Асанова (ИМММ, Казахстан, 050010, Алматы, Пушкина, 125)

E-mail: assanova@math.kz; anarasanova@list.ru

ON A PROBLEM OF CONTROL FOR A SYSTEM OF PARTIAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INTEGRAL CONDITION

A.T. Assanova (IMMM, Kazakhstan, 050010, Almaty, Pushkin str., 125)

Keywords: system of partial integro-differential equations, solvability.

Introduction. Nonlocal problem for system of partial integro-differential equations of hyperbolic type with integral conditions arise in the of various engineering processes, in plasma physics, processes of moisture transfer in porous media, in friction theory, and also mathematical biology and demography problems [1-12]. Optimal control problems with various nonlocal conditions for system of partial integro-differential equations of hyperbolic type are investigated comparatively little. Various optimal control problems for hyperbolic systems with different nonlocal conditions is considered in [13-20].

In the present work we consider a system of partial integro-differential equations of hyperbolic type in a rectangular domain. Boundary conditions are specified as a combination of values and integral relations from the required solution. The controlling parameter is included in the right-hand part of the system.

Problem statement. We consider on $\Omega = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \omega\}$ the nonlocal boundary value problem for system of partial integro-differential equations of hyperbolic type

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} + C(t, x)u + \int_0^T D(\tau, x)u(\tau, x)d\tau + f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (1)$$

with conditions

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (2)$$

$$Q(t)u(t, 0) + S(t)u(t, \omega) + \int_0^\omega L(x)u(t, x)dx = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

where $u(t, x) = \text{col}(u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_n(t, x))$, the $n \times n$ -matrices $A(t, x)$, $B(t, x)$, $C(t, x)$, $D(t, x)$ and n -vector-function $f(t, x)$ are continuous on Ω , $n \times n$ -matrix $L(x)$ and n -vector-function $\varphi(x)$ are continuously differentiable on $[0, \omega]$,

$n \times n$ -matrices $Q(t)$, $S(t)$, $M(t)$ and n -vector-function $\psi(t)$ are continuously differentiable on $[0, T]$.

The initial data satisfy the condition of approval.

A function $u(t, x) \in C(\Omega, R^n)$ having partial derivatives $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, R^n)$ is called a classical solution to problem (1)-(3) if for all $(t, x) \in \Omega$ it satisfies the system (1), conditions (2) and (3).

In the present work we investigate the questions of existence and uniqueness of classical solutions to nonlocal boundary value problem for system of partial integro-differential equations (1)--(3) and the approaches of constructing its approximate solutions. For this we applied the method of introduction additional functional parameters proposed in [21-26] for the solve of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations with mixed derivative. The problem (1)--(3) is reduced to an equivalent problem, consisting of a Goursat problem for the system of hyperbolic equations with functional parameters and functional relations with respect to the entered parameters by introducing new unknown functions. The algorithm of finding the approximate solution of the investigated problem and its convergence is proved. The sufficient conditions of the existence unique classical solution to problem (1)--(3) in the terms of initial data. The applicability of the obtained results in optimal control problems are showed.

Reduction to an problem with parameter. We introduce a new function $\lambda(x) = \int_0^T D(\tau, x)u(\tau, x)d\tau$ in the problem (1)--(3). Then, we get a problem for system of hyperbolic equations with parameter-function

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} + C(t, x)u + \lambda(x) + f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (4)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (5)$$

$$Q(t)u(t, 0) + S(t)u(t, \omega) + \int_0^\omega L(x)u(t, x)dx = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

$$\lambda(x) = \int_0^T D(\tau, x)u(\tau, x)d\tau, \quad x \in [0, \omega], \quad (7)$$

A pair functions $(u(t, x), \lambda(x))$, where the function $u(t, x) \in C(\Omega, R^n)$ has partial derivatives $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, R^n)$, the function $\lambda(x) \in C([0, \omega], R^n)$ has derivative $\dot{\lambda}(x) \in C([0, \omega], R^n)$, is called a solution to problem with parameter (4)--(7) if for all $(t, x) \in \Omega$ it satisfies of the system of hyperbolic equations (4), the conditions (5), (6) and the functional re-

lation (7). The additional relation (7) allow us to determine a unknown parameter $\lambda(x)$.

Scheme of the method and the main result. Let $\mu(t) = u(t, 0)$. In the problem (4)–(7) we change the function $u(t, x)$: $u(t, x) = \tilde{u}(t, x) + \mu(t)$ and proceed to the following equivalent problem

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t \partial x} = A(t, x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + C(t, x) \tilde{u} + \lambda(x) + B(t, x) \dot{\mu}(t) + C(t, x) \mu(t) + f(t, x), \quad (8)$$

$$(t, x) \in \Omega,$$

$$\tilde{u}(0, x) = \varphi(x) - \varphi(0), \quad x \in [0, \omega], \quad (9)$$

$$\tilde{u}(t, 0) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (10)$$

$$\left[Q(t) + S(t) + \int_0^\omega L(x) dx \right] \mu(t) = \psi(t) - S(t) \tilde{u}(t, \omega) - \int_0^\omega L(x) \tilde{u}(t, x) dx, \quad t \in [0, T], \quad (11)$$

$$\lambda(x) = \int_0^T D(\tau, x) \tilde{u}(\tau, x) d\tau + \int_0^T D(\tau, x) \mu(\tau) d\tau, \quad x \in [0, \omega]. \quad (12)$$

A triple functions $(\tilde{u}(t, x), \mu(t), \lambda(x))$, where the function $\tilde{u}(t, x) \in C(\Omega, R^n)$ has partial derivatives $\frac{\partial \tilde{u}(t, x)}{\partial x} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial \tilde{u}(t, x)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial^2 \tilde{u}(t, x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, R^n)$, the function $\mu(t) \in C([0, T], R^n)$ has derivative $\dot{\mu}(t) \in C([0, T], R^n)$, the function $\lambda(x) \in C([0, \omega], R^n)$ has derivative $\dot{\lambda}(x) \in C([0, \omega], R^n)$, is called a solution to problem (8)–(12) if for all $(t, x) \in \Omega$ it satisfies of the system of hyperbolic equations (8), the boundary conditions (9), (10) and the functional relations (11), (12).

The problem (8)–(10) at fixed $\mu(t)$, $\lambda(x)$ is a Goursat problem for system of hyperbolic equations with respect to $\tilde{u}(t, x)$ on Ω . The relations (11) and (12) allow us to determine the unknown functional parameters $\mu(t)$, $\lambda(x)$ and the compatibility condition hold $\mu(0) = \varphi(0)$.

We introduce a new unknown functions $\tilde{v}(t, x) = \frac{\partial \tilde{u}(t, x)}{\partial x}$, $\tilde{w}(t, x) = \frac{\partial \tilde{u}(t, x)}{\partial t}$. Goursat problem (4)–(6) is equivalent to a three systems integral equations

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t, x) = \dot{\varphi}(x) + \int_0^t \{ & A(\tau, x) \tilde{v}(\tau, x) + B(\tau, x) \tilde{w}(\tau, x) + C(\tau, x) \tilde{u}(\tau, x) + \lambda(x) + \\ & + B(\tau, x) \dot{\mu}(\tau) + C(\tau, x) \mu(\tau) + f(\tau, x) \} d\tau, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}(t, x) = \int_0^x \{ & A(t, \xi) \tilde{v}(t, \xi) + B(t, \xi) \tilde{w}(t, \xi) + C(t, \xi) \tilde{u}(t, \xi) + \lambda(\xi) + \\ & + B(t, \xi) \dot{\mu}(t) + C(t, \xi) \mu(t) + f(t, \xi) \} d\xi, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\tilde{u}(t, x) = \varphi(x) - \varphi(0) + \int_0^t \tilde{w}(\tau, x) d\tau. \quad (15)$$

We introduce the notation $P(t) = Q(t) + S(t) + \int_0^{\omega} L(x)dx$.

We will take a derivatives in the relation (11) on the variable of t

$$P(t)\dot{\mu}(t) = -\dot{P}(t)\mu(t) + \dot{\psi}(t) - \dot{S}(t)\tilde{u}(t, \omega) - S(t)\tilde{w}(t, \omega) - \int_0^{\omega} L(x)\tilde{w}(t, x)dx, \quad t \in [0, T]. \quad (16)$$

From compatibility condition we get

$$\mu(0) = \varphi(0). \quad (17)$$

The unknown functional parameter $\mu(t)$ will be determined from Cauchy problem for system of ordinary differential equations (16), (17). The unknown functional parameter $\lambda(x)$ will be determined from relation (12).

If we know the functional parameters $\mu(t)$, $\lambda(x)$, then from integral systems (13)--(15) find the functions $\tilde{u}(t, x)$, $\tilde{v}(t, x)$, $\tilde{w}(t, x)$. Conversely, if we known functions $\tilde{u}(t, x)$, $\tilde{v}(t, x)$, $\tilde{w}(t, x)$, then from Cauchy problem (16), (17) we find the functional parameter $\mu(t)$. Then, from relation (12) we determine the functional parameter $\lambda(x)$. Since the functions $\tilde{u}(t, x)$, $\tilde{v}(t, x)$, $\tilde{w}(t, x)$ and $\mu(t)$, $\lambda(x)$ are unknowns together for finding of the solution to problem (8)--(12) we use an iterative method. The solution to problem (8)--(12) is the triple functions $(\tilde{u}^*(t, x), \mu^*(t), \lambda^*(x))$ we defined as a limit of sequence of triples $(\tilde{u}^{(k)}(t, x), \mu^{(k)}(t), \lambda^{(k)}(x))$, $k = 0, 1, 2, \dots$, according to the following algorithm:

Step 0. 1) Let the matrix $P(t)$ is invertible for all $t \in [0, T]$. Suppose in the right-hand part of the system (16) $\tilde{u}(t, x) = 0$, $\tilde{w}(t, x) = 0$, from Cauchy problem (16), (17) we find the initial approximation $\mu^{(0)}(t)$ for all $t \in [0, T]$. From the relation (12), where $\tilde{u}(t, x) = 0$, $\mu(t) = \mu^{(0)}(t)$, we determine the initial approximation $\lambda^{(0)}(x)$ for all $x \in [0, \omega]$. 2) From the system of integral equations (13)--(15) under $\mu(t) = \mu^{(0)}(t)$, $\dot{\mu}(t) = \dot{\mu}^{(0)}(t)$, $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$, we find the functions $\tilde{u}^{(0)}(t, x)$, $\tilde{v}^{(0)}(t, x)$, $\tilde{w}^{(0)}(t, x)$ for all $(t, x) \in \Omega$.

Step 1. 1) Suppose in the right-hand part of the system (16) $\tilde{u}(t, x) = \tilde{u}^{(0)}(t, x)$, $\tilde{w}(t, x) = \tilde{w}^{(0)}(t, x)$, from Cauchy problem (16), (17) we find the first approximation $\mu^{(1)}(t)$ for all $t \in [0, T]$. From the relation (12), where $\tilde{u}(t, x) = \tilde{u}^{(0)}(t, x)$, $\mu(t) = \mu^{(1)}(t)$ we determine the first approximation $\lambda^{(1)}(x)$ for all $x \in [0, \omega]$. 2) From the system of integral equations (13)--(15) under $\mu(t) = \mu^{(1)}(t)$, $\dot{\mu}(t) = \dot{\mu}^{(1)}(t)$, $\lambda(x) = \lambda^{(1)}(x)$, we find the functions $\tilde{u}^{(1)}(t, x)$, $\tilde{v}^{(1)}(t, x)$, $\tilde{w}^{(1)}(t, x)$ for all $(t, x) \in \Omega$.

And so on.

Step k . 1) Suppose in the right-hand part of the system (16) $\tilde{u}(t, x) = \tilde{u}^{(k-1)}(t, x)$, $\tilde{w}(t, x) = \tilde{w}^{(k-1)}(t, x)$, from Cauchy problem (16), (17) we find the k -th approximation $\mu^{(k)}(t)$ for all $t \in [0, T]$. From the relation (12), where

$\tilde{u}(t, x) = \tilde{u}^{(k-1)}(t, x)$, $\mu(t) = \mu^{(k)}(t)$ we determine the k -th approximation $\lambda^{(k)}(x)$ for all $x \in [0, \omega]$. 2) From the system of integral equations (13)–(15) under $\mu(t) = \mu^{(k)}(t)$, $\dot{\mu}(t) = \dot{\mu}^{(k)}(t)$, $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$, we find the functions $\tilde{u}^{(k)}(t, x)$, $\tilde{v}^{(k)}(t, x)$, $\tilde{w}^{(k)}(t, x)$ for all $(t, x) \in \Omega$, $k = 1, 2, 3, \dots$.

Let $a = \max_{(t,x) \in \Omega} \|A(t, x)\|$, $b = \max_{(t,x) \in \Omega} \|B(t, x)\|$, $c = \max_{(t,x) \in \Omega} \|C(t, x)\|$, $d = \max_{(t,x) \in \Omega} \|D(t, x)\|$,
 $H = a + b + c$, $a_1 = \max_{t \in [0, T]} \|\dot{S}(t)\| + \max_{t \in [0, T]} \|S(t)\| + \omega \max_{x \in [0, \omega]} \|L(x)\|$,
 $b_1 = \max_{t \in [0, T]} \|[P(t)]^{-1}\|$, $b_2 = \max_{t \in [0, T]} \|\dot{P}(t)\|$, $\alpha = \max_{t \in [0, T]} \|[P(t)]^{-1} \dot{P}(t)\|$.

The following theorem gives conditions of realizability and convergence of the constructed algorithm and the conditions of the existence unique solution to problem (8)–(12).

Theorem 1. Suppose that

i) the matrix $P(t)$ is invertible for all $t \in [0, T]$;

ii) the inequality fulfilled

$$q(T, \omega) = \max(T, \omega) [Td + T^2 de^{\alpha T} b_1 a_1 + b(\alpha e^{\alpha T} T + 1) b_1 a_1 + ce^{\alpha T} T b_1 a_1] e^{H(T+\omega)} < 1.$$

Then problem with parameters (8)–(12) has a unique solution.

From the equivalence of problems (4)–(7) and (8)–(12), we obtain

Theorem 2. Suppose that the conditions i)–ii) of Theorem 1 are fulfilled.

Then problem (4)–(7) has a unique solution.

From the equivalence of problems (1)–(3) and (4)–(7), we get

Theorem 3. Suppose that the conditions i)–ii) of Theorem 1 are fulfilled.

Then problem for system of partial integro-differential equations with integral condition (1)–(3) has a unique classical solution.

The proofs of the theorems is similar to the scheme of the proof of theorems in [26].

Applications to the optimal control problems. The investigated problem is widely used in optimal control problems [13–20].

Let the process be described by the Goursat systems

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = f\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \chi\right), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (18)$$

with integral conditions (2), (3), where $u = u(t, x) = u(t, x; \chi)$ is n -dimensional state vector; f is the given n -dimensional vector-function.

The controls $\chi(t, x)$ are chosen from the set

$$\chi \in \Xi = \{\chi : \chi \in PC(\Omega, R^r), \chi(t, x) \in V, (t, x) \in \Omega\}, \quad (19)$$

where V is a given nonempty set from R^r , and $PC(\Omega, R^r)$ be space of piecewise continuous functions $z : \Omega \rightarrow R^r$ with norm $\|z\|_{PC} = \sup_{(t,x) \in \Omega} \|z(t, x)\|$.

It is required to minimize the functional

$$J(\chi) = \sum_{i=1}^N \phi(u(t_i, x_i)) + \iint_{\Omega} F\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \chi\right) dt dx, \quad (20)$$

where ϕ, F are the given scalar functions; $(t_i, x_i), i = \overline{1, N}$ is an arbitrary collection of points from Ω ; N is a natural number.

An optimal control problem (18), (2), (3), (19), (20), in particular, where in conditions (2), (3) the matrices $K(x) \equiv 0, S(t) \equiv 0$ and $P(x) \equiv P, Q(t) \equiv Q$ is studied in the [14, 15, 19, 20].

We applied the results of this paper for solve optimal control problem of nonlinear hyperbolic systems with nonlocal boundary conditions (18), (2), (3), (19), (20).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Galakhov M.A., Usov P.P. Differential and integral equations of mathematical theory of friction. – M.: Nauka, 1990. – 280 p. [in Russ.]
2. Nakhushev A.M. Equations of mathematical biology. – M.: Vysshaya shkola, 1995. – 305 p. [in Russ.]
3. Nakhushev A.M. Problems with replacements for partial differential equations. – M.: Nauka, 2006. – 287 p. [in Russ.]
4. Zhestkov S.V. On Goursat problem with integral boundary conditions // Ukrainian Mathematical Journal, 1990. – Vol. 42, - № 1. – P. 132-135.
5. Golubeva N.D., Pulkina L.S. On a one nonlocal problem with integral conditions // Mathematical Notes. – 1996. – Vol. 59. - № 3. – P. 456-458.
6. Pulkina L.S. A nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equations // Electron.. J. Diff. Equat., 1999. – Vol. 1999. - № 45. – P. 1-6.
7. Mesloub S., Bouziani A. On a class of singular hyperbolic equation with a weighted integral condition // Int. J. Math. Math. Sci., 1999. – Vol. 22. - № 3. – P. 511-519.
8. Pulkina L.S. On solvability in L_2 of nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equation // Differential Equations, 2000. Vol.36, - № 2. – P. 279-280.
9. Pulkina L.S. Nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equation // Differential Equations, 2004. Vol. 40, - № 7. – P. 887-892.
10. Beilin S.A. Existence of solutions for one-dimensional wave equations with integral conditions // Electron.. J. Diff. Equat., 2001. - Vol. 2001. - № 76. – P. 1-8.
11. Bouziani A. Initial-boundary value problem with a nonlocal condition for a viscosity equation / Int. J. Math. Math. Sci., 2002. – Vol. 30. - № 6. – P. 327-338.
12. Bouziani A. On the solvability of parabolic and hyperbolic problems with a boundary integral condition / Int. J. Math. Math. Sci., 2002. – Vol. 31. - № 4. – P. 202-213.
13. Vasilyev F.P. Optimization methods. –M.: Factorial, 2002. – 823 p. [in Russ.]
14. Ibiyev F.T., Sharifov Ya.A. On one problem of optimal control of Goursat system with integral conditions // Izvest. NANA, ser. phys.-techn. and mathem. sci., 2004. – Vol. XXIV. - № 2. – P. 83-85. [in Russ.]

15. Ibiyev F.T., Sharifov Ya.A. Necessary optimality condition in optimal control problems of Goursat systems with integral conditions // Vestnik Bakinskogo Univ., 2004. - № 3. – P. 13-20. [in Russ.]
16. Ibiyev F.T., Sharifov Ya.A. Necessary optimality conditions in problems of optimal control by the Goursat systems with multipoint boundary conditions // Transactions issue mathem. and mech. – Ser. of phys.-techn. and mathem. sci., 2004. – Vol. XXIV. - № 7. – P. 227-234.
17. Sharifov Ya. A., Shirinov T.V. Gradient in the optimal control problem for hyperbolic systems with nonlocal conditions // Izvest. NANA, ser. phys.-techn. and mathem. sci., 2005. – Vol. XXV. - № 2. – P. 111-116. [in Russ.]
18. Shirinov T.V., Mekhtiev M.F., Sharifov Ya.A. On a optimality conditions in the optimal control problem for hyperbolic systems with nonlocal conditions //Doklady. NANA, 2005. – Vol. LXI. - № 2. – P. 22-29. [in Russ.]
19. Ibiyev F.T., Sharifov Ya.A. An optimal control problem for Goursat systems with integral conditions // Transactions issue mathem. and mech. – Ser. of phys.-techn. and mathem. sci., 2006. – Vol. XXVI. - № 1. – P. 199-206.
20. Sharifov Ya.A., Safari A.R. Necessary optimality conditions in the problems of control of Goursat-Darboux systems with integral conditions // Transactions issue mathem. and mech. – Ser. of phys.-techn. and mathem. sci., 2011. – Vol. XXXI. - № 1. – P. 125-136.
21. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of the boundary value problem for systems of hyperbolic equations with data on the characteristics // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2002. - Vol. 42. - № 11, - P. 1609-1621.
22. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Correct solvability of a nonlocal boundary value problem for systems of hyperbolic equations // Doklady Mathematics, 2003. -Vol. 68. - № 1. - P. 46-49.
23. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations //Differential Equations, 2003. Vol. 39. - № 10. -P. 1414-1427.
24. Asanova A.T. On a nonlocal boundary-value problem for systems of impulsive hyperbolic equations // Ukrainian Mathematical Journal, 2013. - Vol. 65. - № 3. - P. 349-365.
25. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013. - Vol. 402. - № 1. - P. 167-178.
26. Asanova A.T. On a solvability of the nonlocal problem with integral conditions for system of the equations of hyperbolic type // Mathematical journal, 2014. – Vol. 14. - № 2 (52). – P. 21-35. [in Russ.]

ПРИБЛИЖЁННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМА РАБОТЫ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ РУЛЕВОГО ПРИВОДА ЛА

А.Г. Аузяк, Г.Л. Дегтярев (КНИТУ-КАИ, Россия, 420111, Казань,
К. Маркса,10), E-mail: tm@tm.kstu-kai.ru;

В.Г. Пидодня (филиал СамГТУ, 446001, Сызрань, Советская,45),
E-mail: nauka@sstu.syzran.ru;

Ф.В. Дремов (филиал ВУНЦ ВВС «ВВА»,446007,Сызрань-7, Маршала
Жукова,1), E-mail: afhsp@mail.ru

APPROXIMATE OPTIMIZATION OF THE OPERATING MODE ELECTRIC MOTOR OF STEERING DRIVE OF FLYING APPARATUS

A.G. Auzjak, L. Degtyarev (KNRTU-KAI, Russia, 420111, Kazan, C. Marx, 10),
E-mail: tm@tm.kstu-kai.ru;

V.G. Pidodnia (Branch of Samstu, 446001, Syzran, Soviet, 45), e-mail:
nauka@sstu.syzran.ru;

F.W. Driomov (branch of Military Air Force VVA, 446007, Syzran-7, Marshal
Zhukov, 1), E-mail: afhsp@mail.ru

Keywords: optimization, control, electric motor, drive

Введение. Для достижения наилучших показателей динамики движения летательного аппарата, исполнительные устройства должны передавать на управляющие органы оптимальные управляющие воздействия. Рассмотрим решение задачи быстрогодействия управления электродвигателем рулевого привода с привлечением приближённого метода оптимизации.

Для решения задачи быстрогодействия при управлении электродвигателем привода предлагается использовать метод приближённой оптимизации, успешно применяемый в динамике полёта. Метод позволяет достаточно просто строить оптимальное программное движение в классе степенных многочленов и осуществлять относительно него стабилизацию фактического движения.

Постановка задачи. Рассматривается электрический двигатель постоянного тока с независимым возбуждением, который может быть представлен математической моделью [1] в виде уравнения (1) или в виде системы (2).

$$T_{\text{я}}T_{\text{эм}}\ddot{\varphi} + T_{\text{эм}}\dot{\varphi} + \varphi = K_{\text{д1}}U_{\text{y}} - K_{\text{д2}}(T_{\text{я}}\dot{M}_{\text{с}} + M_{\text{с}}), \quad (1)$$

где $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$ – угловое положение, угловая скорость, угловое ускорение вращения выходного вала двигателя; U_{y} – управляющее напряжение в

якорной цепи; $T_{\text{я}}, T_{\text{эм}}$ – постоянные времени; $K_{\text{д1}}, K_{\text{д2}}$ – передаточные коэффициенты; $M_{\text{с}}, \dot{M}_{\text{с}}$ – момент и производная момента сопротивления.

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t), \quad (2)$$

$$\dot{x}_3(t) = \frac{T_{\text{эм}}}{T_{\text{я}} T_{\text{эм}}} x_3(t) - \frac{1}{T_{\text{я}} T_{\text{эм}}} x_2(t) + \frac{K_{\text{д1}}}{T_{\text{я}} T_{\text{эм}}} U_y - \frac{K_{\text{д2}} T_{\text{я}}}{T_{\text{я}} T_{\text{эм}}} \dot{M}_{\text{с}} - \frac{K_{\text{д2}}}{T_{\text{я}} T_{\text{эм}}} M_{\text{с}},$$

где $x_1(t) = \varphi(t), x_2(t) = \dot{\varphi}(t), x_3(t) = \ddot{\varphi}(t)$ – переменные состояния, $M_{\text{с}}$ и $\dot{M}_{\text{с}}$ – в общем случае нелинейные функции времени и переменных состояния.

Ограничения на управление и переменные состояния:

$$U_{\min} \leq U_y \leq U_{\max}, x_{2\min} \leq x_2 \leq x_{2\max}, x_{3\min} \leq x_3 \leq x_{3\max} \quad (3)$$

Требуется построить оптимальный управляемый процесс $(x(t), U_y(t))$, в результате которого осуществляется переход из начальной точки (x_{10}, x_{20}, x_{30}) в конечную точку $(x_{1\text{к}}, x_{2\text{к}}, x_{3\text{к}})$.

Функционал качества:

$$I = \int_{t_0}^{t_k} 1 dt + \Phi_1(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t)) + \Phi_2(x_1(t_k), x_2(t_k), x_3(t_k)), \quad (4)$$

где $T = \int_{t_0}^{t_k} 1 dt$ – время движения по траектории; $\Phi_1(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ – штраф за нарушение ограничений фазовых координат на траектории; $\Phi_2(x_1(t_k), x_2(t_k), x_3(t_k))$ – штраф за неточность попадания в конечную точку.

Решение. Вариационная задача решается с использованием прямого метода оптимизации опорных программных траекторий (5) с алгоритмом их отслеживания по производным потребных ускорений [2]. Опорные траектории определяют желаемое программное движение.

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{оп}}(t) &= C_0 + C_1 t + C_2 \frac{t^2}{2} + C_3 \frac{t^3}{6} + C_4 \frac{t^4}{12} + C_5 \frac{t^5}{20}, \\ \dot{\varphi}_{\text{оп}}(t) &= C_1 + C_2 t + C_3 \frac{t^2}{2} + C_4 \frac{t^3}{3} + C_5 \frac{t^4}{4}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\ddot{\varphi}_{\text{оп}}(t) = C_2 + C_3 t + C_4 t^2 + C_5 t^3,$$

где коэффициенты $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ однозначно определяются через начальные $\varphi_{\text{оп0}}, \dot{\varphi}_{\text{оп0}}, \ddot{\varphi}_{\text{оп0}}$ и конечные $\varphi_{\text{опк}}, \dot{\varphi}_{\text{опк}}, \ddot{\varphi}_{\text{опк}}$ значения координат и время движения по опорной траектории $T = t_{\text{к}} - t_0$. Система (5) может быть записана для переменных состояния (фазовых переменных) в обозначениях $x_{1\text{оп}}(t), x_{2\text{оп}}(t), x_{3\text{оп}}(t)$.

В задаче, когда изменение угла $\Delta\varphi$ достаточно небольшое и угловая скорость $\dot{\varphi}(t)$ не выходит на ограничение $\dot{\varphi}_{\max}$ или $\dot{\varphi}_{\min} = -\dot{\varphi}_{\max}$, опорная траектория целиком может быть определена системой (5). При существенном изменении угла поворота $\Delta\varphi$ угловая скорость $\dot{\varphi}(t)$ может выйти на ограничение $\dot{\varphi}_{\max}$ или $\dot{\varphi}_{\min}$, в этом случае должны оптимизироваться участки выхода на ограничение и схода с ограничения в конечную точку.

Время T - критерий качества и, одновременно, варьируемый параметр опорной траектории. Если $T \leq T_{\text{opt}}$, ($T_{\text{opt}} = T_{\min}$), то опорная траектория становится чрезмерно напряженной в динамическом отношении и стабилизация фактической траектории относительно неё становится невозможной. В этом случае время движения по опорной траектории наращивается (при этом, следовательно, меняется и сама опорная траектория).

Отметим важные достоинства предлагаемого метода оптимизации. Во-первых, алгоритм метода достаточно прост в силу простоты построения желаемого программного движения (5) и возможности получения при этом точного решения краевой задачи, метод позволяет построить последовательность опорных траекторий, сходящуюся к оптимальной траектории. Во-вторых, метод с равным успехом применяется, как для линейных, так и нелинейных систем.

Стабилизация движения относительно опорных траекторий осуществляется регулятором, который синтезирует управление по отклонениям координат фактического движения от координат опорного движения:

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_{\text{оп}}; \quad \dot{\tilde{\varphi}} = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_{\text{оп}}; \quad \ddot{\tilde{\varphi}} = \ddot{\varphi} - \ddot{\varphi}_{\text{оп}}. \quad (6)$$

В соответствии с методом управление является функцией производной ускорения, потребного для устранения возмущений параметров (6) и формируется в каждый момент времени по закону [2]:

$$\ddot{\varphi}_{\text{н}} = -\left(60 \frac{\tilde{\varphi}}{\Delta T^3} + 36 \frac{\dot{\tilde{\varphi}}}{\Delta T^2} + 9 \frac{\ddot{\tilde{\varphi}}}{\Delta T}\right), \quad (7)$$

где параметр ΔT регулятора в существенной степени определяет точность отслеживания опорной траектории и $T_{\min}$. ΔT -время, отводимое для устранения возмущений (7), наблюдаемых в текущий момент времени. Оптимальное значение ΔT зависит от конструкции двигателя.

Управление формируется с непрерывной обратной связью, с учетом равенства производных текущего и потребного ускорения:

$$\ddot{\varphi}(t) = \ddot{\varphi}_{\text{н}}(t), \quad (8)$$

где $\ddot{\varphi}(t)$ определяется (1), а $\ddot{\varphi}_n(t)$ - (7). Из (1), (7) и (8) следует:

$$-\frac{T_{\text{эм}}}{T_{\text{я}} T_{\text{эм}}} \ddot{\varphi}(t) - \frac{1}{T_{\text{я}} T_{\text{эм}}} \dot{\varphi}(t) + \frac{K_{\text{д1}}}{T_{\text{я}} T_{\text{эм}}} U_{\text{y}}(t) - \frac{K_{\text{д2}} T_{\text{я}}}{T_{\text{я}} T_{\text{эм}}} \dot{M}_{\text{с}} - \frac{K_{\text{д2}}}{T_{\text{я}} T_{\text{эм}}} M_{\text{с}} = \ddot{\varphi}_n(t), \quad (9)$$

$$U_{\text{y}}(t) = \frac{T_{\text{я}} T_{\text{эм}}}{K_{\text{д1}}} \ddot{\varphi}_n(t) + \frac{T_{\text{эм}}}{K_{\text{д1}}} \dot{\varphi}(t) + \frac{1}{K_{\text{д1}}} \dot{\varphi}(t) + \frac{K_{\text{д2}} T_{\text{я}}}{K_{\text{д1}}} \dot{M}_{\text{с}} + \frac{K_{\text{д2}}}{K_{\text{д1}}} M_{\text{с}}, \quad (10)$$

Численный алгоритм оптимизации функционала качества (4) построен с использованием метода сканирования.

Результаты исследований

1. Разработаны алгоритм и программа решения задачи на языке Mat-Lab.

2. Проведены численные исследования, в которых определены:

- оптимальное значение постоянной времени регулятора ΔT ;
- минимальный шаг интегрирования дифференциальных уравнений по методу Эйлера, при котором обеспечивается устойчивость вычислительного алгоритма: $\Delta t_{\text{и}} = 0.001 \text{ с}$.

3. Получены законы изменения управления и параметров оптимальных опорных и фактических траекторий.

На рисунках 1, 2, 3 и 4, в качестве примера, приведены графики изменения управления, ускорений, угловых скоростей, и углов установки выходного вала электродвигателя на опорной и фактической траекториях.

Исходные данные для расчёта:

$$T_{\text{эм}} = 0.166 \text{ с}, T_{\text{я}} = 0.04 \text{ с}, K_{\text{д1}} = 2, K_{\text{д2}} = 0.05, M_{\text{с}} = 0 \text{ нм}, \dot{M}_{\text{с}} = 0 \text{ нм/с},$$

$$U_{\text{max}} = 35 \text{ В}, x_{2\text{пвх}} = 28 \text{ рад/с},$$

$$\varphi_0 = 0 \text{ рад}, \dot{\varphi}_0 = 0 \text{ рад/с}, \ddot{\varphi}_0 = 0 \text{ рад/с}^2,$$

$$\varphi_{\text{к}} = 1 \text{ рад}, \dot{\varphi}_{\text{к}} = 0 \text{ рад/с}, \ddot{\varphi}_{\text{к}} = 0 \text{ рад/с}^2.$$

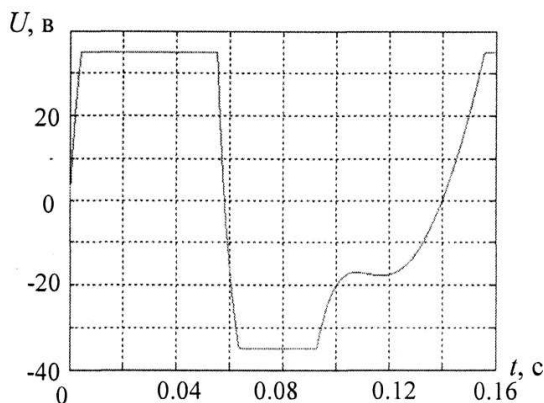


Рис. 1. Управляющее напряжение

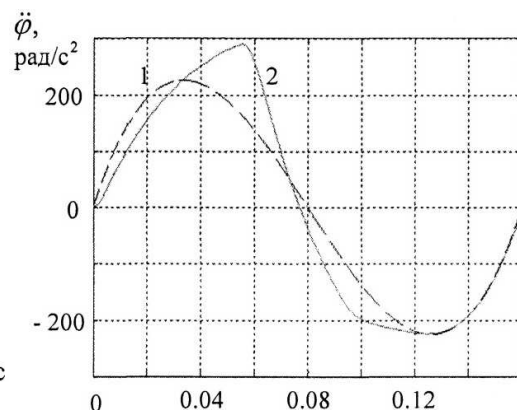


Рис. 2. Угловое ускорение:

1 – опорная траектория;

2 – фактическая траектория

В результате оптимизации получен минимум времени $T_{\min} = 0.16 \text{ с}$.

Из графиков видно, что: закон управления близок к точному релейному закону, который получается, если решать задачу на основе принципа максимума [3]; наибольшее отклонение фактической траектории от оптимальной опорной наблюдается по ускорению, минимальное отклонение - по значениям угла поворота вала. В конечной точке наблюдается удовлетворительное совпадение параметров фактической и опорной траекторий.

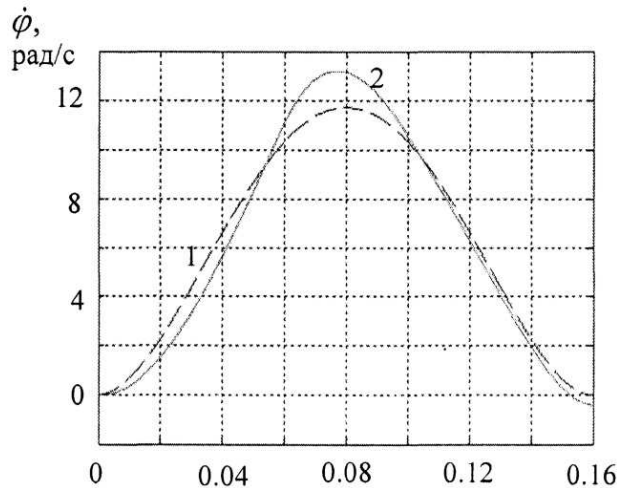


Рис. 3. Угловая скорость

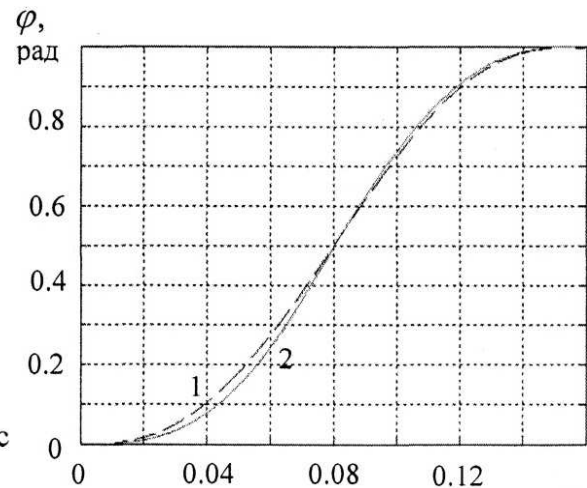


Рис. 4. Угол поворота вала
электродвигателя

На рисунках 5, 6, 7 и 8, в качестве примера, приведены графики изменения управления и угловых параметров на оптимальной опорной и фактической траекториях, когда изменение углового положения вала велико и угловая скорость выходит на ограничение $\dot{\varphi}_{\max}$. В этом случае на опорной траектории оптимизировались участок выхода на ограничение (участок разгона угловой скорости) и участок схода с ограничения в конечную точку (участок торможения). На рисунках 6, 7 и 8 пунктиром изображены графики параметров опорной траектории, сплошной линией – графики параметров фактической траектории.

Исходные данные для расчёта:

$$T_{\text{эм}} = 0.166 \text{ с}, T_{\text{я}} = 0.04 \text{ с}, K_{\text{д1}} = 2, K_{\text{д2}} = 0.05, M_c = 0 \text{ нм}, \dot{M}_c = 0 \text{ нм/с},$$

$$U_{\max} = 35 \text{ В}, x_{2\max} = 28 \text{ рад/с},$$

$$\varphi_0 = 0 \text{ рад}, \dot{\varphi}_0 = 0 \text{ рад/с}, \ddot{\varphi}_0 = 0 \text{ рад/с}^2,$$

$$\varphi_k = 10 \text{ рад}, \dot{\varphi}_k = 0 \text{ рад/с}, \ddot{\varphi}_k = 0 \text{ рад/с}^2.$$

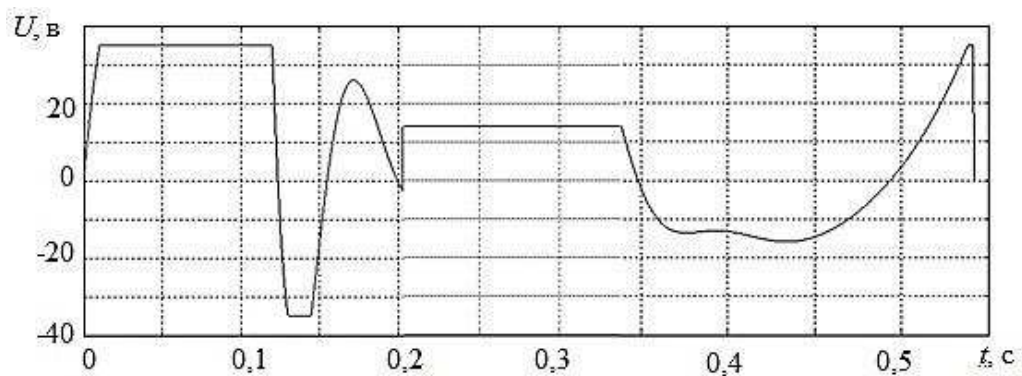


Рис. 5. Управляющее напряжение

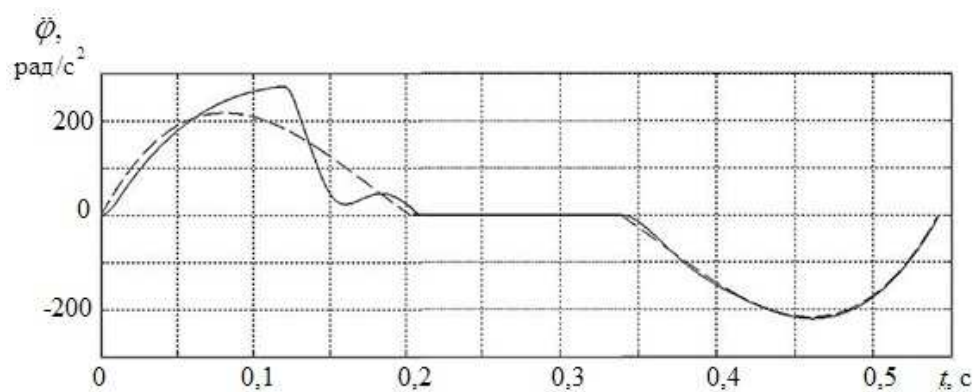


Рис. 6. Угловое ускорение

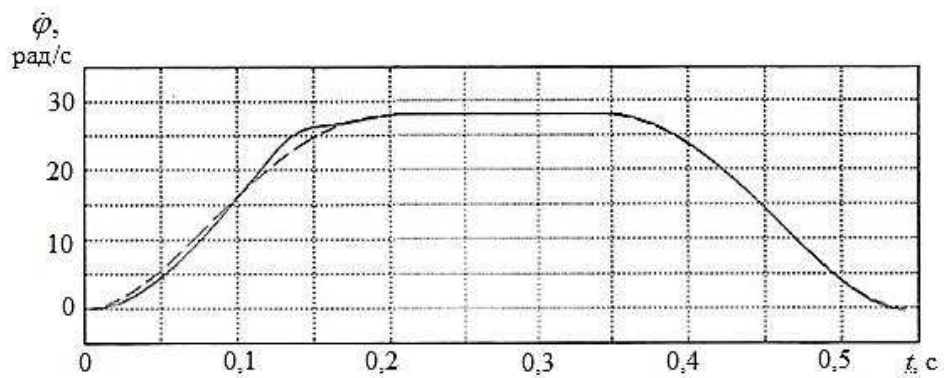


Рис. 7. Угловая скорость

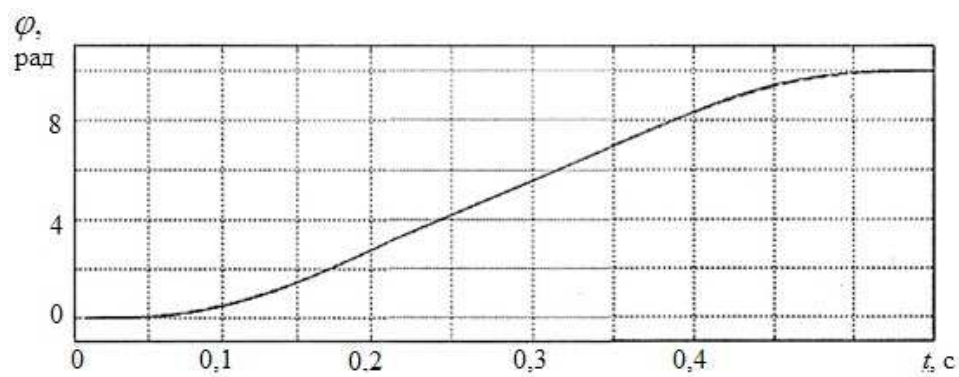


Рис. 8. Угол поворота вала электродвигателя

В результате оптимизации получен минимум времени $T_{\min} = 0.5417$ с .

Из графиков видно, что: наибольшее отклонение фактической траектории от оптимальной опорной наблюдается по ускорению на участке разгона скорости и достигает около 70% (в момент времени $t \approx 0.17$ с), на этом же участке отклонение по скорости составляет примерно 13%, при этом угловая скорость выходит на ограничение без перерегулирования, отклонения по значениям угла поворота вала минимальны (на графике практически неразличимы), в конечный момент времени наблюдается удовлетворительное совпадение параметров фактической и опорной траекторий.

Проведённые авторами исследования показали, что с вычислительной точки зрения предлагаемый подход существенно более эффективен, чем классический, основанный на использовании принципа максимума, давая при этом близкие результаты. Например, во втором примере минимум времени, полученный при решении задачи на основе принципа максимума, составляет $T_{\min 1} = 0.4725$ с , предлагаемый подход даёт $T_{\min 2} = 0.5417$ с .

Отметим два обстоятельства:

- в силу простоты метода получены простые алгоритм и программа решения задачи на ЭВМ;
- результаты расчётов подтверждают эффективность предлагаемого подхода.

Таким образом, в работе предложен новый, эффективный в вычислительном отношении, подход для оптимизации вектора состояния электродвигателя регулятора, основанный на использовании прямого метода оптимизации [2].

Программа и результаты исследований могут быть использованы, в частности, при разработке систем управления приводами поверхностей управления летательных аппаратов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 288 с.
2. Нелюбов А.И. Летные характеристики и боевое маневрирование летательных аппаратов. Выпуск 2. - М.: ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1986. – 110 с.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука. 1983.- 392 с.

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ФОРМА РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

В.А. Афанасьев (ЮУрНИУ, Россия, 456318, пр.Октября, 16),

А.А. Балоев, А.С. Мещанов (КНИТУ-КАИ, Россия, 420111, Казань,
К.Маркса, 10)

E-mail: ava46@mail.ru, a.baloev@mail.ru, mas46@list.ru

UNIVERSAL FORM OF SOLUTION LINEAR EQUATION

V.A. Afanasyev (SUNRU, Russia, 456318, October Avenue, 16),

A.A. Baloev, A.S. Meshchanov (KNRTU-KAI, 420111, Kazan, K.Marx str., 10)

Keywords: discretsystem.

Известно, что вид решения разностного уравнения зависит от характера корней его характеристического уравнения. Представляет практический интерес запись общего решения такого уравнения в форме пригодной для любых (кроме нулевых) корней. Эта задача и решается в данной работе.

1. Постановка и решение задачи. Требуется найти решение разностного уравнения порядка k

$$a_0 y[n+k] + a_1 y[n+k-1] + \dots + a_k y[n] = f[n],$$

где коэффициенты a_i ($i = \overline{0, n}$) - вещественные числа и $a_k \neq 0$; $f[n]$ - известная решетчатая функция, задано начальное состояние системы

$$y[n+k-j] \quad (j = \overline{1, k}). \quad (2)$$

Прежде всего, для (1) получим фундаментальную систему, т.е. вначале будем рассматривать однородное уравнение

$$a_0 y[n+k] + a_1 y[n+k-1] + \dots + a_k y[n] = 0. \quad (3)$$

Наряду с уравнениями (3) рассмотрим другое уравнение порядка $k-1$

$$b_0 y_{k-1}[n+k-1] + b_1 y_{k-1}[n+k-2] + \dots + b_{k-1} y_{k-1}[n] = f_{k-1}[n], \quad (4)$$

где кроме $y_{k-1}[n]$ являются неизвестными коэффициенты

b_α ($\alpha = \overline{0, k-1}$) и функция $f_{k-1}[n]$.

Требуется найти также числа b_α ($\alpha = \overline{0, k-1}$) и функцию $f_{k-1}[n]$, чтобы решение уравнения $k-1$ -го порядка (4) совпадало с решением уравнения k -го порядка (3).

Для решения этой задачи уравнения (4) при $n = n+1$ сложим с уравнением (4), умноженным на некоторое число $-j_{k-1}$. В результате получим уравнение

$$b_0 y_{k-1}[n+k] + b_1 y_{k-1}[n+k-1] + \dots + b_{k-1} y_{k-1}[n+1] - j_{k-1} (b_0 y[n+k-1] + \dots + b_{k-1} y_{k-1}[n]) = f_{k-1}[n+1] - j_{k-1} f_{k-1}[n],$$

т.е.

$$b_0 y_{k-1}[n+k] + (b_1 - j_{k-1} b_0) y_{k-1}[n+k-1] + \dots + (b_{k-1} - j_{k-1} b_{k-2}) y_{k-1}[n+1] - j_{k-1} b_{k-1} y_{k-1}[n] = f_{k-1}[n+1] - j_{k-1} f_{k-1}[n]. \quad (5)$$

Очевидно, что согласно уравнениям (3), (5), $y[n] \equiv y_{k-1}[n]$, если

$$b_0 = a_0; \quad b_i - j_{k-1} b_{i-1} = a_i \quad (i = \overline{1, k-1}); \quad -j_{k-1} b_{k-1} = a_k; \quad (6)$$

$$f_{k-1}[n+1] - j_{k-1} f_{k-1}[n] = 0. \quad (7)$$

Система уравнений (6), (7) позволяет определить константы $b_\alpha (\alpha = \overline{0, k-1})$ и функцию $f_{k-1}[n]$.

Из системы (6) путем последовательного исключения коэффициентов b_i получаем уравнение

$$a_0 j_{k-1}^k + a_1 j_{k-1}^{k-1} + \dots + a_k = 0, \quad (8)$$

т.е. величина j_{k-1} должна быть корнем характеристического уравнения (8).

Обозначим корни этого уравнения как $r_i (i = \overline{1, k})$.

Заметим, что корни уравнения (8) могут быть простыми, часть их или все кратными, вещественными или комплексными, однако нам достаточно взять в качестве j_{k-1} любой из них. Выберем в качестве j_{k-1} корень r_k . Тогда из уравнения (7) получаем [1]

$$f_{k-1}[n] = C_k r_k^n, \quad (10)$$

здесь и далее $C_i (i = \overline{1, k})$ - постоянные интегрирования.

Таким образом, можем сказать, что решением уравнения (3) порядка k является решение уравнения (4) порядка $k-1$, в котором коэффициенты b_i удовлетворяют уравнениям (6), а функция $f_{k-1}[n]$ имеет вид (10), причем любой из корней характеристического уравнения исходного уравнения (1). Опираясь другим числом j_{k-2} аналогично можем показать, что решением уравнения (4), а следовательно, и (3) будет решение уравнения порядка $k-2$

$$d_0 y_{k-2}[n+k-2] + d_1 y_{k-2}[n+k-3] + \dots + d_{k-3} y_{k-2}[n+1] + d_{k-2} y_{k-2}[n] = f_{k-2}[n], \quad (11)$$

в котором функция $f_{k-2}[n]$ является решением уравнения

$$f_{k-2}[n+1] - j_{k-2} f_{k-2}[n] = f_{k-1}[n]. \quad (12)$$

Число j_{k-2} должно быть корнем уравнения

$$b_0 j_{k-2}^{k-1} + b_1 j_{k-2}^{k-2} + \dots + b_{k-2} j_{k-2} + b_{k-1} = 0. \quad (13)$$

Покажем, что корнями уравнения (13) являются $r_1, \dots, r_{k-1}$, т.е. корни (9) за исключением уже использованного корня r_k .

Примем, что $j_{k-2} = r_{k-1}$, тогда из уравнения (12) с учетом (10) находим [1], что при отсутствии нулевых корней,

$$y[n] \equiv f_{k-1}[n] \equiv f_{k-2}[n] = C_{k-1} r_{k-1}^n + C_k r_{k-1}^n \sum_{i_{k-1}=1}^n \frac{r_k^{i_{k-1}-1}}{r_{k-1}^{i_{k-1}}}. \quad (14)$$

Таким образом, порядок уравнения (3) понижен на две единицы.

Заметим, что выражение $\sum_{i_{k-1}=1}^n \frac{r_k^{i_{k-1}-1}}{r_{k-1}^{i_{k-1}}}$ может быть раскрыто как сумма

геометрической прогрессии, но это не делается потому, что при равных корнях будет происходить деление на нуль.

Дальнейшее понижение порядка приведет нас к решению

$$\begin{aligned} y[n] = & C_1 r_1^n + C_2 r_1^n \sum_{i_1=1}^n \frac{r_2^{i_1-1}}{r_1^{i_1}} + C_3 r_1^n \sum_{i_1=1}^n \frac{r_2^{i_1-1}}{r_1^{i_1}} \sum_{i_2=1}^{i_1-1} \frac{r_3^{i_2-1}}{r_2^{i_2}} + \dots + \\ & + C_j r_1^n \sum_{i_1=1}^n \frac{r_2^{i_1-1}}{r_1^{i_1}} \sum_{i_2=1}^{i_1-1} \frac{r_3^{i_2-1}}{r_2^{i_2}} \sum_{i_3=1}^{i_2-1} \dots \sum_{i_{j-1}=1}^{i_{j-2}-1} \frac{r_j^{i_{j-1}-1}}{r_{j-1}^{i_{j-1}}} + \dots + \\ & + C_k r_1^n \sum_{i_1=1}^n \frac{r_2^{i_1-1}}{r_1^{i_1}} \sum_{i_2=1}^{i_1-1} \frac{r_3^{i_2-1}}{r_2^{i_2}} \sum_{i_3=1}^{i_2-1} \dots \sum_{i_{k-1}=1}^{i_{k-2}-1} \frac{r_k^{i_{k-1}-1}}{r_{k-1}^{i_{k-1}}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Решение (15) запишем в более компактной форме, приняв следующее обозначение:

$$\begin{aligned} y_{\alpha, j}[n] = & r_{\alpha}^n \sum_{i_{\alpha}=1}^n \frac{r_{\alpha+1}^{i_{\alpha}-1}}{r_{\alpha}^{i_{\alpha}}} \sum_{i_{\alpha+1}=1}^{i_{\alpha}-1} \frac{r_{\alpha+2}^{i_{\alpha+1}-1}}{r_{\alpha+1}^{i_{\alpha+1}}} \sum_{i_{\alpha+2}=1}^{i_{\alpha+1}-1} \dots \\ & \dots \sum_{i_{j-1}=1}^{i_{j-2}-1} \frac{r_j^{i_{j-1}-1}}{r_{j-1}^{i_{j-1}}} \quad (\alpha, j = \overline{1, k}; \alpha \leq j). \end{aligned} \quad (16)$$

$$y_{\alpha,\alpha}[n] = r_{\alpha}^n \quad (\alpha = 1, 2, \dots). \quad (17)$$

Таким образом, для (15) имеем

$$y[n] = \sum_{j=1}^n C_j y_{1,j}[n]. \quad (18)$$

2. Свойства частных решений $y_{\alpha,j}[n]$

2.1. Функции $y_{1,j}[n]$ связаны рекуррентными зависимостями. Начнем с того, что для произвольного набора корней $r_1, \dots, r_j$ ($i \leq j; i, j = 1, 2, \dots$) можно сформировать сочетания корней по q ($q \geq 1$), сумму полученных сочетаний обозначим через $S_{i,j}^q[2]$. Например, сумма всех сочетаний из корней r_1 и r_2 по 3 $S_{1,3}^3 = r_1^3 + r_1^2 r_2 + r_1 r_2^2 + r_2^3$.

Очевидно, что

$$S_{i,j}^q = r_i S_{i,j}^{q-1} + S_{i+1,j}^q \quad (i < j; S_{i,i}^q = r_i S_{i,i}^{q-1}; i, j = 1, 2, \dots). \quad (19)$$

При $\alpha < j$ из (16) следует, что

$$y_{\alpha,j}[n+1] = r_{\alpha} y_{\alpha,j}[n] + r_{\alpha+1}^n \sum_{i_{\alpha+1}=1}^n \frac{r_{\alpha+2}^{i_{\alpha+1}-1}}{r_{\alpha}^{i_{\alpha+1}}} \sum_{i_{\alpha+2}=1}^{i_{\alpha+1}-1} \dots \sum_{i_{j-1}=1}^{i_{j-2}-1} \frac{r_j^{i_{j-1}-1}}{r_{j-1}^{i_{j-1}-1}},$$

т.е.

$$y_{\alpha,j}[n+1] = r_{\alpha} y_{\alpha,j}[n] + y_{\alpha+1,j}[n]. \quad (20)$$

2.2. Функции $y_{1,j}[n]$ линейно независимы.

Теорема. Для любых корней (простые или кратные) характеристического уравнения

$$\alpha_0 \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0 \quad (21)$$

функции $y_{1,j}[n]$ ($j = \overline{1, k}$) линейно независимые, т.е. они образуют фундаментальную систему.

Из решений $y_{1,j}[n]$ (16), (17) формируем матрицу

$$W[y_{1,1}[n], y_{1,2}[n], \dots, y_{1,k}[n]] = \begin{bmatrix} y_{1,1}[n] & y_{1,2}[n] & \dots & y_{1,k}[n] \\ y_{1,1}[n+1] & y_{1,2}[n+1] & \dots & y_{1,k}[n+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1,k}[n+k-1] & y_{1,2}[n+k-1] & \dots & y_{1,k}[n+k-1] \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Покажем, что определитель

$$\left| W[y_{1,1}[n], \dots, y_{1,k}[n] \right| = \prod_{j=1}^k r_j^n \quad . \quad (23)$$

Воспользуемся методом полной математической индукции. При $k = 1$, как это следует из (17), (22), $\left| W[y_{1,1}[n]] \right| = y_{1,1}[n] = r_1^n$, т.е. формула (23) справедлива при $k = 1$.

Допустим, что (23) доказана для всех определителей порядка $k-1$. Преобразуем определитель $\left| W[y_{1,1}[n], \dots, y_{1,k}[n] \right|$: из k -й строки вычтем строку $k-1$ -ю, умноженную на r_1 , а затем из $k-1$ -й строки вычитаем $k-2$ -ю строку, умноженную на r_1 и т.д., наконец из 2-й строки вычитаем строку первую, умноженную на r_1 . Учитывая, что $y_{1,1}[n+k] = r_1^k y_{1,1}[n]$ ($k = 1, 2, \dots$), получим:

$$\begin{aligned} & \left| W[y_{1,1}[n], \dots, y_{1,k}[n] \right| = \\ & = y_{1,1}[n] \begin{vmatrix} y_{1,2}[n+1] - r_1 y_{1,2}[n] & \cdots & y_{1,k}[n+1] - r_1 y_{1,k}[n] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1,2}[n+k-1] - r_1 y_{1,2}[n+k-2] & \cdots & y_{1,k}[n+k-1] - r_1 y_{1,k}[n+k-2] \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Далее согласно (20) имеем:

$$\begin{aligned} & \left| w[y_{1,1}[n], \dots, y_{1,k}[n] \right| = \\ & = y_{1,1}[n] \begin{vmatrix} y_{2,2}[n] & \cdots & y_{2,k}[n] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{2,2}[n+k-2] & \cdots & y_{2,k}[n+k-2] \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

В правую часть этого выражения входит детерминант порядка $k-1$, записанный для функции $y_{2,i}(k)$ ($i=2, k$), поэтому к нему применимо пред-

положение индукции, т.е. он равен $\prod_{i=2}^k y_{i,i}[n]$. Формула (23) доказана. Это

утверждение означает, что линейная комбинация $y[n] = \sum_{j=1}^k C_j y_{1,j}[n]$ будет

являться общим решением однородного разностного уравнения (3) незави-

симо от того, будут ли корни $r_i (i = \overline{1, k})$ уравнения (37) простыми или они будут содержать несколько групп кратности.

Пример 1. Согласно (18), общее решение однородного разностного уравнения второго порядка

$$a_0 y[x+2] + a_1 y[x+1] + a_2 y[x] = 0,$$

где a_0, a_1, a_2 - некоторые константы, запишется в виде:

$$y[n] = C_1 y_{1,1}[n] + C_2 y_{1,2}[n]. \quad (24)$$

В этом выражении, согласно (19), (20):

$$y_{1,1}[n] = r_1^n; y_{1,2}[n] = r_1^n \sum_{i=1}^n \frac{r_2^{i-1}}{r_1^i}, \quad (25)$$

где r_1 и r_2 - корни характеристического уравнения $a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0$.

Рассмотрим два случая.

1. Корни r_1, r_2 - простые. Из формул (24) и (25) получаем:

$$y[n] = C_1 r_1^n [n] + C_2 r_1^n \sum_{i=1}^n \frac{r_2^{i-1}}{r_1^i}.$$

Раскрываем $\sum_{i=1}^n \frac{r_2^{i-1}}{r_1^i}$ как сумму геометрической прогрессии. В итоге получаем

$$y[x] = \tilde{C}_1 r_1^n [n] + \tilde{C}_2 r_1^n.$$

2. Корни r_1, r_2 - кратные, т.е. $r_1 = r_2$, из формул (24) и (25) получаем:

$$y[n] = C_1 r_1^n + C_2 r_1^n \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_1^i} = C_1 r_1^n + \tilde{C}_2 r_1^n n.$$

Именно это и должно быть в каждом из рассматриваемых случаев, т.е. решение в форме (24), (25) позволяет рассматривать оба случая сразу. Такая возможность представляет интерес в том случае, когда характер корней заранее не известен, а в последствии не исключена возможность реализации любого варианта.

3. Частные решения неоднородного уравнения

Получим частные решения неоднородного уравнения (1). Согласно [3] таким решением является

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=0}^{n-1} f[m] \frac{G[n, m]}{W[m+1]}, \quad (26)$$

где определитель k -го порядка

$$G[n, m] = \begin{vmatrix} \xi_1[m+1] & \xi_2[m+1] & \cdots & \xi_k[m+1] \\ \xi_1[m+2] & \xi_2[m+2] & \cdots & \xi_k[m+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1[m+k-1] & \xi_2[m+k-1] & \cdots & \xi_k[m+k-1] \\ \xi_1[n] & \xi_2[n] & \cdots & \xi_k[n] \end{vmatrix} \quad (n \geq 1);$$

$$W[n+1] = \begin{vmatrix} \xi_1[n+1] & \cdots & \xi_k[n+1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1[n+k] & \cdots & \xi_k[n+k] \end{vmatrix}, \quad (27)$$

причем $\xi_i[n]$ ($i = \overline{1, k}$) линейно-независимые решения однородного уравнения (3), т.е. решения (16), (17). В таком случае

$$G[n, m] = \begin{vmatrix} y_{1,1}[m+1] & y_{1,2}[m+1] & \cdots & y_{1,k}[m+1] \\ y_{1,1}[m+2] & y_{1,2}[m+2] & \cdots & y_{1,k}[m+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1,1}[m+k-1] & y_{1,2}[m+k-1] & \cdots & y_{1,k}[m+k-1] \\ y_{1,1}[n] & y_{1,2}[n] & \cdots & y_{1,k}[n] \end{vmatrix} \quad (n \geq 1); \quad (28)$$

$$W[n+1] = W[y_{1,1}[n+1], \dots, y_{1,k}[n+1]] =$$

$$= \begin{vmatrix} y_{1,1}[n+1] & y_{1,2}[n+1] & \cdots & y_{1,k}[n+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1,1}[n+k] & y_{1,2}[n+k] & \cdots & y_{1,k}[n+k] \end{vmatrix}. \quad (29)$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение третьего порядка

$$a_0 y[n+3] + a_1 y[n+2] + a_2 y[n+1] + a_3 y[n] = f[n]$$

и для этого уравнения запишем общее решение.

Согласно (18), (26)

$$y[n] = \sum_{j=1}^3 C_j y_{1,j}[n] + \sum_{m=0}^{n-1} f[m] \frac{G[n, m]}{W[n+1]}. \quad (31)$$

Для рассматриваемого случая согласно (16), (17)

$$y_{1,1}[n] = r_1^n; y_{1,2}[n] = r_1^{n-1} + r_2 r_1^{n-2} + \dots + r_2^{n-2} r_1 + r_2^{n-1};$$

$$y_{1,3}[n] = r_1^{n-2} + r_1^{n-3} r_2 + \dots + r_2^{n-2} + r_2^{n-3} r_3 + \dots + r_3^{n-2}, \quad (32)$$

поэтому согласно (46), (48), определители (28), (29)

$$G[n+m] = \begin{vmatrix} y_{1,1}[m+1] & y_{1,2}[m+1] & y_{1,3}[m+1] \\ y_{1,1}[m+2] & y_{1,2}[m+2] & y_{1,3}[m+2] \\ y_{1,1}[n] & y_{1,2}[n] & y_{1,3}[n] \end{vmatrix}; \quad (33)$$

$$W[n+1] = (r_1, r_2, r_3)^{n+1}. \quad (34)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. 3-е изд. Испр. М.: Наука, 1967. 373 стр.
2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. Для инженеров и учащихся втузов. 13-е изд., испр. М.: Наука, 1986. 54.с.
3. Иванов В.А., Чемоданов Б.К., Медведев В.С. Математические основы автоматического регулирования. М.: Высшая школа, 1971, 807 с.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО ПАРЕТО ОБОБЩЕННОЕ H_2 -УПРАВЛЕНИЕ

Д.В. Баландин (ННГУ им. Н.И.Лобачевского, Россия, 603950,
Нижний Новгород, Гагарина, 23)
E-mail: dbalandin@yandex.ru

М.М. Коган (ННГАСУ, Россия, 603950, Нижний Новгород, Ильинская, 65)
E-mail: mkogan@nngasu.ru

PARETO OPTIMAL GENERALIZED H_2 -CONTROL

D.V. Balandin (Lobachevsky UNN, 603950, Nizhni Novgorod, Gagarin ave., 23)

M.M. Kogan (NNSUACE, 603950, Nizhni Novgorod, Il'inskaya str., 65)

Keywords: multi-criteria optimization, Pareto optimal control, generalized H_2 -norm, Germeyer convolution.

Введение. Реальные задачи управления всегда многокритериальны и это в полной мере относится к уменьшению влияния внешнего возмущения на различные выходы управляемого объекта. Одними из первых работ, в которых методы многокритериальной оптимизации применялись к синтезу оптимального по Парето управления, были статья [1] о линейно-квадратичном гауссовском управлении и статья [2], где множество оптимальных по Парето регуляторов в задаче со многими H_2 -критериями было characterized в терминах решений уравнений Риккати, используя параметризацию Youla и скалярную многоцелевую функцию в виде линейной свертки критериев.

Несмотря на то, что за последние десятилетия достигнут прогресс в решении задач оптимального управления с такими критериями как H_∞ - и H_2 -нормы, имеющими ясные физические интерпретации в виде уровней гашения детерминированных или стохастических возмущений из различных классов, рассмотрение многокритериальных задач с этими критериями вызывает значительные трудности. Эти трудности, в первую очередь, связаны со сложностью характеристики множества Парето и нахождения соответствующей скалярной многоцелевой функции, которая бы определяла это множество. Кроме того, задача осложняется тем, что каждый из критериев характеризуется своей квадратической функцией Ляпунова с матрицей, являющейся решением уравнения Риккати или линейных матричных неравенств, а скалярная оптимизация многоцелевой функции в виде той или иной свертки приводит, в общем случае, к билинейной системе неравенств относительно матриц этих функций Ляпунова и матрицы обратной связи регулятора. Для решения такой системы, как

правило, вводилось дополнительное условие о равенстве между собой всех функций Ляпунова, что вносило консерватизм в рассматриваемую задачу [3-7]. При этом без ответа оставался главный вопрос, в какой мере получаемые законы управления отличаются от оптимальных по Парето.

В недавних работах [8-11] по многокритериальной оптимизации с критериями в виде H_∞ - и γ_0 -норм в детерминированной и стохастической постановках были найдены субоптимальные по Парето законы управления, относительные потери которых по сравнению с оптимальными по Парето не превышают $1 - \sqrt{N} / N$, где N – число критериев.

В данной работе в качестве функционалов используются H_2 -нормы передаточных матриц объекта от одного входа к различным выходам. В общем случае обобщенная H_2 -норма характеризует коэффициент усиления системы, на вход которой поступает сигнал с ограниченной L_2 -нормой, а выходной сигнал "измеряется" обобщенной L_∞ -нормой, которая есть максимальное по времени значение максимальной из евклидовых норм векторов, которые в совокупности составляют вектор выхода. Обобщенная L_∞ -норма в этом определении, в частности, может быть максимальным по времени значением евклидовой нормы вектора выхода или максимальным по времени значением максимальной абсолютной величины компоненты вектора выхода. Такие варианты обобщенной H_2 -нормы были впервые рассмотрены в работах [12,13]. В данной работе получены необходимые условия оптимальности по Парето в рассматриваемой многокритериальной задаче и установлено, что оптимальные по Парето законы управления синтезируются с использованием так называемой свертки Гермейера [14] и аппарата линейных матричных неравенств. Показано, как предложенный подход к многокритериальной задаче обобщенного H_2 -управления находит свое применение в задачах виброизоляции.

Постановка многокритериальной задачи управления. Пусть объект управления описывается уравнениями

$$\dot{x} = Ax + B_v v + B_u u, \quad x(0) = 0, \quad (1)$$

$$z_k = C_k x + D_k u,$$

в которых $x \in R^{n_x}$ – состояние объекта, $v \in R^{n_v}$ – возмущение, $u \in R^{n_u}$ – управление, $z_k \in R^{n_k}$, $k = 1, \dots, N$ – целевые выходы, возмущения $v = v(t)$ являются сигналами с ограниченной энергией, т.е. принадлежат классу L_2 . Управление реализуется в виде линейной обратной связи по состоянию $u = \Theta x$. Уравнения замкнутой системы принимают вид

$$\dot{x}_c = A_c(\Theta)x_c + B_c(\Theta)v, \quad x_c(0) = 0, \\ z_k = C_k(\Theta)x,$$

где $A_c(\Theta) = A + B_u\Theta$, $B_c(\Theta) = B_v$, $C_c(\Theta) = C_k + D_k\Theta$. Влияние возмущения на k -й целевой выход характеризуется следующим функционалом (для простоты изложения здесь используется лишь частный случай обобщенной H_2 -нормы)

$$J_k(\Theta) = \sup_{v \in L_2} \frac{\sup_t |z_k(t)|}{\|v\|_2}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Поставим многокритериальную задачу синтеза закона управления, который будет оптимальным по отношению ко всем уровням гашения возмущений в N каналах. Напомним, что ключевым понятием в многокритериальной оптимизации является множество Парето. В данном случае множество $P = \{\Theta_P\}$ является оптимальным по Парето, если неравенства $J_k(\Theta) \leq J_k(\Theta_P)$, $k = 1, \dots, N$, в которых, по меньшей мере, одно является строгим, не выполняются для любой матрицы Θ . Задача состоит в характеристике оптимальных по Парето решений, т.е.

$$\Theta_P = \arg \min_{\Theta} \{J_k(\Theta), k = 1, \dots, N\},$$

при которых замкнутая система в отсутствие возмущений асимптотически устойчива.

Решение многокритериальной задачи. Определим на траекториях системы целевую функцию

$$J_\alpha(\Theta) = \max_{1 \leq k \leq N} \{J_k(\Theta) / \alpha_k\}, \quad (2)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $\alpha_k > 0$, $k = 1, \dots, N$, которая есть ничто иное как свертка Гермейера в теории многокритериальной оптимизации (3). Необходимые условия оптимальности по Парето в рассматриваемой задаче формулируются следующим образом.

Теорема 1. Пусть $(\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ -- оптимальная по Парето точка в пространстве критериев и Θ_α -- минимум целевой функции $J_\alpha(\Theta)$ при $\alpha_k = \gamma_k / \max_{1 \leq i \leq N} \gamma_i$. Тогда $\Theta_\alpha \in P$ и $J_k(\Theta_\alpha) = \gamma_k$, $k = 1, \dots, N$.

Доказательство: Допустим, что $\Theta_P \in P$ и $J_k(\Theta_P) = \gamma_k > 0$, $k = 1, \dots, N$. Обозначим $J_\alpha(\Theta_P) = \gamma$ и, следовательно, $J_\alpha(\Theta_\alpha) \leq \gamma$. Заметим, что при указанных в формулировке теоремы коэффициентах α_k имеет место $\gamma = \max_{1 \leq i \leq N} \gamma_i / \alpha_i = \max_{1 \leq i \leq N} \gamma_i$. В результате с учетом (2) получим $J_k(\Theta_\alpha) \leq \alpha_k \gamma = \gamma_k$. По определению оптимального по Парето множества последнее может иметь место, если только $\Theta_\alpha \in P$.

В соответствии с этой теоремой оптимальные по Парето решения следует искать среди оптимальных решений для целевой функции $J_\alpha(\Theta)$.

Теорема 2. Оптимальными по Парето управлениями в многокритериальной задаче являются оптимальные управления для асимптотически устойчивой системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= A_c(\Theta)x_c + B_c(\Theta)v, \quad x_c(0) = 0, \\ z &= C_c(\Theta)x_c,\end{aligned}$$

где $z = \text{col}(z_1, \dots, z_N)$, $C_c^T(\Theta) = (\alpha_1^{-1}C_1^T(\Theta) \dots \alpha_N^{-1}C_N^T(\Theta))$, с параметрами Θ_α^* , которые находятся из решения задачи

$$\max_k \alpha_k^{-2} \lambda_{\max}(C_k(\Theta)YC_k^T(\Theta)) \rightarrow \min_\Theta, \quad A_c(\Theta)Y + YA_c^T(\Theta) + B_c(\Theta)B_c^T(\Theta) = 0, \quad (3)$$

где $\lambda_{\max}(R)$ – максимальное собственное число матрицы R .

Решение этой задачи может быть записано в эквивалентной форме матричных неравенств в виде следующей задачи: минимизировать γ^2 , при ограничениях в виде матричных неравенств

$$\begin{pmatrix} A_c(\Theta)Y + YA_c^T(\Theta) & B_c(\Theta) \\ B_c^T(\Theta) & -I \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} Y & YC_k^T(\Theta) \\ C_k(\Theta)Y & \gamma^2 \alpha_k^2 I_k \end{pmatrix} \geq 0, \quad (4)$$

$$k = 1, \dots, N.$$

Покажем, как вычисляются матрицы параметров оптимальных по Парето регуляторов. Подставим матрицы $A_c(\Theta)$, $B_c(\Theta)$, $C_c(\Theta)$ в неравенства (4) и обозначим $Z = \Theta Y$. Тогда $\Theta_\alpha^* = Z_* Y_*^{-1}$, где (Y_*, Z_*) – решение задачи $\gamma^2 \rightarrow \min$ при ограничениях, определяемых линейными матричными неравенствами

$$\begin{pmatrix} AY + YA^T + B_u Z + Z^T B_u^T & B_v \\ B_v^T & -I \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} Y & YC_k^T + Z^T D_k^T \\ C_k Y + D_k Z & \gamma^2 \alpha_k^2 I_k \end{pmatrix} \geq 0, \quad (5)$$

$$k = 1, \dots, N.$$

Оптимальная виброизоляция. В качестве примера рассмотрим задачу виброизоляции, которая в теории виброзащитных систем относится к числу базовых. Система состоит из двух тел: основание и защищаемый объект. Математическая модель изоляции объекта от основания, совершающего поступательное движение, описывается дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= u + v, \\ \xi(0) &= 0, \quad \dot{\xi}(0) = 0,\end{aligned}$$

где ξ – координата защищаемого объекта относительно основания, u – управляющее силовое воздействие, генерируемое виброизолятором

(характеристика изолятора), v – с точностью до знака ускорение основания (внешнее воздействие). Приведем уравнение движения к стандартному виду управляемой системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u + v, \\ x_1(0) &= 0, \quad x_2(0) = 0.\end{aligned}$$

Задачи виброизоляции, состоящие в нахождении характеристики изолятора, могут формулироваться как для заданного движения основания, так и для случая, когда ускорение основания *априори* неизвестно. Подобная модель в простейшем варианте описывает многие типичные ситуации виброизоляции приборов, аппаратуры и человека, расположенных на движущихся транспортных средствах.

В начале 60-х годов XX века в рамках данной модели для конкретных видов внешних воздействий интенсивно изучались задачи оптимальной виброизоляции в следующей постановке [15, 16]:

$$\sup_{t \geq 0} |x_1(t)| \rightarrow \min, \quad \sup_{t \geq 0} |u(t)| \leq 1.$$

Следующим шагом [17, 18] стало исследование двухкритериальной задачи оптимальной противоударной защиты для класса воздействий V_1 , определяемого неравенством $\int_0^\infty |v(t)| dt \leq 1$, с критериями

$$\hat{J}_1(u) = \sup_{v \in V_1} \sup_{t \geq 0} |x_1(t)|, \quad \hat{J}_2(u) = \sup_{v \in V_1} \sup_{t \geq 0} |u(t)|.$$

Первый из этих функционалов характеризует максимальное смещение объекта защиты относительно основания, а второй -- максимальное усилие, создаваемое изолятором. Интуитивно понятно, что очень большое усилие изолятора (в пределе абсолютно жесткое крепление объекта к основанию) обеспечивает очень малое (в пределе нулевое) смещение объекта, с другой стороны, малое усилие изолятора или очень мягкое крепление объекта к основанию приведет к очень большим смещениям объекта. Оба указанных варианта выбора характеристики изолятора, как правило, неприемлимы. Таким образом, естественный подход к задаче виброизоляции заключается в поиске компромисса между значениями максимального смещения объекта и максимального усилия изолятора, что приводит к двухкритериальной задаче оптимального управления. Задача формулируется следующим образом: найти управление u в форме обратной связи по состоянию

$$u = -kx_1 - cx_2, \quad k > 0, c > 0, \quad (6)$$

минимизирующее в смысле Парето векторный критерий $\{\hat{J}_1(u), \hat{J}_2(u)\}$. Согласно [18] Парето оптимальное множество в плоскости параметров

обратной связи (k, c) и в плоскости критериев определяются соотношениями

$$k = 1,53c^2, \quad \hat{J}_1 = \frac{0,521}{\hat{J}_2}. \quad (7)$$

Сформулируем новую двухкритериальную задачу виброизоляции для класса воздействий V_2 , определяемого неравенством $\int_0^\infty |v(t)|^2 dt \leq 1$, с критериями

$$J_1(u) = \sup_{v \in V_2} \sup_{t \geq 0} |x_1(t)|, \quad J_2(u) = \sup_{v \in V_2} \sup_{t \geq 0} |u(t)|,$$

которые могут быть также представлены в виде

$$J_1(u) = \sup_{v \in L_2} \frac{\sup_{t \geq 0} |x_1(t)|}{\|v\|_2}, \quad J_2(u) = \sup_{v \in L_2} \frac{\sup_{t \geq 0} |u(t)|}{\|v\|_2}.$$

Для решения задачи воспользуемся теоремой 2. Искомое управление в форме обратной связи по состоянию представим в виде (6). Вначале решим матричное уравнение (3) и получим

$$Y = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} 1/k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее предстоит решить следующую оптимизационную задачу

$$\max \left\{ \frac{J_1^2(k, c)}{\alpha_1^2}, \frac{J_2^2(k, c)}{\alpha_2^2} \right\} = \max \left\{ \frac{1}{2\alpha_1^2 k c}, \frac{k + c^2}{2\alpha_2^2 c} \right\} \rightarrow \min_{k, c}$$

Несложный анализ показывает, что минимум достигается на множестве положительных значений параметров k, c , удовлетворяющих уравнению $p^2 J_1^2(k, c) = J_2^2(k, c)$ или в явной форме

$$\frac{p^2}{k} = k + c^2,$$

где $p^2 = \alpha_2^2 / \alpha_1^2$. Решая квадратное уравнение, получим

$$k = k_*(c) = \frac{-c^2 + \sqrt{c^4 + 4p^2}}{2}.$$

Подставляя теперь $k = k_*(c)$ в формулу для $J_2^2(k, c)$, имеем

$$J_2^2(k_*(c), c) = \frac{c^2 + \sqrt{c^4 + 4p^2}}{4c}.$$

Минимизируя функцию $J_2^2(k_*(c), c)$, найдем оптимальное значение параметра c :

$$c_0^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} p,$$

а соответствующее оптимальное значение параметра $k_0 = k_*(c_0) = c_0^2/2$. Таким образом, решение двухкритериальной задачи представляет собой множество положительных значений параметров k, c , удовлетворяющих соотношению

$$k = 0,5c^2. \quad (8)$$

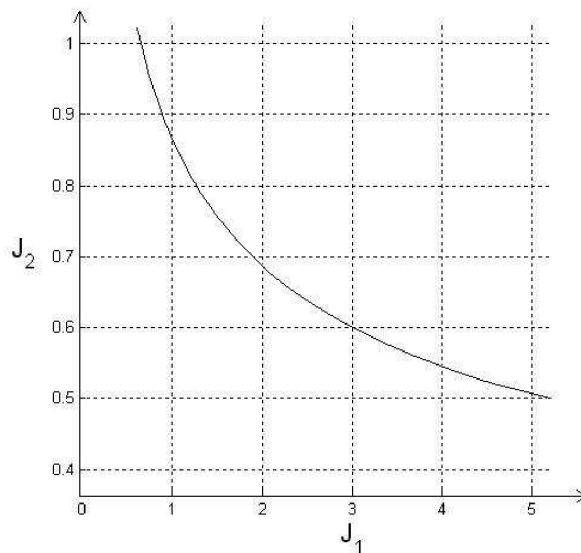
Значения функционалов J_1 и J_2 при оптимальных значениях параметров:

$$J_1^0 = c^{-3/2}, \quad J_2^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} c^{1/2}.$$

Исключая параметр c , получим решение двухкритериальной задачи в плоскости критериев (см. рисунок):

$$J_1 = \frac{3^{3/2}}{8J_2^3}.$$

Обратим внимание на квадратичную зависимость параметра k от параметра c в формулах (8) и (7), определяющих Парето оптимальные множества в плоскости параметров в рассмотренных двухкритериальных задачах для классов воздействий V_2 и V_1 .



Множество Парето на плоскости критериев в задаче виброизоляции

В данном относительно простом примере для решения двухкритериальной задачи удалось воспользоваться непосредственно Теоремой 2, решив аналитически оптимизационную задачу (3). В более сложных задачах, не допускающих простого аналитического решения, для численного решения целесообразно использовать линейные матричные

неравенства (5) и соответствующие программные средства (например, пакет Matlab).

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ в рамках ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы» (соглашение 14.578.21.0110 от 27.10.2015, уникальный идентификатор RFMEFI57815X0110).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mäkilä P.M.* On Muptiple Criteria Stationary Linear Quadratic Control // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. No. 12. P. 1311–1313.
2. *Khargonekar P.P., Rotea M.A.* Muptiple Objective Optimal Control of Linear Systems: the Quadratic Norm Case // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. No. 1. P. 14–24.
3. *Bernstein D.S., Haddad W.M.* LQG Control with an H_∞ Performance Bound: a Riccati Equation Approach// IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. No. 3. P. 293–305.
4. *Khargonekar P.P., Rotea M.A.* Mixed H_2/H_∞ Control: a Convex Optimization Approach// IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. No. 7. P. 824–831.
5. *Scherer C., Gahinet P., Chilali M.* Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization// IEEE Trans. Autom. Control. 1997. V. 42. No. 7. P. 896–911.
6. *Hindi H.A., Hassibi B., Boyd S.P.* Multiobjective H_2/H_∞ -Optimal Control via Finite Dimensional Q -Parametrization and Linear Matrix Inequalities // Proc. 1998 Amer. Control Conf., Philadelphia, USA. 1998. P. 3244–3249.
7. *Chen X., Zhou K.* Multiobjective H_2/H_∞ Control Design// SIAM J. Control Optim. 2001. V. 40. No. 2. P. 628–660.
8. *Balandin D.V., Kogan M.M.* Pareto suboptimal solutions in control and filtering problems under multiple deterministic and stochastic disturbances // Proc. Europ. Control Conf., Aalborg, Denmark. 2016. P. 2263–2268.
9. *Balandin D.V., Kogan M.M.* Pareto suboptimal solutions under coalitions of disturbances // Proc. Intern. Conf. "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), 2016.
10. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Множество Парето задачах управления и фильтрации при детерминированных и стохастических возмущениях // АиТ. 2017. №1.
11. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Субоптимальные по Парето регуляторы против коалиций возмущений// АиТ. 2017. №2.

12. *Wilson D.A.* Convolution and Hankel Operator Norms for Linear Systems // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1989. V. 34. P. 94–97.
13. *Rotea M.A.* The generalized H_2 control problem // *Automatica*. 1993. V. 29. No. 2. P. 373–385.
14. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
15. *Гурецкий В.В.* Предельные возможности защиты оборудования от воздействия ударов// *Изв. АН СССР. Механика*. 1965. №2. С.76–81.
16. *Sevin E., Pilkey W.D.* Optimum Shock and Vibration Isolation. Washington: Gov. print. off., 1971.
17. *Болотник Н.Н.* Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983.
18. *Balandin D.V., Bolotnik N.N. and Pilkey W.D.* Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 2001.

СОЛНЕЧНАЯ ОРИЕНТАЦИЯ СПУТНИКА-ГИРОСТАТА

Т.Ф. Барбашова (мехмат МГУ им. М.В. Ломоносова, 119991, Москва, Ленинские горы, 1), E-mail: tatbarba@yandex.ru

А.И. Игнатов (ГКНПЦ им. М.В. Хруничева, 121087, Москва, Новозаводская ул., 18) , E-mail: general_z@mail.ru

В.В. Сазонов (ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 125047, Москва, Миусская пл., 4), E-mail: sazonov@keldysh.ru

A.I. Ignatov (Khrunichev State Research and Production Space Center, Russia, 121087, Moscow, Novozavodskaya st., 18)

T.F. Barbashova (Lomonosov Moscow State University, Department of Mechanics and Mathematics, Russia, 119991, Moscow, Leninskie Gory, 1)

V.V. Sazonov (Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Russia, 125047, Moscow, Miusskaya sq., 4)

Keywords: spacecraft, gyrostat, periodic motions, solar orientation mode

Исследован режим солнечной ориентации искусственного спутника Земли. Параметры спутника соответствуют параметрам спутников «Бион М» и «Фотон М-4». В этом режиме нормаль к плоскости солнечных батарей спутника неизменно направлена на Солнце, продольная ось лежит в плоскости орбиты, абсолютная угловая скорость спутника весьма мала. Режим стабилизируется с помощью электромагнитов, взаимодействующих с магнитным полем Земли и вращающегося маховика, создающего постоянный гиростатический момент вдоль продольной оси спутника. Такой момент можно создать и с помощью системы двигателей-маховиков, постоянство гиростатического момента означает, что эта система будет функционировать без насыщения. Управление вращательным движением спутника осуществляется за счет изменения токов в электромагнитах. Реализация управления не требует проведения сложных измерений, достаточно иметь показания солнечного датчика, трехосного магнитометра и аппаратуру для их обработки. Энергопотребление при реализации управления не превышает нескольких ватт.

1. Уравнения движения спутника. Спутник считаем гиростатом, центр масс которого – точка O – движется по геоцентрической орбите. Для записи уравнений движения спутника относительно центра масс и интерпретации результатов математического моделирования, введем две правые декартовы системы координат.

Связанная со спутником система $Ox_1x_2x_3$ образована его главными центральными осями инерции. Несколько упрощая модель, полагаем, что

оси этой системы связаны с характерными элементами конструкции спутника: ось Ox_1 параллельна его продольной оси, ось Ox_2 перпендикулярна плоскости солнечных батарей. Гиросtatический момент спутника направлен по оси Ox_1 . Ниже, если не оговорено особо, компоненты векторов и координаты точек относятся к системе $Ox_1x_2x_3$.

Начало гринвичской системы $Sy_1y_2y_3$ находится в центре Земли, плоскость Sy_1y_2 совпадает с плоскостью экватора, ось Sy_1 пересекает гринвичский меридиан, ось Sy_3 направлена к Северному полюсу.

Положение системы $Ox_1x_2x_3$ относительно гринвичской системы зададим нормированным кватернионом $Q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, $\|Q\| = 1$. Кватернионная формула перехода между этими системами координат имеет вид $(0, y_1, y_2, y_3) = Q \circ (0, x_1, x_2, x_3) \circ Q^{-1}$. Матрицу перехода от системы $Ox_1x_2x_3$ к гринвичской системе обозначим $\|b_{ij}\|_{i,j=1}^3$; где b_{ij} – косинус угла между осями Sy_i и Ox_j . Элементы этой матрицы выражаются через компоненты Q по известным формулам: $b_{11} = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2$, $b_{12} = 2(q_1q_2 - q_0q_3)$, $b_{21} = 2(q_1q_2 + q_0q_3)$ и т. п.

Уравнения движения спутника состоят из двух подсистем. Одна подсистема описывает движение центра масс спутника, другая его движение относительно центра масс – вращательное движение. Подсистема уравнений движения центра масс записывается в гринвичской системе координат. В ней учитываются нецентральность гравитационного поля Земли и сопротивление атмосферы. Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка (16,16) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Параметры атмосферы и баллистический коэффициент спутника считаются неизменными на всем интервале интегрирования уравнений движения.

Подсистема уравнений вращательного движения образована уравнениями Эйлера для компонент абсолютной угловой скорости спутника $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ и кинематическими уравнениями для кватерниона Q . В уравнениях Эйлера учитываются гравитационный и восстанавливающий аэродинамический моменты, а также управляющий момент, создаваемый электромагнитами. Для гравитационного момента существует простое аналитическое выражение [1]. Аэродинамический момент M_a вычислялся в предположении, что спутник имеет форму прямого кругового цилиндра с двумя прикрепленными к нему одинаковыми прямоугольными пла-

стинами солнечными батареями. Ось цилиндра совпадает с осью Ox_1 радиус цилиндра – R , высота – L . Пластины расположены в плоскости Ox_1x_3 симметрично относительно оси Ox_1 . Стороны пластин параллельны осям Ox_1 и Ox_3 , суммарная площадь пластин – S_b . Координаты геометрических центров масс цилиндра и пластин суть $(z_c, 0, 0)$ и $(z_b, 0, 0)$. Полагая столкновения молекул атмосферы со спутником абсолютно неупругими, аэродинамический момент представим в виде [1]

$$\mathbf{M}_a = \rho_a |\mathbf{v}| (\mathbf{v} \times \mathbf{P}).$$

Здесь $\mathbf{v}$ – скорость точки O относительно гринвичской системы координат, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{v})$ – первый момент геометрической фигуры, которая представляет собой проекцию внешней оболочки спутника на плоскость Π_v , перпендикулярную вектору $\mathbf{v}$. Вектор $\mathbf{P}$ лежит в плоскости Π_v и вычисляется относительно проекции на Π_v точки O . Формула для $\mathbf{M}_a$ инвариантна относительно замены $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} + p\mathbf{v}$, где p – произвольный скаляр. По этой причине функцию $\mathbf{P}(\mathbf{v})$ можно задавать, не связывая себя условием $\mathbf{P} \in \Pi_v$. В частности, компоненты вектора $|\mathbf{v}| \mathbf{P}(\mathbf{v})$ удобно задавать в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Для рассматриваемого спутника этот вектор можно взять в виде

$$|\mathbf{v}| \mathbf{P}(\mathbf{v}) = \left(\pi z_c R^2 |v_1| + 2z_c R L \sqrt{v_2^2 + v_3^2} + z_b S_b |v_2|, 0, 0 \right),$$

где v_i – компоненты вектора $\mathbf{v}$.

Механический момент, создаваемый электромагнитами, имеет вид

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{L} \times \mathbf{B}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)$ – собственный магнитный момент электромагнитов, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ – магнитная индукция МПЗ в точке O ,

$$B_i = \sum_{j=1}^3 B_{yj} b_{ji} \quad (i = 1, 2, 3),$$

B_{yi} – компоненты вектора магнитной индукции МПЗ в точке O , рассчитываемые согласно моделью IGRF.

Уравнения Эйлера и кинематические уравнения для кватерниона имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \mu(\omega_2 \omega_3 - \nu x_2 x_3) + l_2 B_3 - l_3 B_2, \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu} (\omega_1 \omega_3 - \nu x_1 x_3) + \frac{\lambda}{1+\lambda\mu} (l_3 B_1 - l_1 B_3 + p v_3 - h \omega_3), \\ \dot{\omega}_3 &= -(1-\lambda+\lambda\mu)(\omega_1 \omega_2 - \nu x_1 x_2) + \lambda(l_1 B_2 - l_2 B_1 - p v_2 + h \omega_2), \\ 2\dot{q}_0 &= -q_1 \omega_1 - q_2 \omega_2 - q_3 (\omega_3 - \omega_E), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\dot{q}_1 &= q_0\omega_1 + q_2(\omega_3 + \omega_E) - q_3\omega_2, \\
2\dot{q}_2 &= q_0\omega_2 + q_3\omega_1 - q_1(\omega_3 + \omega_E), \\
2\dot{q}_3 &= q_0(\omega_3 - \omega_E) + q_1\omega_2 - q_2\omega_1, \\
\lambda &= \frac{I_1}{I_3}, \quad \mu = \frac{I_2 - I_3}{I_1}, \quad \nu = \frac{3\mu_E}{r^5}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \\
p &= \rho_a \left(g_1 |v_1| + g_2 |v_2| + g_3 \sqrt{v_2^2 + v_3^2} \right), \\
g_1 &= \frac{\pi R^2 z_c}{I_1}, \quad g_2 = \frac{S_b z_b}{I_1}, \quad g_3 = \frac{2RLz_c}{I_1}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ – геоцентрический радиус-вектор точки O , I_i – моменты инерции спутника относительно осей Ox_i ($i=1, 2, 3$), $l_i = L_i / I_1$, $I_1 h$ – гиросtatический момент спутника (направлен по оси Ox_1), μ_E и ω_E – гравитационный параметр Земли и ее угловая скорость.

Чтобы замкнуть подсистему уравнений вращательного движения, к уравнениям (2) надо добавить соотношения, описывающие изменение величин l_i . Явный вид этих соотношений будет указан ниже.

Приведем использованные в расчетах числовые значения параметров описанной модели. Параметры спутника: $\lambda = 0.25$, $\mu = 0.1$, $I_1 h = 100$ Нмс, $I_1 = 2600$ кгм², $R = 1.3$ м, $L = 5$ м, $S_b = 33$ м², $z_b = -1$ м, $z_c = 0.3$ м. Параметры модели атмосферы во всех расчетах были следующие: $F = 137.0$, $F_{81} = 117.09$, $K_p = 2.333$.

Начальные условия движения центра масс спутника задавались в момент 10:13:07 декретного московского времени 05.05.2013. На этот момент элементы орбиты составляли: высота в апогее 575.2 км, высота в перигее 546.8 км, наклонение 64.87°, аргумент широты перигея -124.65° , долгота восходящего узла (отсчитывается от точки весеннего равноденствия эпохи даты) -16.73° . Начальные условия уравнений (1) задавались в тот же момент времени, что и начальные условия принятой орбиты. Этот момент служил началом отсчета времени – точкой $t = 0$.

2. Управление вращательным движением. Дипольный момент электромагнитов, обеспечивающий стабилизацию режима солнечной ориентации спутника, будем искать в виде [2]

$$\mathbf{L} = \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{u}}{|\mathbf{B}|^2}, \quad \mathbf{u} = I_1 \mathbf{m}, \tag{3}$$

где $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ – управление, вид которого предстоит установить. Подставив выражение (3) в (1), получим формулу $\mathbf{M}_c = \mathbf{u} - |\mathbf{B}|^{-2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}$. Если в последней формуле отбросить вычитаемое $|\mathbf{B}|^{-2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}$, то она пе-

рейдет в формулу $\mathbf{M}_c = \mathbf{u}$, которая обеспечила бы широкие возможности для построения законов управления. Вычитаемое $|\mathbf{V}|^{-2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{V}) \mathbf{V}$ уменьшает эти возможности, но если осуществлять управление на промежутках времени длиной виток и более, то в ряде случаев влияние этого слагаемого можно нивелировать. Положительным фактором здесь служит достаточно большое наклонение орбиты спутника.

Режимом солнечной ориентации спутника будем называть такое движение, в котором с малыми ошибками выполнены следующие условия: ось Ox_2 направлена на Солнце, ось Ox_1 лежит в плоскости орбиты, угловая скорость спутника равна нулю. Эти условия выражаются соотношениями

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{s}, \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad (4)$$

где $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ – орты осей Ox_1 и Ox_2 , $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – орт направления «Земля – Солнце», $\mathbf{n}$ – орт нормали к плоскости оскулирующей орбиты спутника.

В случае $\mathbf{M}_c = \mathbf{u}$ режим солнечной ориентации можно реализовать с помощью закона управления [3]

$$m_1 = -2\xi\omega_1 + \xi^2 s_3, \quad m_2 = -\frac{2\xi(1 + \lambda\mu)}{\lambda} \omega_2, \quad m_3 = -\frac{2\xi\omega_3 + \xi^2 s_1}{\lambda}. \quad (5)$$

при достаточно большом значении коэффициента $\xi > 0$. Уравнения движения спутника в этом случае имеют решения, в которых приближенно выполнены все условия (4) кроме первого [3]. Выполнение условия $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$ обеспечивается достаточно большим гиросtatическим моментом, направленным вдоль оси Ox_1 . Здесь имеет место ситуация, которая в упрощенном виде исследована в [4].

Закон (5) оказался достаточно эффективным и с учетом ограничения, обусловленного реализацией посредством электромагнитов. На рис. 1, 2 приведены результаты вычисления установившегося решения уравнений (2), (3), (5) в режиме солнечной ориентации. Интегрирование уравнений выполнено при $\xi = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, в тени Земли закон (5) не нарушался. Рис. 1 содержат графики зависимости от времени углов, характеризующих ориентацию спутника. Углы α и β задают отклонение орта $\mathbf{e}_2$ от орта $\mathbf{s}$. Они отсчитываются в перпендикулярных плоскостях, пересекающихся по орту $\mathbf{s}$. Плоскость отсчета угла β содержит ось Sy_3 . Направление отсчета этого угла – на север, направление отсчета угла α – на восток. Угол $\gamma = \arcsin(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1)$. На рис. 2, приведены графики зависимости от времени компонент магнитного момента электромагнитов L_i ($i = 1, 2, 3$). Для угловой скорости имеют место оценки $|\omega_i(t)| < 0.01^\circ/\text{с}$. Как видно из рис. 1, ориентация получилась достаточно точной.

3. Периодическая аппроксимация ориентированного движения.

Анализ рисунков показывает, что установившийся режим солнечной ориентации спутника очень похож на периодическое движение. Основываясь на этом свойстве, построим аппроксимации режима солнечной ориентации спутника набором периодических движений. На каждом орбитальном витке – между последовательными прохождением восходящего узла орбиты – построим аппроксимирующее периодическое движение. При построении этого движения гринвичскую систему координат примем инерциальной, зафиксировав ее положение относительно второй геоэкваториальной системы координат на момент прохождения начального восходящего узла. Иными словами, зафиксируем соответствующее среднее звездное время. Орбиту спутника в «замороженной» гринвичской системе примем кеплеровой эллиптической. Элементы этой орбиты вычисляются по фазовому вектору реальной орбиты в начальном восходящем узле. Таким образом, от витка к витку долгота восходящего узла орбиты в «замороженной» гринвичской системе координат меняется, меняется и положение орбиты относительно МПЗ и Солнца, но внутри витка эта долгота, положение относительно МПЗ и Солнца остаются неизменными. Уравнения вращательного движения спутника возьмем в виде (2), положив в них $\omega_E = 0$ и приняв в формулах для расчета координат и компонент скорости точки O в «замороженной» гринвичской системе формулы кеплерова движения. Получившуюся систему уравнений обозначим (2'). Время входит в эту систему периодически с орбитальным периодом, поэтому можно поставить задачу об отыскании ее периодических решений. Интерес представляет то решение, которое можно будет использовать как аппроксимацию решения исходной системы (2) на данном витке.

Построение периодического решения системы (2') сводится к решению для этой системы периодической краевой задачи

$$\omega(t_0) = \omega(t_0 + T), \quad Q(t_0) = Q(t_0 + T). \quad (6)$$

Здесь t_0 – момент прохождения начального восходящего узла орбиты на витке аппроксимации, T – период используемой в системе (2') кеплеровой орбиты. Задача (2'), (6) решается методом пристрелки. Краевые условия (6) рассматриваются как уравнения для определения неизвестных начальных условий $\omega(t_0)$, $Q(t_0)$. Кватернион $Q(t)$ должен быть нормированным, в процессе решения задачи (2'), (6) это обстоятельство учитывается следующим образом.

Вариацию решения $\omega(t)$, $Q(t)$ системы (2') на каждой итерации метода пристрелки представим в виде

$$\Delta\omega(t), \Delta Q(t) = \frac{1}{2}Q(t) \circ \theta(t),$$

где $\theta(t)$ – вектор бесконечно малого поворота, задающего изменение ориентации спутника в окрестности положения $Q(t)$. Вектор $\theta(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{\theta} + \omega(t) \times \theta = \Delta\omega(t)$, а вектор $\Delta\omega(t)$ – системе уравнений в вариациях для первых трех уравнений (2') (в этой системе вариации векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ можно вычислять по формулам $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} \times \theta$, $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v} \times \theta$ и $\Delta\mathbf{B} = \mathbf{B} \times \theta$). Подстановка варьируемого решения в краевые условия (6) приводит к соотношениям

$$Q(t_0 + T) \circ \theta(t_0 + T) - Q(0) \circ \theta(0) = 2[Q(t_0) - Q(t_0 + T)],$$

$$\Delta\omega(t_0 + T) - \Delta\omega(t_0) = \omega(t_0) - \omega(t_0 + T).$$

Величины $\theta(t_0 + T)$, $\Delta\omega(t_0 + T)$ в эти соотношения в виде линейных комбинаций величин $\theta(t_0)$, $\Delta\omega(t_0)$ (что требует интегрирования 6 экземпляров систем уравнений в вариациях для $\Delta\omega$ и θ на отрезке $[t_0, t_0 + T]$). Полученные соотношения рассматриваются как линейные уравнения относительно $\theta(t_0)$, $\Delta\omega(t_0)$. Эти уравнения выглядят переопределенными, но на самом деле среди них не более шести линейно независимых. Решение этих уравнений находится с помощью процедуры сингулярного разложения их матрицы. Величины $[Q(t_0) + \Delta Q(t_0)] / \|Q(t_0) + \Delta Q(t_0)\|$ и $\omega(t_0) + \Delta\omega(t_0)$ принимаются в качестве новых значений $Q(t_0)$ и $\omega(t_0)$. Итерации заканчиваются, когда поправки $|\theta(t_0)|$, $|\Delta\omega(t_0)|$ станут меньше заданных пределов. Начальным приближением начальных условий периодического решения служат значения переменных системы (2) в точке t_0 .

Результаты аппроксимации решения системы (2) набором решений краевых задач (2'), (6) приведены на рис. 3. Здесь изображены графики углов α , β и γ . Черные кривые – графики, построенные по решению системы (2), красные кривые – графики периодических решений систем (2'). Красные кривые вблизи моментов прохождения восходящих узлов орбиты на коротких отрезках налегают друг на друга (кеплеров период несколько больше драконического), но при выбранном масштабе графиков налегания практически не заметны.

Удобство построенной аппроксимации заключается в том, что рассмотрев семейство решений краевой задачи (2'), (6) для различных значений долготы восходящего узла орбиты в «замороженной» гринвичской системе координат, вычислив мультипликаторы этого семейства, можно выбрать подходящие параметры законов управления и сами эти законы.

4. Заключение. 1. Показано, что приемлемый режим солнечной ориентации спутника можно обеспечить без изменения его гиросtatического момента. Если гиросtatический момент создается системой двигателей-маховиков, постоянство ее кинетического момента означает, что эта сис-

тема сможет функционировать без насыщения по кинетическому моменту.
 2. Предложен способ аппроксимации ориентированного движения спутника посредством набора периодических решений. Такая аппроксимация упростит параметрическое исследование этого движения.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-423).

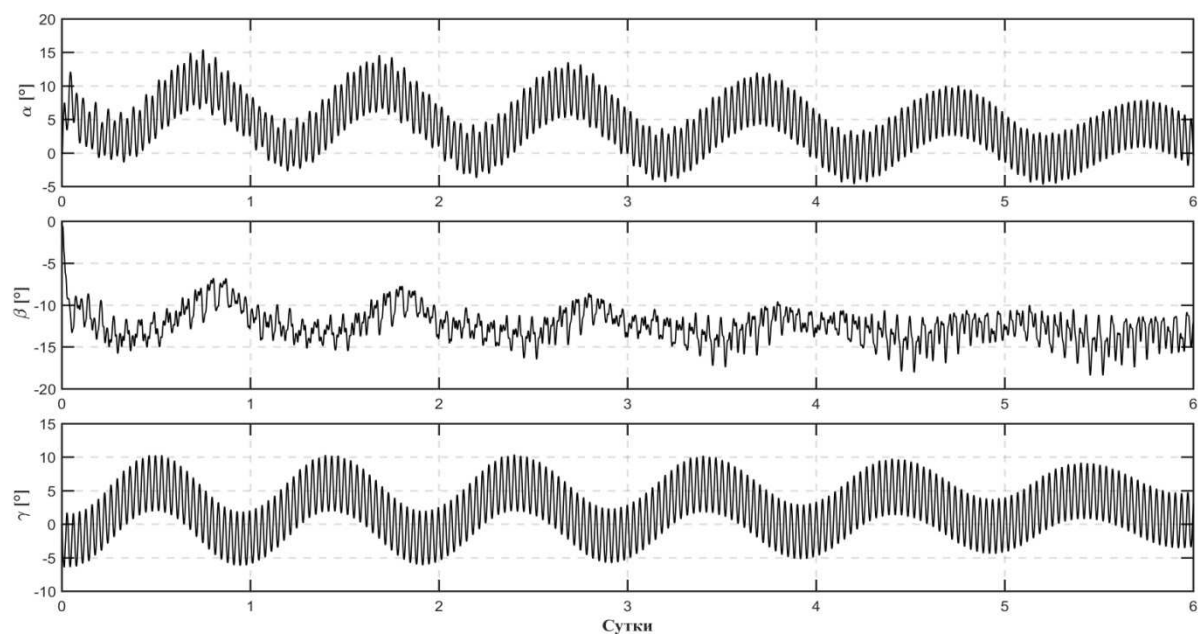


Рис. 1

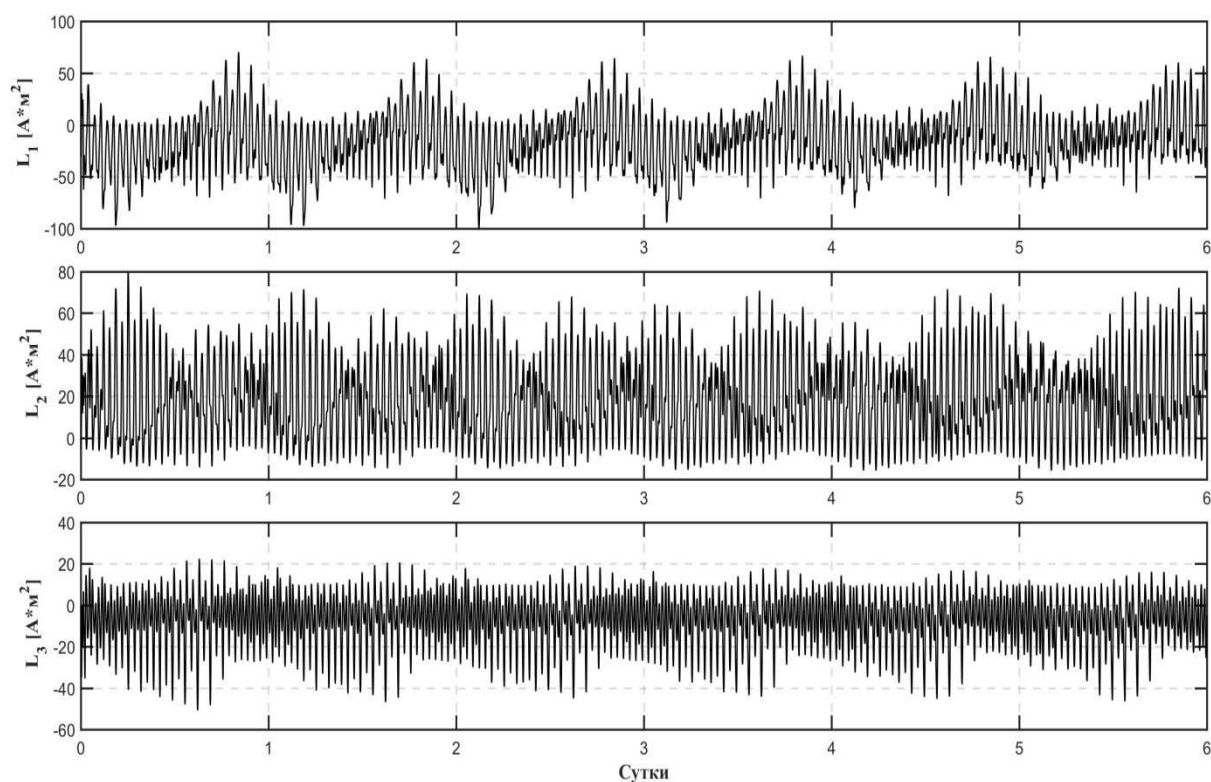


Рис. 2

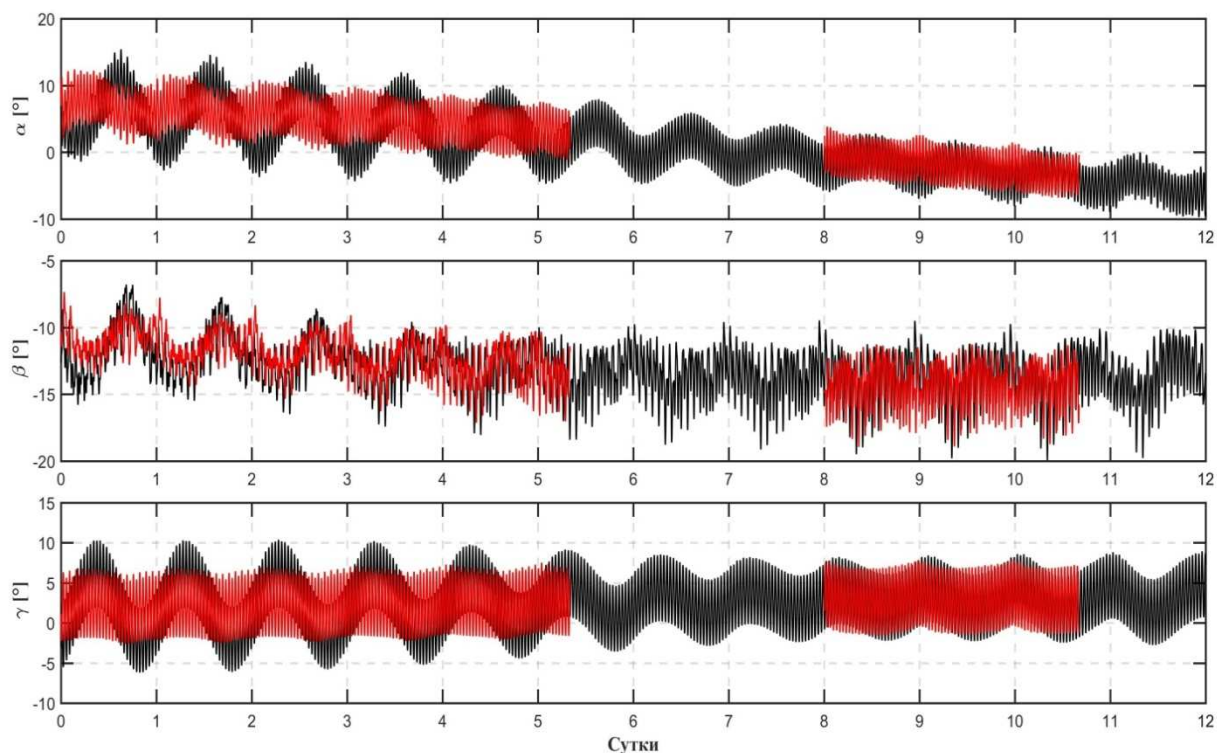


Рис. 3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., Наука, 1965.
2. Коваленко А.П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. М., Машиностроение, 1975.
3. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Реализация режимов вращательного движения ИСЗ с малым уровнем остаточных микроускорений электромеханическими исполнительными органами // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2008. № 13.
4. Сазонов В.В., Троицкая А.В. Периодические движения спутника-гиростата с большим гиростатическим моментом относительно центра масс // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. № 5. С. 595-607

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГРАНИЧНОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ В ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

В.Р. Барсегян (Ереванский государственный университет, Институт механики Национальной академии наук Армении,
Армения, 0019, Ереван, пр. Баграмяна 24/2)
E-mail: barseghyan@sci.am

ABOUT ONE PROBLEM OF OPTIMAL BOUNDARY CONTROL OF STRING VIBRATIONS WITH RESTRICTIONS IN THE INTERMEDIATE MOMENTS OF TIME

V.R. Barseghyan (Yerevan State University, Institute of Mechanics NAS RA,
Armenia, 0019, Yerevan, Baghramyan 24/2)

Keywords: boundary control, control of vibrations, boundary conditions, intermediate restrictions, optimal control of vibrations.

Введение. Большой класс физических процессов, связанных с колебательными системами, моделируется волновым уравнением. На практике часто возникают задачи граничного управления, когда нужно сгенерировать колебательные состояния в заданные промежуточные моменты времени, например, со стремлением погасить колебания в заданный конечный момент времени, или обеспечить желаемую форму колебания, колебания нужной частоты, стабилизировать колебания, с условием оптимальности некоторого критерия качества. Многочисленные примеры колебательных процессов, приводящих к задачам оптимального управления в системах с распределенными параметрами рассмотрены в [1, 2], предложены различные методы решения задач управления. В работах [1]-[10] исследованы задачи управления упругих колебаний, описываемых одномерным волновым уравнением, с помощью граничных управлений при различных типах граничных условий. В [3] рассматриваются задачи управления упругих колебаний, описываемых одномерным волновым уравнением, и приведены способы построения граничных управлений. Работа [4] (и другие работы этих авторов) посвящена проблеме оптимального граничного управления волновых процессов в классе обобщенных решений и получены граничные управления. В работах [5, 6] исследованы задачи оптимального граничного управления смещения колебаний струны на одном конце при наличии нестационарного условия на другом конце. В работе [7] изучается задача граничного управления, основанная на смешанной задаче с неоднородным условием второго рода на левом конце струны и упруго закрепленным правым концом. Используя условия согласования начальных и финальных

смещений, построено управление, минимизирующее интеграл от квадрата граничного управления. В работе [8] рассмотрена задача об оптимальном управлении колебаний струны с заданными промежуточными состояниями с помощью внешних сил, действующих вдоль струны. В работе [10] изучается задача граничного управления, основанная на смешанной задаче с неоднородным условием второго рода на левом конце струны и упруго закрепленным правым концом. В работах [11, 12] рассматривается граничная задача для уравнивания колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени колебания струны и строится решение задачи.

В настоящей работе рассматривается задача оптимального граничного управления для уравнивания колебания струны с заданными значениями функции прогиба и скорости точек струны в промежуточные моменты времени, в частности, могут быть заданы только или значения прогиба, или скорости точек струны. Задача сводится к задаче с нулевыми граничными условиями, и используя метод разделения переменных для произвольных чисел первых гармоник, предлагается способ построения оптимального управляющего воздействия. В качестве приложения предложенного подхода построено оптимальное управляющее воздействие для колебания струны с заданным прогибом точек струны в некоторый промежуточный момент времени.

Постановка задачи. Пусть состояние распределенной колебательной системы (малые поперечные колебания натянутой струны), т.е. отклонения от состояния равновесия, описываются функцией $Q(x, t)$, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, которая подчиняется при $0 < x < l$ и $0 < t < T$ волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2)$$

и граничными условиями

$$Q(0, t) = u(t), \quad Q(l, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (3)$$

где функция $u(t)$ - граничное управление.

В уравнении (1) $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$, где T_0 - натяжение струны, ρ - плотность однородной струны. Функции $Q(x, t)$, удовлетворяющие уравнению (1), дважды непрерывно дифференцируемы вплоть до границы области.

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T$$

заданы значения функции прогиба и скорости точки струны. Может быть, что в некоторый момент времени задана функция прогиба, а в следующий

момент времени- только скорость прогиба, а в третий момент времени заданы одновременно значения прогиба и скорости точек струны. В частности, предположим, что в промежуточные моменты времени t_i ($i=1,...,m$) значения прогиба и скорости точек струны могут быть заданы в следующем виде.

$$Q(x, t_i) = \varphi_i(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=t_i} = \psi_i(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad i = 1, \dots, m \quad (5)$$

Тогда задача оптимального граничного управления колебаний струны с заданными значениями в промежуточные моменты времени ставится следующим образом: среди возможных граничных управлений $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ требуется найти оптимальное управление, переводящее колебания системы (1) из заданного начального состояния (2) через промежуточные состояния (4), (5) (или в некоторые моменты времени t_i ($i=1,...,m$) могут быть заданы только одно из них, или одновременно оба условия) в конечное состояние

$$Q(x, T) = \varphi_T(x) = \varphi_{m+1}(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x) = \psi_{m+1}(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (6)$$

и минимизирующее функционал

$$\int_0^T u^2(t) dt. \quad (7)$$

Предположим, что функции $\varphi_i(x)$, $0 \leq x \leq l$, ($i = 0, 1, \dots, m, m+1$) дважды (непрерывно) дифференцируемы и имеют кусочно-непрерывную третью производную, а функции $\psi_i(x)$, $0 \leq x \leq l$, ($i = 0, 1, \dots, m, m+1$), (непрерывно) дифференцируемы и имеют кусочно-непрерывные вторые производные.

Отметим, что поставленная задача в тех случаях, когда в отдельные промежуточные моменты времени считается заданным только одно из условий (4) или (5), или когда одновременно заданы оба эти условия (4), (5), различаются физическими интерпретациями, следовательно, их можно рассматривать как разные задачи.

О решении задачи. Использовать подход поэтапного решения для рассматриваемой задачи оптимального управления не целесообразно, так как его невозможно применить, в частности, в тех случаях, когда в отдельные промежуточные моменты времени заданы только или значения прогиба, или скорости точек струны. Поэтому в работе предлагается такой подход к решению рассматриваемой задачи оптимального управления, в котором можно учитывать специфику возможных промежуточных условий.

Не нарушая общности, здесь приводятся результаты решения рассматриваемой задачи, считая одновременно заданными условия (4) и (5). Отметим, что если в некоторые моменты одно из условий (4), (5) не будет

заданным, то соответствующие соотношения просто не будут участвовать (исключим их).

Задача оптимального граничного управления для уравнения колебания струны с заданными значениями функции в промежуточные моменты времени сводится к задаче с нулевыми граничными условиями [13], т. е.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F(x, t), \quad (8)$$

где $V(x, t)$ - неизвестная функция с однородными граничными условиями $V(0, t) = V(l, t) = 0$, а

$$F(x, t) = \left(\frac{x}{l} - 1\right) u''(t).$$

Учитывая начальные, граничные, промежуточные и конечные условия (2)-(6) соответственно, и выполняя некоторые действия, получим следующие условия согласования:

$$\begin{aligned} u(0) &= \varphi_0(0), \quad u'(0) = \psi_0(0), \\ u(t_i) &= \varphi_i(0), \quad u'(t_i) = \psi_i(0), \quad i = 1, \dots, m \\ u(T) &= \varphi_T(0), \quad u'(T) = \psi_T(0). \end{aligned}$$

а начальные, промежуточные и конечные условия представляются в виде

$$\begin{aligned} V(x, 0) &= \varphi_0(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \varphi_0(0), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \psi_0(0), \\ V(x, t_i) &= \varphi_i(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \varphi_i(0), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=t_i} = \psi_i(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \psi_i(0), \quad i = 1, \dots, m, \\ V(x, T) &= \varphi_T(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \varphi_T(0), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \psi_T(0). \end{aligned}$$

Далее, применив метод разделения переменных для уравнения (8) и учитывая полученные соотношения, для начальных, промежуточных и конечных условий, получим следующие интегральные соотношения, в которых учитывается специфика промежуточных условий. Они имеют вид

$$\int_0^T h_{1k}^{(i)}(t) u(t) dt = C_{1k}(t_i) \quad \int_0^T h_{2k}^{(i)}(t) u(t) dt = C_{2k}(t_i) \quad i = 1, \dots, m+1; \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} h_{1k}^{(i)}(t) &= \begin{cases} \sin \lambda_k t, & \text{нпу} \quad 0 \leq t \leq t_i \\ 0, & \text{нпу} \quad t_i < t \leq T \end{cases}, \quad h_{2k}^{(i)}(t) = \begin{cases} \cos \lambda_k t, & \text{нпу} \quad 0 \leq t \leq t_i \\ 0, & \text{нпу} \quad t_i < t \leq T \end{cases} \quad (i = 1, \dots, m+1) \quad (10) \\ C_{1k}(t_i) &= \frac{l}{2a\lambda_k} \tilde{C}_{1k}(t_i) + \frac{\psi_i(0)}{\lambda_k^2} \sin \lambda_k t_i - \frac{\varphi_i(0)}{\lambda_k} \cos \lambda_k t_i + \frac{\varphi_0(0)}{\lambda_k}, \\ C_{2k}(t_i) &= \frac{l}{2a\lambda_k} \tilde{C}_{2k}(t_i) + \frac{\psi_i(0)}{\lambda_k^2} \cos \lambda_k t_i + \frac{\varphi_i(0)}{\lambda_k} \sin \lambda_k t_i - \frac{\psi_0(0)}{\lambda_k^2}, \\ \tilde{C}_{1k}(t_j) &= \lambda_k V_k(0) - \lambda_k V_k(t_j) \cos \lambda_k t_j + \dot{V}_k(t_j) \sin \lambda_k t_j, \\ \tilde{C}_{2k}(t_j) &= -\dot{V}_k(0) + \dot{V}_k(t_j) \cos \lambda_k t_j + \lambda_k V_k(t_j) \sin \lambda_k t_j. \end{aligned}$$

Таким образом, решение поставленной задачи оптимального граничного управления сводится к нахождению такого управления $u(t)$ $0 \leq t \leq T$, которое удовлетворяет бесконечной системе интегральных соотношений (9) и доставляет минимум функционалу (7) (т. е. имеем задачу условного экстремума). Так как функционал (7) является квадратом нормы линейного нормированного пространства, то задачу ((7), (9)) определения оптимального управления можно рассматривать как проблему моментов [2, 14].

На практике широко применяется модальный метод, на основе которого для произвольных чисел первых гармоник решается задача построения оптимального управления. В работе на основе метода проблем моментов для произвольных чисел первых гармоник, построено аналитическое выражение для искомого оптимального управляющего воздействия.

Для иллюстрации вышесказанного построения и простоты ее изложения предположим, что в промежуточный момент времени t_1 ($0 < t_1 < t_2 = T$) задано только состояние точки струны

$$Q(x, t_1) = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

В этом случае, из формулы (9) будем иметь следующие интегральные соотношения

$$\int_0^T h_{1k}^{(1)}(t)u(t)dt = C_{1k}(t_1), \quad \int_0^T h_{1k}^{(2)}(t)u(t)dt = C_{1k}(T), \quad \int_0^T h_{2k}^{(2)}(t)u(t)dt = C_{2k}(T), \quad (11)$$

где функции $h_{1k}^{(1)}(t)$, $h_{1k}^{(2)}(t)$, $h_{2k}^{(2)}(t)$ имеют смысл обозначения (10).

Для определения функции оптимального управления удовлетворяющего интегральным соотношениям (11) и минимизирующего функционал (7), сформулирована конечномерная проблема моментов. Решение этой задачи, для простоты, приведем для случая $k=1$ и в предположении, что $\lambda_1 t_1 = \frac{\pi}{2}$, $\lambda T = \pi$. В этом случае для оптимального управляющего воздействия будем иметь

$$u_1^0(t) = \begin{cases} \frac{A_1}{B_1} [(\Delta_1(p_{11}) + \Delta_1(p_{21})) \sin \lambda_1 t + \Delta_1(q_{21}) \cos \lambda_1 t], & \text{при } 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{A_1}{B_1} [\Delta_1(p_{21}) \sin \lambda_1 t + \Delta_1(q_{21}) \cos \lambda_1 t], & \text{при } t_1 < t \leq T \end{cases}, \quad (12)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_1 &= \Delta_1(p_{11})C_{11}(t_1) + \Delta_1(p_{21})C_{11}(T) + \Delta_1(q_{21})C_{21}(T), \\ B_1 &= \frac{l}{2a} \left[\frac{1}{2} \Delta_1^2(p_{11}) + \Delta_1(p_{11})\Delta_1(p_{21}) + \Delta_1^2(p_{21}) + \Delta_1^2(q_{21}) + \frac{2}{\pi} \Delta_1(p_{11})\Delta_1(q_{21}) \right], \\ \Delta_1(p_{11}) &= \frac{l^2}{8a^2} [2C_{11}(t_1) - C_{11}(T) - \frac{2}{\pi} C_{21}(T)], \\ \Delta_1(p_{21}) &= \frac{l^2}{8a^2} [C_{11}(T) - \frac{2}{\pi^2} C_{11}(T) + \frac{1}{\pi} C_{21}(T) - C_{11}(t_1)], \end{aligned}$$

$$\Delta_1(q_{21}) = \frac{l^2}{8a^2} [C_{21}(T) + \frac{1}{\pi} C_{11}(T) - \frac{2}{\pi} C_{11}(t_1) - \frac{1}{2} C_{21}(T)],$$

$$C_{11}(t_1) = \frac{l}{2a} (\phi_1^{(0)} + \frac{\psi_1^{(1)}}{\lambda_1}), \quad C_{11}(T) = \frac{l}{2a} \phi_1^{(0)} + \frac{l}{2a} \phi_1^{(T)} - \frac{1}{\lambda_1} \phi_T(0) + \frac{1}{\lambda_1} \phi_1(0),$$

$$C_{21}(T) = \frac{1}{\lambda_1} \psi_T(0) - \frac{l}{2a\lambda_1} (\psi_1^{(0)} + \psi_1^{(T)}) - \frac{1}{\lambda_1^2} \psi_1(0).$$

Таким образом, такой подход позволяет рассматривать задачу оптимального граничного управления и для тех случаев, когда в отдельные промежуточные моменты времени, заданы только или значения прогиба, или скорости точек струны или одновременно оба условия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965, 476 с.
2. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975, 568 с.
3. Знаменская Л.Н. Управление упругими колебаниями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 176 с.
4. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны. Успехи математических наук. 2005. т. 60, вып. 6 (366). с. 89-114.
5. Моисеев Е.И., Холомеева А.А. Оптимальное граничное управление силой на одном конце струны при заданном режиме силы на другом конце. Дифференциальные уравнения, 2011, т. 47, № 10, с. 1492–1497.
6. Моисеев Е.И., Холомеева А.А. Об одной задаче оптимального граничного управления с динамическим граничным условием. Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 5. С. 667-671.
7. Никитин А.А. Оптимальное граничное управление колебаниями струны, производимое силой при упругом закреплении. Дифференциальные уравнения, 2011, т. 46, № 12, с. 1773–1782.
8. Барсегян В.Р., Саакян М.А. Оптимальное управление колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени. Известия НАН РА. Механика. 2008. т. 61, № 2. с. 52– 60.
9. Barseghyan V.R. and Movsisyan L.A. Optimal control of the vibration of elastic systems described by the wave equation. International Applied Mechanics, Vol. 48, No. 2, 2012, pp. 234-239.
10. Андреев А.А., Лексина С.В. Задача граничного управления для системы волновых уравнений. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2008. № 1(16), с. 5-10.
11. Корзюк В.И., Козловская И.С., Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый

момент времени. I. Труды Ин-та мат. НАН Беларуси. 2010. т. 18, № 2, с. 22–35.

12. Корзюк В.И., Козловская И.С., Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II. Труды Ин-та мат. НАН Беларуси. 2011. т. 19, № 1, с. 62–70.

13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики. М.: 1977, 736 с.

14. Красовский Н.Н. Теория управления движением, М.: Наука, 1968, 476 с.

О СИНТЕЗЕ УПРАВЛЕНИЯ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕПЛОМАССОБМЕНА НА ПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко (КНИТУ-КАИ, Россия, 420111, Казань,
К.Маркса, 10)

E-mail: ggbil2@gmail.com, bilchnat@gmail.com

ON THE CONTROL SYNTHESIS IN INVERSE PROBLEMS OF HEAT AND MASS TRANSFER ON THE PERMEABLE SURFACES OF HYPERSONIC AIRCRAFTS

G.G. Bilchenko, N.G. Bilchenko (KNRTU-KAI, Russia, 420111, Kazan,
K.Marx str., 10)

Keywords: control, heat and mass transfer, laminar boundary layer, hyper-sonic flows, direct problem, inverse problem, interpolation statement, approximation statement, generalized integral relations.

Введение. Рассматриваются задачи математического моделирования эффективной тепловой защиты проникаемых цилиндрических и сферических поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА).

В п.1 приведены постановки *прямых задач* тепломассобмена: по заданным управлениям необходимо рассчитать параметры математической модели пограничного слоя, учитывающей физико-химические превращения (диссоциацию и ионизацию), и определить по ним локальные и интегральные тепловые потоки и напряжения трения, а также мощность системы, обеспечивающей вдув. В основу расчётов положен метод обобщённых интегральных соотношений А. А. Дородницына.

В п.2 и п.3 приведены постановки *обратных задач* тепломассобмена: по заданному локальному тепловому потоку или (и) напряжению трения требуется восстановить обеспечивающий его (их) закон управления. Возникновение интереса к постановке и решению обратных задач тепломассобмена в гиперзвуковой аэродинамике связано с имеющими высокую практическую ценность вопросами:

1) можно ли синтезировать законы управления, обеспечивающие заранее заданные требования к термосиловому нагружению поверхности ГЛА?

2) можно ли компенсировать нарушения в работе одной из систем управления (как крайний случай, рассматривается даже её отказ) с помощью изменения режима работы других?

В п.4 определены *интерполяционная* и *аппроксимационная постановки* обратной задачи. В п.5 найдены условия (диапазоны значений как неиз-

меняемых, так и управляющих параметров) достаточные для восстановления управления в точке торможения в интерполяционной постановке, приводятся результаты вычислительных экспериментов.

Результаты вычислительных экспериментов по синтезу управления на участке рассмотрены в продолжении [1] данной работы.

1. Прямая задача тепломассообмена. В работах [2-11] была рассмотрена следующая **прямая** задача (ПЗ). По заданным управлениям: $m(x)$ - вдуву в ламинарный пограничный слой (ПС), $\tau(x)$ - температурному фактору (ТФ): $\tau(x) = T_w(x)/T_{e0}$, где T_w - температура стенки, а T_{e0} - температура в точке торможения (ТТ) потока, и $s(x) = \sigma B_0^2(x)$ - магнитно-му полю (МП), где $x \in X = [0;1]$, **требуется** рассчитать параметры модели ПС [10] (для обтекания боковой поверхности кругового цилиндра и поверхности сферического носка) и найти: локальные тепловой поток (ТП) $q(x;m,\tau,s)$ и напряжение трения (НТ) $f(x;m,\tau,s)$, интегральные ТП $Q(m,\tau,s)$ и силу трения $F(m,\tau,s)$, мощность $N(m,\tau,s)$ системы, обеспечивающей вдув:

$$(m,\tau,s) \rightarrow (q, f ; Q, F, N) . \quad (1)$$

В работах [2-6] для заданных $\tau(x)$ и $s(x)$ оптимальное управление $m(x)$ было построено, как решение экстремальной задачи

$$Q(m,\tau,s) \rightarrow \inf_m \quad (2)$$

(для непрерывных m), при наличии ограничения

$$N(m,\tau,s) \leq N_{\max} . \quad (3)$$

Для числа Маха $M_\infty = 10$, высоты $H = 10$ [км], радиуса тела $R = 0,1$ [м] (для удобства сравнения с результатами [4-8, 11]) при постоянных вдувах $m(x) = \text{Const} \in [0;1]$, постоянных ТФ $\tau(x) = \text{Const} \in [0,1;0,9]$ и постоянных МП $s(x) = \text{Const} \in [0;5E4]$ [Тл/Ом·м] (для краткости размерность МП далее в тексте не приводится) были рассчитаны мощности $N(m,\tau,s)$, используемые в (3). Для этих мощностей были получены оптимальные (2) в первом приближении управления $m_{opt}^{cyl}(x)$ и $m_{opt}^{sph}(x)$.

На рис. 1-3 для случая $\tau = 0,25$ и $s = 0$ представлены результаты вычислительных экспериментов по решению (1)-(3).

На рис. 1 кривая 1 - график закона $m(x) = 0,3$, кривая 2 соответствует $m_{opt}^{cyl}(x)$, кривая 3 - $m_{opt}^{sph}(x)$ при $N_{\max} = N(0,3;0,25;0)$.

На рис. 2 зависимости Q_{const}^{cyl} , Q_{opt}^{cyl} , Q_{const}^{sph} , Q_{opt}^{sph} от N приведены для постоянного (кривые 1 и 3) и оптимального (2 и 4) вдувов.

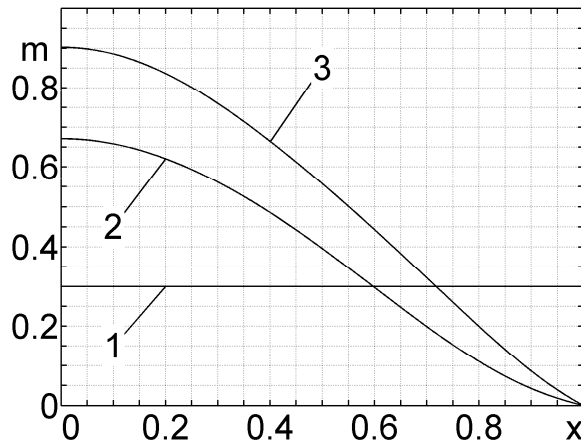


Рис. 1. Зависимости m от x

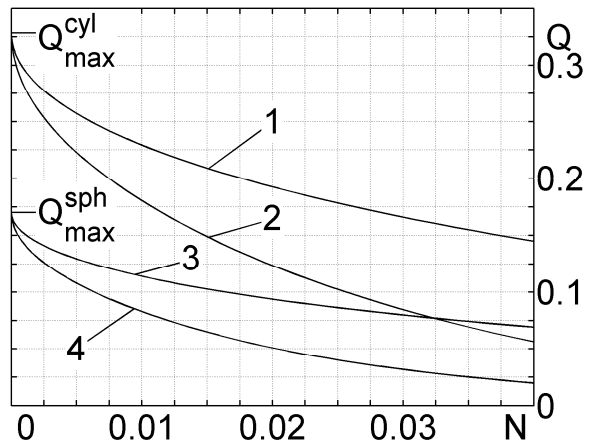


Рис. 2. Зависимости Q от N

На рис. 3 приведены графики зависимостей локальных ТП при учёте (что необходимо [3, 10] для $M_\infty > 6$) эффекта диссоциации (кривые 1 и 2) и без учёта (кривые 3 и 4). Постоянному вдуву соответствуют кривые 1 и 3, оптимальному – кривые 2 и 4.

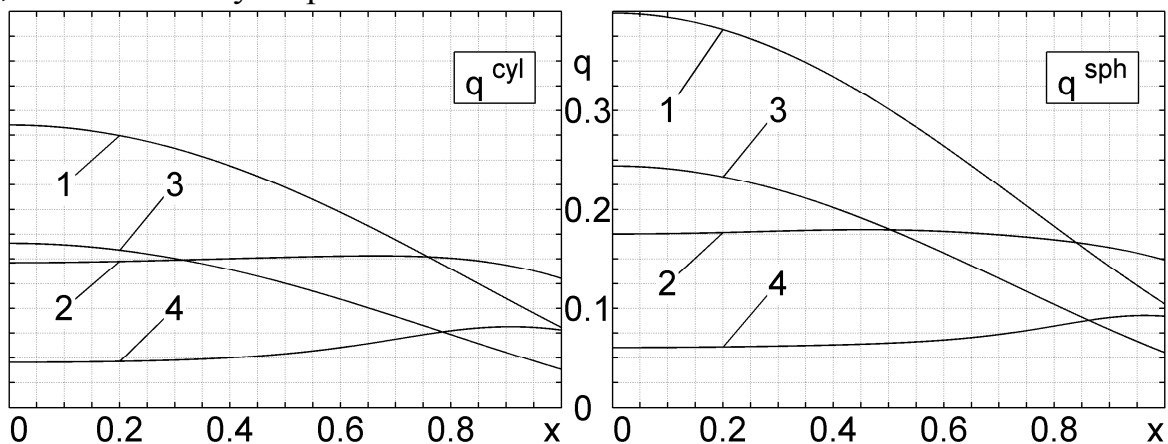


Рис. 3. Зависимости q от x

Специальные виды $m(x)$, дающие хорошие [6] приближения к экстремальным значениям Q , приводятся в продолжении [1] данной работы.

Замечание. При расчётах на ЭВМ законы $m(x)$, $\tau(x)$ и $s(x)$ задавались, а $q(x)$ и $f(x)$ вычислялись на сетках $X_* = (x_j)_{j=0,\dots,n}$ вида [9]:

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1.$$

2. Обратные по вдуву задачи тепломассообмена. Аналогично [12] сформулируем **обратную** по управлению $m(x)$ в (1) задачу (ОЗ) [13, 14]. Пусть для $X = [0; 1]$ заданы:

- 1) непрерывное управление $s(x)$, $x \in X$;
- 2) сетка управления $X_1 = (x_j^\wedge)_{j=0,\dots,n_1}$;

- 3) сетка наблюдения $X_2 = (x_j^\vee)_{j=0,\dots,n_2}$;
- 4) «контрольные» значения $q^\vee = (q_j^\vee)_{j=0,\dots,n_2}$;
- 5) непрерывно-дифференцируемое управление $\tau(x)$, $x \in X$;
- 6) ограничения $I_{j,k} = [b_{j,k}; t_{j,k}]$, $j = 1, \dots, n_1$, $k = 0, \dots, \nu_1$, $\nu_1 \geq 0$.

Требуется **найти** непрерывное на X управление $m^\sim(x)$, задаваемое [9] элементами $m^\sim(x) = m_j^\sim(x)$ для $x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$, $j = 1, \dots, n_1$, удовлетворяющими условиям

$$(m^\sim)^{(k)}(x) \in I_{j,k} \text{ для } x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge], \quad k = 0, \dots, \nu_1, \quad (4)$$

такое, что вычисленные на X_2 значения $q^\sim = (q_j^\sim)_{j=0,\dots,n_2}$, $q_j^\sim = q(x_j^\vee; m^\sim, \tau, s)$, должны быть *близкими* к $q^\vee$, т.е.

$$q^\vee \rightarrow m^\sim, \quad (m^\sim, \tau, s) \rightarrow (q^\sim \approx q^\vee, f^\sim; Q^\sim, F^\sim, N^\sim), \quad (5)$$

где $f^\sim = (f_j^\sim)_{j=0,\dots,n_2}$, $f_j^\sim = f(x_j^\vee; m^\sim, \tau, s)$, $Q^\sim = Q(m^\sim, \tau, s)$ и т.п.

Замечание. Вместо совокупности значений $q^\vee$ могут быть заданы «контрольные» значения $f^\vee = (f_j^\vee)_{j=0,\dots,n_2}$:

$$f^\vee \rightarrow m^\sim, \quad (m^\sim, \tau, s) \rightarrow (q^\sim, f^\sim \approx f^\vee; Q^\sim, F^\sim, N^\sim). \quad (6)$$

3. Обратные по температурному фактору задачи. Аналогично п.2 сформулируем **обратную** по управлению $\tau(x)$ в (1) задачу [13, 14]. Пусть для $X = [0;1]$ заданы “1”-“4” из п.2 и:

- 5) непрерывное управление $m(x)$, $x \in X$;
- 6) ограничения $I_{j,k} = [b_{j,k}; t_{j,k}]$, $j = 1, \dots, n_1$, $k = 0, \dots, \nu_1$, $\nu_1 \geq 1$.

Требуется **найти** непрерывно-дифференцируемое на X управление $\tau^\sim(x)$, задаваемое [9] элементами $\tau^\sim(x) = \tau_j^\sim(x)$ для $x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$, $j = 1, \dots, n_1$, удовлетворяющими условиям

$$(\tau^\sim)^{(k)}(x) \in I_{j,k} \text{ для } x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge], \quad k = 0, \dots, \nu_1, \quad (7)$$

такое, что вычисленные на X_2 значения $q^\sim = (q_j^\sim)_{j=0,\dots,n_2}$, $q_j^\sim = q(x_j^\vee; m, \tau^\sim, s)$, должны быть *близкими* к $q^\vee$, т.е.

$$q^\vee \rightarrow \tau^\sim, \quad (m, \tau^\sim, s) \rightarrow (q^\sim \approx q^\vee, f^\sim; Q^\sim, F^\sim, N^\sim), \quad (8)$$

где $f^\sim = (f_j^\sim)_{j=0,\dots,n_2}$, $f_j^\sim = f(x_j^\vee; m, \tau^\sim, s)$, $Q^\sim = Q(m, \tau^\sim, s)$ и т.п.

Замечание. Для «контрольных» значений $f^\vee = (f_j^\vee)_{j=0,\dots,n_2}$:

$$f^\vee \rightarrow \tau^\sim, \quad (m, \tau^\sim, s) \rightarrow (q^\sim, f^\sim \approx f^\vee; Q^\sim, F^\sim, N^\sim). \quad (9)$$

4. Об аппроксимационной и интерполяционной постановках. Для определения близости $q^\sim$ и $q^\vee$ введём

$$R_\infty(q^\sim; q^\vee) = \max_{j=0,\dots,n_2} |q_j^\sim - q_j^\vee|, \quad (10)$$

$$R_p(q^\sim; q^\vee) = \left(\sum_{j=0}^{n_2} |q_j^\sim - q_j^\vee|^p \right)^{1/p} \quad \text{при } p \in [1; +\infty). \quad (11)$$

Постановка ОЗ (4), (5) называется [12-14] *интерполяционной* (ИПОЗ), если для **заданного** малого $\varepsilon_1 > 0$ требуется найти такое управление $m^\sim$, что в узлах X_2 значения $q^\sim$ совпадают с $q^\vee$ с точностью ε_1 :

$$R_\infty(q^\sim; q^\vee) \leq \varepsilon_1. \quad (12)$$

Величина ε_1 ограничена снизу величиной $\varepsilon_{\min} > 0$, зависящей от *способа представления вещественных чисел* и применяемых численных методов.

Постановка ОЗ называется [12-14] *аппроксимационной* (АПОЗ), если для **заданного** $p \in [1; +\infty]$ требуется отыскать пару $(m^\sim; q^\sim)$, где управление $m^\sim$ является приближённым решением экстремальной задачи

$$R_p^*(q^\vee) = \inf_{m^\sim} R_p(q^\sim; q^\vee). \quad (13)$$

Постановки для ОЗ (7), (8) и случаев (6) и (9) - аналогичны.

5. О возможности восстановления управления в точке торможения. Сформулируем справедливые как для цилиндрических, так и для сферических поверхностей утверждения (обозначения по [10, 11]) о монотонной зависимости локальных ТП и НТ в ТТ от вдува, от ТФ и от МП. Пусть фиксированы значения *неизменяемых* параметров: $M_\infty \in [10; 40]$, $H \in [10; 30]$ [км], $R \in [0,1; 1]$ [м]. Пусть диапазоны изменения *управляющих* параметров в ТТ ограничены: $m_0 = m(0) \in [0; 1]$, $\tau_0 = \tau(0) \in [0,15; 0,9]$, $s_0 = \sigma B_0^2(0) \in [0; 5E4]$. Тогда функция $q_0 = q(0; m_0, \tau_0, s_0)$, определяющая значения локального ТП в малой окрестности ТТ, является *однозначной* функцией от m_0, τ_0, s_0 в условиях Утверждений 1, 2, 3 из [11], соответственно. Более точно, верны следующие утверждения [13, 14].

Утверждение 5.1. Для любого сочетания (фиксированных) значений τ_0, s_0 функция $q(0; m_0, \tau_0, s_0)$ строго монотонно убывает по m_0 .

Утверждение 5.2. Для любого сочетания (фиксированных) значений m_0, s_0 функция $q(0; m_0, \tau_0, s_0)$ строго монотонно убывает по τ_0 .

Утверждение 5.3. Для любого сочетания (фиксированных) значений m_0 , τ_0 функция $q(0; m_0, \tau_0, s_0)$ строго монотонно убывает по s_0 .

На рис. 4-6 представлены графики зависимости ТП q_0 в ТТ от управляющих параметров: вдува $m_0 \in [0; 1]$ (рис. 4), ТФ $\tau_0 \in [0,15; 0,9]$ (рис. 5), МП $s_0 \in [0; 5E4]$ (рис. 6). Расчёты приведены для $M_\infty = 10$, $H = 10$ [км], $R = 0,1$ [м]. Левые части рисунков соответствуют обтеканию боковой поверхности кругового цилиндра [13], правые - сферического носка [14].

На рис. 4 ТФ $\tau_0 = 0,15$ соответствуют кривые 1 и 2; $\tau_0 = 0,45$ - кривые 3 и 4; $\tau_0 = 0,9$ - кривые 5 и 6. Применению МП с $s_0 = 5E4$ соответствуют кривые 2, 4, 6, отсутствию МП - кривые 1, 3, 5.

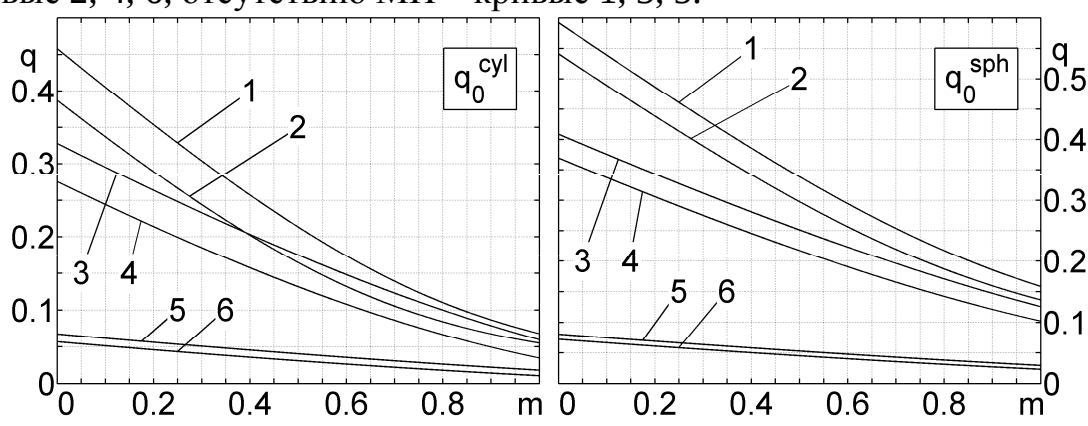


Рис. 4. Зависимости q_0 от вдува $m_0 \in [0; 1]$

На рис. 5 вдуву $m_0 = 0$ соответствуют кривые 1 и 2; $m_0 = 0,5$ - кривые 3 и 4; $m_0 = 1$ - кривые 5 и 6. Применению МП с $s_0 = 5E4$ соответствуют кривые 2, 4, 6, отсутствию МП - кривые 1, 3, 5.

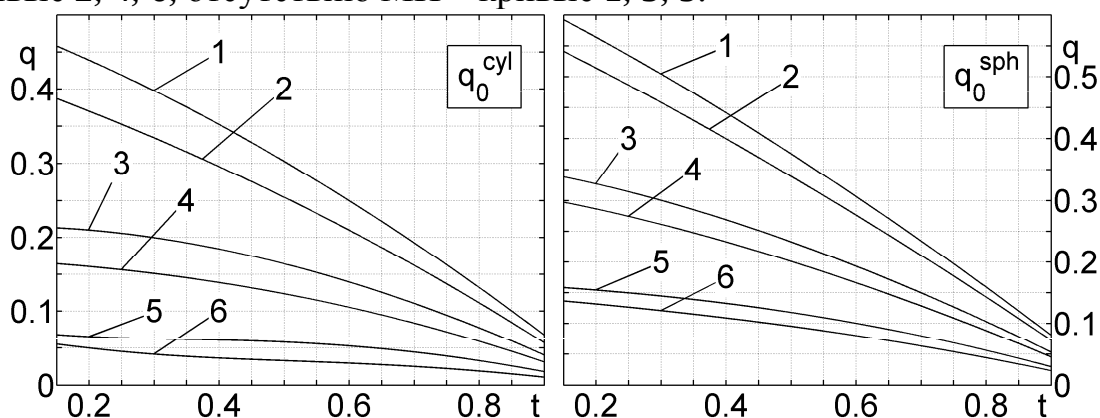


Рис. 5. Зависимости q_0 от ТФ $\tau_0 \in [0,15; 0,9]$

На рис. 6 вдуву $m_0 = 0$ соответствуют кривые 1, 2, 3; $m_0 = 0,5$ - кривые 4, 5, 6; $m_0 = 1$ - кривые 7, 8, 9. Значению ТФ $\tau_0 = 0,15$ соответствуют кривые 1, 4, 7; $\tau_0 = 0,45$ - кривые 2, 5, 8; $\tau_0 = 0,9$ - кривые 3, 6, 9.

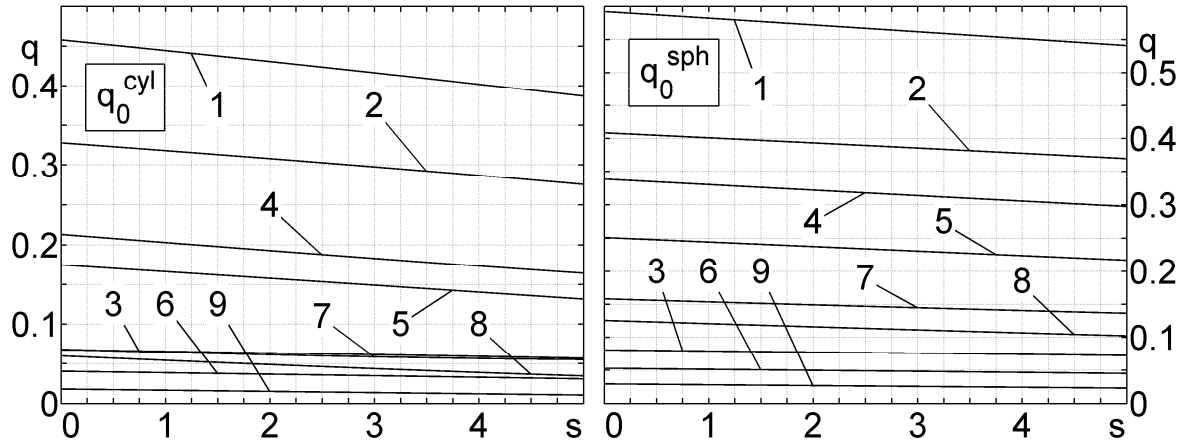


Рис. 6. Зависимости q_0 от МП $s_0 \cdot 1E - 4 \in [0; 5]$

Учитывая $\lim_{x \rightarrow 0} f(x; m_0, \tau_0, s_0) = 0$, используем в окрестности ТТ представление $f(x; m_0, \tau_0, s_0) = x^k \cdot \bar{f}(m_0, \tau_0, s_0) + o(x^k)$, где аналогично $\bar{\theta}_0$, $\bar{\theta}_1$, $\bar{\omega}_0$, $\bar{\omega}_1$ в (14) и (30) из [10] функция $\bar{f}_0 = \bar{f}(m_0, \tau_0, s_0)$ - коэффициент при значащей степени x . Поскольку локальное НТ f однозначно зависит от параметра θ_0 модели ПС [10], то верны [13, 14] следующие утверждения.

Утверждение 5.4. Для любого сочетания (фиксированных) значений τ_0 , s_0 функция $\bar{f}(m_0, \tau_0, s_0)$ строго монотонно убывает по m_0 .

Утверждение 5.5. Для любого сочетания (фиксированных) значений m_0 , s_0 функция $\bar{f}(m_0, \tau_0, s_0)$ строго монотонно возрастает по τ_0 .

Утверждение 5.6. Для любого сочетания (фиксированных) значений m_0 , τ_0 функция $\bar{f}(m_0, \tau_0, s_0)$ строго монотонно убывает по s_0 .

На рис. 7-9 представлены зависимости коэффициента $\bar{f}_0$ локального НТ f в ТТ от управляющих параметров в условиях рис. 4-6.

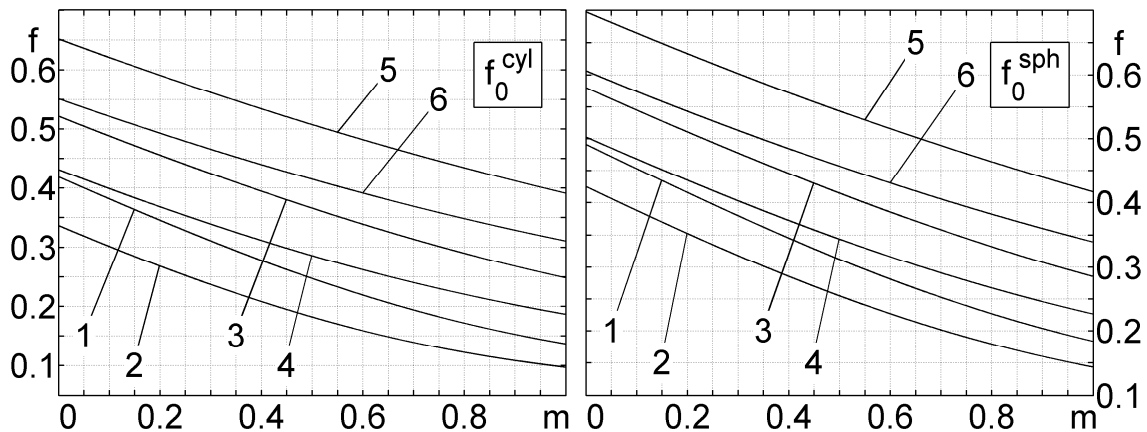


Рис. 7. Зависимости $\bar{f}_0$ от вдува $m_0 \in [0; 1]$

Для ИПОЗ примеры решений на отрезке из [15, 16] приведены в [1].

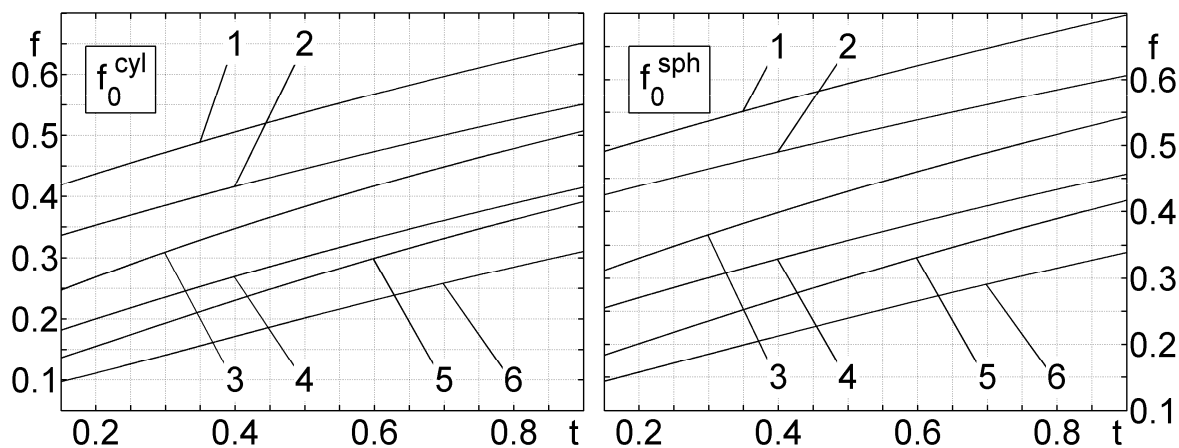


Рис. 8. Зависимости $\bar{f}_0$ от ТФ $\tau_0 \in [0,15;0,9]$

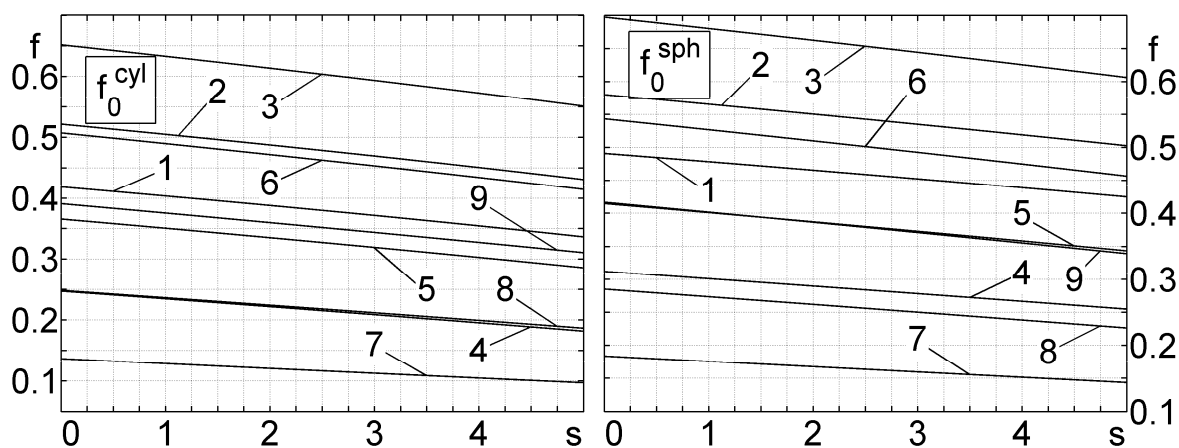


Рис. 9. Зависимости $\bar{f}_0$ от МП $s_0 \cdot 1E - 4 \in [0;5]$

Закключение. Обратные задачи тепломассообмена приведены в данной работе в наиболее естественной для случая пористой поверхности [8] постановке – для непрерывных управлений. Для прямой задачи тема разрывных управлений обсуждалась в [7], а различные конструкторские и газодинамические ограничения на управление для случая пористой поверхности - в [9]. Вопросы восстановления управлений для случая перфорированной поверхности (для случая разрывных управлений - вдувов) являются предметом отдельного исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бильченко Г.Г., Бильченко Н. Г. О вычислительных экспериментах по построению эффективного управления тепломассообменом в прямых и обратных задачах гиперзвуковой аэродинамики / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды XI Международной Четаевской конференции. Секция 3. Управление. Казань, 14-18 июня 2017г. - Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017.

2. *Гараев К. Г., Овчинников В. А., Бильченко Н. Г.* Инвариантные вариационные задачи ламинарного пограничного слоя при различных режимах течения / К. Г. Гараев, В. А. Овчинников, Н. Г. Бильченко.- Казань: Изд-во КГТУ, 2003.- 123с.

3. *Бильченко Н. Г.* Три задачи оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов / Н. Г. Бильченко // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды X Международной Четаевской конференции. Т.3. Секция 3. Управление. Ч.I. Казань, 12-16 июня 2012г. - Казань: Изд-во Казан. гос. технич. ун-та, 2012.- С.198-208. [http://old.kai.ru/science/konf/chetaev/Tom_3.1_Upravlenie.pdf] (дата доступа: 25.01.2017)

4. *Бильченко Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика и математика. - 2015. - №1. - С.83-94.

5. *Бильченко Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. - 2015. - №1. - С.5-8.

6. *Бильченко Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения “простых” законов вдува. / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. - 2015. - №1. - С.95-102.

7. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Сравнительный анализ применения некоторых специальных законов вдува в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых перфорированных поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: Сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 16-18 декабря 2015г. - Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2015.- С. 134-136.

8. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Сравнительный анализ применения некоторых специальных законов вдува в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых пористых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: Сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 16-18 декабря 2015г. - Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2015.- С. 137-139.

9. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Классы решений задач оптимального управления пограничным слоем на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «ВЗМШ С. Г. Крейна-2016»: Материалы междунар. конф.- Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. - С.82-86.

10. Бильченко Н. Г. Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. - 2016. - №1. - С.5-14.

11. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. - 2016. - №3. - С.5-11.

12. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Об одной обратной задаче тепломассообмена / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Герценовские чтения 2016. Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования» в электронном журнале Дифференциальные уравнения и процессы управления. - 2016. - №2. - Ч.2. - С.50-56. [<http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/herzen2016.pdf>] (дата доступа:25.01.2017)

13. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. I. О некоторых постановках и возможности восстановления управления / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. - 2016. - №4. - С.5-12.

14. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. О возможности восстановления управления в некоторых обратных задачах тепломассообмена / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы XI Международной конференции / сост. В. В. Бандеров, отв. ред. И. Б. Бадриев. - Казань: Казанский университет, 2016. - С.64-69.

15. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. II. О некоторых вычислительных экспериментах / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. - 2016. - №4. - С.13-19.

16. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. О некоторых вычислительных экспериментах в обратных задачах тепломассообмена / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы XI Международной конференции / сост. В. В. Бандеров, отв. ред. И. Б. Бадриев. - Казань: Казанский университет, 2016. - С.70-75.

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ ПО ПОСТРОЕНИЮ ЭФФЕКТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОМАССООБМЕНОМ В ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ГИПЕРЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИКИ

Г.Г. Бильченко , Н.Г. Бильченко (КНИТУ-КАИ, Россия, 420111, Казань,
К.Маркса, 10)

E-mail: ggbil2@gmail.com , bilchnat@gmail.com

ON THE COMPUTATIONAL EXPERIMENTS OF EFFECTIVE HEAT AND MASS TRANSFER CONTROL SYNTHESIS IN DIRECT AND INVERSE PROBLEMS OF HYPERSONIC AERODYNAMICS

G.G. Bilchenko , N.G. Bilchenko (KNRTU-KAI, Russia, 420111, Kazan,
K.Marx str., 10)

Keywords: control, heat and mass transfer, hypersonic flows, laminar boundary layer, direct problem, inverse problem, interpolation statement, generalized integral relations, computational experiment, sensitivity, switching point.

Введение. Данная работа, являясь продолжением [1], сохраняет принятые в ней обозначения, сокращения. Ссылки на [2-16] соответствуют списку литературы из [1].

Обсуждаются результаты вычислительных экспериментов [2-6, 11-14] по математическому моделированию эффективной тепловой защиты проникаемых цилиндрических и сферических поверхностей ГЛА, проведенных с помощью программно реализованных алгоритмов, предложенных для прямых [10] и обратных [15] задач гиперзвуковой аэродинамики. Характеристики ПС получены численным интегрированием систем ОДУ [10], выведенных с помощью метода обобщённых интегральных соотношений А.А.Дородницына.

В п.1.1 приведены «простые» законы вдува, позволяющие получить управление локальными ТП, близкое к оптимальному. В п.1.2 проведено исследование влияния ТФ, а в п.1.3 - МП на характеристики термосилового нагружения в ПЗ.

В п.2.1 в качестве примеров синтеза управления для ОЗ в интерполяционной постановке рассмотрены два типа законов вдува. В п.2.2 построены допустимые формы локальных ТП и НТ для законов вдува, обобщающих закон III из [6]. Отмечено различие в характере чувствительности управляемых параметров к ступенчатому изменению управления (вдува).

1. Вычислительные эксперименты в прямых задачах тепломассообмена.

1.1. Применение «простых» законов вдува для построения управления, близкого к оптимальному. Располагая результатами расчётов [2-5], моделирующих обтекание поверхностей гиперзвуковыми потоками воздуха, интересно проанализировать применение различных «простых» (кусочно-линейных, кусочно-постоянных) законов вдува [6], представленных на рис.1. Мощность системы охлаждения предполагается одинаковой (соответствующей постоянному вдуву) для всех вариантов законов.

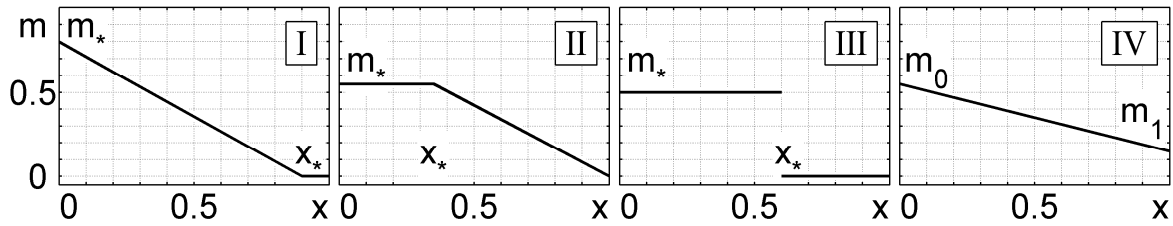


Рис. 1. «Простые» законы вдува

Аналитическое представление законов имеет вид [6]:
 “треугольник”:

$$m_I(x) = m_I(x; m_*, x_*) = \begin{cases} m_* \cdot \left(1 - \frac{x}{x_*}\right) & \text{при } x \in [0; x_*]; \\ 0 & \text{при } x \in [x_*; 1]; \end{cases} \quad (1)$$

“горизонтальная трапеция”:

$$m_{II}(x) = m_{II}(x; m_*, x_*) = \begin{cases} m_* & \text{при } x \in [0; x_*]; \\ m_* \cdot \frac{1-x}{1-x_*} & \text{при } x \in [x_*; 1]; \end{cases} \quad (2)$$

“ступенька”:

$$m_{III}(x) = m_{III}(x; m_*, x_*) = \begin{cases} m_* & \text{при } x \in [0; x_*]; \\ 0 & \text{при } x \in (x_*; 1]; \end{cases} \quad (3)$$

“вертикальная трапеция”:

$$m_{IV}(x) = m_{IV}(x; m_0, m_1) = m_0 \cdot (1-x) + m_1 \cdot x \quad \text{при } x \in [0; 1]. \quad (4)$$

Следует отметить, что закон постоянного вдува

$$m_{IVc}(x) = m_{IV}(x; m_*, m_*) \equiv m_* \quad \text{при } x \in [0; 1] \quad (5)$$

является частным случаем закона IV и предельным для законов II и III.

Обозначения кривых на рис.2 и параметры вычислительных экспериментов, приведённые в Таблицах 1 и 2, соответствуют [6]. Кривые 6 соответствуют оптимальному вдуву, законы которого $m_{opt}^{cyl}(x)$ и $m_{opt}^{sph}(x)$ представлены кривыми 2 и 3 на рис.1 из [1].

Таблица 1

Кривая	Закон	x_*^{cyl}	m_*^{cyl}	x_*^{sph}	m_*^{sph}
1	I	0,905	0,8074	0,934	1,1847
2	II	0,472	0,5001	0,654	0,5002
3	III	0,6	0,5531	0,7	0,6078

Таблица 2

Кривая	Закон	m_0^{cyl}	m_1^{cyl}	m_0^{sph}	m_1^{sph}
4	IV	0,55	0,1673	0,70	0,1751
5	IVc	0,3	0,3	0,3	0,3
7	IV	0,7457	0,0	1,0673	0,0
8	IV	0,0	0,3996	0,0	0,3664
9	IV ($N=0$)	0	0	0	0

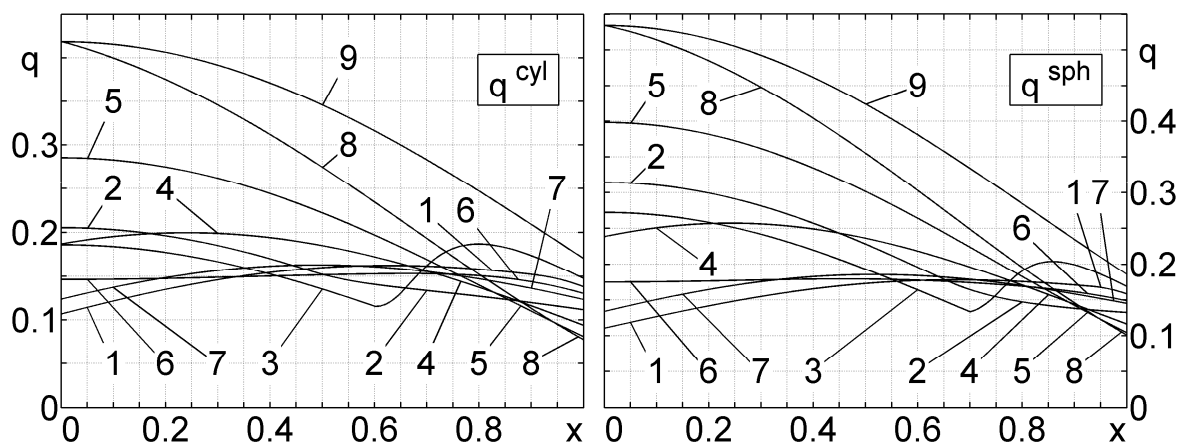


Рис. 2. Локальные ТП

1.2. Исследование влияния температурного фактора. Рассматривается случай **отсутствия** вдува ($m=0$) и МП ($s=0$). ТФ τ предполагается постоянным и изменяется в пределах от 0,1 до 0,9. Следует отметить, что рассмотрение предельных случаев $\tau \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow 1$ интересно лишь с математической точки зрения, так как в первом случае мгновенное охлаждение стенки технически не реализуемо, а во втором поддержание температуры обшивки на уровне точки торможения нецелесообразно (и даже вредно с точки зрения создания угрозы турбулизации пограничного слоя).

На рис. 3 и 4 представлены графики зависимости локальных ТП и НТ от координаты, соответствующие значениям ТФ $\tau \in \{0,1; 0,2; \dots; 0,9\}$ (указано положение кривых, соответствующих $\tau = 0,1$).

Вывод 1. С увеличением ТФ τ интенсивность поглощения тепла стенкой уменьшается, а локальное напряжение трения возрастает.

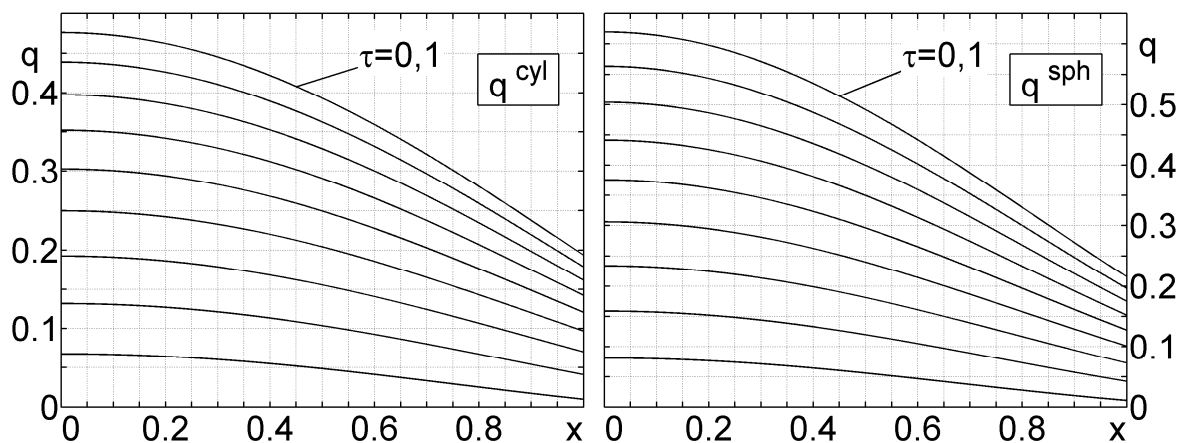


Рис. 3. Зависимости локальных ТП от координаты ($m=0, s=0$)

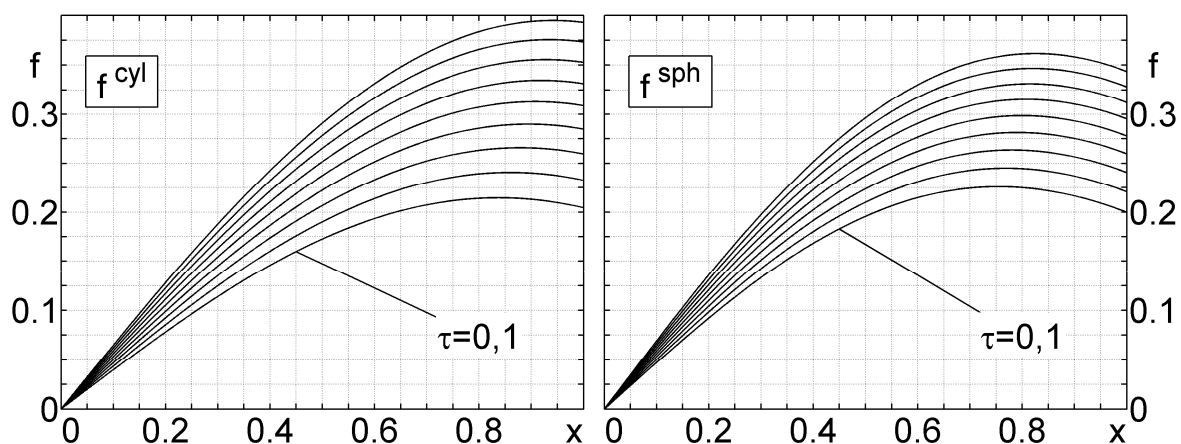


Рис. 4. Зависимости локальных НТ от координаты ($m=0, s=0$)

1.3. Исследование влияния магнитного поля.

1.3.1. Случай различных τ в отсутствии вдува. На рис. 5 и 6 представлены графики зависимости локальных ТП и НТ от координаты для случаев сильно ($\tau=0,1$: кривые 1 и 2), умеренно ($\tau=0,5$: кривые 3 и 4) и слабо ($\tau=0,9$: кривые 5 и 6) охлаждаемых поверхностей. МП $s=1E4$ соответствует кривым 1, 3, 5, а $s=5E4$ - кривым 2, 4, 6.

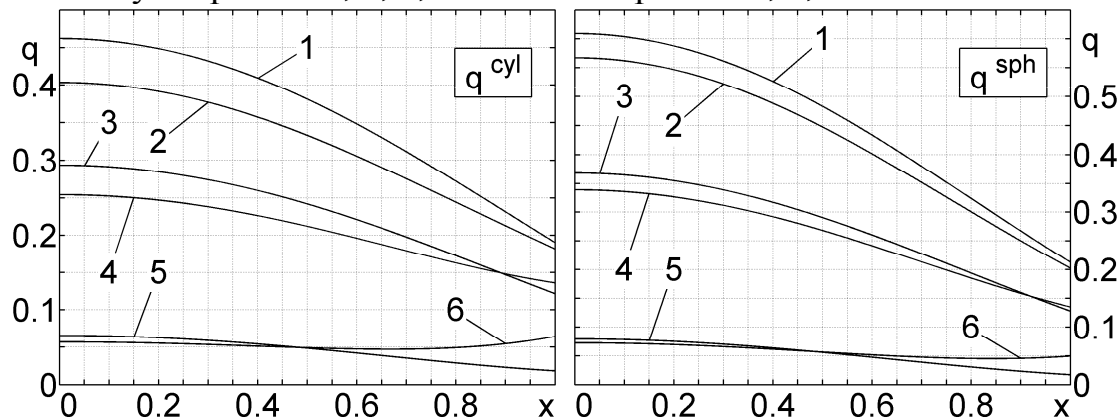


Рис. 5. Зависимости локальных ТП от координаты

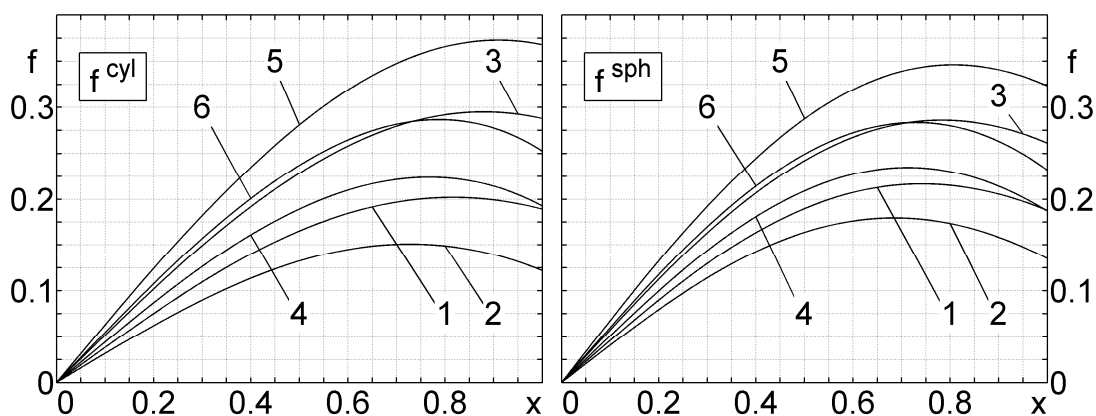


Рис. 6. Зависимости локальных НТ от координаты

На рис. 7 и 8 представлены графики зависимости интегральных ТП и НТ от ТФ $\tau \in [0,1;0,9]$ при МП: $s \cdot 1E-4 \in \{0;1;\dots;5\}$. Положение кривых, соответствующих случаю отсутствия МП ($s=0$) и случаю $s=5E4$, обозначено.

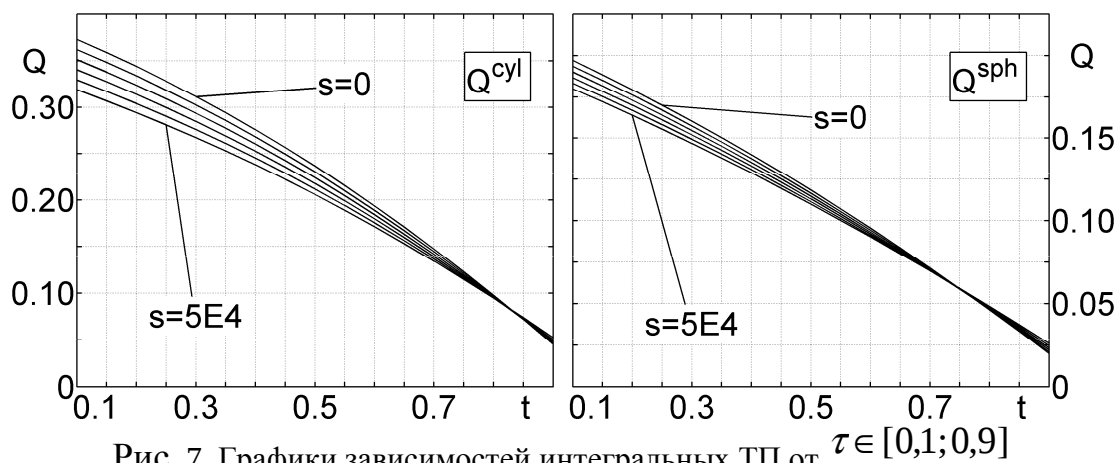


Рис. 7. Графики зависимостей интегральных ТП от $\tau \in [0,1;0,9]$

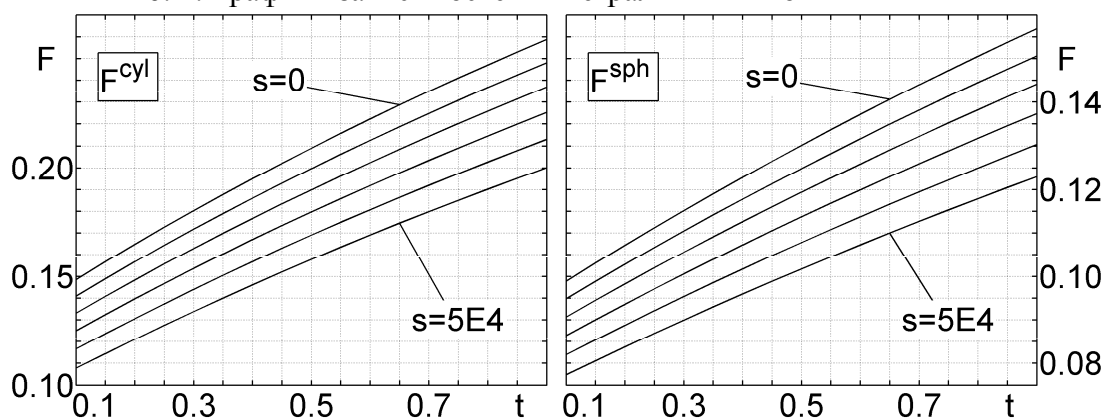


Рис. 8. Графики зависимостей интегральных НТ от $\tau \in [0,1;0,9]$

На рис. 9 и 10 представлены графики зависимости интегральных ТП и НТ от МП $s \in [0;5E4]$ при различных значениях ТФ $\tau \in \{0,1;0,2;\dots;0,9\}$ (указано положение кривых, соответствующих $\tau=0,1$).

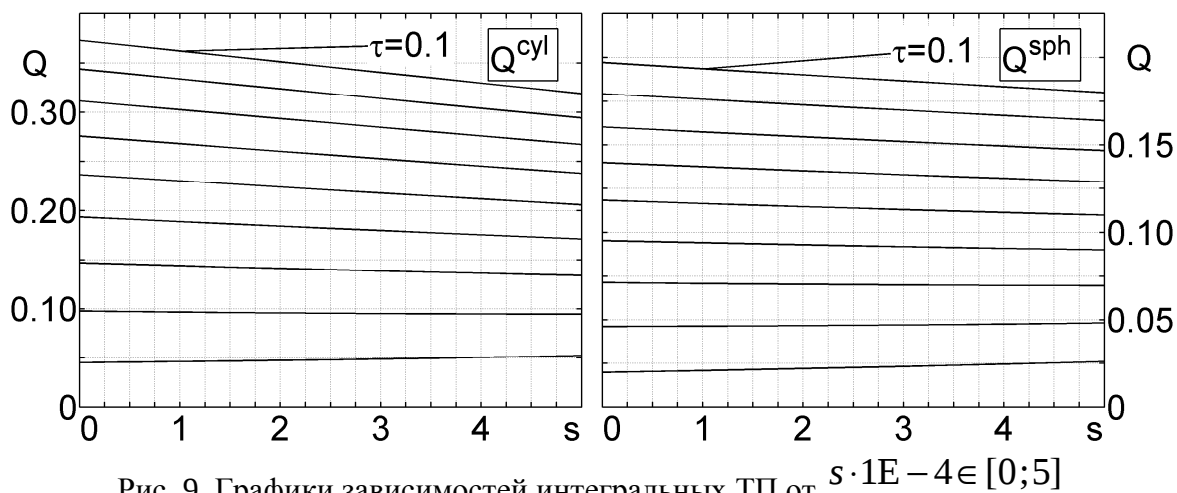


Рис. 9. Графики зависимостей интегральных ТП от $s \cdot 1E - 4 \in [0; 5]$

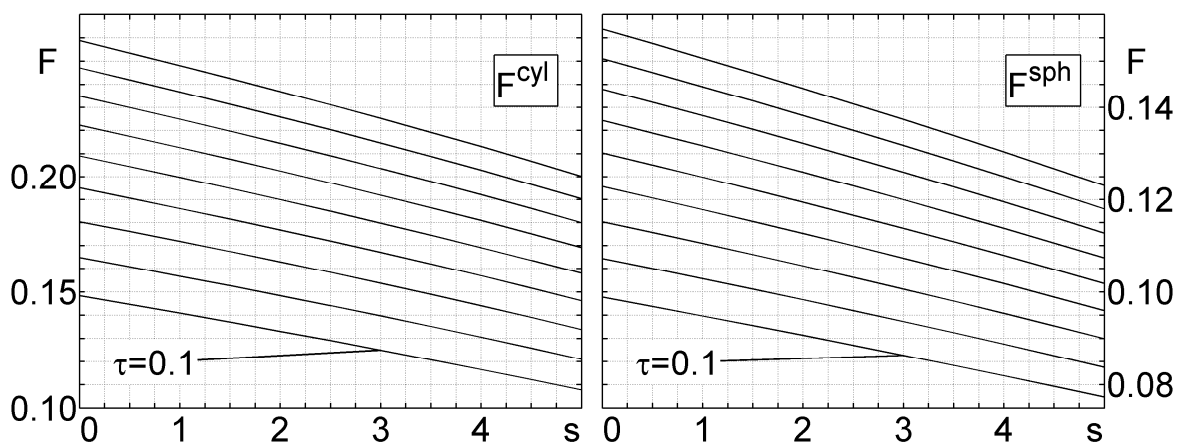


Рис. 10. Графики зависимостей интегральных НТ от $s \cdot 1E - 4 \in [0; 5]$

1.3.2. Случай фиксированного τ при различных законах вдува.
Зафиксируем ТФ $\tau = 0,25$ и рассмотрим различные законы вдува.

На рис. 11 и 12 представлены графики зависимости локального ТП и локального НТ от координаты для сильно охлаждаемых поверхностей при наличии МП и различных законах вдува.

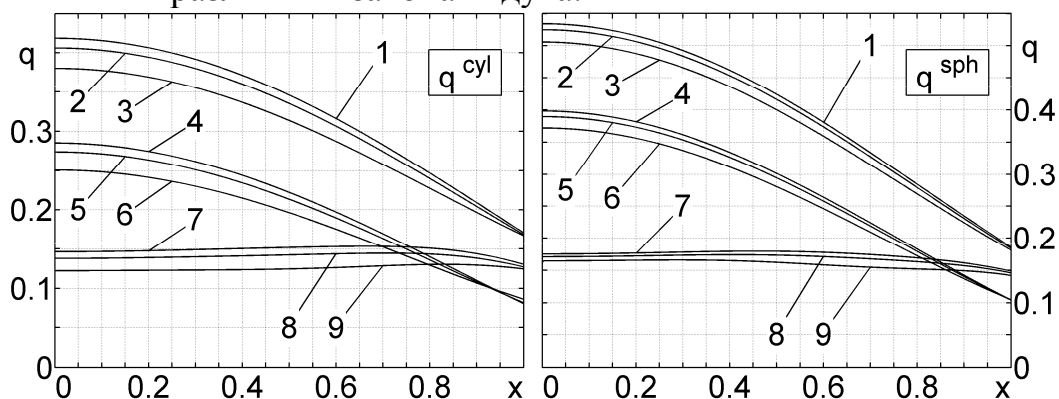


Рис. 11. Зависимости локальных ТП от координаты (при наличии вдува и магнитного поля)

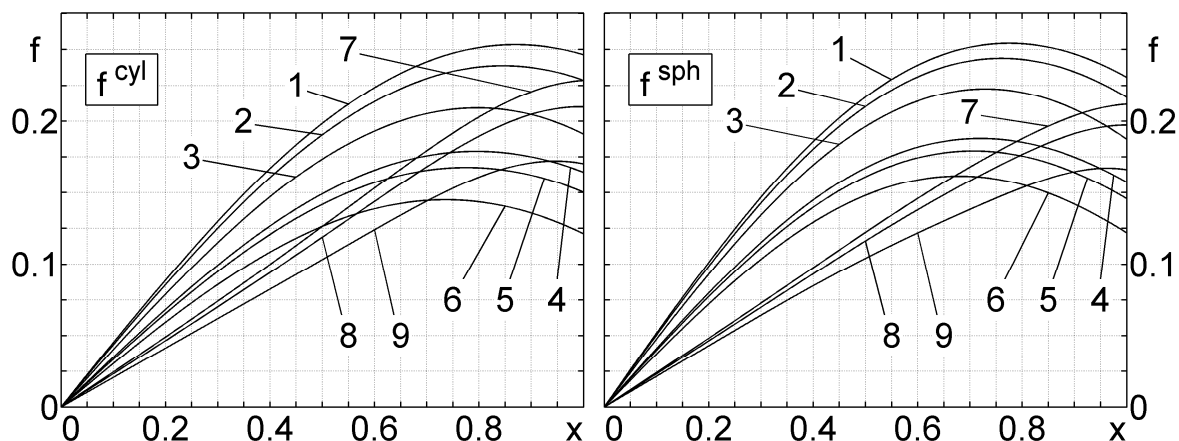


Рис. 12. Зависимости локальных НТ от координаты (при наличии вдува и магнитного поля)

Отсутствию вдува ($m=0$) соответствуют кривые 1, 2, 3; вдуву $m=0,3$ - кривые 4, 5, 6; оптимальному вдуву m_{opt} (в первом приближении) [2-5], где $N(m_{opt}) = N(m=0,3)$, соответствуют кривые 7, 8, 9. Случай отсутствия магнитного поля ($s=0$) соответствует кривым 1, 4, 7; случай $s=1E4$ - кривым 2, 5, 8; $s=3E4$ - кривым 3, 6, 9.

Вывод 2. Применение МП в качестве дополнительного средства управления ламинарным ПС электропроводящего газа для сильно охлаждаемой поверхности позволяет добиться дополнительного **снижения** локальных ТП и НТ как в случае постоянного, так и в случае оптимального вдува.

Следует отметить, что результаты вычислительных экспериментов по построению управлений, близких к оптимальным, с помощью «простых» законов (треугольник, трапеция), проведённых аналогично рассмотренным в [6] для случая равновесно диссоциирующего газа, но с учётом МП, показали, во-первых, что графики зависимостей, построенные для них, настолько близки к кривым 7, 8 и 9 на рис. 11 и 12, что приводить их на отдельных рисунках нецелесообразно; во-вторых, подтвердили **вывод 2** и в отношении «простых» законов.

2. Вычислительные эксперименты в обратных задачах.

2.1. О влиянии температурного фактора на восстановление вдува.

Приведём два примера интерполяционных восстановлений вдувов для локальных ТП и НТ, аналогичных рассмотренным в [15, 16], для случаев обтекания боковой поверхности кругового цилиндра и сферического носка при $H=10$ [км], $R=0,1$ [м], $M_\infty=10$. Продолжая исследования [11] о влиянии ТФ на ПС, с помощью программы, реализующей ПЗ, были получены последовательности значений q_{dir} и f_{dir} для законов вдува m_{dir} , обобщающих (1)-(5), рассмотренных в п. 1, при различных постоянных законах ТФ $\tau_{dir} \in \{0,15; 0,2; \dots; 0,9\}$. Далее к ним при различных постоянных

законах ТФ $\tau_{inv} \in \{0,15;0,2;\dots;0,9\}$ с ограничением $I_{j,0} = [0;1]$ была применена процедура решения ИПОЗ для вдува.

2.1.1. По «контрольным» q_{dir} и f_{dir} , соответствующим **постоянному вдуву** $m \equiv 0,3$ при $\tau_{dir} \equiv 0,25$, процедура решения ИПОЗ для вдува при некоторых $\tau_{inv} \in \{0,15;0,2;\dots;0,9\}$ построила $\tilde{m}(x)$. На рис. 13 представлены законы $\tilde{m}$, полученные по ТП, на рис. 14 - соответственно - по НТ.

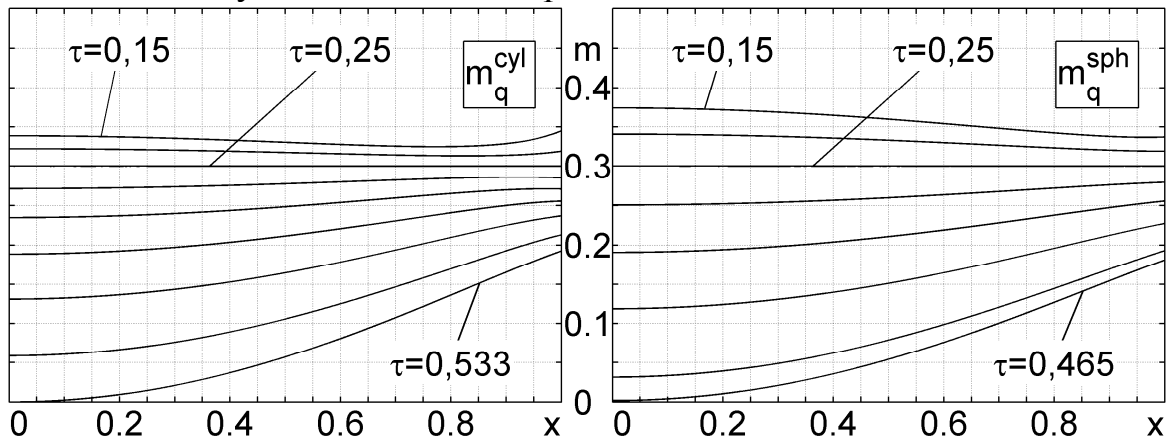


Рис. 13. Вдувы $\tilde{m}(x)$, восстановленные по локальным ТП

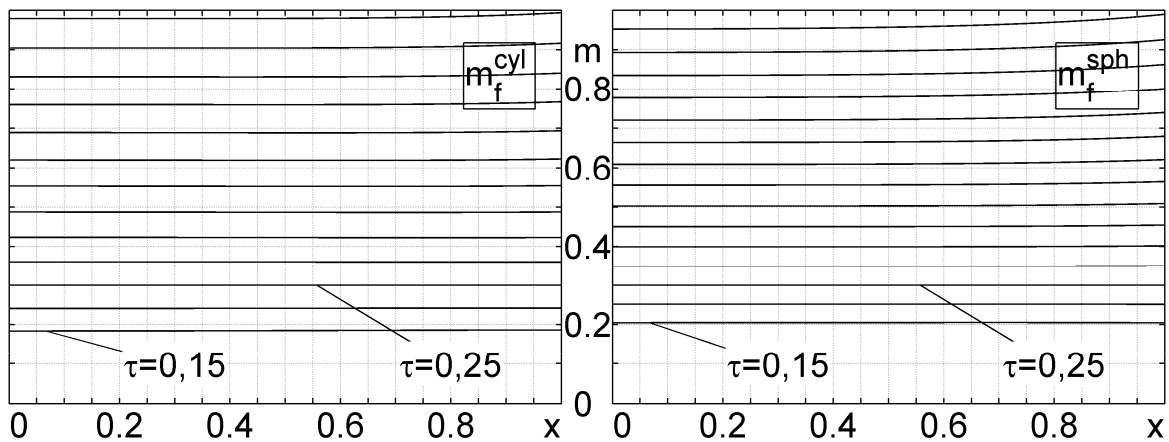


Рис. 14. Вдувы $\tilde{m}(x)$, восстановленные по локальным НТ

Для значений $\tau \geq \tau_*$, где $\tau_*^{cyl} = 0,534$ и $\tau_*^{sph} = 0,466$, из-за ограничения $b_{j,0} = 0$ на вдув построение по ТП невозможно. Аналогично, при $\tau \geq \tau_*$, где $\tau_*^{cyl} = 0,755$ и $\tau_*^{sph} = 0,858$, для НТ срабатывает ограничение $t_{j,0} = 1$.

2.1.2. По q_{dir} и f_{dir} , соответствующим закону «**вертикальная трапеция**» (кривые 7 на рис. 2) при $m_0 = 0$, $m_1^{cyl} = 0,3996$, $m_1^{sph} = 0,3664$, процедура решения ИПОЗ для вдува при $\tau_{inv} \in \{0,15;0,2;\dots;0,9\}$ построила

$m^{\sim}$, представленные на рис. 15 (по ТП) и 16 (по НТ). Вдув становится меньше $b_{j,0}=0$ при $\tau > 0,25$ при восстановлении по ТП, а при $\tau < 0,25$ - по НТ. Кроме того, при $\tau \geq \tau_*$, где $\tau_*^{cyl} = 0,67$ и $\tau_*^{sph} = 0,79$, для НТ достигается ограничение $t_{j,0} = 1$.

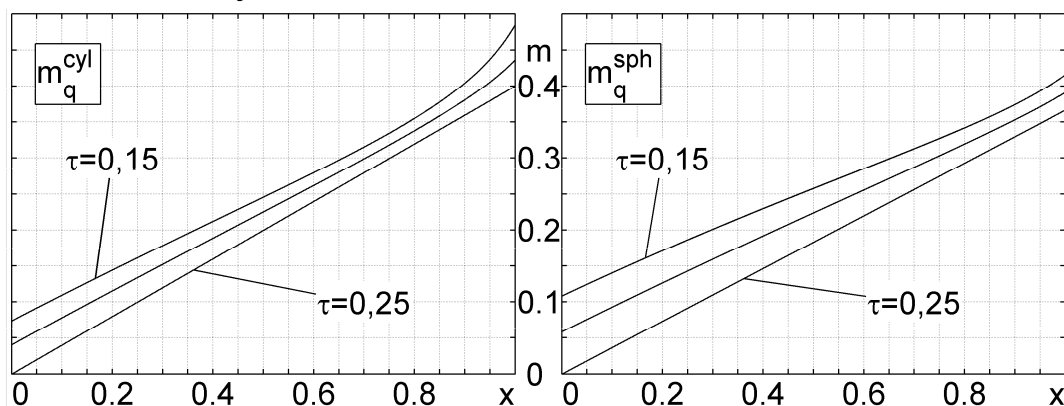


Рис. 15. Вдувы $m^{\sim}(x)$, восстановленные по локальным ТП

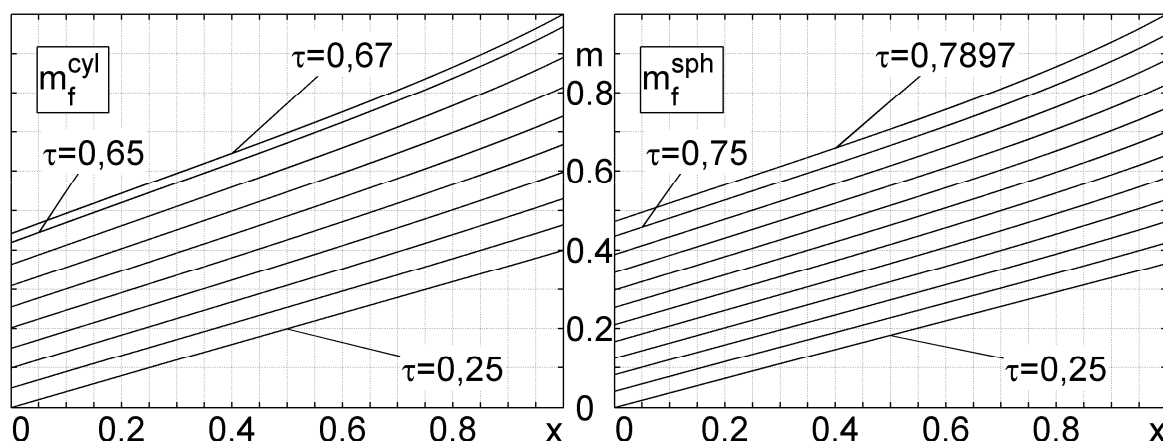


Рис. 16. Вдувы $m^{\sim}(x)$, восстановленные по локальным НТ

2.2. Допустимые формы локальных тепловых потоков и напряжений трения. Следует отметить различный характер чувствительности q и f к ступенчатому (дискретному) изменению управления $m(x)$. Чувствительность q существенно падает при приближении точки переключения x_* к 1, а у f это менее заметно.

На рис. 17 приведены зависимости локальных ТП, на рис. 18 - локальных НТ от локальной координаты. Кривые соответствуют законам вдува «обобщённая ступенька» (3)

$$m(x; m_1, m_2, x_*) = \begin{cases} m_1 & \text{при } x \in [0; x_*); \\ m_2 & \text{при } x \in (x_*; 1], \end{cases} \quad (6)$$

где $x_* \in \{0,01; 0,05; 0,10; 0,15; \dots; 0,95\}$, $m_1 = 0,3$, $m_2 \in \{0; 0,3; 1\}$.

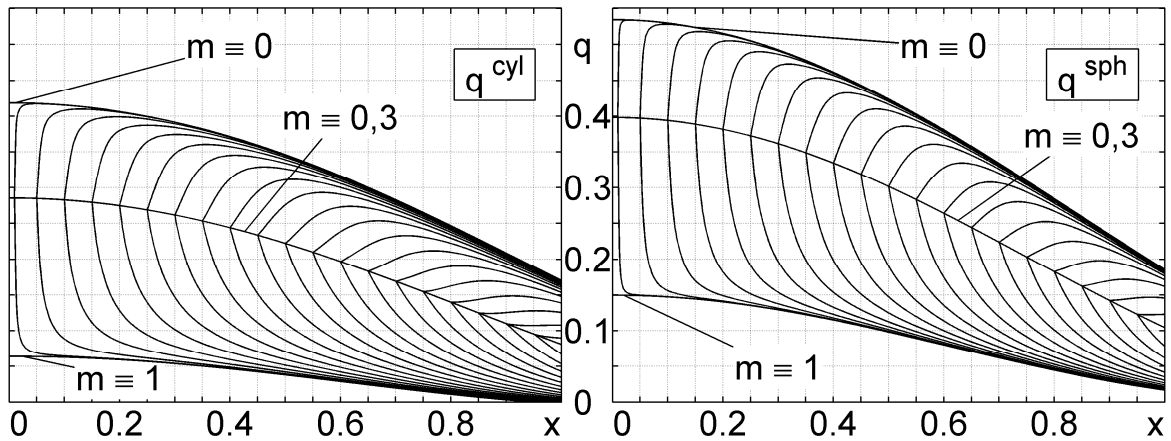


Рис. 17. Реакции локальных ТП q на ступенчатое изменение вдува

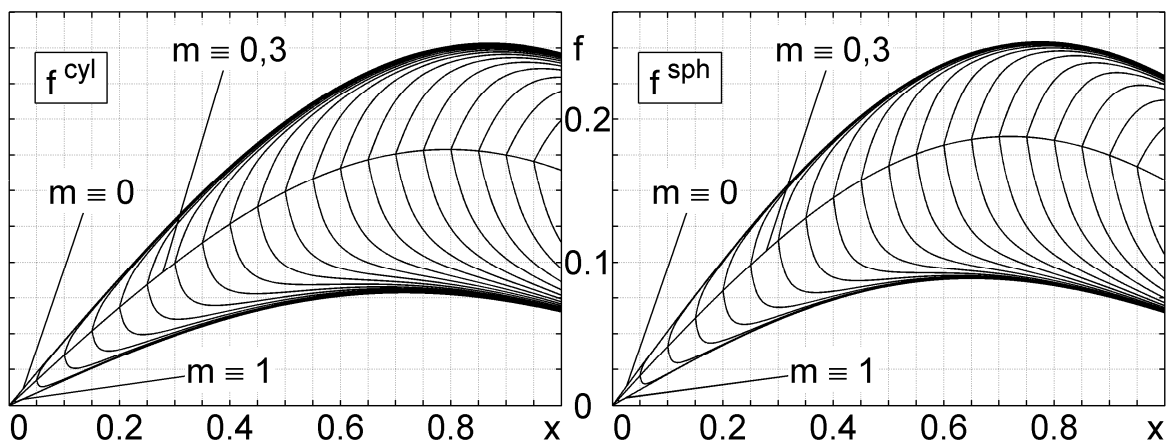


Рис. 18. Реакции локальных НТ f на ступенчатое изменение вдува

Закключение. В силу ограниченности объёма в данной работе, как и в её первой части [1], представлены лишь некоторые результаты математического моделирования эффективного управления параметрами термосилового нагружения проницаемых цилиндрических и сферических поверхностей ГЛА.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бильченко Г.Г., Бильченко Н.Г. О синтезе управления в обратных задачах теплообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды XI Международной Четаевской конференции. Секция 3. Управление. Казань, 14-18 июня 2017г. - Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ МОМЕНТОВ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.С. Бортаковский (МАИ, Россия, 125993, Москва, Волоколамское ш., 4)
asbortakov@mail.ru

SUFFICIENT TERMS OF OPTIMALITY OF MOMENTS OF SWITCHING OF CONTINUOUSLY-DISCRETE DYNAMIC SYSTEMS

A.S. Bortakovskii (MAI, Russia, 125993, Moscow, Volokolamskoe str., 4)

Keywords: continuous-discrete system, optimal control

Введение. Рассматривается задача оптимального управления непрерывно-дискретными системами. Непрерывная часть системы описывается дифференциальными уравнениями, а дискретная часть, моделирующая работу автомата с памятью, – рекуррентным включением. Дискретная часть осуществляет переключения режимов работы непрерывной части системы. Моменты переключений, а также их количество заранее не заданы. Они находятся в результате оптимизации функционала качества управления, в котором учитываются затраты на каждое переключение. Поставленная задача обобщает задачу оптимального управления непрерывно-дискретными системами [1] и относится к задачам оптимального управления переключающимися (гибридными) системами [2].

Показано, что функция цены (функция Гамильтона – Якоби – Беллмана) строится из вспомогательных функций, так называемых условных функций цены. Применяя к задаче метод динамического программирования, выведены уравнения для условных функций цены, и доказаны достаточные условия оптимальности. Использование условий оптимальности демонстрируется на примере, аналогичном классической задаче быстрого действия Фельдбаума А.А. [3].

Постановка задачи. Пусть на заданном промежутке времени $T = [t_0, t_F]$ функционирования динамической системы ее дискретная (автоматная) часть N раз меняет состояние (совершает переключение) в тактовые моменты времени $t_1, \dots, t_N$, образующие неубывающую последовательность:

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_{N+1} \doteq t_F. \quad (1)$$

Между неравными тактовыми моментами времени дискретная часть сохраняет свое состояние, а непрерывная часть изменяется согласно дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), y(t), u(t)), \quad t_{i-1} \leq t < t_i, \quad (2)$$

$$y(t) = y_{i-1}, \quad i = 1, \dots, N + 1. \quad (3)$$

В тактовые моменты времени скачки дискретной части удовлетворяют включению

$$y_i \in G(t_i, x(t_i), y_{i-1}) \setminus \{y_{i-1}\}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

В уравнениях движения (2)–(4):

$x = x(t)$ и $u = u(t)$ – состояние и управление непрерывной составляющей системы в момент времени $t \in T$, $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^p$;

$y_i = y(t_i)$ – состояние дискретной составляющей системы в тактовый момент времени $t_i \in T$, $y_i \in Y \subset \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, N$;

функция $f: T \times X \times Y \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна на всей области определения вместе с производной $\partial f / \partial x$; многозначное отображение $(t, x, y) \rightarrow G(t, x, y): T \times X \times Y \rightarrow 2^Y$ замкнуто.

Равенство последовательных моментов в (1) означает, что дискретная часть системы совершает мгновенные многократные переключения [4]. Таким образом, траектории дискретной части являются непрерывными справа ступенчатыми функциями с многозначными разрывами. Отметим, что в условии (4) исключаются так называемые *фиктивные* переключения, при которых состояние дискретной части не изменяется, например, $y_i = y_{i-1}$. Траектория $x: T \rightarrow X$ непрерывной части системы представляет собой абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющую уравнению (2) почти всюду на T . Заметим, что характер разрыва (многозначный или обычный – однозначный) траектории дискретной части не влияет на траекторию непрерывной части системы. Управление $u: T \rightarrow U$ непрерывной частью системы ограниченное и измеримое.

Множество допустимых процессов $\mathbf{D}(t_0, x_0, y_0)$ образуют тройки $d = (x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot))$, в которых траектории и управления удовлетворяют уравнениям движения (2), (3) с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \quad (5)$$

Условие (5) не исключает одного или нескольких переключений дискретной части в начальный момент времени t_0 , поскольку первых несколько тактовых моментов (1) могут совпадать. Момент t_F окончания работы системы задан, а конечное состояние свободно. Множество допустимых процессов может быть ограничено дополнительными терминаль-

ными и фазовыми ограничениями. Подчеркнем, что количество $N = |\mathbf{T}|$ переключений и тактовые моменты $t_1, \dots, t_N$ не фиксированы и у разных допустимых процессов могут не совпадать.

На множестве $\mathbf{D}(t_0, x_0, y_0)$ допустимых процессов задан функционал качества управления

$$I = \int_{t_0}^{t_F} f^0(t, x(t), y(t), u(t)) dt + \sum_{i=1}^N g^+(t_i, x(t_i), y_{i-1}, y_i) + F(x(t_F), y(t_F)), \quad (6)$$

где функции $f^0: T \times X \times Y \times U \rightarrow \mathbb{R}$ и $F: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны и ограничены снизу, а функция $g^+: T \times X \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$ неотрицательна. Последнее условие позволяет рассматривать каждое слагаемое $g^+(t_i, x(t_i), y_{i-1}, v_i)$ в (6) как затраты (или "штраф") при переключении $y_{i-1} \rightarrow y_i$ состояния дискретной части.

Требуется найти минимальное значение функционала (6) и оптимальный процесс $d^* = (x^*(\cdot), y^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \mathbf{D}(t_0, x_0, y_0)$, на котором это значение достигается:

$$I(t_0, x_0, y_0, d^*) = \min_{d \in \mathbf{D}(t_0, x_0, y_0)} I(t_0, x_0, y_0, d). \quad (7)$$

Если наименьшее значение (7) не существует, то ставится задача нахождения минимизирующей последовательности допустимых процессов [5]. Количество переключений у процессов минимизирующей последовательности может оставаться конечным или неограниченно возрастать. Бесконечное количество переключений у оптимального процесса становится невозможным, если усилить условие неотрицательности функции g^+ в (6):

$$g^+(t, x, y, v) \geq g_{\min}^+ > 0. \quad (8)$$

Применение таких "штрафов" в функционале качества исключает последовательности процессов с неограниченным ростом числа переключений как неминимизирующие.

В прикладных задачах нередко возникают ограничения на количество переключений. Задача минимизации функционала (6) на множестве допустимых траекторий с заданным числом переключений формулируется следующим образом. Пусть $\mathbf{D}_N(t_0, x_0, y_0)$ – множество допустимых процессов из $\mathbf{D}(t_0, x_0, y_0)$ с N переключениями, быть может, фиктивными. Требуется найти минимальное значение функционала (6) на множестве $\mathbf{D}_N(t_0, x_0, y_0)$ и процесс $d_N \in \mathbf{D}_N(t_0, x_0, y_0)$, на котором это значение достигается:

$$I(t_0, x_0, y_0, d_N) = \min_{d \in \mathbf{D}_N(t_0, x_0, y_0)} I(t_0, x_0, y_0, d). \quad (9)$$

Такой процесс d_N будем называть *условно оптимальным*, имея в виду его оптимальность при дополнительном условии – заданном числе переключений N .

2. Условные функции цены и образующие. Применение динамического программирования [6] опирается на понятие функции цены (функции Гамильтона – Якоби – Беллмана), значение $\varphi(t, x, y)$ которой по определению равно значению функционала оставшихся (будущих) потерь $I(t, x, y, d)$ на оптимальной траектории, исходящей из позиции (t, x, y) :

$$\varphi(t, x, y) = \min_{d \in \mathbf{D}(t, x, y)} I(t, x, y, d). \quad (10)$$

Процессы из $\mathbf{D}(t, x, y)$ удовлетворяют начальным условиям $x(t) = x$, $y(t) = y$, а тактовые моменты времени $t_1, \dots, t_N$ образуют неубывающую последовательность на промежутке $[t, t_F]$: $t \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_F$, причем количество N и сами моменты $t_1, \dots, t_N$ переключений у разных допустимых процессов могут не совпадать.

Определим *образующую* функции цены, значение $\varphi_N(t, x, y)$ которой равно значению функционала оставшихся потерь $I(t, x, y, d)$ на оптимальной траектории, исходящей из позиции (t, x, y) и имеющей ровно N переключений, быть может, фиктивных. Иначе говоря, образующая функции цены равна минимальному значению функционала $I(t, x, y, d)$ на множестве допустимых процессов $\mathbf{D}_N(t, x, y)$:

$$\varphi_N(t, x, y) = \min_{d \in \mathbf{D}_N(t, x, y)} I(t, x, y, d). \quad (11)$$

Наконец, *условной* функцией цены будем называть функцию $\phi_N(t, x, y | \tau)$, равную значению функционала оставшихся потерь $I(t, x, y, d)$ на оптимальной траектории, исходящей из позиции (t, x, y) и имеющей ровно N переключений, быть может, фиктивных, первое из которых происходит в момент времени $\tau \in [t, t_F]$. При $N = 0$ полагаем по определению $\phi_0(t, x, y | \tau) = \varphi_0(t, x, y)$ для всех $\tau \in [t, t_F]$. Если обозначить через $\mathbf{D}_N(t, x, y | \tau)$ – множество допустимых процессов из $\mathbf{D}_N(t, x, y)$ с первым переключением в момент $\tau \in [t, t_F]$, то

$$\phi_N(t, x, y | \tau) = \min_{d \in \mathbf{D}_N(t, x, y | \tau)} I(t, x, y, d). \quad (12)$$

Уравнения метода. Применяя метод динамического программирования, получаем уравнения, которым удовлетворяют образующие и условные функции цены. Предполагаем, что все условные функции имеют частные производные по t и x . Нулевая образующая является решением уравнения

$$\min_{u \in U} \left[\frac{\partial \phi_0(t, x, y)}{\partial t} + \frac{\partial \phi_0(t, x, y)}{\partial x} f(t, x, y, u) + f^0(t, x, y, u) \right] = 0 \quad (13)$$

с терминальным условием

$$\phi_0(t_F, x, y) = F(x, y). \quad (14)$$

Остальные образующие и условные функции цены удовлетворяют уравнениям

$$\min_{u \in U} \left[\frac{\partial \phi_k(t, x, y | \tau)}{\partial t} + \frac{\partial \phi_k(t, x, y | \tau)}{\partial x} f(t, x, y, u) + f^0(t, x, y, u) \right] = 0, \quad (15)$$

$$\phi_k(\tau, x, y | \tau) = \min_{z \in G(\tau, x, y)} [\phi_{k-1}(\tau, x, z) + g^+(\tau, x, y, z)], \quad (16)$$

$$\phi_k(t, x, y) = \min_{t \leq \tau \leq t_F} \phi_k(t, x, y | \tau), \quad k = 1, 2, \dots; \quad (17)$$

а функция цены является нижней огибающей своих образующих

$$\phi(t, x, y) = \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \phi_k(t, x, y). \quad (18)$$

Дифференциальные уравнения (13), (15) представляют собой уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана с параметром $y \in Y$. Этому уравнению удовлетворяет условная функция цены до первого из k оставшихся переключений. В момент τ первого переключения решение дифференциального уравнения (15) удовлетворяет терминальному условию (16). Равенство (17) связывает образующую с условной функцией цены, а (18) – функцию цены с образующими. Система (13)–(18) позволяет найти функцию цены по вспомогательным функциям. При наличии терминальных ограничений условия (14) и (16) меняются соответствующим образом.

В уравнениях (13)–(18) имеются пять операций минимизации. При решении дифференциальных уравнений (13), (15) определяем оптимальное управление непрерывной частью системы

$$\mathbf{u}_k(t, x, y | \tau) = \arg \min_{u \in U} \left[\frac{\partial \phi_k(t, x, y | \tau)}{\partial t} + \frac{\partial \phi_k(t, x, y | \tau)}{\partial x} f(t, x, y, u) + f^0(t, x, y, u) \right]. \quad (19)$$

Разумеется, что при отсутствии переключений, т.е. при $k = 0$, условная функция цены и управление (19) не зависят от момента τ переключения, т.е. $\phi_0(t, x, y) = \phi_0(t, x, y)$ и $\mathbf{u}_0(t, x, y) = \mathbf{u}_0(t, x, y | \tau)$. Решая уравнение

(16), определяем оптимальное состояние дискретной части системы после переключения

$$y_k(\tau, x, y) = \arg \min_{z \in G(\tau, x, y)} [\varphi_{k-1}(\tau, x, z) + g^+(\tau, x, y, z)], \quad (20)$$

а из равенств (17) и (18) получаем оптимальный момент первого из оставшихся k переключений и оптимальное количество переключений

$$\tau_k(t, x, y) = \arg \min_{t \leq \tau \leq t_f} \phi_k(t, x, y | \tau), \quad (21)$$

$$\mathbf{k}(t, x, y) = \arg \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi_k(t, x, y). \quad (22)$$

Позиционные конструкции (19)–(22) позволяют найти оптимальный процесс. Пусть система находится в позиции (t_0, x_0, y_0) , т.е. удовлетворяет начальным условиям (5). Тогда для этой позиции находим количество переключений $N = \mathbf{k}(t_0, x_0, y_0)$ у оптимальной траектории, а также момент первого переключения $t_1 = \tau_N(t_0, x_0, y_0)$. Если $t_1 > t_0$, то на промежутке $[t_0, t_1)$ траектория дискретной части постоянна $y(t) = y_0$, а траектория непрерывной части удовлетворяет уравнению (2) с программным управлением $u(t) = \mathbf{u}_N(t, x(t), y(t) | t_1)$. Если $t_1 = t_0$, то дискретная часть изменяет состояние согласно включению (3) $y_1 = \mathbf{y}_N(t_1, x_0, y_0)$. Состояние непрерывной части системы при этом сохраняется. Таким образом, система приходит в позицию (t_1, x_1, y_1) , в которой выполняются те же действия, за исключением поиска оптимального количества переключений, так как оно равно $N - 1$. Если в начальной позиции (t_0, x_0, y_0) оптимальное количество переключений равно нулю $\mathbf{k}(t_0, x_0, y_0) = 0$, то переключений дискретной части нет и $y(t) = y_0$, $t \in T$, а движение непрерывной части происходит согласно уравнению (2) под действием программного управления $u(t) = \mathbf{u}_0(t, x(t), y_0)$.

Достаточные условия оптимальности. Сформулируем достаточные условия оптимальности, используя образующие и условные функции цены.

Теорема. Если существуют последовательности функций φ_k и ϕ_k , $k \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих на области определения уравнениям (13)–(18), то для оптимальности допустимого процесса $(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbf{D}(t_0, x_0, y_0)$ с тактовыми моментами времени $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_F$ достаточно, чтобы выполнялись условия

$$N = \mathbf{k}(t_0, x_0, y_0), \quad (23)$$

$$u(t) = \mathbf{u}_{N-i+1}(t, x(t), y_{i-1} | t_i), \quad (24)$$

$$y_i = \mathbf{y}_{N-i+1}(t_i, x_i, y_{i-1}), \quad (25)$$

$$t_i = \mathbf{\tau}_{N-i+1}(t_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1}), \quad (26)$$

где $t_{i-1} \leq t < t_i$, $i = 1, \dots, N$. При $N = 0$ равенства (25), (26) опускаются.

Действительно, при $N > 0$ уравнение (15) для управления (24) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \phi_k(t, x(t), y | \tau) + f^0(t, x(t), y, u(t)) = 0, \quad (27)$$

используя полную производную функции $\phi_k(t, x(t), y | \tau)$ по времени в силу системы (2). Поэтому, интегрируя равенство (27) на промежутке $[t_{i-1}, t_i]$, где $i = N - k + 1$, получаем

$$\phi_k(t_i, x_i, y_{i-1} | t_i) - \phi_k(t_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1} | t_i) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f^0(t, x(t), y_{i-1}) dt = 0. \quad (28)$$

Найдем интеграл по последнему промежутку $[t_N, t_{N+1}]$ от левой части (27) при $k = 0$. Учитывая (13), (14) приходим к равенству

$$F(x_{N+1}, y_N) - \phi_0(t_N, x_N, y_N) + \int_{t_N}^{t_{N+1}} f^0(t, x(t), y_N) dt = 0. \quad (29)$$

Из (16) и (25) следует, что

$$\begin{aligned} \phi_k(t_i, x_i, y_{i-1} | t_i) &= \min_{z \in G(t_i, x_i, y_{i-1})} [\phi_{k-1}(t_i, x_i, z) + g^+(t_i, x_i, y_{i-1}, z)] = \\ &= \phi_{k-1}(t_i, x_i, y_i) + g^+(t_i, x_i, y_{i-1}, y_i), \end{aligned}$$

а из (17) и (26) –

$$\phi_k(t_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1} | t_i) = \min_{t_{i-1} \leq \tau \leq t_F} \phi_k(t_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1} | \tau) = \phi_k(t_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1}).$$

Подставляя эти выражения в (28), получаем

$$\phi_{k-1}(t_i, x_i, y_i) + g^+(t_i, x_i, y_{i-1}, y_i) - \phi_k(t_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f^0(t, x(t), y_{i-1}) dt = 0.$$

Суммируя эти равенства по $i = 1, \dots, N$ (при этом $k = N, \dots, 1$) и добавляя равенство (29), приходим к соотношению

$$\int_{t_0}^{t_{N+1}} f^0(t, x(t), y_{i-1}) dt + \sum_{i=1}^N g^+(t_i, x_i, y_{i-1}, y_i) + F(x_{N+1}, y_N) - \varphi_N(t_0, x_0, y_0) = 0.$$

Значит, для допустимого процесса $d = (x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot))$ выполняется равенство $\varphi_N(t_0, x_0, y_0) = I(t_0, x_0, y_0, d)$. Учитывая условие (23), заключаем, что $\varphi(t_0, x_0, y_0) = I(t_0, x_0, y_0, d)$, т.е. этот процесс d оптимальный, так как значение функционала равно значению функции цены. Доказательство теоремы при отсутствии переключений (т.е. при $N = 0$) сводится к получению равенства $\varphi_0(t_0, x_0, y_0) = I(t_0, x_0, y_0, d)$ из уравнения (13) и условий (14), (24).

Пример. Пусть на промежутке времени $[0, T]$ дискретная (автоматная) часть динамической системы совершает N переключений в тактовые моменты времени $t_1, \dots, t_N$, образующие неубывающую последовательность:

$$0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_{N+1} \doteq T. \quad (30)$$

Между неравными тактовыми моментами дискретная часть сохраняет свое состояние, а непрерывная часть изменяется согласно дифференциальным уравнениям:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) - y(t), \quad \dot{x}_2(t) = u(t), \quad (31)$$

$$y(t) = y_{i-1}, \quad t_{i-1} \leq t < t_i, \quad i = 1, \dots, N+1; \quad (32)$$

в тактовые моменты времени скачки дискретной части удовлетворяют включению

$$y_i \in \{-1, 0, 1\}, \quad y_i \neq y_{i-1}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (33)$$

Здесь $x = x(t) \in \mathbb{R}^2$, $u = u(t) \in \mathbb{R}$ – состояние и управление непрерывной составляющей системы в момент времени $t \in [0, T]$, $|u| \leq 1$; $y_i = y(t_i)$ – состояние дискретной (автоматной) составляющей системы в тактовый момент времени $t_i \in [0, T]$, $i = 1, \dots, N$. Начальное состояние системы (31)–(33) задано

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad y(0) = 0.$$

Момент T окончания процесса управления определяется конечными условиями

$$x_1(T) = 0, \quad x_2(T) = 0, \quad y(T) = 0.$$

Качество управления оценивается функционалом

$$I = T + \sum_{i=1}^N \lambda |y_i - y_{i-1}|, \quad (34)$$

где $\lambda > 0$ – коэффициент затрат на переключение дискретной части. Количество N переключений и сами моменты переключений (30) заранее не заданы и находятся в результате оптимизации. Требуется найти оптимальное позиционное управление (для $\lambda = 1/3$).

Если траектория дискретной части не имеет переключений, то $y(t) \equiv 0$. В этом случае рассматриваемая задача совпадает с классическим примером А.А.Фельдбаума оптимального быстродействия [3]. Типовые оптимальные фазовые траектории изображены на рис.1. Пунктирными кривыми a , b , c показаны линии переключения релейного управления $u(\cdot)$ при $u \in \{-1, 0, 1\}$. Они разбивают фазовую плоскость на шесть областей, три из которых обозначены буквами A, B, C . Учитывая центральную симметрию, укажем решение только в этих областях. При $x_2 \leq 0$ линии переключения определяются уравнениями (a): $x_1 = 0.5x_2^2 - x_2$; (b): $x_1 = 0.5x_2^2$; (c): $x_1 = 0.5x_2^2 + x_2$. Нулевая функция цены ϕ_0 совпадает с функцией цены в задаче быстродействия. Другие образующие находятся, используя уравнения (15)–(17). В таблице представлены нулевая и вторая образующие. Первая образующая для нулевого начального состояния не определена, так как за одно переключение нельзя попасть в нулевое конечное состояние. Образующие с тремя и более переключениями оказываются хуже, чем с двумя.

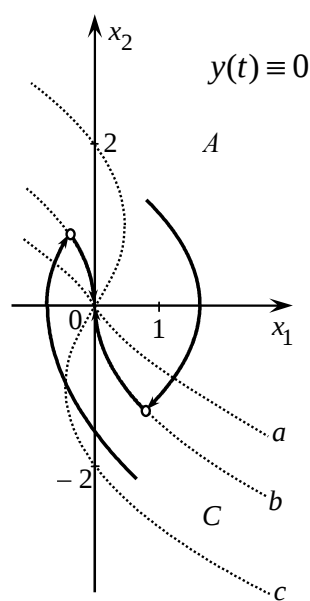


Рис.1

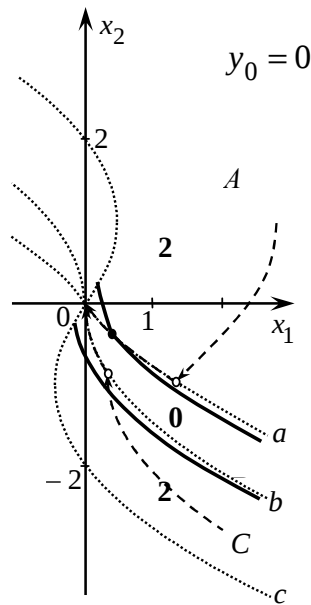


Рис.2

Для $\lambda = 1/3$ на рис.2 представлено разбиение фазовой плоскости полужирными линиями на области **0** и **2**, в которых функция цены совпадает с образующей φ_0 и φ_2 соответственно. Границы этих областей задаются равенством $\varphi_0 = \varphi_2$. Штриховыми стрелками изображены типовые оптимальные фазовые траектории, исходящие из областей **2**. Соответствующие им траектории дискретной части имеют два переключения. Для траектории, начинающейся в области *A*, первое переключение $0 \rightarrow 1$ происходит в начальный момент времени $t_1 = 0$, а второе $1 \rightarrow 0$ – в конечный момент времени $t_2 = T$. Для траектории, начинающейся в области *C*: первое переключение $0 \rightarrow -1$ совершается в начальный момент времени $t_1 = 0$, а второе $-1 \rightarrow 0$ – в момент t_2 на линии *b*. Заметим, что на этой траектории управление непрерывной частью системы постоянно $u(t) \equiv 1$ и не имеет переключений в отличие от классического случая (см. рис.1). В позициях, принадлежащих пересечению $B \cap 2$ (узкая часть области *B* между полужирной линией и пунктирной линией *a* на рис.2), оптимальное управление непрерывной частью $u = 1$, что также отличается от классического случая, в котором $u = -1$ в области *B* (см. рис.1)

Образующие функции цены.

<i>N</i>	Область	Образующая
0	<i>A</i> или <i>B</i>	$\varphi_{0A}(x,0) = \varphi_{0B}(x,0) = x_2 + 2\sqrt{x_1 + \frac{1}{2}x_2^2}$
	<i>C</i>	$\varphi_{0C}(x,0) = -x_2 + 2\sqrt{-x_1 + \frac{1}{2}x_2^2}$
2	<i>A</i>	$\varphi_{2A}(x,0) = 2\lambda + x_2 - 2 + 2\sqrt{1 + x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_2^2}$
	<i>B</i> или <i>C</i>	$\varphi_{2B}(x,0) = \varphi_{2C}(x,0) = 2\lambda - x_2$

Минимальное значение функционала находится по функции цены. Например, для траектории с начальным состоянием $x(0) = (3,1)$ в области *A* имеем $\min I = \varphi(3,1,0) = \varphi_2(3,1,0) = \sqrt{14} - 1/3 \approx 3.41$, а для траектории, исходящей из состояния $x(0) = (2,-3)$ в области *C*, получаем $\min I = \varphi(2,-3,0) = \varphi_2(2,-3,0) = 2/3 + 3 \approx 3.67$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Достаточные условия оптимальности управления непрерывно-дискретными системами // Автоматика и телемеханика. – 1987. – №7. – С.57-66.

2. *Васильев С.Н., Маликов А.И.* О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем. Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН. – Казань: Фолиант, 2011. – Т.1, 2. С. 23-81.

3. *Фельдбаум А.А.* Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. – 1953. – Т.14. – № 6. – С.712-728.

4. *Бортаковский А.С.* Достаточные условия оптимальности автоматной части логико-динамической системы // Известия РАН. Теория и системы управления, 2006, №6. С.77–92.

5. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.

6. *Беллман Р.* Динамическое программирование. – М.: ИЛ, 1960.

МЕТОДИКА РАЗРАБОТКИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ БОРТОВЫМИ КОМПЛЕКСИРОВАННЫМИ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫМИ ПРИБОРАМИ С ПРИМЕНЕНИЕМ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

К.А. Бурдинов, А.И. Карпов, В.А. Кренин (КНИТУ-КАИ,
Россия, 420111, Казань, К.Маркса, 10)
E-mail: tm@tm.kstu-kai.ru; sainquake@gmail.com

DESIGN AND RESEARCH APPROACH OF ON-BOARD AUTOMATIC COMPLEXED ELECTRO-OPTICAL CONTROL SYSTEM DYNAMICS APPLYING INFORMATION TECHNOLOGIES

K.A. Burdinov, A.I. Karpov, V.A. Krenin

Keywords: dynamics, electro-optical systems, information technologies, automatic control.

Введение

В настоящее время наиболее распространены в народном хозяйстве и военной технике комплексированные оптико-электронные приборы (КОЭП) визуализации, включающие в себя каналы наблюдения и зондирования в широком спектре волн оптического диапазона [1-4]. Появление на рынке матричных фотоприемников расширило возможности КОЭП и комплексов (К). Несмотря на интенсивное развитие теории и методов расчета и совершенствование бортовых автоматических КОЭП и К возникают ряд вопросов, влияющих на качество получаемой оптической информации, в частности, это вопросы динамики и качества управления и увязки их с оптическими характеристиками каналов визуализации [2,3,7,8].

Методика разработки и исследования динамики

Разработка систем автоматического управления (САУ) КОЭП начинается с выбора приемлемого варианта. Для этого необходимо решить многокритериальную задачу оптимизации с учетом ряда противоречивых технико-экономических (Т-Э) требований: точность САУ - α_1 , полоса пропускания САУ - α_2 , качество изображения - α_3 , время экспозиции - α_4 , потребляемая энергия - α_5 , надежность - α_6 , масса - α_7 , стоимость - α_8 , конкурентоспособность - α_9 , характеристики объектива - α_{10} и приемника излучения - α_{11} , и т.п., которые определяются из ТЗ на КОЭП. Критерий выбора приемлемого (i) варианта определяется по формуле:

$$k_i = \min \sum_{j=1}^n \gamma_{ji} \alpha_{ji}, (i = m), \quad (1)$$

где m – число вариантов, n – число Т-Э параметров, γ_{ji} – весовые коэффициенты, α_{ji} – Т-Э параметры, которые определяются методом экспертных

оценок специалистов в этих областях науки и техники (или аналитического обзора) с учетом результатов предварительных расчетов и исследований. Далее для выбранных приемлемых вариантов САУ (одного или двух) проводится исследование их динамики в соответствии со следующими итерационными алгоритмами, представленными на рис.1 в виде блок-схемы.

За критерий качества САУ обычно принимают совокупность характеристик каналов управления, удовлетворяющих условиям:

$$\Delta\alpha < \Delta\alpha^{\text{доп}}, \quad \Delta\dot{\alpha} \leq \Delta\dot{\alpha}^{\text{доп}}, \quad M \leq 1,05 \div 1,25, \quad |\Delta\varphi| \geq 45-60^\circ, \quad |\Delta L| \geq 6 \text{ дБ}, \quad (2)$$

где $\Delta\alpha^{\text{доп}}$, $\Delta\dot{\alpha}^{\text{доп}}$, $\Delta\alpha, \Delta\dot{\alpha}$ - допустимые и установившиеся значения динамических погрешностей САУ по углу и угловой скорости при действии возмущений, полученных в условиях, близких к реальной эксплуатации САУ, M – показатель колебательности, $\Delta\varphi, \Delta L$ – запасы устойчивости по фазе и по амплитуде, полученные из логарифмической частотной характеристики (ЧХ) разомкнутой системы [6].

Согласно предлагаемой методике алгоритм разработки САУ и исследования её динамики представлен в виде последовательных интерактивных замкнутых процедур (рис.1):

1) после выполнения 1 – 12 последовательных процедур оцениваем критерий качества САУ (2). Если он не выполняется, то проводятся последовательно циклы итераций: (12 – 20 – 10...12), (12 – 20 – 21 – 8...12), (12 – 20 – 23 – 3...12) до обеспечения критерия качества (2), заключающийся в оптимальном выборе регулятора;

2) Далее переходим к исследованию пространственной модели: (13 – 14 – 15). Если не выполняется критерий (2). то переходим на 2-е круги последовательных итераций: (15 – 24 – 21 – 8...15), (15 – 24 – 23 – 3...15), где доопределяем число степеней свободы модели и её параметры путем последовательных предыдущих итераций исследований до выполнения критерия (2). С учетом полученной информации доопределяем: приемлемый вариант построения САУ и критерий (2), задачи, решаемые САУ, и ограничения.

3) Затем переходим на испытания на стендах. Если не выполняется критерий (2). то переходят на 3-и круги последовательных итерационных процедур: (17 – 25 – 21 – 8...17), (17 – 25 – 26 – 1...17), которые включает в себя два предыдущих, что приводит, как правило, к искомому результату. Результаты исследований фиксируют в протоколе испытаний.

4) В заключении испытания на борту. Если не выполняется критерий (2), то переходят на 4-и круги последовательных итерационных процедур: (19 – 27 – 23 – 3...19), (19 – 27 – 26 – 1...19), которые включает в себя три предыдущих. Результаты испытаний и требования к техническим характеристикам САУ фиксируют в протоколе испытаний.

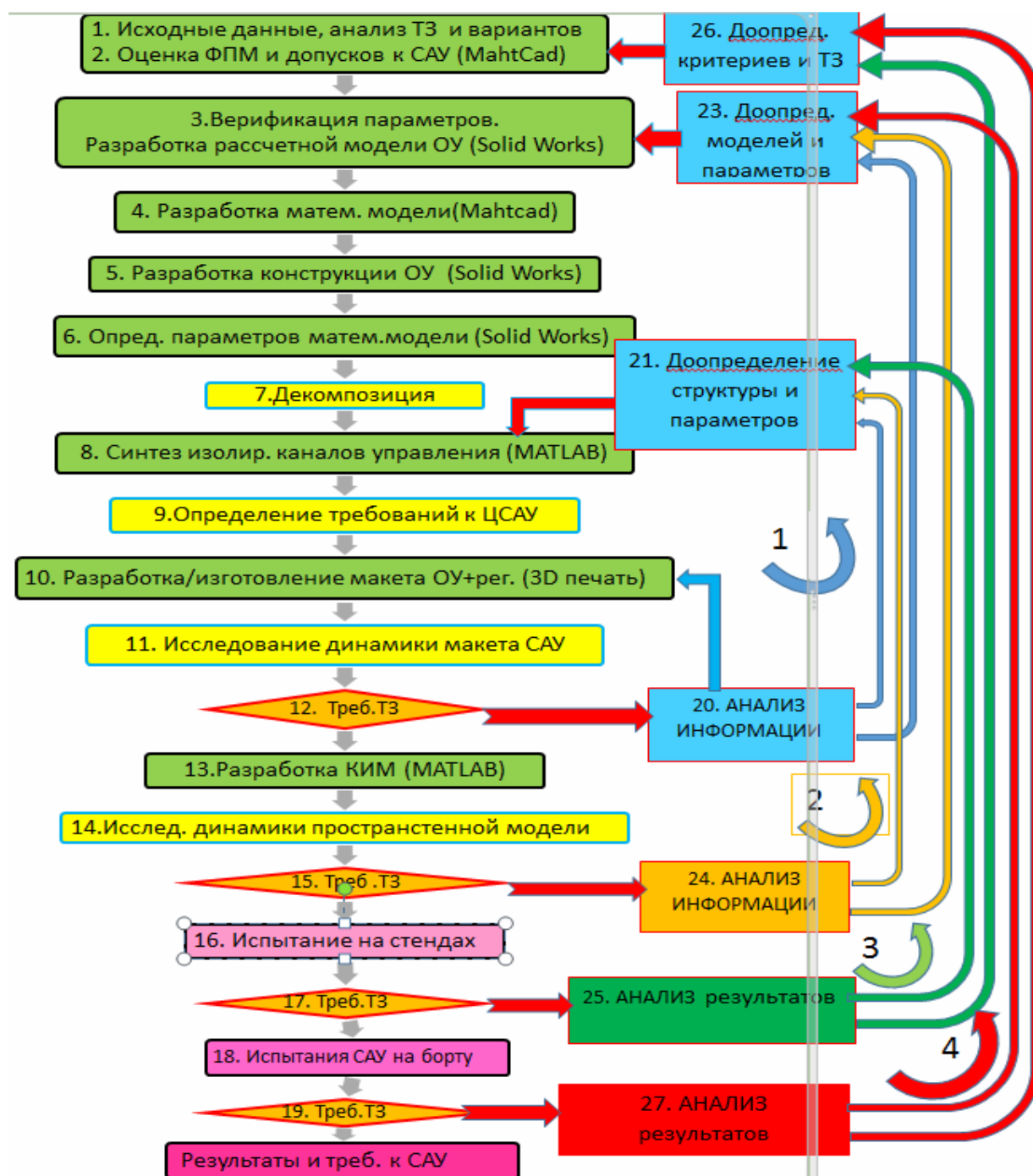


Рис.1.Блок-схема алгоритма методики разработки и исследования динамики

Приведенная методика была апробирована при разработке ряда САУ КОЭП.В каждом из указанных блоков на рис.1 предполагается своя методика разработки, исследования САУ. некоторые из них приводятся ниже, апробированные авторами при разработке САУ КОЭП.

1.Оценка допуска на точность стабилизации изображения[1, 5]. Для изучения процесса формирования изображения с учетом множества факторов, влияющих на формирование, преобразование и передачу качест-

ва изображения, рассмотрим математическую модель (ММ) одного из вариантов КОЭП (рис.2) [2], представляющего собой совокупность: *тепловизионной системы (ТВС), телевизионной системы (ТС), фотографической системы (ФС), наблюдательного прибора в видимой и ближней ИК (прибор ночного видения (ПНВ)) областях.*

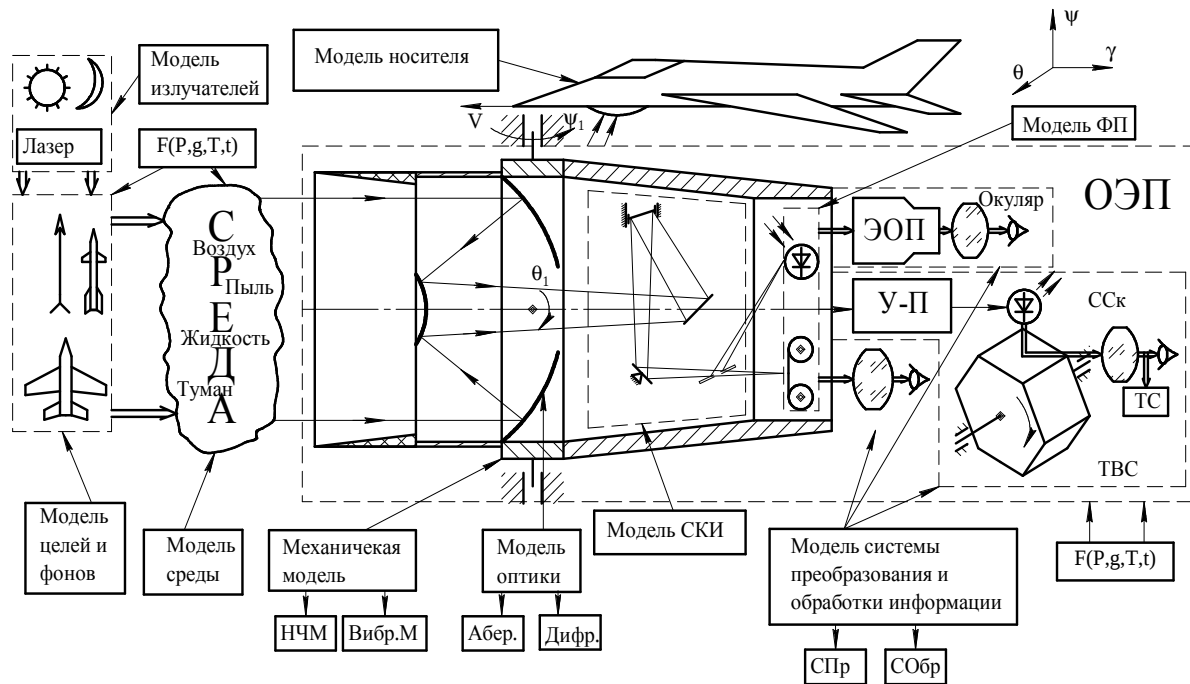


Рис.2. Структура обобщённой модели ОЭП

В результате действия возмущений $F(P,g,T,t)$ и возмущений, идущих от носителя, и наличия соответствующего управления КОЭП в пространстве остается некомпенсированный сдвиг изображения, который приводит к изменению уже имеющей структуры изображения аналогично влиянию аберраций, т.е. к ухудшению качества изображения, зависящего от величины и характера изменения динамических погрешностей управляющих систем (в частном случае: систем слежения (ССл), автоматической фокусировки (САФ), системы виброзащиты (СВ)). В этом случае для оценки допуска на ТСИ можно воспользоваться частотным критерием качества изображения ОЭП – функции передачи модуляции (ФПМ) [1,6,7]. Оценка качества изображения определяется на основе анализа произведения ФПМ элементов оптико-электронного тракта, формирующих изображение и влияющих на качество изображения. В рамках принятых ММ ФПМ КОЭП должна удовлетворять условию по каждому каналу визуализации

$$T_{оэн}(N) = T_{ам}(N)T_{об}(N)T_{фн}(N)T_{нои}(N)T_{сд}(N) > T_{оэн}^{дон}(N),$$

где $T_{o3n}(N)$ – ФПМ КОЭП, N – пространственная частота, $T_{o3n}^{don}(N)$ – допустимая ФПМ КОЭП, $T_{am}(N)$ – ФПМ атмосферы, $T_{ob}(N)$ – ФПМ объектива, $T_{\phi n}(N)$ – ФПМ фотоприемника, $T_{nou}(N)$ – ФПМ преобразования оптической информации, вид которых можно найти [1], $T_{cd}(N)$ – ФПМ сдвига изображения, зависящая от вида динамического смещения изображения: линейного (Л) - $x'(t) = Vt$, гармонического (Г) - $x'(t) = a_0 \sin \omega t$ и случайного (СЛ) [1,5]. Тогда допустимая ФПМ сдвига изображения определится как

$$T_{cd}^{don}(N) \geq \frac{T_{o3n}^{don}(N)}{T_{am}(N)T_{ob}(N)T_{\phi n}(N)T_{nou}(N)}, T_{cd}(N) = T_L(N)T_G(N)T_{CL}(N)T_{CA\Phi}(N), \quad (3)$$

$$\text{где } T_L(N) = \text{Sinc}(\pi VtN), T_G(N) = J_0(2\pi a_0 N), T_{CL}(N) = \exp\left[-2(\pi a_{cp} N)^2\right], \quad (4)$$

ФПМ соответственно: линейного, гармонического, случайного смещений изображения, регулируемых на низких частотах колебаний ССл и на высоких частотах колебаний СВ, которые зависят от вида динамических характеристик погрешностей регулируемых систем; $T_{CA\Phi}(N)$ – ФПМ САФ; V – скорость движения изображения; $J_0(.)$ – функция Бесселя нулевого порядка, $\tau_s \leq T = 2\pi / \omega$; a_{cp} – среднее значение амплитуды случайного сдвига изображения. Допуск на точность автоматической фокусировки для: фотообъективов в видимой области спектра, инфракрасных систем, оценки на низких пространственных частотах САФ, работающей на конечных расстояниях L , можно найти из ФПМ соответственно [1,3]:

$$T_{CA\Phi}(N) = \frac{\sin[\pi \Delta N (2\sigma'_A - \lambda N)]}{2\pi \Delta N \sigma'_A}, T_{CA\Phi}(f_x) = 2J_1(\Delta) / \Delta, T_{CA\Phi}(f_x) = \text{Sinc}(Df_x / L), \quad (5)$$

где f_x – пространственная частота (рад^{-1}), $J_1(\Delta)$ – функция Бесселя первого рода, σ'_A – апертурный угол, Δ – расфокусировки (мм).

Пространственная расчетная частота N_p должна соответствовать средним пространственным частотам (частоте Найквиста (N_n (мм^{-1}) либо f_n (рад^{-1})), которая выбирается с учетом условий [1]:

$$N_H = 0,5N_{об} \leq N_p, N_p = \frac{D}{1,22\lambda f'}, f_H = \frac{X_3}{2f'}, f_p = \frac{D}{\lambda} (p\alpha \text{ рад}^{-1}), f_{об} = \frac{n_3}{2\omega}, D \geq \frac{1,22\kappa_{об}\lambda}{h_{kp}}, N_x = \frac{N_0 l}{h_{kp} f'}, \quad (6)$$

$$f_x = \frac{N_0 l}{h_{kp}}, f_{xy} = \frac{N_0 l}{\sqrt{h_{кx} h_{кy}}} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}, \Delta\omega_p = \frac{2h_{kp}}{N_0 l}, \Delta\omega_{об} = \frac{2,44\kappa_{об}\lambda}{D}, \Delta\omega_3 = \frac{d_3}{f'}, \frac{D}{f'} = \frac{2,44\kappa_{об}\lambda}{d_3},$$

где N_{cp} – граничная пространственная частота, $f_{выб}$ – частота выборки, X_3, n_3 – период расположения и число элементов фотоприемника, 2ω – поле зрения ОЭП, $\kappa_{об}$ – коэффициент, учитывающий aberrации объектива, h_{kp} – критический размер объекта наблюдения (ОН), l – расстояние до ОН, N_x, f_x – пространственные частоты, соответствующие критериям Джонсона, N_0 – числа элементов разрешения (критерии Джонсона, – обнаружения, классификации, распознавания и идентификации), f_{xy} – пространственная частота

Джонсона в двух ортогональных направлениях x и y , $\Delta\omega_p$ – требуемое геометрическое угловое разрешение, необходимое для наблюдения, $\Delta\omega_{a\delta}$ – минимальное угловое значение кружка рассеяния объектива с учетом aberrаций, $\Delta\omega$, d_s – угловой и линейный размеры элемента чувствительного слоя приемника излучения. Если при $N \leq N_p$ качество изображения ОЭС будет удовлетворять условию $T(N) \geq 0,8$, то оно считается еще хорошим. Таким образом, используя (4) – (6), можно определить допустимые динамические погрешности, обеспечивающие выполнение условия (3).

2.Верификация параметров. Одним из наиболее эффективных методов построения ММ является экспериментальный метод – **верификация**(идентификация)[3]. Суть идентификации состоит в том, что по реакции $x(t)$ исследуемой САУ (или ее части) на известные виды воздействий $u(t)$ (ступенчатое, импульсное, пилообразное или гармоническое) определяют динамические характеристики САУ (или ее части), а по ним и ее математическую модель. Рассмотрим процедуру идентификации по переходным и частотным характеристикам САУ с заданным критерием адекватности, включающую в себя построение динамических и математических моделей САУ. Пусть:

1. Модель САУ управляема и наблюдаема [3,6] и описывается системой

$$\dot{\alpha} = (E + W(p))^{-1} W(p) u, \quad (7)$$

где $W(p) = H(p)R(p)$ – передаточная матрица (ПМ) разомкнутой системы, $H(p) = \|H_{ij}(p)\|_{rxn}$ – ПМ объекта управления, $R(p) = \|R_{ij}(p)\|_{nrx}$ – ПМ регулятора, E – единичная матрица, α – вектор регулируемых координат, u – вектор управления, n – количество обобщенных, r – число регулируемых координат. Обозначим переходные процессы исходной модели (M_1) и моделей (M_k , $k=2,3,\dots$), определяемых далее в процессе идентификации, при известных $\alpha_k(t_0)$, $y_k(t)$ через $\alpha_i(t) = \|\alpha_i(v^k, t)\|_{rx1}$, а частотные характеристики (ЧХ) разомкнутых САУ через $w_{ij}(j\omega) = \|W(v^k, j\omega)\|_{rxr}$. Здесь и далее: k – номер модели, v^k – вектор варьируемых параметров D_{v^k} – область их существования

$$v^k \in D_{v^k} (k = 1, 2, \dots), \quad (8)$$

2. Получены ЧХ элементов матрицы $W_{ij}(j\omega) = \|\tilde{W}_{ij}(j\omega)\|_{rxr}$ реальной САУ в рабочем диапазоне частот $\Omega = [\omega_1, \omega_2]$ разомкнутых каналов управления.

3. Получены переходные процессы элементов матрицы $\tilde{\alpha}_i(t) = \|\tilde{\alpha}_i(t)\|_{rx1}$ в процессе нормальной эксплуатации при заданных $\alpha(t_0)$, $y(t)$ за время $T = [t_0, t_1]$.

Оценка степени адекватности обычно выражается функционалом невязки между выходами модели и реальной системы [3]. Идентичность каждой полученной модели реальной системе, а также уточнение моделей может оцениваться следующими критериями адекватности:

$$\left. \begin{aligned} 1. \min_{\nu} \max_{\omega} \left| Lm \left| \tilde{W}_{ij} (j\omega) \right| - Lm \left| W_{ij}^k (\nu^k, j\omega) \right| \right| &\leq \Delta L(\omega), \\ 2. \min_{\nu} \max_{\omega} \left| \arg \tilde{W}_{ij} (j\omega) - \arg W_{ij}^k (\nu^k, j\omega) \right| &\leq \Delta \varphi(\omega), \\ 3. \frac{1}{T} \int_0^T \left| \alpha_i(t, \nu^k) - \tilde{\alpha}_i(t) \right| dt &\leq \varepsilon_i, \quad (i, j = 1, 2, \dots, r), \forall \omega \in \Omega, \forall \nu^k \in D_{\nu^k} (k = 1, 2, \dots), \end{aligned} \right\} (9)$$

где $Lm(\bullet) = 20 \lg(\bullet)$; $\Delta L(\omega), \Delta \varphi(\omega), \varepsilon_i$ – невязки, характеризующие погрешность идентификации. Невязки $\Delta L(\omega), \Delta \varphi(\omega), \varepsilon$ выбираются исходя из допустимых запасов устойчивости и требуемого качества переходного процесса, определяемых в соответствии с ТЗ на САУ. В основе построения динамических моделей и математического описания их поведения лежит интерактивный подход, базирующийся на сочетании теории (использования физических законов) с экспериментом. На каждом этапе исследования выбирается соответствующий уровень идеализации модели. Причем модель и ее математическое описание может на основе дополнительно получаемой информации уточняться и изменяться. При оценке критериев адекватности необходимо решать задачу оптимизации параметров в ограниченной области (8) по критериям (9). Исходя из требований, предъявляемых к САУ, и априорной информации выбирается динамическая модель первого приближения (M_1), где допускается $m_1 < n$, m_1 – число обобщенных координат M_1 . Для нее составляются дифференциальные уравнения движения. Анализируются плоские задачи путем детального изучения динамики отдельных каналов по отдельным ступеням: исследуются частотный спектр и чувствительность собственных частот к изменению параметров, выясняется влияние возмущений, строятся ЧХ и переходные процессы, выявляются существенные нелинейности и т.д. Часто по требованиям к динамической системе строится желаемая математическая модель, затем путем сравнения этой модели с исследуемой подыскиваются физически реализуемые элементы модели. В случае, если исследуемая САУ не разделяется на плоские задачи, то по результатам детального исследования плоских задач составляется пространственная динамическая модель системы. Выводятся уравнения движения в пространстве в режиме переориентации – нелинейные, в режиме стабилизации – линейные) с учетом существенных нелинейностей, Коэффициенты уравнений выражаются через механические и электрические параметры системы. Анализируя модель M_1 , находим ее ЧХ -

$w_{ij}(v^1, j\omega), \alpha_i(v^1, t)(i, j = 1, \dots, r)$ для исходных значений $v^1 \in \bar{D}_{v^1}$. Варьируя параметрами M_1 известными частотными методами [6] отыскиваются параметры модели $v^1 \in \bar{D}_{v^1}$ такими, чтобы выполнялись частотные условия (9). Если же за счет выбора параметров условия (9) и выполнить не удастся, то путем дополнительных исследований анализируется имеющаяся и новая информация $(W(j\omega), \Omega)$ о поведении ОУ и на ее основе строится новая ММ - модель второго приближения (M_2) (меняется структура ОУ), где число обобщенных координат $m_2 > m_1$, $m_2 < n$ и проводится снова ее исследование. В случае же недостаточности информации для построения M_2 планируем эксперимент для выявления более «тонких» динамических свойств реальной системы. Далее, аналогично предыдущему с учетом ограничений на параметры (8) доопределяем модель M_2 , согласно (9). Если же опять из-за выбора параметров условие (9) не удастся выполнить, то процесс построения ММ продолжается далее (M_3, M_4 и т.д.) до выполнения частотных критериев (9). После этого проверяем 3-е условие (9). Если идентифицированная по ЧХ модель САУ не удовлетворяет условиям (9), то при построении следующих моделей аналогично предыдущему отыскиваем такие структуры и параметры моделей, которые удовлетворяют всем условиям (9). Таким образом, интерактивный процесс построения динамической модели и математического описания ее поведения включает выбор динамической модели, составление уравнений движения, формулировку критериев оценки степени адекватности ее реальной системе и отыскание адекватной модели согласно этим критериям.

3.Оценки декомпозируемости каналов управления, основанные на анализе устойчивости и качества регулирования каналов управления с учетом перекрестных связей в частотной области. Преобразуем уравнения ОУи регуляторов в форму передаточных функций и оценим перекрестные связи в линеаризованной двух связной САУ (рис.3)

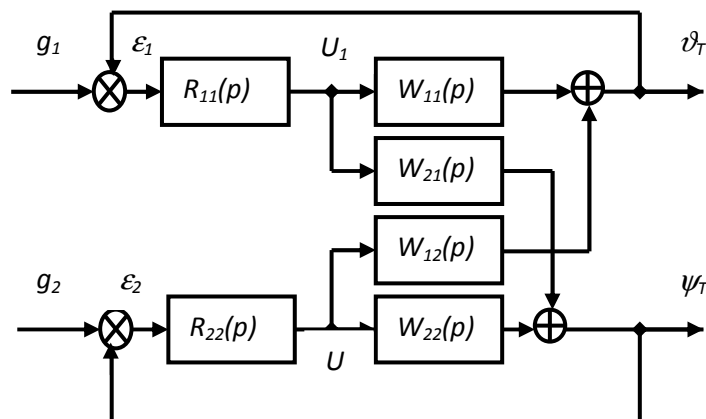


Рис.3. Структурная схема САУ

$$\begin{aligned}\vartheta &= W_{11}(p)u_1 + W_{12}(p)u_2, \\ \psi &= W_{21}(p)u_1 + W_{22}(p)u_2, \\ u_1 &= R_{11}(p)\varepsilon_1, u_2 = R_{22}(p)\varepsilon_2\end{aligned}\quad (10)$$

Оценка перекрестных связей. Оценим прямые и перекрестные связи САУ по их частотным характеристикам (ЧХ). Разомкнем один из каналов управления (рис.3) и запишем передаточную функцию (ПФ) разомкнутой системы с учетом 2-ого замкнутого канала управления при $g_2 = 0$ (рис.3). В работе [3] показано, что ПФ разомкнутой системы приводится к виду, который можно упростить при слабых перекрестных связях ($|\delta(j\omega)| \ll 1$)

$$W_{раз1}(p) = R_{11}(p)W_{11}(p)[1 + \delta(p)W_2(p)] = R_{11}(p)W_{11}(p)\Delta_1(p) \cong R_{11}(p)W_{11}(p), \quad (11)$$

где $W_2 = R_{22}W_{22}/(1 + R_{22}W_{22})$, $\delta(p) = W_{12}(p)W_{21}(p)/(W_{11}(p)$

$$W_{22}(p)) = \delta_{12}(p)\delta_{21}(p), \Delta_1(j\omega) = [1 + \delta(j\omega)W_2(j\omega)] = |\Delta_1(j\omega)|e^{j\varphi_1(\omega)}$$

с оценками упрощения в частотной области по амплитудной и фазовой характеристикам:

$$\Delta_1(\omega) < 1 + M_2\delta(\omega) < 1 + M_2\delta, \quad \varphi_1(\omega) = \arcsin(M_2\delta(\omega)) < \arcsin(M_2\delta) \quad (12)$$

где $\delta = \max_{\omega \in \Omega} |\delta(j\omega)|$, $M_i = \max_{\omega \in \Omega} W_i(\omega)$, ($i = 1, 2$) - показатели колебательности

каналов управления.

Если в соответствии с оценками (12) построить годограф $W_{раз1}(j\omega) = R_{11}(j\omega)W_{11}(j\omega)$ и трубку вокруг него с радиусами $\varepsilon_1(\omega) = R_{11}(\omega)W_{11}(\omega)\delta(\omega)M_2$, то на основе критерия Найквиста можно судить об устойчивости системы (10) с учетом перекрестных связей и влиянии перекрестных связей на ее устойчивость. Аналогичные выражения и заключения получим и для 2-го канала управления

$$W_{раз2}(p) = R_{22}(p)W_{22}(p)[1 + \delta(p)W_1(p)] = R_{22}(p)W_{22}(p)\Delta_2(p) \cong R_{22}(p)W_{22}(p), \quad (13)$$

где $W_1 = R_{11}W_{11}/(1 + R_{11}W_{11})$, $\delta(p) = W_{12}(p)W_{21}(p)/(W_{11}(p)$

$$W_{22}(p)) = \delta_{12}(p)\delta_{21}(p), \Delta_2(j\omega) = [1 + \delta(j\omega)W_1(j\omega)] = |\Delta_2(j\omega)|e^{j\varphi_2(\omega)};$$

$$\Delta_2(\omega) = 1 + M_1\delta(\omega) < 1 + M_1\delta, \quad \varphi_2(\omega) < \arcsin(M_1\delta(\omega)) < \arcsin(M_1\delta) \quad (14)$$

Оценка показателей колебательности. Показатель колебательности является наиболее информативным частотным критерием оценки качества регулирования и устойчивости САУ. Пусть M_1, M_2 - показатели колебательности изолированных САУ (без учета перекрестных связей). С учетом сделанных выше обозначений в работе [3] получены оценки показателей колебательности каналов управления с учетом перекрестных связей

$$\overline{M_1} < M_{11} \frac{1 + M_2\delta}{1 - M_1M_2\delta}, \quad \overline{M_2} < M_{22} \frac{1 + M_1\delta}{1 - M_1M_2\delta}; \quad (15)$$

где $\delta = \delta_{12}\delta_{21}$, $\delta_{12} = \max_{\omega \in \Omega} \delta_{12}(\omega)$, $\delta_{21} = \max_{\omega \in \Omega} \delta_{21}(\omega)$, $\delta_{12}(\omega) = \frac{W_{12}(\omega)}{W_{11}(\omega)}$, $\delta_{21} = \frac{W_{21}(\omega)}{W_{22}(\omega)}$.

С учетом оценок(11) – (15) сформулируем условия декомпозируемости для двухканальных систем.

Определение. Если i -е изолированные каналы разомкнутых систем управления устойчивы и выполняются при $\forall \omega \in [0, \infty)$ условия:

$$1) \frac{W_{12}(\omega)}{W_{11}(\omega)} = \delta_{12}(\omega) < 1; \quad \frac{W_{21}(\omega)}{W_{22}(\omega)} = \delta_{21}(\omega) < 1; \quad \delta_i(\omega) = \delta_{12}(\omega)\delta_{21}(\omega)M_j < \delta^{\text{don}} (i=1,2;j=2,1),$$

2) годографы $W_{\text{рази}}(j\omega) = R_{ii}(j\omega)W_{ii}(j\omega)$ с трубкой радиуса $\varepsilon_i(\omega)$ не охватывают точку $(-1, j0)$,

$$3) \text{ оценки показателей колебательности } \overline{M}_i \leq M^{\text{don}},$$

то декомпозиция системы (10) приемлема в смысле устойчивости и качества регулирования САУ; где $\delta^{\text{don}}(M^{\text{don}}, \Delta^{\text{don}}, \varphi^{\text{don}})$ – точность декомпозиции, зависящая от допустимых качества регулирования M^{don} , запасов устойчивости $\Delta^{\text{don}}, \varphi^{\text{don}}$ САУ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарасов В.В., Якушенков Ю.Г. Инфракрасные системы «смотрящего» типа. – М.: Логос, 2004. – 444 с.
2. Ю.М. Беляков, А.И. Карпов, В.А. Кренев, Д.А. Молин. Методика разработки математических моделей автоматических бортовых оптико-электронных систем. // Оптический журнал. 2009. Т. 76. №3. С. 34-39.
3. Карпов А.И. Стрежнев В.А. Динамика и методы расчета систем автоматического управления стратосферными обсерваториями: Идентификация, декомпозиция, синтез: Монография. Казань: Изд-во КГТУ им. А.Н. Туполева, 2008. 175 с.
4. Торишина И.П. Компьютерное моделирование оптико-электронных систем первичной обработки информации. – М.: Логос, 2009. – 248 с.
5. Сокольский М.Н. Допуски и качество оптического изображения. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1989.
6. В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1975. – 768с.
7. Балоев В.А., Беляков Ю.М., Карпов А.И., Кренев В.А., Молин Д.А., Матвеев А.Г., Яцык В.С. Моделирование системы управления зеркалом в кардановом подвесе для обзорно-поисковых систем воздушного базирования // Оптический журнал. 2012. Т. 79 №3. С. 11-21.
8. Карпов А.И., Кренев В.А., Молин Д.А. Исследование динамики бортовой оптико-электронной системы // Вестник Казан. гос. техн. ун-та им. А.Н.Туполева. 2013. №4. С. 256–264.

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ УПРАВЛЯЕМОГО МАЯТНИКА ПО АМПЛИТУДАМ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ

О.Э. Васюкова, В.А. Самсонов***

*МГУ им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет,
Россия, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1;

**НИИ механики МГУ, Россия, 119192, Москва, Мичуринский просп.,
E-mail: vasyukovaola@yandex.ru

IDENTIFICATION OF PARAMETERS OF THE MODEL OF CONTROLLED PENDULUM VIA ANALYSIS OF AMPLITUDES OF STEADY OSCILLATIONS

O.E. Vasiukova, V.A. Samsonov***

*Lomonosov MSU, Faculty of Mechanics and Mathematics, Russia, 119991,
Moscow, GSP-1, Leninskiye Gory str., 1;

**LMSU Institute of Mechanics, Michurinsky prosp., 1, 119192, Moscow,
Russia)

Keywords: identification of friction, steady motions, controlled dynamic system, modeling.

Введение. В данной работе предложена стратегия идентификации трения в шарнире маятника, основанная на наблюдениях управляемых «программных» колебаний. Построение программного закона колебаний осуществляется с помощью применения метода Понтрягина поиска периодических движений систем, близких к гамильтоновым системам [1].

Один из наиболее распространенных методов идентификации параметров трения в шарнире робота-манипулятора представлен в статье [2]. Он основан на поиске параметров модели трения в шарнире, который осуществляется следующим образом: момент трения получают из уравнений движения системы, в предположении, что известна исчерпывающая информация об экспериментальной траектории движения звена (угол, угловая скорость и угловое ускорение как функции времени), известны инерционно-массовые характеристики системы, а управляющий момент, поданный на двигатель, известен как функция времени.

Предложенный в данной работе метод идентификации трения обладает рядом преимуществ перед методом [2]. Отметим эти преимущества. Во-первых, в подходе, предложенном в данной работе, используются усредненные значения измеряемых величин. Во-вторых, предполагается использование данных только о величинах, которые легко измерять (не требуется знать зависимость угла, угловой скорости, углового ускорения от времени, нужны только средние значения). В-третьих, в качестве тестовых режимов

движения используются установившиеся, орбитально устойчивые режимы, что улучшает повторяемость экспериментов. Также важно, что на тестовых движениях мотор все время находится в активном режиме, что существенно, так как диссипативные силы в шарнире могут быть различны в зависимости от того, включен ли мотор. Таким образом, предлагаемый подход позволяет идентифицировать параметры в режиме активного мотора. Кроме того, предлагаемый подход позволяет идентифицировать и параметры, характеризующие трение, и параметр, отвечающий за инерционно-массовые свойства системы.

Постановка задачи. Рассмотрим плоский физический маятник с центром масс в точке P , который может вращаться вокруг точки подвеса O , в которой закреплен цилиндрическим шарниром. Система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем угол φ между вертикалью и прямой OP (Рис.1).

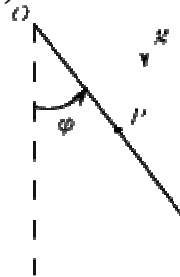


Рис.1 Схема маятника

Предполагается, что в шарнире приложен управляющий момент $U(\varphi, \varphi')$. На маятник также действует момент $F(\varphi, \varphi')$ трения в шарнире.

Уравнение движения данной системы имеет вид:

$$(J + mr^2)\varphi'' + gmr \sin \varphi = U(\varphi, \varphi') + F(\varphi, \varphi'), \quad (1)$$

где m - масса маятника, r - расстояние от точки подвеса до центра масс маятника, J - момент инерции маятника относительно главной центральной оси инерции.

Введем безразмерное время $\tau = \sqrt{g/rt}$. Производные переменной φ по τ обозначим $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$.

Будем считать, что управляющий момент и момент трения в системе можно представить в следующем виде:

$$U(\varphi, \varphi') = U_1(\varphi, \dot{\varphi}) = c_0 k \sqrt{g/r} \operatorname{sign} \dot{\varphi} - c_0 q \sqrt{g/r} \dot{\varphi},$$

$$F(\varphi, \varphi') = F_1(\varphi, \dot{\varphi}) = -c_0 b \sqrt{g/r} \operatorname{sign} \dot{\varphi} - c_0 c \sqrt{g/r} \dot{\varphi},$$

где b , c , k , q - некоторые неотрицательные константы, безразмерные величины, $c_0 = 1$ и имеет размерность $\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}$.

Введем безразмерный параметр μ , который далее будем предполагать малым:

$$\mu = \frac{c_0 \sqrt{r/g}}{J + mr^2}$$

и безразмерный параметр a :

$$a = \frac{mr^2}{J + mr^2}, 0 < a < 1.$$

Запишем уравнение (1) в безразмерной форме:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = y, \\ \dot{y} = -a \sin \varphi + \mu((k-b) \operatorname{sign} y - (c+q)y). \end{cases} \quad (2)$$

Применение теоремы Понтрягина. Будем считать, что в малой окрестности $y = 0$ проведена процедура сглаживания функции $\operatorname{sign} y$. Далее, когда будем говорить о системе (2), будем подразумевать данную систему со сглаженной функцией $\operatorname{sign} y$ в правой части.

Для системы (2) воспользуемся методом Понтрягина поиска периодических решений систем, близких к гамильтоновым [1]. При $\mu = 0$ система (2) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = y, \\ \dot{y} = -a \sin \varphi. \end{cases} \quad (3)$$

Гамильтониан системы (3) равен: $H(\varphi, y) = y^2 / 2 - a \cos \varphi$. Траектория системы (3), соответствующая уровню энергии h имеет вид:

$$y = \pm \sqrt{2h + 2a \cos \varphi}. \quad (4)$$

Порождающая функция Пуанкаре-Понтрягина имеет вид:

$$\begin{aligned} I(h) &= \int_{-\varphi_0(h)}^{\varphi_0(h)} (k-b-(c+q)) \sqrt{2h + 2a \cos \varphi} d\varphi = \\ &= 2(k-b)\varphi_0 - 2(c+q) \int_0^{\varphi_0} \sqrt{2h + 2a \cos \varphi} d\varphi, \end{aligned}$$

где $\varphi_0(h) = A_0$ - амплитуда колебаний математического маятника, соответствующих решению системы (3) при значении h интеграла энергии.

$$A_0 = \arccos\left(-\frac{h}{a}\right). \quad (5)$$

Согласно теореме Понтрягина [1], существование орбитально устойчивого предельного цикла для системы (2) в окрестности траектории (4) при достаточно малых значениях μ обеспечивается условиями:

$$I(h_*) = 0, \quad (6)$$

$$\left. \frac{dI}{dh} \right|_{h=h_*} < 0. \quad (7)$$

Отметим, что значения $h_* \in (-a, a)$ отвечают колебаниям, а интервал $h_* \in (a, +\infty)$ - вращательным движениям. Далее будем рассматривать значения $h_* \in (-a; 0)$, которые отвечают колебаниям с амплитудой $A_0 \in (0; \pi/2)$.

Покажем, что при произвольном заданном $h \in (-a, 0)$ путем выбора коэффициента k в законе управления, фиксируя при этом коэффициент управления q , можно реализовать в системе (2) орбитально устойчивую периодическую траекторию $\phi(\varphi)$, близкую к траектории вида (4) системы (3) (при достаточно малых значениях μ).

Обозначим через $k=K(h)$ функцию, определяющую значение коэффициента управления, при котором для данного h выполнено условие (6). Она может быть представлена в следующем виде:

$$K(h) = ef(z) + b, \quad (8)$$

$$\text{где } e = (c + q)\sqrt{a}, \quad f(z) = \frac{\int_0^{\arccos(-z)} \sqrt{2z + 2\cos\varphi} d\varphi}{\arccos(-z)}, \quad z = \frac{h}{a}.$$

Проверим условие (7). Учитывая (6) и (8) не сложно показать, что:

$$\left. \frac{dI}{dh} \right|_{h=h_*} < 0 \Leftrightarrow \left. \frac{df}{dz} \right|_{h=h_*} > 0$$

Численно построим график функции $f(z)$, которая не зависит от параметров системы (Рис.2).

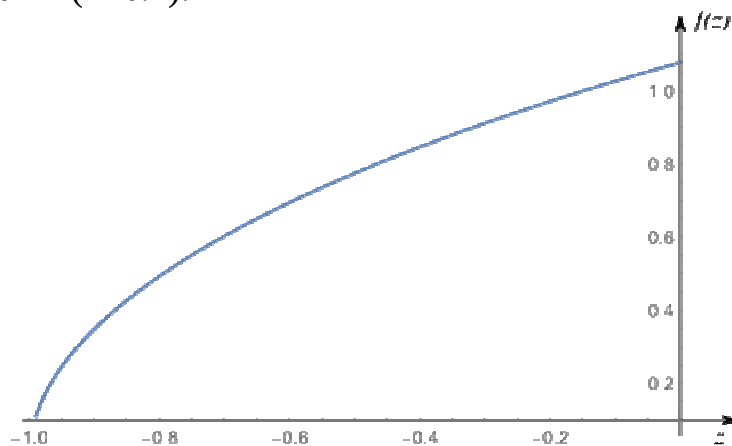


Рис. 2. График $f(z)$.

Функция $f(z)$ возрастает при $z \in (-1, 0)$, т.е. при $h_* \in (-a; 0)$, что означает, что условие (7) выполнено при всех $h_* \in (-a; 0)$.

Утверждение 1. Для произвольного $h \in (-a, 0)$ при $k = K(h)$ в системе (2) при достаточно малых значениях μ существует предельный цикл, близкий к траектории вида (4), соответствующей данному h . Причем данный цикл является орбитально устойчивым и амплитуда A этого цикла при $\mu \rightarrow 0$ стремится к A_0 .

Зафиксировав коэффициент управления q , варьируя при этом коэффициент k , мы сможем получить серию различных установившихся колебаний системы (2). Данную процедуру можно проделать при различных фиксированных q . Характерные свойства таких колебаний будут зависеть от инерционно-массового параметра системы a , коэффициентов трения b , c могут быть использованы для идентификации значений параметров a , b и c в модели маятника, что будет описано в следующем пункте настоящей работы.

Стратегия идентификации трения. Для системы, рассматриваемой в данной работе, на практике мы можем зафиксировать коэффициент управления q , при этом варьировать коэффициент управления k , отслеживать, при каких k качания маятника выйдут на предельный цикл, затем записывать амплитуду установившихся колебаний маятника A . Таким образом, можем на плоскости $\{k, A\}$ отмечать точки (k_i^*, A_i^*) , соответствующие установившимся режимам, наблюдаемым экспериментально.

Для каждого фиксированного набора a, b, c, q на плоскости $\{k, A\}$ мы можем построить параметрически заданную кривую $\{k = K(h), \tilde{A} = A_0(h), h \in (-a, 0)\}$. Обозначим эту кривую $\tilde{A}(k)$. В соответствии с Утв. 1 данная кривая описывает для системы (2) зависимость амплитуды притягивающего цикла от параметра k при $\mu \rightarrow 0$. Рассмотрим функцию $\tilde{A}(k)$. Из выражений (5), (8) мы видим, что параметр b влияет на сдвиг графика $\tilde{A}(k)$ вдоль оси абсцисс, а параметр c отвечает за сжатие и растяжение графика. Значит, мы можем оценить, при каких b и c теоретическая кривая $\tilde{A}(k)$ наилучшим образом приближает экспериментальную зависимость $A_i^*(k_i^*)$.

Для того, чтобы наиболее точно идентифицировать каждый из параметров a, b, c , возьмем набор фиксированных коэффициентов управления $q_j, 1 \leq j \leq n$ и для каждого из них проведем серию экспериментов, описанных выше в данном пункте. В каждой серии экспериментов мы получим набор точек и определим значения b_j, c_j , при которых теоретическая кривая наиболее точно аппроксимирует экспериментальные точки из этой серии. Соответствующие параметры b_j, c_j являются экспериментальной оценкой для параметров b и c в модели маятника. Запишем данный результат, как переопределенную систему линейных алгебраических уравнений:

$$y = Wx,$$

где $x = (b, c\sqrt{a}, \sqrt{a})^T$ - трехмерный вектор, y - известный $2n$ -мерный вектор, $z_j = b_j$, $z_{n+j} = e_j$, $1 \leq j \leq n$, W - матрица размерности $2n \times 3$, с элементами $W_{j2} = 1$, $W_{j+n1} = 1$, $W_{j+n3} = q_j$, $1 \leq j \leq n$, остальные элементы матрицы W равны 0.

Для поиска значения x воспользуемся методом наименьших квадратов [3], согласно которому получим:

$$x = (W^T W)^{-1} W^T y.$$

Таким образом мы провели идентификацию параметров a , b , сисходной системы, которые однозначно определяются по компонентам найденного вектора x .

Численное моделирование. Для наглядной иллюстрации изложенных в данной статье идей проведем численное моделирование движения системы (2) с $a = 0.5$, при двух различных наборах коэффициентов трения: $b_1 = 0.3$, $c_1 = 0.1$ и $b_2 = 0.2$, $c_2 = 0.5$. В качестве начальных условий примем $y(0) = 0$, $\varphi(0) = \pi/3$. Заметим, что фиксированный коэффициент управления q , при ненулевом параметре c , не изменяет качественный вид траекторий системы (2), поэтому при численном интегрировании параметр q примем равным нулю.

Зафиксируем некоторый набор значений $\{k_i\}$, для каждого k_i из этого набора проведем следующее численное исследование. Для нескольких значений μ путем численного интегрирования системы (2) найдем наборы значений (k_i, A_i) , имитирующие данные, полученные в эксперименте. Здесь A_i - это определенная в ходе численного интегрирования системы амплитуда (по переменной φ) периодического решения, если такое решение существует при данном наборе k_i и μ (в противном случае A_i не определено).

Приведем на одной координатной плоскости графики функции $\tilde{A}(k)$, соответствующие случаю $\mu \rightarrow 0$ и точки (k_i, A_i) , полученные для конечных значений μ путем численного интегрирования (Рис.3). Кривая 1 соответствует значениям коэффициентов трения b_1 и c_1 , а кривая 2 построена при b_2 и c_2 . Точки (k_i, A_i) обозначены на рисунке следующим образом: при $\mu = 0.01$ - крестик, при $\mu = 1$ - кружок.

В частности, при $\mu \leq 1$ для рассмотренных значений k максимум относительного отклонения точек (k_i, A_i) от $\tilde{A}(k)$ при $b_1 = 0.3$, $c_1 = 0.1$ не превышает 1%, а при $b_2 = 0.2$, $c_2 = 0.5$ не превышает 4%. Можно считать, что при $\mu \leq 1$ функция $\tilde{A}(k)$ позволяет получить достаточно точную оценку амплитуды установившихся колебаний маятника.

Например, при размерных параметрах системы $r = 0.4 \text{ м}$, $m = 1 \text{ кг}$, $g = 9.8 \text{ м/с}^2$, $J = 0.05 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ будем иметь $\mu = 0.96$.

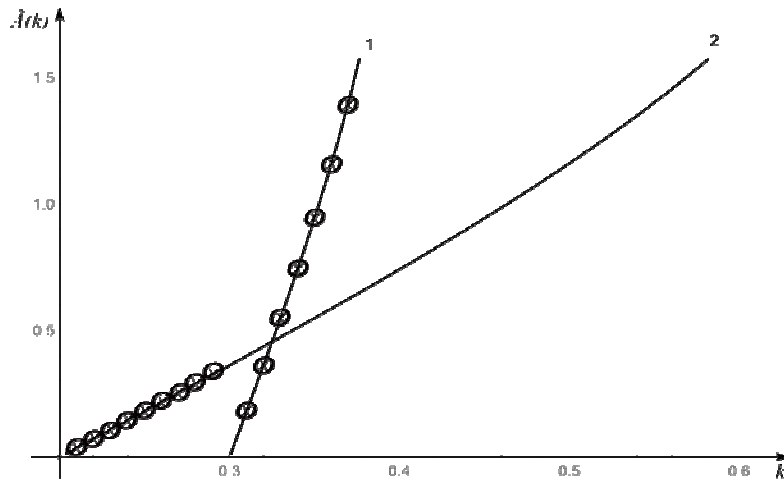


Рис. 3. $\tilde{A}(k)$ и точки (k_i, A_i) при различных значениях μ для двух наборов коэффициентов трения.

Заключение. В данной работе рассмотрена задача об идентификации параметров модели управляемого маятника по амплитудам установившихся движений. Показано, что с помощью метода Понтрягина поиска периодических решений систем, близких к гамильтоновым, можно построить такой программный закон колебаний управляемого маятника, что тестовые режимы движения будут установившимися и орбитально устойчивыми. Предложен подход к идентификации параметров трения и параметра, отвечающего за инерционно-массовые свойства системы, в режиме активного мотора, без использования информации о траектории движения в каждый момент времени. Проведено численное моделирование движения системы, рассматриваемой в данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990.
2. Mehrdad R. Kermani, Rajnikant V. Patel, Mehrdad Moallem. Friction Identification and Compensation in Robotic Manipulators. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. Volume: 56, Issue: 6, Dec. 2007.
3. Александров В.В., Лемак С.С., Парусников Н.А. Лекции по механике управляемых систем. М.: МаксПресс, 2012.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗАКОНОВ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОБЪЕКТОВ

А.С. Востриков

Новосибирский государственный технический университет,

г. Новосибирск

a.s.vostrikov@gmail.com

Введение

При создании систем автоматического регулирования разработчики стараются обеспечить требуемые технические характеристики ценой допустимых, всегда ограниченных, ресурсов. И прежде всего конструкторы ищут способы выполнить основное технологическое требование – допустимый уровень ошибки регулирования выходной величины при действии возмущений. Этот вопрос и будет предметом обсуждения в данном докладе.

Аналитический аппарат для решения таких задач даёт теория автоматического регулирования, которая насчитывает примерно 175 лет своего развития. Несмотря на то, что системы автоматики различного типа создавались ещё в древности (поплавковый регулятор уровня воды), аппарат для вывода расчётных отношений появился только в 19-м веке. Подробно история становления новой области техники и науки представлена в обстоятельных работах Френка Льюиса[1] и Стива Беннета[2].

В 1840 году, британский королевский астроном в Гринвиче, Джеймс Эйри, разработал устройство обратной связи для наведения телескопа. Его основным элементом была система регулирования скорости, которая позволяла телескопу автоматически компенсировать вращение Земли.

Эйри обнаружил, что в результате неправильной конструкции контура управления с обратной связью, в системе возникали колебания. Он был первым, кто начал исследовать неустойчивость систем замкнутого типа, и использовать дифференциальные уравнения в их анализе. Теория дифференциальных уравнений к тому времени была хорошо развита.

Чуть позже формальный анализ свойств замкнутых систем был проведён физиком Джеймсом Максвеллом в 1868 году, результаты которого опубликованы в работе [3]. Понятно, что первой технической проблемой была необходимость обеспечения устойчивости и этому был посвящён длительный период развития теории автоматического регулирования.

В России подобные задачи исследовал И.А.Вышнеградский и получил очень полезные результаты для расчёта линейных систем [4,5]. В классику теории автоматического регулирования входит его главный результат – «Диаграмма Вышнеградского», которая позволяет не только оценить устойчивость, но и выбрать параметры системы, исходя из требований к виду переходных процессов. Пожалуй, это был первый по времени способ синтеза параметров регулятора.

Время требовало создания систем стабилизации положения корабля с помощью автоматических приборов – авторулевых, систем стабилизации полёта самолётов, различных серво систем, электротехнических систем, систем электроники и радиосвязи. К 1930 году развитие практической автоматизации потребовало разработку методов расчёта и анализа свойств систем с сильной (усилители с достаточно большими значениями коэффициентов усиления) отрицательной обратной связью, что и было сделано Гарольдом Блэком применительно к электронному усилителю [6]. Позднее, это изобретение привело к созданию операционного усилителя, устройства с предельными техническими характеристиками. В те годы были созданы частотные методы расчёта процессов и оценки устойчивости. Возникнув в радиотехнике и в технике связи, эти методы стали применяться при расчёте электромеханических систем автоматизации.

Частотные методы длительное время доминировали в расчётах, наряду с методом корневых годографов. Они соответствуют линейным моделям динамических систем и не позволяли надёжно проектировать системы с нелинейными характеристиками.

Примерно 60 лет назад проблемами динамики нелинейных систем автоматизации начали заниматься математики, а именно, специалисты по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений (Андронов). Был создан метод фазовых пространств и, соответственно, фазовых траекторий.

Этого было недостаточно, и математики обратили внимание на давно (1892 год) созданный, очень ясный метод исследования свойств решений дифференциальных уравнений – второй метод Ляпунова. Работы Ляпунова были переизданы, и с этого времени началось бурное развитие «Ляпуновской» теории устойчивости [7].

Таким образом, возникло отдельное направление в качественной теории дифференциальных уравнений – математические задачи анализа процессов управления динамическими объектами. Результаты этих исследований обогатили уже существующую теорию автоматического регулирования и с этого времени и инженеры, и математики развивают, иногда взаимодействуя, методы управления в автоматике. Условной временной границей для этого симбиоза является, видимо, первый конгресс ИФАК [8].

1. Формулировки задачи управления

Задача управления в инженерной постановке для линейных объектов выглядит следующим образом. Задан объект управления своей линейной моделью в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + D_1(t) + Bu, & x \in R^n, \quad u \in R^m, \\ y = Cx + D_2(t), & y \in R^m, \end{cases} \quad (1)$$

где векторы (x, u, y) есть соответственно: состояние, управление, выход. Векторы $D_1(t), D_2(t)$ отражают действие независимых возмущений, мешающих работе объекта. Целью функционирования системы управления является приведение выходных переменных к заданным значениям,

$$\lim y(t) = v, \quad (2)$$

где v есть вектор предписанных значений для выходных переменных. Техническим смыслом этой задачи является парирование влияния возмущений (векторы $D_1(t)$ и $D_2(t)$), значения которых в любой текущий момент времени заранее неизвестны, но диапазон их значений можно всегда оценить.

К процессу (2) всегда предъявляются технологические требования по быстродействию и демпфированию (что включает в себя требование устойчивости). Инженеру необходимо сконструировать регулятор, который вырабатывал бы необходимые значения вектора управления. В качестве входных переменных регулятора используется, как правило, рассогласование

$$\Delta = v - y(t).$$

Для отражения этого условия возник технический термин - «регулирование по отклонению». Поставленная задача «хорошо» формализована и, тем не менее, для её решения недостаточно математического анализа, поскольку на этапе создания регулятора нужно учесть ряд дополнительных технических не формализуемых условий. В итоге, алгоритм работы регулятора в очень редких случаях удаётся вывести «на кончике пера». Как правило, эффективный регулятор есть результат инженерного творчества, предметом изобретения. Таким образом, были созданы, например, самые популярные в промышленности регуляторы, PI – контроллеры. Оба способа регулирования, пропорциональный и интегральный, полностью решают задачу для режима статики.

Создание регулятора, его синтез, является *центральной задачей* теории автоматического регулирования, содержание которой в технических вузах почти полностью посвящено методам проектирования систем автоматической стабилизации.

При этом основным способом достижения поставленной цели является принцип отрицательной обратной связи по выходной переменной. Использование такого подхода позволяет получить новое техническое качество, независимость (или почти независимость) выходной переменной от действия возмущений и, при определённых условиях, от нелинейностей объекта управления.

Таким же образом оформляется задача синтеза и в случае нелинейных объектов. Модель объекта (1) принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) + B(t, x)u, & x \in R^n, \quad u \in R^m, \\ y = g(t, x), & y \in R^m, \end{cases} \quad (3)$$

где мы, для простоты обсуждения свойств, предположили аддитивное вхождение управления u в правую часть уравнения.

Заметим, что здесь, и в уравнении (1), в правой части есть явная зависимость от времени. Этот факт принципиально отличает инженерную постановку автоматического управления, поскольку целью функционирования системы автоматического регулирования является, почти всегда, противодействие наличию случайных, заранее неизвестных, возмущений в функции времени. Относительно возмущений мы вправе предполагать известными только интервал их значений, что и даёт возможность получать расчётные соотношения. Если этих возмущений нет, то мы имеем задачу коррекции динамических свойств объекта, и можем в полной мере использовать результаты исследований математических задач управления.

Понятно, что хотелось бы получить способы синтеза для самых сложных объектов при максимально неполной информации по модели объекта, то есть в наихудших ситуациях. Такие способы и будем далее называть предельными.

В наиболее сложном случае исследуется задача управления нелинейными нестационарными объектами, модель поведения которых имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \varphi(t, x, u), \\ y = g(t, x), \end{cases} \quad (4)$$

где $x \in R^n$; $y \in R^m$, $u \in R^m$; $m \leq n$; $t \in [0, \infty)$; φ и g - однозначные непрерывно дифференцируемые функции. Матрицы их частных производных по переменным имеют полные ранги. Явная зависимость правой части (4) от времени отражает действие возмущений. Цель функционирования состоит в организации свойства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \nu \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Процесс $y(t) \rightarrow \nu$ должен отвечать требованиям по быстродействию и по демпфированию. В соответствие с методом локализации [9] конструируется эталонное (заданное, желаемое) дифференциальное уравнение для выхода y , которому и нужно подчинить движение объекта. Это уравнение выбирается или конструируется по требованиям к статике и динамике хорошо разработанными в теории регулирования способами.

Задачей синтеза является отыскание такого закона управления $u(\cdot)$, чтобы замкнутая система

$$\begin{cases} \dot{x} = \varphi(t, x, u(\cdot)), \\ y = g(t, x) \end{cases}$$

отвечала требованиям к статике и динамике.

2. Условия разрешимости

В отличие от линейных объектов, где удобно использовать ранговые критерии разрешимости задачи синтеза, в нелинейных системах мы вынуждены подробно исследовать уравнения объектов управления. При этом проверка наличия неуправляемой или ненаблюдаемой частей и их устойчивости не является особо важной проблемой. Этот вопрос имеет значение для верификации модели объекта, в то время как сам реальный объект при грамотно выполненном проектировании не может иметь неустойчивых неуправляемых и ненаблюдаемых частей. Главное, в чём мы должны убедиться, это возможность навязать объекту эталонное движение. Из этих рассуждений следует, прежде всего, необходимость наличия основного качества:

Движение объекта должно быть устойчивым вдоль заданного многообразия $g(t, x(t)) = v$ для любых значений v . Понятно, что этим свойством должен обладать каждый нормально спроектированный объект автоматического управления.

Выясним теперь, какими свойствами должен обладать искомый закон управления. При этом предполагаем, что управление формируется не только в функции состояния $x(t)$, но и в функции вектора скорости $\dot{x}(t)$. Если движение объекта описывается уравнением $\dot{x} = f(t, x, u)$, то использование $\dot{x}$ означает текущую оценку правой части уравнения и, следовательно, действия всех возмущений и нелинейностей. Такое управление должно придать дополнительные технические возможности, которые объясняются эффектом локализации действия возмущений, хорошо «видным» при структурной интерпретации управления в функции вектора скорости $\dot{x}$ [9].

Здесь мы напомним условия, при которых динамические свойства системы будут как угодно мало зависеть от собственных динамических характеристик объекта и возмущений, т.е. будет обеспечена инвариантность системы в целом по отношению к этим факторам. Ранее [9], мы установили, что для инвариантности динамических характеристик системы достаточно выполнить следующие условия:

- 1) $\partial u / \partial \dot{x}^T \rightarrow \infty$ равномерно по всем элементам;
- 2) $\det \left\{ \frac{\partial f}{\partial u^T} \cdot \frac{\partial u}{\partial \dot{x}^T} \right\} \neq 0$;
- 3) обратная связь по $\dot{x}$ должна быть отрицательной.

Заметим, что эти условия рассмотрены в предположении $m = n$. Такие же условия можно обеспечить только для m - мерной комбинации вектора скорости. Полагая, что размерность управления меньше n , ($m < n$), рас-

смотрим m - размерную комбинацию вектора скорости $\dot{x}$, которую обозначим $\Theta(\dot{x})$. Организуем теперь управление в форме $u(x, \Theta, v)$, и будем изучать следующий объект:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u(x, \Theta, v)), \\ \Theta = \Theta(\dot{x}). \end{cases} \quad (5)$$

Нетрудно убедиться, чтобы исключить зависимость Θ от правой части объекта (5), достаточно выполнить следующие условия:

- 1) $\det \left\{ \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{x}^T} \cdot \frac{\partial f}{\partial u^T} \cdot \frac{\partial u}{\partial \Theta^T} \right\} \neq 0$;
- 2) $\frac{\partial u}{\partial \Theta^T} = k \frac{\partial u^0}{\partial \Theta^T}, k \rightarrow \infty$.

При выполнении этих условий на практике не нужно требовать бесконечных значений коэффициента, а только таких, которые обеспечат нужную глубину подавления свойств объекта.

К настоящему времени разработаны некоторые методы решения сформулированной проблемы. К ним мы относим управление по вектору скорости (иначе говоря, по старшей производной выходной переменной), скользящие режимы и управление с большими коэффициентами [9,10,11,12]. В основе их технических свойств, на наш взгляд, лежит принцип организации специального контура (подсистемы), в котором локализуется действие возмущений и нелинейностей объекта и подавляется достаточно большим коэффициентом усиления.

В случае управления по старшей производной используется соотношение,

$$u = k(F - y^{(l)}), \quad (6)$$

для каждого канала соответственно. При технической реализации закона (6) необходимы достаточно большие значения k , а оценка производных обеспечивается дифференцирующим фильтром и, следовательно, управление (6) принимает вид;

$$u = k[F - W(\mu p)p^l y],$$

где p - оператор дифференцирования, $W(\mu p)p^l$ - передаточная функция дифференцирующего фильтра. Как видим, уравнения системы содержат большие (коэффициент k) и малые (параметр μ) величины и поэтому для вывода расчетных соотношений мы используем методы малых параметров в правой части дифференциальных уравнений и в левой при производных [12]. В работе [9] сформулированы и доказаны основные утверждения о свойствах систем с управлениями типа (6). При этом расчетные схемы

представляют собой реализацию процедур разделения процессов на подсистемы, каждая из которых анализируется гораздо проще, чем исходная. Показывается, что в отношении подавления возмущений принятые алгоритмы управления дают предельные возможности.

Одним из «неудобных» технических свойств вышеупомянутых предельных алгоритмов управления является критичность значений управления по отношению к помехам измерения выходной величины. Здесь мы обсудим предельное влияние этих помех и попытаемся убедить читателя, что это влияние не зависит от алгоритма функционирования регулятора, а является базовым свойством задачи стабилизации выходной величины и, следовательно, улучшая качество регулирования, мы обязательно получим в пределе значения вектора управления, независимые от типа регулятора. Для иллюстрации сказанного рассмотрим линейный объект, модель которого имеет вид, представленный на рис.1.

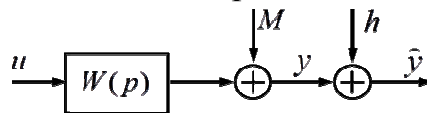


Рис.1. Схема влияния возмущений и помех

Операторные уравнения этого объекта имеют вид:

$$y = M(t) + W(p) \cdot u,$$

$$\hat{y} = y + h(t).$$

Если мы точно выполняем задачу стабилизации, то измеряемый выход объекта тождественно равен заданным значениям входа, $\hat{y}(t) = v$. Для обеспечения этого тождества необходимо вырабатывать управление вида,

$$u = W^{-1}(p) \cdot (v - h - M).$$

Мы видим, что генерация нужных значений управления предполагает обращение оператора объекта и, следовательно, помеха требует от управления своей «доли», равной

$$u_h = -W^{-1}(p) \cdot h. \quad (7)$$

К сожалению, частотный состав помехи измерения может быть крайне широким и это приведёт к недопустимо большим значениям управляющих воздействий. При этом необходимый ресурс управления для парирования возмущений и для формирования переходных процессов будет в рамках заданных технических ограничений. Техническим решением проблемы может быть выбор нового высокоточного датчика или эффективная фильтрация помех. Соотношение (7) есть оценка предельного влияния помехи и его нужно использовать при расчёте регулятора.

Выведем теперь подобное выражение для нелинейных объектов и для получения наглядных соотношений рассмотрим управление менее слож-

ными объектами, чем объекты с моделями (4). Полагаем, что вектор управления входит в правую часть линейно,

$$\varphi(t, x, u) = f(t, x) + b(t, x) \cdot u, \quad (8)$$

где матрица $b(t, x)$ имеет полный ранг. Выходная величина измеряется с помехой,

$$\hat{y} = y + H(t), \quad H \in R^m. \quad (9)$$

Аддитивное возмущение $M(t)$ полагаем, для простоты, равным нулю. Теперь система уравнений объекта управления принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) + b(t, x) \cdot u, \\ \hat{y} = g(t, x) + H(t). \end{cases} \quad (10)$$

Предполагаем, что регулятор точно выполняет своё назначение и, следовательно, $\hat{y} = v = \text{const}$. Дифференцируем это тождество и получим выражение,

$$G_t + G_x \cdot (f + b \cdot u) + \dot{H} = 0,$$

где G_t и G_x есть матрицы частных производных функции $g(\cdot)$. В этом выражении мы опустили запись аргументов и тем самым перешли от вида функций к их значениям.

Как видим, при измерении выхода с помехой, предельное значение управляющего воздействия $u(t)$ вычисляется по соотношению,

$$u_h = -(GB)^{-1} \cdot \dot{H}. \quad (11)$$

Далее мы будем сравнивать величину (11) с тем вкладом помех в управляющее воздействие, которое формируется при работе «предельных» алгоритмов управления.

3. Метод вектора скорости

Зададимся эталонным дифференциальным уравнением для выходной величины в виде

$$\dot{y} = F(y, v), \quad v = \text{const}, \quad (12)$$

где вид правой части соответствует требованиям к динамике системы. Полагаем, что это уравнение реализуемо и выполняется условие,

$$\det(GB) \neq 0. \quad (13)$$

В соответствие с методом локализации [9] управление формируем по закону

$$u = kK(F(y, v) - \dot{y}), \quad (14)$$

где в матрице коэффициентов усиления мы выделили общий множитель, обозначенный буквой k , значения которого определяют степень подчинения объекта заданному (эталонному) уравнению. Ранее нами доказано следующее

Утверждение: Если $\det(KGB) \neq 0$ и $k \rightarrow \infty$, то $\lim u = (GB)^{-1}(F - G_t - Gf_0)$.

Если теперь мы учтём помеху измерения, то выражение для предела значений управления примет вид

$$\lim u = (GB)^{-1}(F - G_t - Gf_0 - \dot{H}).$$

Как видим, предельный вклад помехи имеет те же значения (выражение 11).

Совершенно уместно, на наш взгляд, называть регуляторы, спроектированные по методу локализации, предельными. В самом деле, такого эффективного управления мы не получим ни одним другим, из известных, методов. Вместе с этим, однако, мы получаем и предельное влияние помехи.

4. Метод больших коэффициентов

Обсудим теперь эту же проблему в системах с как угодно большими значениями коэффициентов усиления и попытаемся получить предельные выражения для значений управляющих воздействий. Пусть управление формируется по закону:

$$u = kK \cdot (v - y) = kK \cdot (v - g(t, x)).$$

Введём эту переменную, как дополнительную координату состояния, и тогда уравнения системы примут вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_0 + Bu, \\ \mu \dot{u} = K(G_t + Gf_0 + GBu), \end{cases} \quad \mu = k^{-1}.$$

При этом начальное значение дополнительной координаты зависит от коэффициента k и определяется соотношением,

$$u(t_0) = kK \cdot (v(t_0) - g(t_0, x(t_0))).$$

Если теперь учесть помеху при измерении выхода,

$$\hat{y} = g(t, x) + H,$$

то уравнение для дополнительной переменной примет вид,

$$\mu \dot{u} = K(G_t + Gf_0 + GBu + \dot{H}).$$

По завершении быстрых процессов [12] выражение для управления примет вид,

$$u = -(GB)^{-1}(G_t + Gf_0 + \dot{H}).$$

Следовательно, влияние помехи в пределе снова определяется выражением (11). Здесь мы не могли требовать эталонной динамики на этапе движения к заданному многообразию, $v - g(t, x) = 0$, и состояние объекта развивается в силу нелинейных и нестационарных свойств объекта управления.

Зададимся теперь эталонным уравнением для выхода (уравнение (12) и реализуем интегральный закон управления,

$$\dot{u} = kK \cdot (F(y, v) - \dot{y} - \dot{H}).$$

Уравнения системы примут вид,

$$\begin{cases} \dot{x} = f_0 + Bu, \\ \mu \dot{u} = K(F(y, v) - G_t - G_x f - G_x Bu - \dot{H}) \end{cases}.$$

Полагая подсистему быстрых движений экспоненциально устойчивой,

$$\{\mu \dot{u} = -KG_x Bu\},$$

на этапе медленных движений [12] имеем тождество по времени,

$$\{(F(y, v) - G_t - G_x f - G_x Bu - \dot{H}) = 0\}.$$

Как видим, уравнение подсистемы быстрых движений является линейным, но его параметры зависят от состояния объекта и, следовательно, условия устойчивости нужно выдержать во всей рабочей области. Вклад помехи в значения управляющего воздействия и здесь определяется выражением (11).

5. Метод скользящих режимов

Рассмотрим, в таком же порядке, случай релейного управления. При этом полагаем, что для получения новых технических свойств организован скользящий режим [10] вдоль заданного многообразия,

$$(v - g(t, x)) = 0.$$

Релейный закон управления при учёте помех измерения выхода имеет вид

$$u = U_1 \cdot \text{sign}(v - g(t, x) - H).$$

Здесь матрица U_1 есть диагональ с элементами одного знака и отражает ресурс управляющих воздействий, достаточный для возникновения скользящего режима в любой точке заданного многообразия. Тем самым мы обеспечиваем «удержание» состояния объекта на заданной поверхности независимо от возмущений и нелинейностей объекта [10]. Эквивалентное управление вычисляем по обычной процедуре и получим выражение;

$$u_{eq} = -(GB)^{-1} \cdot (G_t + Gf_0 + \dot{H} - \dot{v}).$$

Убеждаемся, что и в этом случае вклад помехи в эквивалентное управление определяется той же формулой, $u_h = -(GB)^{-1} \cdot \dot{H}$.

Итак, при использовании всех трёх регулярных, на наш взгляд, методов управления для нелинейных нестационарных объектов - метод больших коэффициентов [11], метод скользящих режимов [10], метод локализации [9], мы получаем одинаковый предельный вклад помехи в значения управляющего воздействия.

Заметим, что в качестве метода анализа процессов в таких системах оказался удобным метод разделения движений [12].

Заключение

Результаты проведенных исследований позволяют сделать следующие выводы.

- Предельное (при стремлении коэффициентов к бесконечности) влияние помех измерения при любых методах управления остаётся конечным и определяется только уравнениями объектов и составом помех. Это есть базовое свойство обсуждаемой проблемы, и оно не зависит от метода синтеза.

- Решающим фактором для обеспечения инвариантности поведения выходных переменных системы является использование в обратной связи полного вектора скорости или старших производных от выходных переменных. При этом с помощью достаточно больших коэффициентов можно обеспечить нужную степень инвариантности.

- Метод локализации позволяет свести задачу синтеза нелинейных нестационарных систем к двум подзадачам синтеза линейных систем: конструированию линейного уравнения-эталона и коррекции линейной подсистемы быстрых движений.

- В связи с расширенной, из-за дифференцирования, «полосой пропускания» помех, для рассматриваемых систем особое значение приобретают вопросы конструирования высокоточных датчиков и эффективных фильтров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lewis F.L. A Brief History of feedback Control //Applied optimal Control and Estimation. - Prentice Hall. 1992.

2. Bennett S.A Brief History of Automatic Control. URL:<http://ieeecss.org/CSM/library/1996/june1996/02-HistoryofAutoCtrl.pdf>

3. Maxwell J.C. On Governors // Proceedings of the Royal Society of London. - 1868. - V. 16. - P. 270-283.

4. Вышнеградский И.А. О регуляторах прямого действия. – СПб. 1877.

5. Вышнеградский И.А. О регуляторах непрямого действия. – СПб. 1878.

6. Black H.S. Stabilized feed-back amplifiers //Electrical Engineering. – 1934. -V. 53. - P. 114-120.

7. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. Т.2. - М.: Изд-во АН СССР, 1956.

- 8 .Труды Первого международного конгресса ИФАК. – М. - 1961.

- 9 . Востриков А.С. Синтез систем регулирования методом локализации. - Новосибирск: НГТУ, 2007.

- 10 Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. – М.: Наука, 1981.

- 11 Мееров М.В. Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. – М.: Наука, 1967.

- 12 Геращенко Е.И., Геращенко С.М. Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем. – М.: Наука, 1975.

СИНТЕЗ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

В.И. Гаркушенко, С.Х. Аль Барри (КНИТУ-КАИ, Россия, 420111, Казань,
К.Маркса, 10) E-mail: wig@front.ru;samoalb@gmail.com

DESIGN DISCRETE-CONTINUOUS CONTROL FOR NONSTATIONARY TRACKING SYSTEMS IN UNCERTAIN DISTURBANCES

V.I. Garkushenko, S.H. AlBarry (KNPTU-KAI,
420111, Kazan, K.Marxstr.,10)

Keywords: nonstationary tracking systems, compare matrix system, dynamic regulator on the output, disturbances compensation.

Введение. Решению задачи синтеза следящих систем посвящено значительное число работ при различных постановках задач используемых методов [1,2]. Вместе с тем актуальной остается задача повышения точности для нелинейных, нестационарных следящих систем при наличии регулярных и нерегулярных внешних воздействий.

В докладе рассматривается нестационарная многомерная следящая САУ при наличии неопределенных внешних воздействий с измеряемыми-рассогласованиями в каналах управления в дискретные моменты времени.

Внешние воздействия состоят из регулярных и нерегулярных воздействий. Регулярными внешними воздействиями являются заранее неизвестные командные сигналы и внешние возмущения, которые с заданной точностью могут быть представлены в виде решения линейных дифференциальных уравнений при неопределенных начальных условиях. Нерегулярными внешними воздействиям являются ошибки аппроксимации при выделении регулярных внешних воздействий, шумы квантования ЦАП, АЦП, которые также как и начальные условия системы принадлежат некоторым ограниченным множествам, представленных с помощью матричных неравенств или эллипсоидов.

Отметим, что в некоторых случаях к нестационарной системе может быть сведена система с нелинейностями от измеряемых координат вектора состояния.

Постановка задачи. Пусть возмущенное движение управляемой системы в отклонениях от невозмущенного движения описывается дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}_0(t)\bar{x}(t) + \bar{B}_0(t)u(t) + \bar{D}_0(t)\bar{f}(t), \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0; \\ \varepsilon(t) &= g(t) - \bar{y}(t); \\ \bar{y}(t) &= \bar{C}_0\bar{x}(t),\end{aligned}\tag{1}$$

где $\bar{x} - n$ - вектор состояния системы; $u - m$ - вектор управления, $\varepsilon - l$ - вектор измеряемых рассогласований; $g - l$ - вектор командных сигналов; $\bar{y} - l$ - вектор выхода, причем $l \leq m$; $\bar{f} - p$ - вектор ограниченных возмущений, содержащий регулярную составляющую возмущения f и нерегулярную составляющую $\bar{w}$, стесненную ограничением

$$\bar{w}(t)\bar{w}^T(t) \leq \bar{Q}(t),$$

где $\bar{Q}(t)$ - положительно определенная матрица; $\bar{A}_0(t), \bar{B}_0(t), \bar{C}_0, \bar{D}_0(t)$ - матрицы с непрерывными и ограниченными элементами при $t \in [t_0, \infty)$. Предполагается, что вектор-функции $g(t), f(t)$ заранее не известны, но могут быть представлены с заданной точностью в виде

$$f(t) = H_f \xi_f(t); \quad g(t) = H_g \xi_g(t),$$

где $H_f = \text{diag}\{h_{f1}^T, \dots, h_{fp}^T\}$; $H_g = \text{diag}\{h_{g1}^T, \dots, h_{gl}^T\}$; $\xi_f = [\xi_{f1}^T, \dots, \xi_{fp}^T]^T$; $\xi_g = [\xi_{g1}^T, \dots, \xi_{gl}^T]^T$; $\xi_{fi}, \xi_{gi} - s$ - векторы, при этом $\xi = [\xi_f^T, \xi_g^T]^T - \nu$ - вектор размерности $\nu = (p+l)s$, который является решением уравнения:

$$\dot{\xi}(t) = \Gamma_0 \xi(t), \quad \xi(t_0) = \xi_0.\tag{2}$$

Здесь $\Gamma_0 = \text{diag}\{\Gamma_0, \dots, \Gamma_0\} - \nu \times \nu$ - матрица, Γ_0 - постоянная блочная диагональная $s \times s$ - матрица, блоки которой соответствуют выбранным базисным функциям для представления указанных воздействий; начальное условие ξ_0 заранее не известно; начальное состояние рассматриваемой системы отвечает неравенству

$$\bar{x}(t_0)\bar{x}^T(t_0) \leq \bar{K}_0,$$

где $\bar{K}_0$ - неотрицательно определенная матрица. Также предполагается управляемость пары $(\bar{A}_0(t), \bar{B}_0(t))$ и наблюдаемость пары $(\bar{C}_0, \bar{A}_0(t))$; $\text{rank}(\bar{B}_0(t)) = m$, $\text{rank}(\bar{C}_0) = l$.

Ставится задача синтеза дискретно-непрерывного закона управления по измеряемым в дискретные моменты времени $t_k = kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$ сигналам координат $\varepsilon(t_k)$, обеспечивающего требуемое качество переходных процессов замкнутой системы (1) и выполнение условия:

$$\varepsilon_j^{\text{уст}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_j(t) = 0, \quad j = \overline{1, l}\tag{3}$$

при отсутствии нерегулярного воздействия $w(t)$.

Отметим, что в известных работах (например, [1]) рассматривались аналогичные задачи синтеза дискретных регуляторов с кусочно-постоянным законом управления для линейных стационарных систем, при которых в замкнутой системе в установившемся режиме при $w(t) = 0$ выполняется условие:

$$\varepsilon_j^{\text{уст}}(t_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_j(t_k) = 0, \quad j = \overline{1, l}. \quad (4)$$

Однако с помощью кусочно-постоянного управления не удастся полностью компенсировать действие непрерывного возмущения $\bar{f}(t)$ с целью выполнения условия (3). В связи с этим в работе [3] для стационарных линейных многомерных систем была рассмотрена задача синтеза дискретно-непрерывного закона управления гарантирующего выполнение условия (3). Ниже данный подход развивается на случай нестационарных следящих систем при наличии нерегулярных внешних воздействий.

Решение задачи. Преобразуем сначала систему (1) таким образом, чтобы координаты вектора ошибок $\varepsilon(t) = g(t) - \bar{y}(t)$ оказались координатами вектора состояния преобразованной системы. Для этого введем линейное аффинное преобразование $\bar{x} = Sx + \bar{L}\xi_g$, $\det(S) \neq 0$, которое приводит исходную систему (1) к виду:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0(t)x(t) + B_0(t)u(t) + H_\xi(t)\xi(t) + D_0(t)\bar{w}(t), \quad x(0) = x_0, \\ y(t) &= C_0x(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где $A_0(t) = S^{-1}\bar{A}_0(t)S$, $B_0(t) = S^{-1}\bar{B}_0(t)$, $L = S^{-1}\bar{L}$, $D_0(t) = S^{-1}\bar{D}_0(t)$,

$$H_\xi(t) = A_0(t)L[0_{l \times p-s} \mid H_g] - L[0_{l \times p-s} \mid H_g]\Gamma_0 + D_0(t)[H_f \mid 0_{p \times l-s}],$$

$$C_0 = [I_l \mid 0_{l \times (n-l)}] \text{ при } S^{-1} = - \left[\begin{array}{c|c} \bar{C}_0 & \\ \hline 0_{(n-l) \times l} & I_{n-l} \end{array} \right] E, \text{ где } E - n \times n - \text{ матрица перестановок}$$

такая, что матрица S^{-1} невырожденная, а матрица $\bar{L}$ выбирается из условия выполнения равенства $\bar{C}_0\bar{L} = H_g$. При этом в уравнении (5) $y(t) = \varepsilon(t)$.

Отметим, что в соответствии с выражением матрицы $H_\xi(t)$ представление системы в виде (5) позволяет в некоторых случаях понизить размерность вектора $\xi(t)$.

Для выполнения условия (3) вводится встроенная модель внешних воздействий:

$$\dot{z}^{(j)}(t) = \bar{\Gamma}^{(j)}(t)z^{(j)}(t) + \bar{d}(t_k)y_j(t_k), \quad z^{(j)}(t_0) = 0, \quad j = \overline{1, l}, \quad (6)$$

где $z^{(j)}(t) - s$ - вектор состояния j -й динамической подсистемы; $\bar{d}(t_k) - s$ - вектор, такой, что пара $(\bar{\Gamma}^{(j)}(t), \bar{d}(t_k))$ управляема. Требуемый вид матрицы $\bar{\Gamma}^{(j)}(t)$ и вектора $\bar{d}(t_k)$ определяется в дальнейшем.

Для выполнения условия (3) закон управления строится в виде линейной комбинации кусочно-постоянного управления, зависящего от ошибки $y(t_k) = \varepsilon(t_k)$, и непрерывного управления по векторам $z^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, l}$. Задача синтеза дискретно-непрерывного регулятора решается в два этапа.

I. Рассмотрим сначала задачу синтеза кусочно-постоянного закона управления для дискретных моментов времени $t_k = kT$:

$$u^*(t) = u(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Полагая вначале $\bar{\Gamma}^{(j)}(t) = \Gamma_0$, $\bar{d}(t_k) = d_0$, где (Γ_0, d_0) - управляемая пара, и считая период дискретности T выбранным, перейдем от непрерывной модели (5), (6) к эквивалентной дискретной модели:

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) &= A(t_k)x(t_k) + B(t_k)u(t_k) + D(t_k)\xi(t_k) + w(t_k), \\ y(t_k) &= C_0x(t_k), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} z^{(j)}(t_{k+1}) &= \Gamma z^{(j)}(t_k) + dy_j(t_k), \quad j = \overline{1, l}, \\ \xi(t_{k+1}) &= \Gamma \xi(t_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $A(t_k) = \Phi(t_{k+1}, t_k)$, $B(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) B_0(\tau) d\tau$, $d = \int_0^T \exp(\Gamma_0 \tau) d_0 d\tau$,

$D(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) H_\xi(\tau) \exp(\Gamma_0(\tau - t_k)) d\tau$; $\Phi(t, \tau)$ - переходная матрица систем (5); $\Gamma = \exp(\Gamma_0 T) = \text{diag}\{\Gamma, \dots, \Gamma\}$, $\Gamma = \exp(\Gamma_0 T)$, $w(t_k) = s(t_{k+1}, t_k)$,

$s(t, t_k) = \int_{t_k}^t \Phi(t, \tau) D(\tau) \bar{w}(\tau) d\tau$.

Построим оценку для вектора $w(t_k)$, используя неравенство Коши-

Буняковского: $(c^T s(t, t_k))^2 = \left(\int_{t_k}^t c^T \Phi(t_{k+1}, \tau) D(\tau) \bar{w}(\tau) d\tau \right)^2 \leq c^T Q(t, t_k) c(t - t_k)$,

где $Q(t, t_k) = \int_{t_k}^t \Phi(t, \tau) D(\tau) \bar{Q}(\tau) D^T(\tau) \Phi^T(t, \tau) d\tau$. Отсюда для произвольного вектора c следует оценка $s(t, t_k) s^T(t, t_k) \leq Q(t, t_k)(t - t_k)$, из которой при $t = t_{k+1}$ получим $w(t_k) w^T(t_k) \leq T Q(t_{k+1}, t_k)$.

Здесь предполагается, что величина периода квантования по времени T выбрана из условия управляемости пар $(A(t_k), B(t_k))$, (Γ, d) и наблюдаемости пары $(C_0, A(t_k))$, что имеет место при $T \rightarrow 0$.

Введем расширенный вектор $z(t_k) = [z^{(1)T}(t_k), \dots, z^{(l)T}(t_k)]^T$ размерности $l \cdot s$, расширенный вектор состояния $\tilde{x}(t_k) = [x^T(t_k), z^T(t_k)]^T$ размерности $\tilde{n} = n + l \cdot s$ и измеряемый вектор $\tilde{y}(t_k) = [y^T(t_k), z^T(t_k)]^T$ размерности $\tilde{l} = l + l \cdot s$. Тогда систему (8), (9) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t_{k+1}) &= \tilde{A}(t_k)\tilde{x}(t_k) + \tilde{B}(t_k)u(t_k) + \tilde{D}(t_k)\xi(t_k) + \tilde{D}_w w(t_k), \\ \xi(t_{k+1}) &= \Gamma \xi(t_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ \tilde{y}(t_k) &= \tilde{C}\tilde{x}(t_k).\end{aligned}\tag{10}$$

Здесь приняты обозначения:

$$\begin{aligned}\tilde{A}(t_k) &= \begin{bmatrix} A(t_k) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ dc_1^T & \Gamma & 0 & \dots & 0 \\ dc_2^T & 0 & \Gamma & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ dc_l^T & 0 & 0 & \dots & \Gamma \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}(t_k) = \begin{bmatrix} B(t_k) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}(t_k) = \begin{bmatrix} D(t_k) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_w = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{C} &= \text{diag}\{C_0, I_{sl}\}, \quad C_0 = [c_1 \mid \dots \mid c_l]^T.\end{aligned}$$

Для дискретной системы (10) найдем закон управления на основе измерений выхода $\tilde{y}(t_k)$, при котором замкнутая система обладает заданным качеством переходных процессов и в установившемся режиме при $w(t_k) = 0$ выполняется условие (4).

1. Закон управления примем в виде обратной связи по измеряемому вектору $\tilde{y}(t_k)$:

$$u(t_k) = \tilde{G}(t_k)\tilde{y}(t_k).\tag{11}$$

При учете возмущений $w(t_k)$ и $\xi(t_k) = 0$ матрица коэффициентов регулятора $\tilde{G}(t_k)$ может быть найдена методом синтеза по аналоговому прототипу [4], закон управления которого для исходной непрерывной системы с переходной матрицей $\tilde{\Phi}^*(t, \tau)$ и матрицей $\tilde{B}^*(t) = [B_0^T(t) \mid 0 \mid \dots \mid 0]^T$, которой соответствует дискретная модель (10), имеет вид:

$$u_0(t) = \tilde{G}^*(t)\tilde{y}(t).\tag{12}$$

Управление (12) при наличии неопределенных возмущений $\bar{w}(t)$ и $\xi(t)=0$ можно определить методом локально оптимального управления [5]. Тогда матрица $\tilde{G}(t_k)=[G(t_k)C_0 \quad G_z(t_k)]$, $G_z(t_k)=[G^{(1)}(t_k) \mid \dots \mid G^{(l)}(t_k)]$ определяется по формуле:

$$\tilde{G}(t_k)=R^{-1}(t_k)Z(t_k)K(t_k)\tilde{C}^T F^{-1}(t_k),$$

где матрица $K(t_k)$ является решением уравнения сравнения

$$K(t_{k+1})=(1+\alpha(t_k))\tilde{P}(t_k)K(t_k)\tilde{P}^T(t_k)+(1+\alpha^{-1}(t_k))TQ(t_{k+1},t_k), \quad K(t_0)=K_0.$$

Здесь матрица K_0 находится с учетом перехода от системы (1) к системе (5);

$$R(t_k)=\int_{t_k}^{t_{k+1}} L^T(t,t_k)L(t,t_k)dt, \quad Z(t_k)=\int_{t_k}^{t_{k+1}} L^T(t,t_k)M(t,t_k)dt; \quad \alpha(t_k)>0,$$

$$M(t,t_k)=\tilde{G}^*(t)\tilde{C}\tilde{\Phi}^*(t,t_k),$$

$$F(t_k)=\tilde{C}K(t_k)\tilde{C}^T>0, \quad L(t,t_k)=[I_m-\tilde{G}^*(t)\tilde{C}H(t,t_k)], \quad H(t,t_k)=\int_{t_k}^t \tilde{\Phi}^*(t,\tau)\tilde{B}^*(\tau)d\tau,$$

$$\tilde{P}(t_k)=\tilde{A}(t_k)+\tilde{B}(t_k)\tilde{G}(t_k)\tilde{C}.$$

Таким образом, в случае существования ограниченной положительно определенной матрицы $K(t_k)$ кусочно-постоянное управление (7) с законом управления (11) обеспечивает устойчивость замкнутой системы.

В случае неразрешимости задачи синтеза с законом управления (11) вводится динамический регулятор вида:

$$\eta(t_{k+1})=A_d\eta(t_k)+B_d y(t_k), \quad \eta(t_0)=0, \quad (13)$$

где (A_d, B_d) – управляемая пара, матрица A_d имеет большой запас устойчивости; $\eta(t_k)$ – n_d -вектор, $n_d=m\mu$; начальный выбор наименьшего значения коэффициента μ проводится согласно работе [3] для фиксированного момента времени $t_k=t_0$ в уравнении (10). При необходимости значение μ может быть увеличено.

Для расширенной системы (10), (13) определяется закон управления $u(t_k)$ вида (11) по выходу $\hat{y}(t_k)=[\tilde{y}^T(t_k) \quad \eta^T(t_k)]^T$ аналогично предыдущему.

2. Найдем условия, при которых выполняется равенство (4) при $w(t_k)=0$. Учитывая, что для внешних воздействий собственные значения матрицы Γ_0 лежат на мнимой оси комплексной плоскости, соответственно собственные значения матрицы Γ лежат на единичной окружности, в установившемся режиме получим:

$$x(t_k) = M(t_k)\xi(t_k); z^{(j)}(t_k) = M^{(j)}(t_k)\xi(t_k), j = \overline{1, l}, \quad (14)$$

где $M(t_k)$ и $M^{(j)}(t_k)$ – матрицы размерности $n \times \nu$ и $l \times \nu$ соответственно.

После подстановки выражений (14) в уравнения (8), (9) с учетом блочного представления матриц $M(t_k)$, $M^{(j)}(t_k)$ в виде

$$\begin{aligned} M(t_k) &= [M_1(t_k) \mid M_2(t_k) \mid \dots \mid M_{p+l}(t_k)], \\ M^{(j)}(t_k) &= [M_1^{(j)}(t_k) \mid M_2^{(j)}(t_k) \mid \dots \mid M_{p+l}^{(j)}(t_k)], \end{aligned}$$

получим систему уравнений:

$$M(t_{k+1})\Gamma = [A(t_k) + B(t_k)G(t_k)]M(t_k) + B(t_k)\sum_{j=1}^l G^{(j)}(t_k)M^{(j)}(t_k) + D(t_k), \quad (15)$$

$$M_i^{(j)}(t_{k+1})\Gamma - \Gamma M_i^{(j)}(t_k) = dc_j^T M_i(t_k), j = \overline{1, l}, i = \overline{1, p+l}. \quad (16)$$

Для выполнения условия (4) в уравнении (16) должны выполняться равенства $dc_j^T M_i(t_k) = 0$, $j = \overline{1, l}$, которые, согласно [3], выполняются при условии $M_i^{(j)}(t_{k+1}) = M_i^{(j)}(t_k)$. Поскольку в общем случае $M_i^{(j)}(t_{k+1}) \neq M_i^{(j)}(t_k)$, то использование встроенной модели внешних воздействий (9) не обеспечивает выполнения условия (4).

В связи с этим вместо уравнений (9) рассмотрим уравнения

$$z^{(j)}(t_{k+1}) = \tilde{F}^{(j)}(t_k)z^{(j)}(t_k) + dy_j(t_k), j = \overline{1, l}, \quad (17)$$

с некоторой матрицей $\tilde{F}^{(j)}(t_k)$, предполагая, что при этом в замкнутой системе (8), (11), (17) сохраняется устойчивость и требуемое качество переходных процессов.

В этом случае уравнения (16) будут иметь вид:

$$M_i^{(j)}(t_{k+1})\Gamma - \tilde{F}^{(j)}(t_k)M_i^{(j)}(t_k) = dc_j^T M_i(t_k), j = \overline{1, l}, i = \overline{1, p+l},$$

и при $dc_j^T M_i(t_k) = 0$ найдем:

$$\tilde{F}^{(j)}(t_k) = M_i^{(j)}(t_{k+1})\Gamma \left(M_i^{(j)}(t_k) \right)^{-1}. \quad (18)$$

II. Рассмотрим теперь задачу построения дискретно-непрерывного закона управления, при котором выполняется условие (3) при $\tilde{w}(t_k) = 0$. Вместо закона управления (7), (11) будем использовать следующий закон управления:

$$\begin{aligned} u(t) &= \bar{u}(t) + \bar{G}_z(t)z(t), \\ \bar{u}(t) &= G(t_k)C_0 x(t_k), t_k \leq t < t_{k+1}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\bar{G}_z(t) = [\bar{G}^{(1)}(t) \mid \dots \mid \bar{G}^{(l)}(t)]$; $z^{(j)}(t) - s$ - вектор является решением уравнения (6).

Определим сначала кусочно-непрерывную матрицу $\bar{G}_z(t) = \bar{G}_z(t_k)$, $t_k \leq t < t_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ так, чтобы переходные процессы замкнутой системы (5), (6) с законами управления (7), (11) и (19) были близки в смысле минимума функционала:

$$J(t) = \int_{t_0}^t \Delta u^T(\tau) \Delta u(\tau) d\tau,$$

где $\Delta u(t) = u(t) - u^*(t)$. Для этого воспользуемся результатом работы [3], из которой следует, что матрица $\bar{G}(t)$ может быть определена по формуле:

$$\bar{G}_z(t_k) = G_z(t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{\Phi}^T(t_{k+1}, \tau) d\tau \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{\Phi}(t_{k+1}, \tau) \bar{\Phi}^T(t_{k+1}, \tau) d\tau \right)^{-1}, \quad (21)$$

где $\bar{\Phi}(t, \tau) = \text{diag}\{\bar{\Phi}^{(1)}(t, \tau), \dots, \bar{\Phi}^{(l)}(t, \tau)\}$. При этом замкнутая система (5), (6) с законом управления (19), (21) будет устойчива для некоторого периода дискретности T , поскольку при $T \rightarrow 0$ матрица $\bar{G}_z(t_k) \rightarrow G_z(t_k)$.

По значениям матрицы $\bar{G}_z(t_k)$ построим непрерывную матрицу $\bar{G}_z(t)$.

Для выполнения условия (3) в замкнутой системе (5), (6), (19) матрицу $\bar{F}^{(j)}(t)$ можно найти приближенно по дискретным значениям матрицы $\bar{F}^{(j)}(t_k) = T^{-1} L \Pi \tilde{F}^{(j)}(t_k)$ в силу неособой матрицы $\tilde{F}^{(j)}(t_k)$, при этом вектор $\bar{d}^{(j)}(t_k) = \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{\Phi}^{(j)}(t_{k+1}, \tau) d\tau \right)^{-1} d$, где $\bar{\Phi}^{(j)}(t, \tau)$ - переходная матрица системы (6).

Если при этом в дискретные моменты времени t_k выполняется условие (4), то в установившемся режиме система описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0(t)x(t) + B_0(t) \sum_{j=1}^l \bar{G}^{(j)}(t) z^{(j)}(t) + H_\xi(t) \xi(t), \\ \dot{z}^{(j)}(t) &= \bar{F}^{(j)}(t) z^{(j)}(t), \quad j = \overline{1, l}, \\ y(t) &= C_0 x(t), \end{aligned}$$

В силу управляемости и наблюдаемости системы (8) при выбранном периоде дискретности T , в замкнутой системе отсутствуют скрытые колебания и, следовательно, в установившемся движении $y(t) = 0$, т.е. выполняется условие (3).

Аналогичные результаты могут быть получены для системы с динамическим регулятором (13).

Пример. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим задачу синтеза одномерной следящей системы за командным сигналом $g(t)=t$:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{a}(t)\bar{x}(t) + \bar{b}(t)u(t) + f, \quad (22)$$

$$\varepsilon(t) = g(t) - \bar{x}(t), \quad \dot{\xi}(t) = \Gamma_0 \xi(t),$$

где $\bar{a}(t) = -(16 + 0,6\sin(t))$, $\bar{b}(t) = 10$, $g(t) = h_g^T \xi(t)$, $\Gamma_0 = \begin{bmatrix} 0 & | & T^{-1} \\ \hline 0 & | & 0 \end{bmatrix}$, $h_g^T = [1 \ 0]$,

$T = 0,1$ с; $f = 1$.

Систему (22) приведем к виду (5):

$$\dot{x}(t) = \bar{a}(t)x(t) - \bar{b}(t)u(t) - f(t) + \dot{g}(t) - \bar{a}(t)g(t), \quad (23)$$

$$x(t) = \varepsilon(t).$$

Здесь $-f(t) + \dot{g}(t) = 0$, поэтому уравнение (23) упрощается. Для системы (23) построим приближенную дискретную модель методом Эйлера. Тогда с учетом уравнения (17) получим расширенную систему:

$$x(t_{k+1}) = a(t_k)x(t_k) - bu(t_k) - \beta(t_k)h_g^T \xi(t_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

$$z(t_{k+1}) = \tilde{\Gamma}^{(1)}(t_k)z(t_k) + dx(t_k), \quad (25)$$

$$\xi(t_{k+1}) = \Gamma \xi(t_k),$$

где $a(t_k) = -0,6(1 + 0,1\sin(t_k))$, $b = 1$, $\beta(t_k) = T\bar{a}(t_k)$, $d = [0 \ 1]^T$, $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & | & 1 \\ \hline 0 & | & 1 \end{bmatrix}$.

Учитывая большой запас устойчивости объекта управления с коэффициентом $a(t_k)$, закон управления будем искать в виде

$$u(t_k) = g_z^T z(t_k), \quad (26)$$

где $g_z^T = [0,14 \ 0,83]$.

Из уравнений (24), (25) следует, что в установившемся режиме при матрице $\tilde{\Gamma}^{(1)}(t_k) = \Gamma$ не удастся найти закон управления $u(t_k)$, при котором в установившемся режиме выполняется равенство $x(t_k) = 0$. В связи с этим найдем соответствующую матрицу $\tilde{\Gamma}^{(1)}(t_k)$.

Для этого в уравнении (15) потребуем выполнения равенства:

$$-bg_z^T M_1^{(1)}(t_k) - \beta(t_k)h_g^T = 0,$$

из которого найдем

$$M_1^{(1)}(t_k) = \begin{bmatrix} -1 & | & g_{z2} / g_{z1} \\ \hline 0 & | & -1 \end{bmatrix} \beta(t_k) / g_{z1}.$$

Тогда из выражения (18) получим:

$$\tilde{I}^{(1)}(t_k) = \Gamma \beta(t_{k+1}) / \beta(t_k). \quad (27)$$

На рис. 1 представлен переходный процесс 1 замкнутой системы (24)-(27) по рассогласованию $\mathcal{E}(t_k)$. Для сравнения на рис. 1 также представлен процесс 2 со встроенной моделью (25) при $\tilde{I}^{(1)}(t_k) = \Gamma$, который расходится. Если в этом случае в системе (23) положить $\bar{a}(t) = -16$, то переходной процесс $\mathcal{E}(t_k)$ практически совпадает с процессом 1.

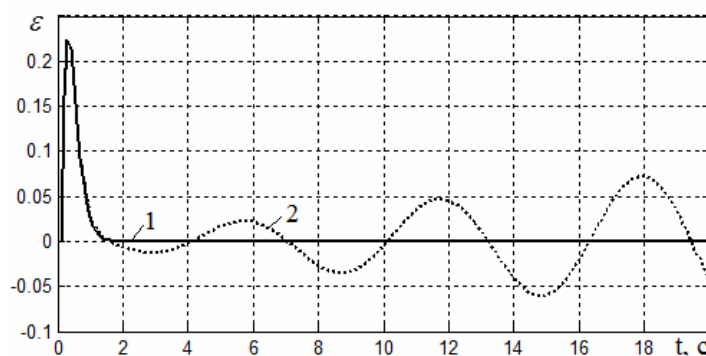


Рис. 1. Переходные процессы по рассогласованию $\mathcal{E}(t_k)$

Таким образом, из переходных процессов следует, что с помощью встроенной модели (25), (27) удастся обеспечить в замкнутой системе нулевую установившуюся ошибку для нестационарной системы (24).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 15-08-05575.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дроздов В. Н., Мирошник И.В., Скорубский В.И. Системы автоматического управления с микроЭВМ. – Л.: Машиностроение. 1989. 284 с.
2. Юркевич В. Д. Синтез регуляторов для многомерных систем на основе метода разделения движений // Идентификация систем и задачи управления (SICPRO '15). М.: Ин-т проблем упр. им. В. А. Трапезникова, 2015. С. 557–576.
3. Гаркушенко В.И. Синтез дискретно-непрерывного регулятора для линейных многомерных систем с учетом внешних воздействий // Изв. вузов. Авиационная техника. 2003. № 2. С. 22–26.
4. Гаркушенко В. И. Синтез дискретного управления по аналоговому прототипу для нестационарных систем при неопределенных внешних воздействиях // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. 2000. № 2. С. 45–50.
5. Гаркушенко В. И. Синтез нестационарных систем управления по выходу при неопределенных внешних воздействиях // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. 1999. № 2. С. 40–44.

ОБЕСПЕЧЕНИЕ РАВНОМЕРНОГО ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ СПАРКИ ГИРОДИНОВ

А.В. Гладун (УИГА им. Главного маршала авиации Б.П. Бугаева, Россия,
432071, город Ульяновск, улица Можайского, дом 8/8)
E-mail: aleksygladun@gmail.com

PROVIDE UNIFORM ROTATION OF A RIGID BODY BY MEANS OF DOUBLED GYRODINS

A.V. Gladun (UCAI named after Chief Marshal of Aviation B.P. Bugaev,
432071, Ulyanovsk, Mozhaiskogo str., 8/8)

Keywords: rigid body, doubled gyrokins, uniform rotation, control, linear approximation.

Введение. Задачу управления вращательного движения твердого тела необходимо решать при проектировании современных технических систем, в частности, искусственных спутников. Для устранения отрицательного влияния невесомости на живые организмы может быть создана искусственная гравитация путем обеспечения равномерного вращения космической станции. Для решения такой задачи целесообразно использование гироскопических систем. Возможность применения маховиков, гироскопов уже исследовалась в работах В.И. Воротникова, В.Н. Васильева, В.И. Зубова, А.М. Ковалева, В.В. Крементуло, Х. Кеннеди, В.С. Хорошилова и других авторов [1] – [4]. Вопросы, касающиеся использования гиродинов, в частности спарок гиродинов, для управления вращательного движения твердого тела мало изучены. В тоже время многими исследователями отмечаются перспективность и преимущества использования гироскопов по сравнению с маховиками и реактивными двигателями. Одним из перспективных направлений упрощения уравнений систем, уменьшения массы гиродинов и повышения эффективности их использования является объединение гиродинов в спарку. Гиродин – двухстепенная гироскопическая система, состоящая из ротора и гирикамеры. Ротор закреплен внутри гирикамеры и вращается с постоянной угловой скоростью. Объединенные в спарку гиродины идентичны, оси вращения гирикамер параллельны. Роторы спарки вращаются с постоянными, одинаковыми по величине и противоположными по направлению (в начальный момент времени) скоростями.

Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему, состоящую из твердого тела (носителя) и спарки гиродинов. Для описания системы используем уравнения движения твердого тела с s спарками гиродинов, полученные в работе [5]. Запишем их в предположении, что у каждого гиродина ротор является шаровым, а гирикамера динамически симметрична относительно своей оси вращения

$$\boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\omega} + 2(\mathbf{K}_0 \mathbf{H} \cos \mathbf{q} \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_0 \sin \mathbf{q} \mathbf{h}) = \mathbf{0}, \quad (1)$$

$$2\mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} - 2(\mathbf{K}_0 \mathbf{H} \cos \mathbf{q})^* \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_j^{C_j} + \mathbf{M}_{s+j}^{C_{s+j}}. \quad (2)$$

Здесь $\boldsymbol{\theta}$ – матрица тензора инерции системы твердое тело – спарки гироскопов; $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^*$ – вектор угловой скорости твердого тела (носителя); $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_s)^*$ – вектор углов поворота гироскопов спарок относительно носителя; $\sin \mathbf{q} = \text{diag}(\sin q_1, \dots, \sin q_s)$; $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_s)^*$; h_i – некоторые постоянные; $\cos \mathbf{q} = \text{diag}(\cos q_1, \dots, \cos q_s)$; $\mathbf{H} = \text{diag}(h_1, \dots, h_s)$; $\mathbf{K}_0 = (\mathbf{k}_{01}, \dots, \mathbf{k}_{0s})$; $\mathbf{k}_{0i}, \mathbf{l}_{0i}, \mathbf{n}_{0i}$ – орты, задающие положение i -й спарки гироскопов в теле носителя; $\mathbf{M}_j^{C_j}$, $\mathbf{M}_{s+j}^{C_{s+j}}$ – главные моменты управляющих сил относительно центра инерции j -го и $s+j$ -го гироскопов, входящих в j -ю спарку, соответственно; $*$ – символ транспонирования.

В качестве вектора управления выберем вектор угловых скоростей поворота гироскопов относительно твердого тела

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{q}}, \quad (3)$$

тогда главный момент управляющих сил из (2) определяется равенством

$$\mathbf{M}_j^{C_j} + \mathbf{M}_{s+j}^{C_{s+j}} = 2\mathbf{J}\dot{\mathbf{u}} - 2(\mathbf{K}_0 \mathbf{H} \cos \mathbf{q})^* \boldsymbol{\omega}$$

и мы можем ограничиться в рассматриваемом случае только уравнением (1), описывающим движение носителя, для которого с учетом (3) получаем

$$\boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{K}_0 \sin \mathbf{q} \mathbf{h}) + 2\mathbf{K}_0 \mathbf{H} \cos \mathbf{q} \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Запишем уравнение (4) в системе координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанной с носителем, выбрав ее таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\omega} = (A_1\omega_1, A_2\omega_2, A_3\omega_3)^*,$$

где A_1, A_2, A_3 – обобщенные моменты инерции.

Система уравнений (4), (3), описывающая движение твердого тела, несущего с парок гироскопов принимает вид

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \\ &+ 2\sum_{j=1}^s \left[h_j \sin q_j (\omega_3 k_{0j}^2 - \omega_2 k_{0j}^3) - h_j u_j \cos q_j k_{0j}^1 \right], \\ \dot{q}_j &= u_j, \quad j = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Пусть на носителе установлена одна спарка гироскопов ($j=1$) и орты

$$\mathbf{k}_{01} = \left(\frac{6}{35}, \frac{6}{7}, -\frac{17}{35} \right)^*, \quad \mathbf{l}_{01} = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right)^*, \quad \mathbf{n}_{01} = \left(\frac{33}{35}, -\frac{2}{7}, -\frac{6}{35} \right)^*$$

задают ее начальное расположение. Оси вращения гироскопов спарки не являются параллельными ни одной из координатных осей. Тогда движение

механической системы носитель – спарка гироскопов описывается системой уравнений вида [6]

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \frac{1}{A_1} \left[(A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \frac{12}{7}h\omega_3\sin q + \frac{34}{35}h\omega_2\sin q - \frac{12}{35}h\cos q \right], \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1}{A_2} \left[(A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 - \frac{34}{35}h\omega_1\sin q - \frac{12}{35}h\omega_3\sin q - \frac{12}{7}h\cos q \right], \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{1}{A_3} \left[(A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \frac{12}{35}h\omega_2\sin q - \frac{12}{7}h\omega_1\sin q + \frac{34}{35}h\cos q \right], \\ \dot{q} &= u.\end{aligned}\quad (5)$$

Ранее в работе [6] было показана возможность с помощью одной спарки гироскопов осуществить:

а) перевод твердого тела в противовращение в окрестности положения равновесия

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, q) = (0, 0, 0, q^{(0)});$$

б) раскрутку твердого тела вокруг какой-либо оси системы координат $Oxyz$, выбранной выше при выводе уравнений.

Рассмотрим вопрос о возможности с помощью одной спарки гироскопов вернуть носителю исходное равномерное вращение.

Рассмотрим равномерное вращение

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, q) = (0, \omega_2^0, 0, \pi t) = (0, 10, 0, 3\pi).$$

Пусть под воздействием внешних возмущений заданное равномерное вращение было нарушено. В результате вектор фазовых координат принял вид

$$\boldsymbol{\omega}^{(0)} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, q) = \left(0.8, 10.9, -1.3, \frac{19\pi}{6} \right).$$

Задача. Найти такое кусочно-непрерывное (далее допустимое) управление $u = u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, что соответствующее ему движение системы (5) удовлетворяет условиям

$$\boldsymbol{\omega}(t_0) = \boldsymbol{\omega}^{(0)}, \quad \boldsymbol{\omega}(t_1) = \boldsymbol{\omega}^{(1)},$$

т.е. твердое тело восстанавливает свое исходное равномерное вращение.

Будем решать поставленную задачу по линейному приближению.

Разрешимость задачи управления. Исследуем управляемость системы (5) в окрестности равномерного вращения $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$. Сделаем замену переменных

$$x_1 = \omega_1, \quad x_2 = \omega_2 - \omega_2^0, \quad x_3 = \omega_3, \quad x_4 = q - \pi t$$

и линеаризуем систему в точке $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$, имеем

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{1}{A_1} \left[(A_2 - A_3) \omega_2^0 x_3 + \frac{(-1)^m 34}{35} h \omega_2^0 x_4 - \frac{(-1)^m 12}{35} h u \right], \\
\dot{x}_2 &= \frac{(-1)^{m+1} 12}{7 A_2} h u, \\
\dot{x}_3 &= \frac{1}{A_3} \left[(A_1 - A_2) \omega_2^0 x_1 + \frac{(-1)^m 12}{35} h \omega_2^0 x_4 + \frac{(-1)^m 34}{35} h u \right], \\
\dot{x}_4 &= u.
\end{aligned} \tag{6}$$

Пусть $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$ есть система (6), записанная в матричном виде. Чтобы система (5) была управляема по переменным $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ в окрестности равномерного вращения $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$, достаточно [7], чтобы $\text{rank}\{DB, DAB, DA^2B\} = 3$.

Матрица $\{DB, DAB, DA^2B\}$ имеет вид

$$\begin{aligned}
DB^* &= \left(\frac{12(-1)^{m+1}h}{35A_1}, \frac{12(-1)^{m+1}h}{7A_2}, \frac{34(-1)^mh}{35A_3} \right), \text{ где } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
DAB^* &= \left(\frac{34(-1)^mh\omega_2^0A_2}{35A_1A_3}, 0, \frac{12(-1)^mh\omega_2^0A_2}{35A_1A_3} \right), \\
DA^2B^* &= \left(\frac{12(-1)^{m+1}h(\omega_2^0)^2A_2(A_3 - A_2)}{35A_1^2A_3}, 0, \frac{34(-1)^{m+1}h(\omega_2^0)^2A_2(A_2 - A_1)}{35A_1A_3^2} \right).
\end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \det\{DB, DAB, DA^2B\} = \frac{48(-1)^{3m}h^3(\omega_2^0)^3A_2K}{8575A_1^3A_3^3},$$

где

$$K = 289A_1(A_1 - A_2) + 36A_3(A_3 - A_2).$$

Определитель не обращается в ноль и система (5) управляема по $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, если $\omega_2^0 \neq 0$.

Построение управления. В работе [7] предложен алгоритм построения управлений, решающих двухточечные задачи для нелинейных систем в окрестности стационарных движений с заданной степенью точности. Вычисляем фундаментальную матрицу $X[t, \xi]$ однородной системы, соответствующей системе (6), и находим матрицу $\omega(t, \xi) = DX[t, \xi]B$. Вычисление управления, переводящего систему (5) в исходное равномерное вращение $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ с точностью до 0.00001, будем производить пошагово, записав рекуррентную формулу из [7] в виде

$$u_k(t) = \Omega(t) \mathbf{p}_k, k=0,1,\dots, \quad (7)$$

$$\Omega(t) = \omega^*(t_1, t) M^{-1}, \quad \mathbf{p}_k = D \left[\mathbf{x}^{(1)} - X(t_1, t_0) \mathbf{x}^{(0)} + \sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}_i^H(t_1)) \right],$$

$$M = \int_{t_0}^{t_1} \omega(t_1, \tau) [\omega(t_1, \tau)]^T d\tau,$$

где $\mathbf{x}_i^H(t_1)$ – точка, в которую попадает нелинейная система (5) под действием допустимого управления $u_i(t)$ в момент времени t_1 .

Матрица $\Omega(t) = \omega^*(t_1, t) M^{-1}$ и вектор $\mathbf{p}_0$, имеют вид

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos[g(t-1)] + d_1 \sqrt{2415} \sin[g(t-1)] + e_1 \\ c_2 \cos[g(t-1)] + d_2 \sqrt{2415} \sin[g(t-1)] + e_2 \\ c_3 \cos[g(t-1)] + d_3 \sqrt{2415} \sin[g(t-1)] + e_3 \end{pmatrix}^*,$$

где $g = 40\sqrt{2415}/483$,

$\mathbf{c} = (0.20160997, 0.7668857732, -0.1857781932)$,

$\mathbf{d} = (0.008995155462, 0.01735833055, 0.0006659509444)$,

$\mathbf{e} = (0.2133656852, 0.7874499359, -0.0236826758)$;

$\mathbf{p}_0^* = (-1.089120161, -0.9, -7.268198479)$.

Управление $u_0(t)$, вычисляемое на первом шаге, не переводит нелинейную систему (5) в исходное равномерное вращение, так как строится достаточно грубо по линейному приближению. Поведение системы под действием управления

$$u_0(t) = -0.7689554 + 0.4404981 \cos(-4.069784638 + 4.069784638t) - 1.487035261 \sin(-4.069784638 + 4.069784638t)$$

показано на рис. 1 и рис. 2.

$$\omega_2(0) = 10.9, \quad \omega_2(1) = 9.9844238895166.$$

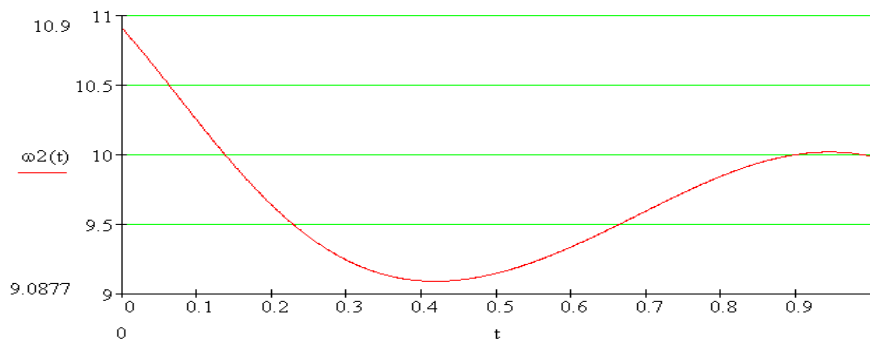


Рис. 1

$$\omega_1(0) = 0.8, \quad \omega_3(0) = -1.3$$

$$\omega_1(1) = -0.595268354, \quad \omega_3(1) = 0.968809803$$

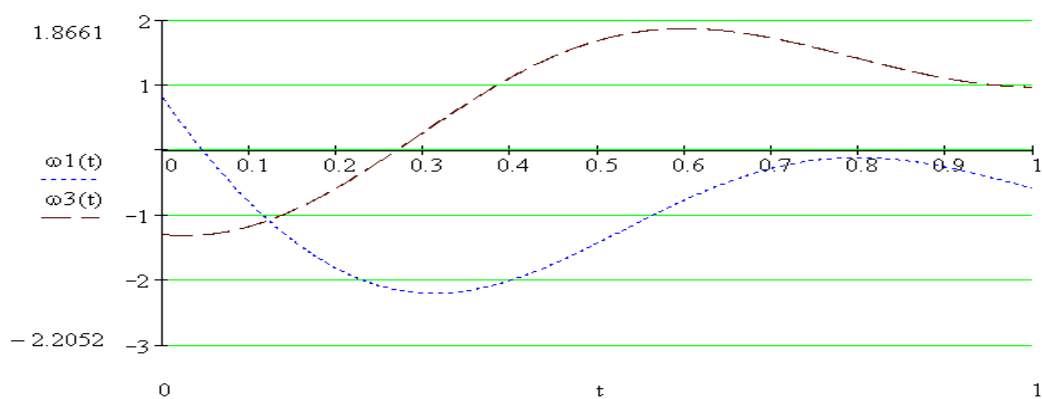


Рис. 2

Дальнейшее уточнение управления с помощью формулы (7) позволяет нам найти управление $u_{17}(t)$, решающее поставленную задачу для системы (5) с требуемой степенью точности. Результат действия управления $u_{17}(t)$ показан на рис. 3 и рис.4.

$$\omega_2(0)=10.9, \omega_2(1)=9.9999999843,$$

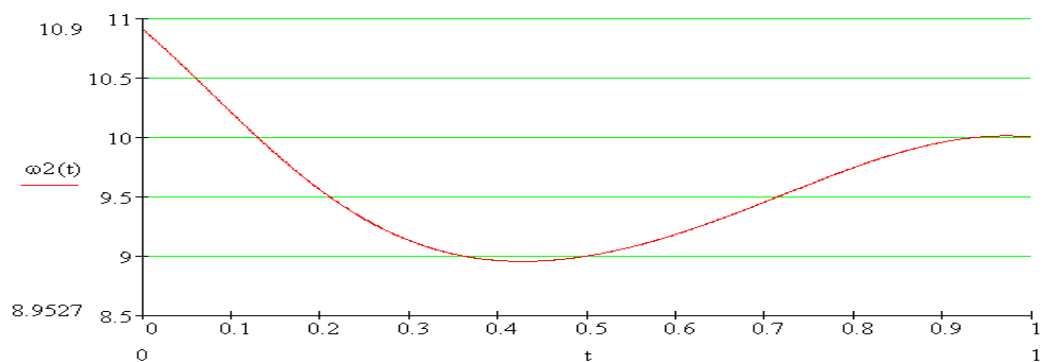


Рис. 3

$$\begin{aligned} \omega_1(0) &= 0.8, \omega_3(0) = -1.3 \\ \omega_1(1) &= -0.00000016293, \omega_3(1) = 0.00000005278 \end{aligned}$$

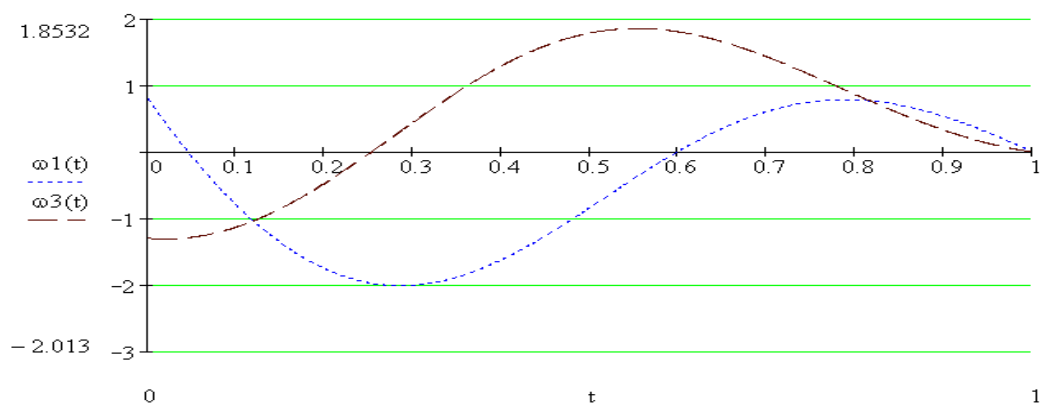


Рис. 4

На 17-ом шаге получены вектор $\mathbf{p}_{17}$ и соответствующее ему управление $u_{17}(t)$:

$$\mathbf{p}_{17}^* = (-0.993918277, -0.963725265, -8.150778573),$$

$$u_{17}(t) = -0.777921 + 0.574785887 \cos(-4.069784638 + 4.069784638t) -$$

$$-1.5281953524 \sin(-4.069784638 + 4.069784638t)$$

Графики управлений $u_0(t)$ и $u_{17}(t)$ представлены на рис. 5.

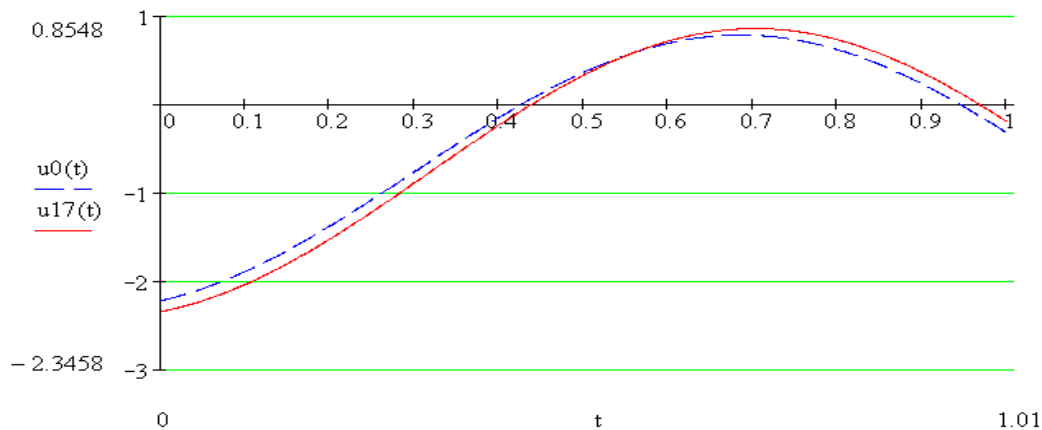


Рис. 5

При вычислении управления, решающего задачу, для констант в системе уравнений (5) выбраны следующие значения:

$$A_1 = 230, A_2 = 310, A_3 = 210, h = 1500.$$

Таким образом, из результатов данной работы и работы [6] следует возможность раскрутки, а затем и сохранения заданного равномерного вращения твердого тела с помощью спарки гиродинов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев В.Н., Вейнберг Д.М., Шереметьевский Н.Н. Управление угловым положением долговременной орбитальной станции при помощи двухстепенных силовых гироскопов. // Механика твердого тела – 1978. №5. – С.3 - 9.
2. Ковалев А.М., Щербак В.Ф. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – Киев: Наукова думка, 1993. – 236с.
3. Кеннеди Х. Применение гироскопического устройства для регулирования кинетического момента в системе управления угловой ориентацией космического аппарата // Ракетная техника и космонавтика. – 1963. – Т.1, вып.5. – с.109 - 120.
4. Хорошилов В.С. Движение тела с пространственной гиросиловой системой управления. // Механика твердого тела – 1984. №6. – С.11 - 17.

5. Смирнов Е.Я., Павлинов В.Ю., Щербаков П.П., Юрков А.В. Управление движением механических систем. – Л.: Издательство ЛГУ, 1985. – 313 с.

6. Гладун А.В. Управление вращательным движением твердого тела с помощью спарки гиродинов // Вестник Ульяновского государственного технического университета. – Ульяновск: УлГТУ, 2015. – № 4. – С. 49 – 52.

7. Гладун А.В. Об относительной управляемости динамических систем по линейному приближению. // Труды ИПММ НАН Украины. – 1998. – 2. – С. 21–31.

УПРАВЛЕНИЕ СПУСКОМ В АТМОСФЕРЕ БЕСПИЛОТНОГО ПЛАНИРУЮЩЕГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С КРЫЛОМ БОЛЬШОГО УДЛИНЕНИЯ

В.Т. Грумондз, Е.И. Карпежников, М.А. Полищук

АО «ГНПП «Регион», Каширское шоссе, 13А, г. Москва, Россия, 115230,
e-mail: V.grumondz@gmail.com

THE DESCEND IN THE ATMOSPHERE CONTROL FOR THE UNMANNED GLIDING AIRCRAFT WITH THE HIGH ASPECT RATIO WING

V.T. Grumondz, E.I. Karpezhnikov, M.A. Polishchuk

«Region» Scientific & Production Enterprise JSC, Kashirskoe highway, 13A,
Moscow, Russia, 115230, e-mail: V.grumondz@gmail.com

Keywords: high aspect ratio wing, unmanned gliding aircraft, navigation, dynamics of flight, guidance, navigation points, group flight.

Введение. Беспилотные планирующие крылатые летательные аппараты (БПК ЛА) к настоящему времени выделились в отдельный класс летательных аппаратов (ЛА), требующий специального исследования. К этому классу относятся космические ЛА, для которых траектории планирования являются одними из возможных, например, при спуске на землю; БПК ЛА, стартующие с самолетов-носителей с различными целями и др.

Главными задачами, которые приходится решать при выборе параметров и динамических характеристик БПК ЛА того или иного назначения, а также траекторий их полета, являются обеспечение точности попадания в заданную точку на земной поверхности (точку интереса); максимальной дальности полета от точки старта до точки цели; наилучших показателей маневренности; стабилизации движения БПК ЛА на начальном участке при малых скоростях и высотах старта и некоторые другие.

Существенные трудности решения перечисленных выше задач для БПК ЛА вытекают из особенностей аэродинамики и динамики аппаратов рассматриваемого класса, которые обусловлены следующими весьма существенными обстоятельствами: большим перепадом высот между начальной и конечной точками траектории; весьма жесткими требованиями к точности наведения на точку интереса; большими различиями между числами Маха на различных участках полета, в том числе на начальном и конечном участках траектории; существенными различиями аэродинамических характеристик при полете на различных участках траектории; отсутствием участков траектории, где движения являются установившимися в строгом смысле слова.

В работе рассматривается задача об управлении спуском в атмосфере и приведении в заданную точку пространства беспилотного планирующего летательного аппарата с крылом большого удлинения, имеющая большое число приложений. В работе построена математическая модель управляемого пространственного движения. Решены задачи выбора управлений, обеспечивающих: облет заданного конечного набора навигационных точек, расположенных на поверхности Земли; максимизацию длины проекции траектории полета на земную поверхность, в частности – максимизацию дальности полета летательного аппарата; минимизацию потерь суммарной энергии при движении до конечной точки траектории; максимизацию модуля вектора скорости и модуля траекторного угла подхода к цели; обход препятствий заданной конфигурации в плане на траектории движения к цели; согласованный полет к цели группы летательных аппаратов. Построены соответствующие конструктивные алгоритмы. Полученные результаты расчетов, позволяют говорить о существенном улучшении летно-технических характеристик на этапе управляемого планирования гипотетического летательного аппарата с крылом большого удлинения по сравнению с существующими в настоящее время, в том числе о значительном, порядка 70-80%, увеличении дальности его полета.

Будем называть множеством начальных состояний для заданного БПК ЛА, заданной конечной точки траектории $T_f^*(x_{g_f}^*, y_{g_f}^*, z_{g_f}^*)$, заданной ε -окрестности точки T_f^* и заданного конечного набора n точек $N = \{N_1, N_2, N_3, \dots, N_n\}$ трехмерного пространства $\{x_g, y_g, z_g\}$, $N_k \in \Upsilon$, где Υ – горизонтальная плоскость, содержащая точку T_f , такое множество $S_0 = \{V_{x_{g_0}}, V_{y_{g_0}}, V_{z_{g_0}}, x_{g_0}, y_{g_0}, z_{g_0}\}$ в пространстве $S = \{V_{x_g}, V_{y_g}, V_{z_g}, x_g, y_g, z_g\}$, $S_0 \subset S$, для любой точки S_0 которого ($s_0 \in S_0$) существует траектория L_s , такая, что

$$N_k \in \tilde{L}_s^r, k=1, \dots, n \quad (1)$$

$$\left[(x_{g_f} - x_{g_f}^*)^2 + (y_{g_f} - y_{g_f}^*)^2 + (z_{g_f} - z_{g_f}^*)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \quad (2)$$

где $\tilde{L}_s^r$ – проекция траектория L_s на горизонтальную плоскость Υ .

Точки $N_1, N_2, N_3, \dots, N_n$, а с ними и плоскость Υ , будем называть навигационными. Через S_k , $k=1, \dots, n$, обозначим точки на траектории L_s , $s_k \in L_s$, проекциями которых на плоскость Υ являются точки N_k , $k=1, \dots, n$.

Согласно данному выше определению, навигационные точки $N_1, N_2, N_3, \dots, N_n$ предполагаются динамически достижимыми. Это означает, что существуют управления, с помощью которых в процессе движения БПК ЛА проекция его траектории на навигационную плоскость будет пересекать некоторые достаточно малые окрестности этих точек. На практи-

ке требование динамической достижимости навигационных точек накладывает ряд весьма существенных ограничений на аэродинамические и динамические характеристики БПК ЛА, его конструктивные параметры и параметры его подсистем, а также параметры его траекторных и угловых движений. Тем самым множество S_0 предполагается множеством начальных точек всех динамически допустимых пространственных траекторий БПК ЛА, удовлетворяющих условиям (1), (2). Вопрос о динамической достижимости точек $N_1, N_2, N_3, \dots, N_n$ с точки зрения динамики полета, хотя и вне связи с оптимизацией траекторий, рассмотрен в работе [6].

Индексом f отмечены переменные, относящиеся к конечной точке траекторий БПК ЛА. Точки S_0 и T_f^* являются соответственно начальной и конечной точками каждой из возможных траекторий (их левым и правым концом). Точка N_0 является проекцией начальной точки S_0 на плоскость Υ . Точка N_{n+1} совпадает с точкой T_f^* , $N_{n+1} = T_f^*$.

Постановка задачи

Рассмотрим три задачи, постановки которых сформулированы ниже.

Задача 1. Для БПК ЛА заданной аэродинамической схемы построить вектор управления $u(x_g, y_g, z_g, V_{x_g}, V_{y_g}, V_{z_g}, \vartheta, \psi, \gamma, s_0, t)$ и множество

$S_0 : \{x_{g_0*} \leq x_{g_0} \leq x_{g_0**}, y_{g_0*} \leq y_{g_0} \leq y_{g_0**}, z_{g_0*} \leq z_{g_0} \leq z_{g_0**}, V_{0*} \leq V_0 \leq V_{0**}, \Theta_{0*} \leq \Theta_0 \leq \Theta_{0**}, \Psi_{0*} \leq \Psi_0 \leq \Psi_{0**}\}$ всех начальных состояний, для каждой точки $s_0 \in S_0$ которого существует такая устойчивая траектория, выходящая из этой точки, для которой выполняются условия (1), (2), а также условия

$$-\Theta_* \leq \Theta_f \leq -\Theta_{**}, \quad -\vartheta_* \leq \vartheta_f \leq -\vartheta_{**}, \quad V_f \geq V_*, \quad (3)$$

и на которой функционал $\Delta W = \sum_{k=0}^n \Delta W_k$, где $\Delta W_k = \Delta \Pi_k + \Delta K_k$ - суммарные потери потенциальной и кинетической энергии на каждом отрезке $\Lambda_k = [N_k, N_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n$, $N_{k+1} = T_f$, достигает минимума на множестве всех возможных траекторий, удовлетворяющих требованиям (1-3) и имеющих точки S_0 и T_f^* в качестве начальной и конечной точек.

Здесь ϑ, Θ соответственно углы тангажа и наклона траектории БПК ЛА.

Приведенная выше постановка задачи имеет ряд существенных особенностей, отличающих ее от традиционных. Первая из них состоит в том, что вместо единственной навигационной точки, обычно называемой точкой интереса (ТИ) или точкой цели, в момент начала движения, задается также и некоторый конечный набор из n промежуточных навигационных

точек (или областей в окрестности таких точек) на земной поверхности, которые БПК ЛА должен облететь в процессе движения прежде чем достигнет ТИ. Тем самым этот набор по существу является элементом закона управления и наведения БПК ЛА на точку интереса. Кроме того, требуется обеспечение достаточно жестких условий (3) на правом конце траектории и обеспечение стабилизации движений при управлении u на всех участках траектории полета. Наконец, еще одним усложнением по сравнению с рассмотренными к настоящему времени аналогичными задачами является то, что суммарная длина проекции на горизонтальную плоскость полученной траектории не может превышать максимальную дальность планирующего полета аппарата, обусловленную суммарной кинетической и потенциальной энергией, сообщенной ему в момент старта. Отмеченные особенности постановки требуют разработки принципиально новых алгоритмов расчета возможных областей применения БПК ЛА. Ниже приведены результаты решения задачи о построении множества начальных состояний при управляемом спуске БПК ЛА в атмосфере для случая подвижной точки интереса, являющейся одним из частных случаев приведенной общей постановки.

Укрупненный алгоритм построения области S_0 разбивается на следующие основные этапы.

Этап 1. Построение замкнутого множества M точек, в которых может оказаться ТИ при всех $t > t_0$ (область достижимости цели).

Этап 2. Построение такого подмножества L граничных точек Γ области M , достижение которого летательным аппаратом гарантирует достижение и всех остальных (внутренних и граничных) точек области M .

Построение подмножества L в реальных задачах может быть значительно осложнено «неудачным» заданием набора навигационных точек, например, последней из них. В том числе эта точка может быть расположена так, что некоторое подмножество L^* точек L окажется вообще недостижимым для БПК ЛА рассматриваемой конкретной схемы. В связи с этим возникает необходимость проведения третьего этапа алгоритма.

Этап 3. Выбор среди последовательности точек $N_n, N_{n-1}, N_{n-2}, \dots$ ближайшей к границе Γ , причем такой, для которой область L существует, и ее построение возможно осуществить алгоритмически.

Для реализации этого этапа алгоритма должны быть последовательно рассмотрены предыдущие навигационные точки ($(n-1)$ -я, $(n-2)$ -я, $(n-3)$ -я и т.д.), пока не будет найдена такая точка, которая обладает требуемыми свойствами.

Заметим, что этот третий этап алгоритма по существу сводит задачу покрытия всей области M достижимости цели к значительно более про-

стой задаче покрытия ее подмножества $L \subset \Gamma$. Нетрудно проследить некоторую аналогию между этим этапом предлагаемого алгоритма и алгоритмом формирования множества начальных состояний БПК ЛА в задаче о достижимости заданного набора навигационных точек, построенным в работе [6].

Этап 4. Выбор представительного набора точек $T_1, T_2, T_3, \dots$ дуги L , $L \subset \Gamma$, проведение для каждой из них расчета множества $S_1, S_2, S_3, \dots$ начальных состояний БПК ЛА.

Под представительностью здесь имеется в виду свойство набора точек $T_1, T_2, T_3, \dots$ с достаточной для практики полнотой отражать геометрические свойства границы (форму дуги, ее длину, ее кривизну в различных частях и т.д.), что необходимо в связи с дискретностью проводимых расчетов. То же относится и к расстояниям между точками $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$, которые могут выбираться в том числе и как постоянные числа и интерпретироваться как шаг вычислений.

Алгоритм построения каждого из множества начальных состояний $S_1, S_2, S_3, \dots$ в функции координат точек $T_1, T_2, T_3, \dots$ дуги L для рассматриваемой задачи базируется на выборе в качестве начальной точки расчета последовательно каждой из точек набора $T_1, T_2, T_3, \dots$.

Следующие этапы алгоритма аналогичны приведенным в работе [6], однако объем вычислений в рассматриваемой задаче существенно больше, чем в алгоритме работы [6].

Заключительным этапом формирования алгоритма, решающего рассматриваемую задачу, является построение множества $S = \bigcap S_k$, представляющего собой пересечение множеств S_k , построенных для каждой точки дуги и для заданного набора навигационных точек.

Рассмотрим теперь задачу 2. Будем считать, что выполнены условия задачи 1, однако не в отношении единичного БПК ЛА, а в отношении группы однородных БПК ЛА, стартующих последовательно в некоторые моменты времени движения точки старта. Более точно рассматриваемая задача формулируется следующим образом.

Задача 2. Пусть существует некоторое количество n БПК ЛА $B_1, B_2, \dots, B_i, \dots, B_n$; $i = 1, \dots, n$ каждый из которых начинает движение в своей начальной точке $s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_n$ в моменты времени $t_i = t_1 + (i-1)\Delta t, i = 1, \dots, n$. БПКЛА движутся в течение времени $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots, T_n$ каждый по своей траектории $L_1, L_2, \dots, L_i, \dots, L_n$. Все БПК ЛА имеют единую аэродинамическую схему. Начальные условия полета одинаковы для всех БПК ЛА $V_0 = V_1 = \dots = V_n$; $H_0 = H_1 = \dots = H_n$, где V_0, H_0 скорость и высота полета в точке начала движения каждого БПК ЛА.

Требуется для каждого i -го БПК ЛА заданной аэродинамической схемы сформировать траекторию L_i так, чтобы достижение точки интереса (ТИ) всеми БПК ЛА произошло в единый момент времени $T = t_1 + T_1 = t_2 + T_2 = \dots = t_n + T_n$. Величина промаха ε не должна превышать заданной величины ε^* , $\varepsilon \leq \varepsilon^*$, разница Δ во времени достижения всеми БПК ЛА ТИ не должна превышать заданной величины Δ^* , $\Delta \leq \Delta^*$. На всем протяжении полета потери суммарной энергии при совершении маневров для выдерживания заданной траектории для каждого БПК ЛА должны быть минимальны.

Построим алгоритм решения задачи.

Рассмотрим некоторую прямолинейную траекторию планирования L_B , берущую начало в точке $s = s_B$ и заканчивающуюся в ТИ. Для нее выполняется условие $L_{np} \leq K_{\max} H_0$, где L_{np} - проекция L_B на горизонтальную плоскость, $K_{\max}$ - максимальное аэродинамическое качество БПК ЛА. Примем траекторию L_B за базовую.

Предположим, что точка старта движется на постоянной высоте с постоянной скоростью. Угол между проекцией на горизонтальную плоскость базовой траектории и проекцией на горизонтальную плоскость траектории движения точки старта обозначим через τ , $\tau \in [0, 90^\circ]$ (рис.1).

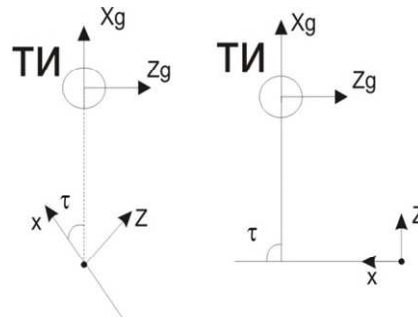


Рис. 1. Возможные направления движения точки старта

Естественно считать, что ТИ находится в передней полусфере по ходу движения точки старта. Формирование траекторий будем проводить с помощью выбора навигационных точек $N_{ij}(X_{ij}, Z_{ij})$, $i = 1, \dots, n$. Предположим, что из точки, движущейся в направлении ТИ, стартует некоторое количество БПК ЛА, причем интервалы между стартами БПК ЛА $\Delta t = \text{const}$ (алгоритм нетрудно обобщить на случай, когда интервалы времени различны). Проиллюстрируем решение поставленной задачи для случая формирования траектории полета каждого i -го БПК ЛА с помощью единственной навигационной точки $N_{i1}(X_{g_{i1}}, Z_{g_{i1}})$.

Выбор каждой НТ будем проводить по следующему алгоритму.

I. Значение координаты навигационной точки по оси OX_g рассчитывается как половина длины проекции базовой траектории полета (рис.2):

$$X_{g_{i1}} = \frac{1}{2}(L_B - L_{B_i}^*), i=1, \dots, n \quad (4)$$

где $L_{B_i}^*$ проекция на горизонтальную плоскость участка базовой траектории, пройденного носителем от точки $s_B(t_B)$ до точки старта очередного БПКЛА $s_i(t_i)$

$$L_{B_i}^* = V_0 t_{i+1} \cos(\tau); i=1, \dots, n \quad (5)$$

Выбор координаты навигационной точки по оси OX_g с помощью формулы (4) не является единственно возможным вариантом. В общем случае аналогичный алгоритм справедлив для любого $\tau \in [0, 90^\circ]$ (рис. 1). Проведенные расчеты показывают, что если $\tau=0$ и траектория построена по навигационной точке с координатой, полученной по формуле (4), БПКЛА будет выполнять наиболее пологий разворот, т.е. полет с наименьшим креном, что позволит минимизировать потери энергии при совершении этого маневра.

II. Значение координаты НТ по оси OZ_g выбирается в результате математического моделирования динамики пространственного движения БПКЛА путем расчета значений координаты Z_g с некоторым шагом ΔZ_g до тех пор, пока не выполняются условия $\varepsilon \leq \varepsilon^*, \Delta \leq \Delta^*$.

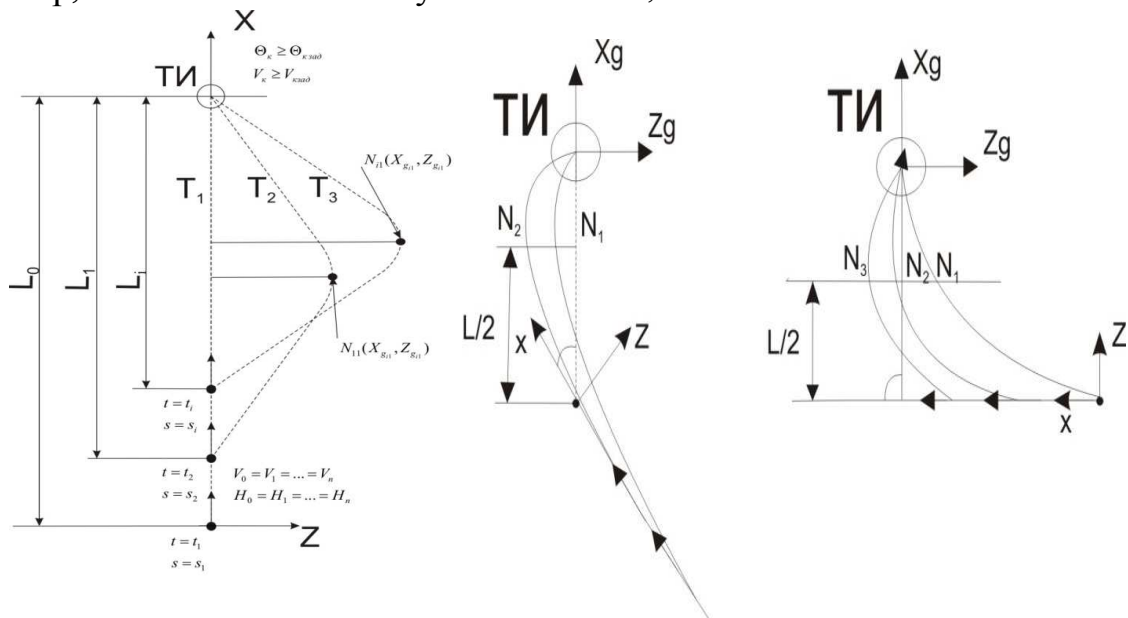


Рис. 2. К построению алгоритма согласованного полета группы БПКЛА

В результате реализации представленного алгоритма получим набор навигационных точек $N_{i1}(X_{g_{i1}}, Z_{g_{i1}})$, каждой из которых соответствует своя траектория L_i , на основе чего можно сформировать область, в которой бу-

дет существовать решение задачи совместного полета. Протяженность этой области равна $L_{B_n}^*$, ширина зависит от угла τ и динамических возможностей конкретного БПК ЛА. Например, при $\tau=0$ область будет представлять собой некоторый отрезок, в каждой точке которого будет существовать решение задачи совместного полета.

Для решения задачи и демонстрации работы алгоритма проведено математическое моделирование на примере модели динамики пространственного движения БПК ЛА, выполненного по нормальной аэродинамической схеме с Х-образным хвостовым оперением; на оперении установлены рулевые поверхности, на крыле – элероны. По результатам моделирования формируются таблицы значений координат навигационных точек $N_{in}(X_{g_{in}}, Z_{g_{in}})$ для заданных высотно-скоростных режимов (H, V) .

Проводя аппроксимацию по найденным координатам Z_{g_i} , получим функциональные зависимости $Z_g = f(t_i, V_0, H_0, \Delta, \varepsilon)$, с помощью которых можно получить координаты навигационных точек для любого БПК ЛА заданной аэродинамической схемы, стартующего в любой момент времени $t \in [t_1, t_n]$ (рис.3). С помощью полученных функциональных зависимостей возможно вычислить координаты НТ для любого i -го БПК ЛА.

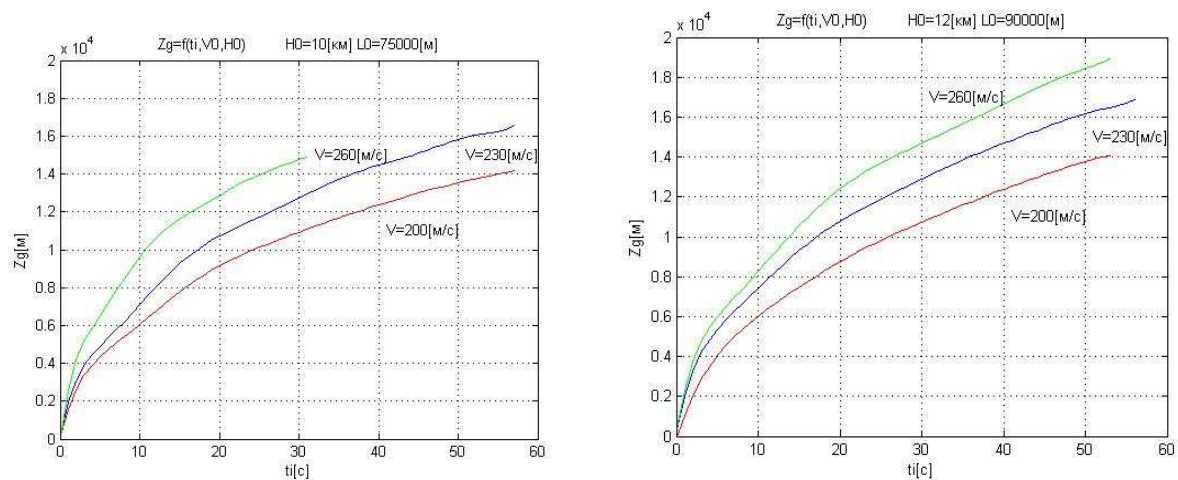


Рис. 3. Зависимость расположения навигационных точек от времени старта

Задача 3. Будем предполагать, что точка интереса скрыта за препятствием. Координаты препятствия и ТИ известны. Необходимо построить алгоритм облета препятствия и одновременного сбора в ТИ всех БПК ЛА, стартующих из некоторой точки.

Рассмотрим случай $\tau=0$, препятствие представим как бесконечный по высоте прямоугольный параллелепипед. Такая форма позволит учесть большинство возможных препятствий, как искусственных, так и естественных. Проекцией препятствия на горизонтальную плоскость является

прямоугольник некоторой площади с вершинами в точках с координатами $A(X_{g_1}, Z_{g_1}), B(X_{g_2}, Z_{g_2}), C(X_{g_3}, Z_{g_3}), D(X_{g_4}, Z_{g_4})$.

В зависимости от взаимного расположения препятствия и ТИ возможно выделить два варианта облета: а) ТИ находится на оси симметрии проекции назначенного параллелепипеда на горизонтальную плоскость; облетать препятствие можно с любой стороны или с двух сторон одновременно; б) ТИ смещена относительно оси симметрии проекции назначенного параллелепипеда; облетать препятствие необходимо со стороны, находящейся ближе к ТИ.

Построение траекторий полета, как и в задаче 1, осуществляется с помощью назначения навигационных точек, с той лишь разницей, что для облета препятствия необходимо строить траектории с использованием как минимум двух навигационных точек $N_{i1}(X_{g_{i1}}, Z_{g_{i1}}); N_{i2}(X_{g_{i2}}, Z_{g_{i2}}), i = 1, \dots, n$. Для каждой траектории каждого i -го БПК ЛА. При этом, в отличие от задачи 1, базовая траектория L_B является виртуальной.

Выбор каждой НТ осуществляется следующим образом:

I. Для каждой траектории зафиксируем значение координат навигационной точки по оси Ox_g . Они будут равны координатам x_g вершин заданного прямоугольника.

II. Координаты Z_g для обеих навигационных точек каждой i -ой траектории будут равны. Выбор значения координаты Z_g , как и в задаче 1, осуществляется путем перебора значения координаты Z_g , с шагом ΔZ_g .

Проводя аппроксимацию по найденным координатам Z_g , получим функциональные зависимости $Z_g = f(t_i, V_0, H_0, \Delta, \varepsilon)$, с помощью которых можно рассчитать координаты навигационных точек для любого БПК ЛА заданной аэродинамической схемы, стартующего в любой момент времени $t \in [t_1, t_n]$.

Результаты реализации алгоритма показывают что, при удалении навигационной точки по оси OZ_g от базовой траектории в направлении, нормальном к ней, увеличивается потребный радиус виража, а при достижении некоторой величины координаты $Z_{g_{i1}}$ критерий точности достижимости ТИ перестает выполняться. Размеры области, в которой существует решение задачи совместного полета, зависят от высоты и скорости старта, погрешностей Δ и ε , дальности до ТИ, маневренности БПК ЛА и его аэродинамического облика. Кроме того, на размеры этой области существенно влияют размеры препятствия и его расположение относительно ТИ и БПК ЛА в момент старта.

Построенные алгоритмы справедливы для БПК ЛА любых аэродинамических схем, что позволяет решать большой спектр задач динамики и наведения БПК ЛА, а также задачи выбора параметров БПК ЛА, удовлетворяющих условиям, заданным в постановке рассмотренных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грумондз В.Т., Половинкин В.В., Яковлев Г.А. Теория движения двусредных аппаратов. Математические модели и методы исследования. М.: Вузовская книга, 2012.
2. Грумондз В.Т., Яковлев Г.А. Алгоритмы аэрогидробаллистического проектирования. М.: Изд-во МАИ, 1994
3. Грумондз В.Т., Полищук М.А., Черторыжская С.С.. Синтез системы управления малого беспилотного планирующего летательного аппарата с крылом большого удлинения. Изв. ВУЗов. Авиационная техника, № 3, 2012 г с. 22-27
4. Грумондз В.Т., Полищук М.А., Черторыжская С.С. Выбор параметров аэродинамического и динамического облика беспилотного планирующего летательного аппарата. Вестник Московского авиационного института, том 19, № 4, 2012 г с. 5-12
5. Грумондз В.Т., Полищук М.А.. Динамика и выбор параметров аэродинамического облика беспилотного планирующего летательного аппарата. Сборник докладов Международной конференции «Восьмые Окуневские чтения», Санкт-Петербург, 25-28 июня 2013г, с. 318-320
6. Грумондз В.Т., Полищук М.А. Алгоритм формирования множества начальных состояний беспилотного планирующего ЛА в задаче о достижимости заданного набора навигационных точек. Вестник Московского авиационного института, том 20, № 3, 2013 г., с. 154-159
7. Грумондз В.Т., Полищук М.А. Задача наведения беспилотного планирующего летательного аппарата на подвижную цель. Вестник Московского авиационного института, том 21, № 4, 2014 г., с. 7-12

ОЦЕНКА СОСТОЯНИЯ НАСОСНОГО АГРЕГАТА

A.P. Губаев (КНИТУ-КАИ, Россия, 420111, Казань, К.Маркса, 10)

E-mail: almaz-ka4ek@mail.ru

ASSESSMENT OF THE STATE OF THE PUMP UNIT

A.R. Gubaev (KNRTU-KAI, 420111, Kazan,

K.Marx str., 10)

Keywords: pump unit, state estimation.

Введение. Рассматривается задача оценки состояния нефтяных насосов на испытательном стенде. Во время испытаний существует проблема точной оценки параметров насосного агрегата. Для правильной эксплуатации насоса необходимо знать, как изменяются напор, КПД и мощность, потребляемая насосом, при изменении его подачи, т. е. знать характеристику насоса, под которой понимается зависимость напора, мощности и КПД от производительности насоса при постоянной частоте вращения. На систему действуют большое количество вибраций и шумов. В связи с этим при построении диаграммы характеристик насоса для уточнения входных сигналов с датчиков предлагается использовать алгоритмы оценки состояния.

Построение напорно-расходной характеристики. Существуют теоретические и экспериментальные характеристики насосов. Теоретические характеристики рассчитывают по основным формулам с учетом поправок на предстоящие условия эксплуатации насоса. Более точные соотношения основных параметров насосов определяются в процессе стендовых испытаний готовых насосов или их экспериментальных моделей. Достоверность построения напорно-расходной характеристики существенным образом зависит от точности определения основных параметров насоса. Прежде чем зафиксировать параметры напора и мощности насоса, необходимо установить определенный расход с помощью регулирования задвижки. После установки расчетного расхода фиксируют установившиеся значения основных параметров. Значения КПД получают расчетным путем согласно формуле:

$$\eta_H = \frac{g\rho QH}{1000P_H} \quad (1)$$

где ρ – плотность жидкости, Q – подача насоса, H – напор насоса, P_H – мощность насоса.

После записи всех данных значение напора и мощности фиксируют в следующей расчетной точке. На рис. 1 представлены график зависимости

напора H и расхода Q от времени. На рисунке хорошо видны установившиеся значения расчетных точек.

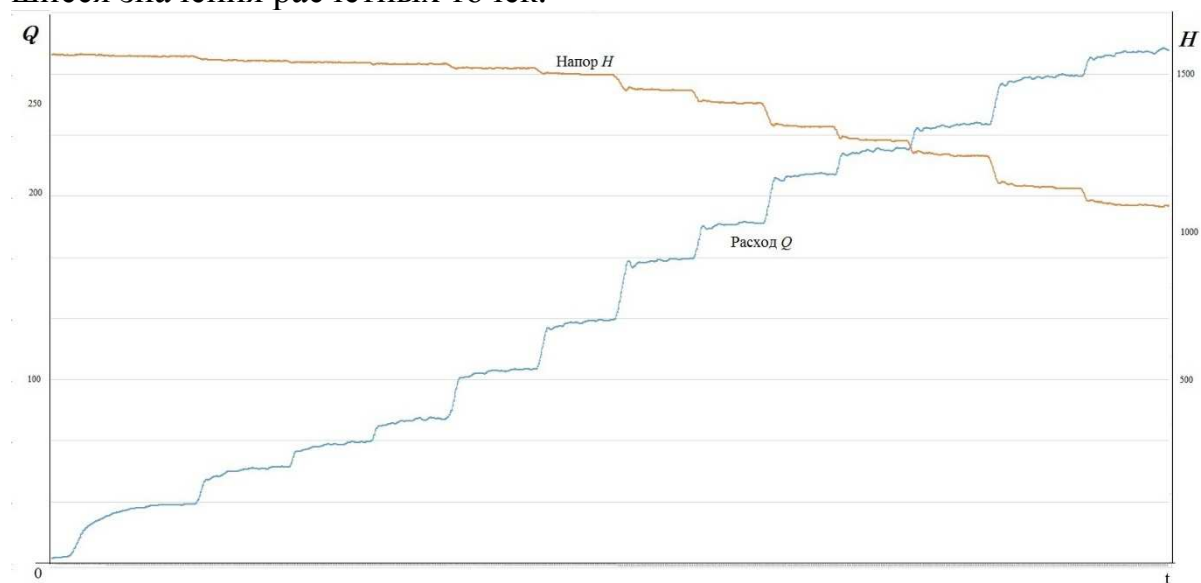


Рис.1 Зависимость напора H и расхода Q от времени

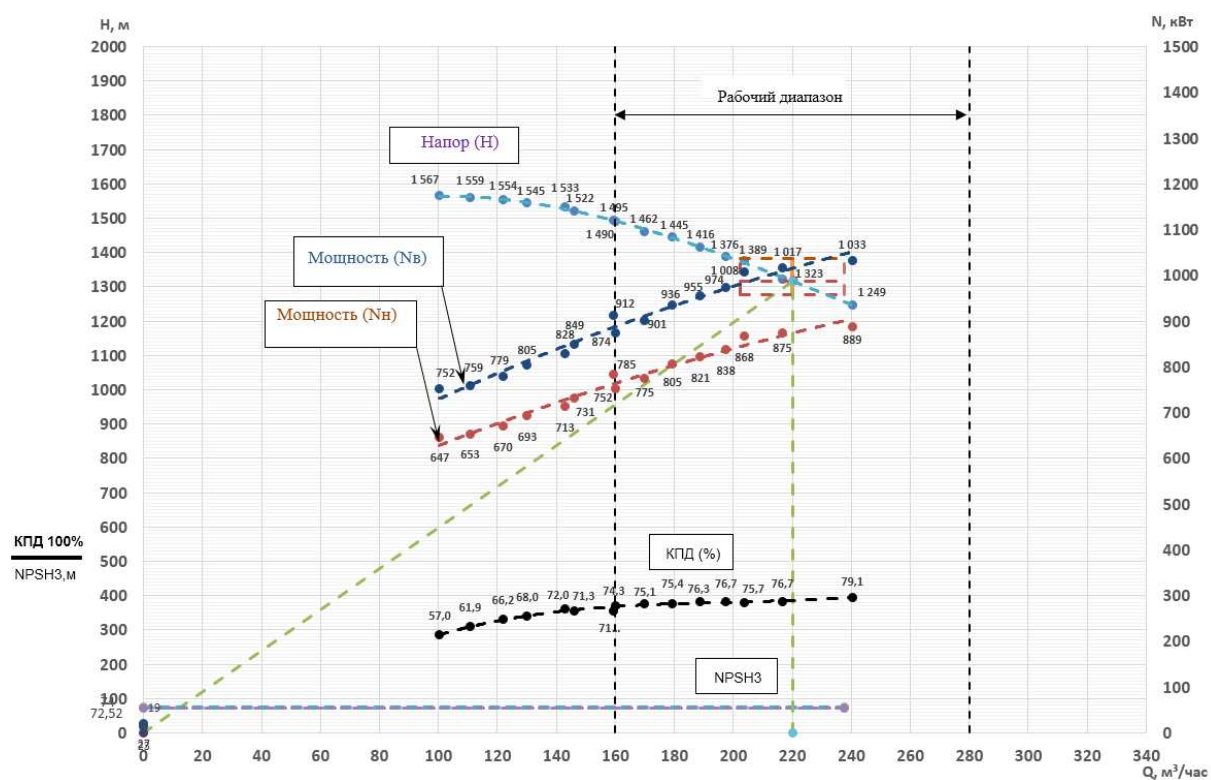


Рис.2 Напорно-расходная характеристика насоса ЦНС 220-1422-М5

Все полученные параметры в заданном масштабе наносятся на сетку координат. Соединяя плавной кривой линией все полученные при испытаниях точки, получают линии характеристик (рис.2). Напорно-расходная

характеристика является одним из основных показателей динамических свойств насоса, поэтому задача точного построения кривой является весьма актуальной.

Во время стендовых испытаний, вследствие влияния помех и вибраций, данные с датчиков оказываются зашумленными. Для корректировки данных с датчиков, предлагается использовать алгоритмы оценки состояния. Одним из методов, которым можно решить данную проблему, является метод наименьших квадратов.

Пусть требуется оценить состояние статической системы, используя измерение z , которое связано с состоянием x формулой:

$$z = Nx + v \quad (2)$$

где v – погрешность измерений, x – измеряемый параметр, который определяется по методу наименьших квадратов. Уравнение ошибки будет иметь вид

$$E = x - \bar{x} \quad (3)$$

где $\bar{x}$ – априорная оценка параметра x . Будем считать, что v – некая случайная величина с известной дисперсией δ_v^2 . В этом случае можно предположить, что

$$M[E] = 0 \quad (4)$$

$$M[E^2] \rightarrow \min$$

Предположим, что до измерения известна некоторая априорная оценка $\bar{x}$.

Апостериорную оценку, полученную с учетом измерения, обозначим как $\hat{x}$. Для определения $\hat{x}$ используем функционал

$$I[x] = \frac{1}{2} \left[\frac{(x - \bar{x})^2}{\delta_x^2} + \frac{(z - Nx)^2}{\delta_v^2} \right] \rightarrow \min_x \quad (5)$$

где $\hat{x}$ – значение x , минимизирующее функционал, т.е. $I[\hat{x}] = \min_x [I(x)]$.

Исходя из условия $\frac{dI}{dx} = 0$ запишем

$$\begin{aligned} \frac{x - \bar{x}}{\delta_x^2} + \frac{z - Nx}{\delta_v^2} &= 0 & \frac{\hat{x}}{\delta_x^2} - \frac{N\hat{x}}{\delta_v^2} &= \frac{\bar{x}}{\delta_x^2} - \frac{z}{\delta_v^2} \\ \hat{x} \left(\frac{1}{\delta_x^2} - \frac{N}{\delta_v^2} \right) &= \frac{\delta_v^2 \bar{x} - \delta_x^2 z}{\delta_x^2 \delta_v^2} & \hat{x} (\delta_v^2 - N\delta_x^2) &= \delta_v^2 \bar{x} - \delta_x^2 z \\ \hat{x} &= \frac{\delta_v^2 \bar{x} - \delta_x^2 z}{\delta_v^2 - N\delta_x^2} \end{aligned}$$

$$\hat{x} = \bar{x} - \frac{\delta_x^2(z - N\bar{x})}{\delta_v^2 - N\delta_x^2} \quad (6)$$

Таким образом получили связь априорной оценки с оценкой, полученной с учетом измерений (апостериорной оценкой).

Выводы

В данной работе представлен обзор возможного применения алгоритма оценки состояния методом наименьших квадратов для уточнения данных с датчиков во время стендовых испытаний для построения более точной напорно-расходной характеристики насоса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дегтярев Г.Л. Оценивание состояния статических систем.
2. Основные принципы подбора насосов. Расчет насосов. Электронный ресурс: http://www.ence-pumps.ru/podbor_raschet_nasosov.php

О ЗАДАЧЕ ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ

М.И. Гусев (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского,
Уральское отделение Российской академии наук, ул. С. Ковалевской, 16,
г. Екатеринбург, 620990, Россия)
E-mail: gmi@imm.uran.ru

И.В. Зыков (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского,
Уральское отделение Российской академии наук, ул. С. Ковалевской, 16,
г. Екатеринбург, 620990, Россия)
E-mail: zykoviustu@mail.ru

ON THE REACHABILITY PROBLEM FOR NONLINEAR SYSTEM WITH INTEGRAL CONSTRAINTS ON CONTROL

M.I. Gusev (N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, Ural
Branch of the Russian Academy of Sciences, S. Kovalevskaya str., 16,
Ekaterinburg, 620990, Russia)

I.V. Zykov (N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics named,
Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, S. Kovalevskaya str., 16,
Ekaterinburg, 620990, Russia)

Keywords: control system, integral constraints, reachable set, maximum principle.

1. Введение и постановка задачи

В работе рассматривается задача описания граничных точек множества достижимости управляемой системы с интегральными ограничениями на управление. Задачи управления в системах с интегральными ограничениями были предметом многих исследований (см., например, [1,2]). Игровые постановки задач управления с интегральными ограничениями на управления игроков рассматривались в [3,4]. Свойства множеств достижимости в нелинейных системах с интегральными ограничениями и алгоритмы их построения изучались в [5-8].

В данной работе показано, что управление, удовлетворяющее интегральным ограничениям и переводящее систему на границу множества достижимости, является локальным решением некоторой задачи оптимального управления. Этот факт позволяет для отыскания точек множеств достижимости применять соотношения принципа максимума Понтрягина и теорию дифференциальных уравнений и неравенств Гамильтона-Якоби [9,10].

Будем далее использовать следующие обозначения. Для вещественной матрицы A через A^T мы обозначаем транспонированную матрицу, 0 обозначает нулевой вектор подходящей размерности, либо нулевую матрицу, либо число ноль. Символом I будем обозначать единичную матрицу. Для $x, y \in \mathbb{R}^k$ $(x, y) = x^T y$ – скалярное произведение векторов,

$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ – евклидова норма в конечномерном пространстве, $B_r(\bar{x})$: $B_r(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| \leq r\}$ шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $\bar{x}$, x^i – вектор с индексом i , а x_j – j -я координата вектора x . Для вещественной прямоугольной $k \times m$ матрицы A через $\|A\|_{k \times m}$ обозначаем норму матрицы, подчиненную евклидовым нормам векторов. Для $S \subset \mathbb{R}^n$ символом ∂S обозначаем границу S , $\frac{\partial g}{\partial x}(x)$ – матрица Якоби отображения $g(x)$.

Через L_1 , L_2 и C будем обозначать, соответственно, пространства суммируемых, суммируемых с квадратом и непрерывных вектор-функций на $[t_0, t_1]$. Нормы в этих пространствах будем обозначать символами $\|\cdot\|_{L_1}$, $\|\cdot\|_{L_2}$, $\|\cdot\|_C$.

Известно [11, гл.4, т.3], что управление $u(t)$, переводящее траекторию $x(t)$ управляемой системы

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad x(t_0) = x^0, \quad (1.1)$$

($x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$ при п.в. $t \in [t_0, t_1]$, Ω – произвольное ограничивающее множество, не обязательно компактное) в точку $x(t_1)$, лежащую на границе множества достижимости $G(t_1)$ в момент t_1 , удовлетворяет принципу максимума Понтрягина.

Форма принципа максимума в [11] отвечает задаче терминального управления. Для линейных систем условия являются необходимыми и достаточными. Для нелинейных систем условие принципа максимума не является достаточным для перевода траектории на границу множества достижимости. Кроме того, неясно, является ли в общем случае управление, полученное из условий принципа максимума, решением какой-либо задачи оптимального управления.

Далее мы будем рассматривать управляемые системы с интегральными ограничениями на управление. Начнем со случая линейной управляемой системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x^0, \quad (1.2)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, $A(t)$, $B(t)$ – суммируемые на $[t_0, t_1]$ матричные функции. В качестве управлений рассматриваются функции из простран-

ства L_2 . Ограничения на управление пусть заданы интегральным неравенством

$$u(\cdot) \in U = \{u(\cdot) \in L_2 : J(u(\cdot)) = \|u(\cdot)\|_{L_2}^2 = \int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2 dt \leq \mu^2\}, \quad (1.3)$$

где $\mu > 0$ – заданная константа.

Пусть $G(t_1)$ – множество достижимости системы (1.2) в момент t_1 при ограничениях (1.3). Система (1.2) вполне управляема на $[t_0, t_1]$ в том и только том случае, когда $G(t_1)$ – невырожденный эллипсоид.

Известно (см. [12, assertion 1]), что для вполне управляемой линейной системы (1.2) управление $u(\cdot) \in U$ переводит траекторию в точку $x^1 \in \partial G(t_1)$ тогда и только тогда, когда $u(\cdot)$ минимизирует функционал J при дополнительном ограничении $x(t_1) = x^1$ и величина минимума функционала J равна μ^2 .

В настоящей статье получен аналог приведенной характеристики граничных точек множеств достижимости (в части необходимых условий) для нелинейных систем с интегральными ограничениями на управление. Мы далее будем рассматривать управляемые системы вида

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad x(t_0) = x^0, \quad (1.4)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^r$ – управляющий параметр, $f_1 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f_2 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$ – непрерывные отображения, с интегральными ограничениями на управление, заданными неравенством (1.3).

Будем предполагать, что функции f_1 и f_2 непрерывно дифференцируемы по x , а также удовлетворяют, соответственно, условиям подлинейного роста и ограниченности:

$$\|f_1(t, x)\| \leq l_1(t)(1 + \|x\|), \quad (1.5)$$

$$\|f_2(t, x)\|_{n \times r} \leq l_2(t), \quad (1.6)$$

Решением (траекторией) системы (1.4), отвечающим управлению $u(\cdot) \in L_2$, будем называть абсолютно непрерывную функцию $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которой равенство (1.4) выполняется для почти всех $t \in [t_0, t_1]$.

Определение 1. Множеством достижимости $G(t_1)$ системы (1.4) будем называть совокупность всех концов траекторий $x(t_1)$ в $\mathbb{R}^n$, отвечающих управлениям из U .

Рассмотрим задачу оптимального управления для системы (1.4)

Задача 1.

$$J(u) \rightarrow \min, \quad u(\cdot) \in L_2, \quad x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1. \quad (1.7)$$

Управление $u(\cdot) \in L_2$, удовлетворяющее ограничению задачи 1, назовем допустимым управлением.

Определение 2. Допустимое управление $u(\cdot)$ доставляет локальный минимум функционалу $J(u)$ в задаче 1, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого допустимого $v(\cdot)$ такого, что $\|u(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2} < \varepsilon$ имеет место неравенство $J(u) \leq J(v)$.

Определение 3. Пусть $u(t)$ – управление из L_2 , $x(t)$ – отвечающая этому управлению траектория. Систему

$$\delta \dot{x} = A(t)\delta x + B(t)\delta v,$$

где $A(t) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(t, x(t)) + \frac{\partial}{\partial x}[f_2(t, x(t))u(t)]$, $B(t) = f_2(t, x(t))$ назовем линеаризацией системы (1.4) вдоль пары $(x(t), u(t))$.

Далее показано, что любое управление, переводящее траекторию системы из начального состояния на границу множества достижимости, доставляет локальный минимум в задаче 1, если линеаризованная вдоль пары $(x(t), u(t))$ система вполне управляема. Этот результат распространен на системы с совместными ограничениями на управление и траекторию, и задачу характеристики граничных точек проекции множества достижимости на подпространство.

2. Вспомогательные результаты

Утверждение 1. Пусть функции $f_1(t, x)$, $f_2(t, x)$ непрерывны, непрерывно дифференцируемы по x и удовлетворяют условиям (1.5) и (1.6). Тогда для любого $u(\cdot) \in L_2$ система (1.4) имеет, и притом единственное, решение $x = x(t)$, определенное на всем отрезке $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Рассуждения аналогичны доказательству [13, гл.6, §1, т.1] при несколько иных предположениях.

Приводимые далее утверждения доказаны в [14].

Утверждение 2. Пусть функции $f_1(t, x)$, $f_2(t, x)$ удовлетворяют условиям утверждения 1. Тогда множество траекторий системы (1.4) компактно в пространстве $C = C[t_0, t_1]$.

Замечание 1. Аналогичный результат доказан также в [7] при несколько иных предположениях.

Утверждение 3. Пусть $u^p(\cdot) \in U$ есть последовательность управлений из L_2 , а $x^p(\cdot)$ последовательность траекторий, соответствующая последовательности $u^p(\cdot)$. Если $u^p(\cdot) \rightarrow u(\cdot)$, $p \rightarrow \infty$ в L_2 , то $x^p(\cdot) \rightarrow x(\cdot)$ в C , где $x(\cdot)$ – траектория, отвечающая $u(\cdot)$.

Справедлива

Лемма 1. Если $u^m(\cdot) \rightarrow u(\cdot)$ в L_2 и пара $(A(t), B(t))$, отвечающая управлению $u(\cdot)$, вполне управляема, то, начиная с некоторого t , пара $(A_m(t), B_m(t))$ будет вполне управляемой.

3. Экстремальные свойства граничных точек множества достижимости

Определим отображение $F : L_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ следующим образом

$$Fu(\cdot) = x(t_1),$$

где $x(t)$ – траектория системы (1.4), отвечающая $u(\cdot)$. Справедлива

Лемма 2. [14] Пусть функции $f_1(t, x)$, $f_2(t, x)$ непрерывны, непрерывно дифференцируемы по x и удовлетворяют условиям (1.5) и (1.6). Тогда функция F непрерывно дифференцируема по Фреше для $\forall u(\cdot) \in L_2[t_0, t_1]$, ее производная Фреше $F' : L_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ определена равенством

$$F'(u(\cdot))\delta u(\cdot) = \delta x(t_1). \quad (3.8)$$

Здесь $\delta x(t)$ – решение линеаризованной вдоль $(u(t), x(t))$ системы (1.4), отвечающее управлению $\delta u(t)$ и нулевому начальному условию.

Непрерывность производной следует из леммы 1.

Теорема 1. [14] Пусть:

- 1) $x^1 \in \partial G(t_1)$, где $\partial G(t_1)$ – граница множества достижимости;
- 2) $u(\cdot) \in U$ – управление, переводящее систему из $x(t_0) = x^0$ в $x(t_1) = x^1$, $x(t)$ – отвечающая этому управлению траектория;
- 3) Линеаризованная вдоль $(x(t), u(t))$ система (1.4) вполне управляема на $[t_0, t_1]$;

Тогда управление $u(t)$ доставляет локальный минимум в задаче 1 и величина минимума $J(u(\cdot)) = \mu^2$.

4. Множества достижимости при совместных интегральных ограничениях на управление и траекторию

Далее мы рассматриваем систему (1.4) с интегральными ограничениями на управление и траекторию, заданными неравенством

$$u(\cdot) \in U = \{u(\cdot) \in L_2 : J(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (Q(t, x(t)) + u^T(t)R(t)u(t)) dt \leq \mu^2\}, \quad (4.9)$$

где $Q(t, x)$ неотрицательная непрерывная функция, а $R(t)$ положительно-определенная матрица, непрерывно зависящая от t .

Определим линейное отображение $P_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ($k < n$) следующим образом: $y = P_k x$, где матрица $P_k = \begin{bmatrix} I_{k \times k} & O_{k \times (n-k)} \end{bmatrix}$. Таким образом, y состоит из первых k координат вектора x .

Матрицу P_k , которая осуществляет переход от $x \in \mathbb{R}^n$ к $y \in \mathbb{R}^k$, назовем *матрицей проектирования* на подпространство первых k координат. Проекцией множества достижимости $G_{1k}(t_1)$ системы (1.4) на подпространство первых k координат в момент времени t_1 будем называть совокупность векторов $y(t_1)$ в $\mathbb{R}^k$ вида $y(t_1) = P_k x(t_1)$, где $x(t)$ – траектории системы (1.4), отвечающие управлению из U . Если $G(t_1)$ множество достижимости, то $G_{1k}(t_1) = P_k G(t_1)$.

Линейная система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t); \quad t \in [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x^0, \quad (4.10)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, $A(t)$, $B(t)$ – суммируемые на $[t_0, t_1]$ матричные функции, называется вполне управляемой на подпространстве первых k координат (управляемой по выходу $y = P_k x$) на $[t_0, t_1]$, если для любого $y^1 \in \mathbb{R}^k$ существует управление такое, что $y^1 = P_k x(t_1)$.

Определим симметричную матрицу $V(t_0, t)$ равенствами

$$V(t_0, t) = P W(t_0, t) P^T, \quad W(t_0, t) = \int_{t_0}^t X(t, \tau) B(\tau) B^T(\tau) X^T(t, \tau) d\tau,$$

здесь $X(t, \tau) = \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau)$ – матрица Коши однородной системы, $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица, удовлетворяющая уравнению $\dot{\Phi}(t) = A(t) \Phi(t)$, $\Phi(t_0) = I$, $W(t_0, t)$ – грамиан управляемости.

Система (4.10) вполне управляема по выходу $y = P_k x$ в том и только том случае, когда $V(t_0, t)$ положительно определена.

Справедливы следующие утверждения

Лемма 3. Если $u^m(\cdot) \rightarrow u(\cdot)$ в L_2 и пара $(A(t), B(t))$, отвечающая управлению $u(\cdot)$, вполне управляема по выходу $y = P_k x$, то, начиная с некоторого m , пара $(A_m(t), B_m(t))$ будет вполне управляемой.

Лемма 4. Пусть функции $f_1(t, x)$, $f_2(t, x)$ удовлетворяют условиям утверждения 1, а ограничения на управление и траекторию заданы неравенством (4.9). Тогда множество траекторий системы (1.4) компактно в пространстве $C = C[t_0, t_1]$ а проекция множества достижимости $G_{1k}(t_1)$

компактна в $\square^k$. Функционал $J(u(\cdot))$ определенный в соотношении (4.9) непрерывен в L_2 .

Доказательство утверждения с небольшими изменениями повторяет доказательство утверждения 2 в [14].

Теорема 2. Пусть:

1) $y^1 \in \partial G_{1k}(t_1)$ – граничная точка проекции множества достижимости, где $\partial G_{1k}(t_1)$ – граница проекции множества достижимости;

2) $u(\cdot) \in U$ – управление, переводящее систему (1.4) из $x(t_0) = x^0$ в точку $x(t_1)$ такую, что $P_k x(t_1) = y^1$, где $x(t)$ – соответствующая траектория;

3) Линеаризованная вдоль $(x(t), u(t))$ система (1.4) управляема по $y = P_k x$ на $[t_0, t_1]$;

Тогда управление $u(\cdot) \in L_2$ доставляет локальный минимум функционалу $J(u(\cdot))$ при ограничениях $x(t_0) = x^0$, $P_k x(t_1) = y^1$ и величина $J(u(\cdot)) = \mu^2$.

Доказательство. Определим отображение $H : L_2 \rightarrow \square^k$ следующим образом $Hu(\cdot) = P_k x(t_1)$, где $x(t)$ – траектория системы (1.4), отвечающая $u(\cdot)$. Тогда $Hu(\cdot) = P_k F u(\cdot)$, откуда и из леммы 2 следует, что H имеет непрерывную производную Фреше $H'(u(\cdot))\delta u(\cdot) = P_k \delta x(t_1)$, где через δx обозначено решение линеаризованной системы. Если линеаризованная система вполне управляема по выходу $y = P_k x$, то $\text{Im } H'(u(\cdot)) = \square^k$. Далее доказательство будем вести от противного. Пусть найдется $u(\cdot)$, переводящее систему из $x(t_0) = x^0$ в $P_k x(t_1) = y^1$, которое не является локально оптимальным. Значит $\forall p \in \square \quad \exists u^p(\cdot)$ такое, что

$$\|u(\cdot) - u^p(\cdot)\|_{L_2} < \frac{1}{p}, \quad J(u^p(\cdot)) < J(u(\cdot)),$$

либо $J(u(\cdot)) < \mu^2$. Тогда найдется последовательность $u^p(\cdot) \rightarrow u(\cdot)$, $p \rightarrow \infty$ в L_2 такая, что $P_k x(t_1) = y^1$ и $J(u^p(\cdot)) < \mu^2$. Выберем p настолько большим, чтобы пара $(A_p(t), B_p(t))$, отвечающая линеаризованной системе, была управляемой по выходу $y = P_k x$. Обозначим $\delta = \mu^2 - J(u^p(\cdot)) > 0$. В силу непрерывности $J(u(\cdot))$ в точке $u^p(\cdot)$ найдется $r_0 > 0$ такое, что из $\|u^p(\cdot) - v(\cdot)\| \leq r_0$ следует $|J(v(\cdot)) - J(u^p(\cdot))| < \frac{\delta}{2}$, следовательно

$J(v(\cdot)) \leq \mu^2 - \frac{\delta}{2}$. В силу условия $\text{Im } H'(u^p(\cdot)) = \square^k$ по теореме Грейвса [15, с.105] $\exists m$ такое, что для всех достаточно малых $0 < r < r_0$ имеет место

включение $B(y^1, mr) \subset H(B(u^p(\cdot), r))$. Так как $\forall v(\cdot) \in B(u^p(\cdot), r)$ имеем $J(v(\cdot)) \leq \mu^2 - \frac{\delta}{2}$, то $B(u^p(\cdot), r) \subset U$. Таким образом, $B(y^1, mr) \subset HU = G_{1k}(t_1)$, т.е. $y^1 \notin \partial G_{1k}(t_1)$. Теорема доказана.

При выполнении условий теоремы 2 любое управление, переводящее систему на границу проекции множества достижимости, удовлетворяет принципу максимума. В докладе приводятся результаты численного моделирования применительно к задаче построения границы множества достижимости для нелинейной системы 3-го порядка [16,17] при интегральных ограничениях на управление.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект №16-11-10146.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
3. Ушаков В.Н. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Прикладная математика и механика. 1972. Т. 36. № 1. С. 15.
4. Ухоботов В.И. Об одном классе дифференциальных игр с интегральными ограничениями // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41, № 5. С. 819.
5. Polyak B.T. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under l2 bounded controls // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis 11. 2004. С. 255-267.
6. Huseyin N., Huseyin A. Compactness of the set of trajectories of the controllable system described by an affine integral equation // Applied Mathematics and Computation 219. 2013. P. 8416-8424.
7. Guseinov Kh. G., Nazlipinar A. S. Attainable sets of the control system with limited resources // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 261-268.
8. Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls // Nonlinear Differential Equations and Applications. 2007. Vol. 14, no. 1-2. P. 57-73.

9. Куржанский А. Б. Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона-Якоби в теории управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. , С. 173–183.
10. Гусев М.И. Внешние оценки множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Автоматика и телемеханика, № 3, 2012, с. 39-51.
11. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
12. Gusev M.I., Zykov I.V. A numerical method for solving linear–quadratic control problems with constraints // Ural Mathematical Journal. 2016. Vol. 2, no. 2. P. 108-116.
13. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал пресс, 2002. 824 с.
14. Гусев М. И., Зыков И. В. Об экстремальных свойствах граничных точек множеств достижимости управляемых систем при интегральных ограничениях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 1.
15. Иоффе А.Д. Метрическая регулярность и субдифференциальное исчисление // Успехи математических наук. 2000. С. 103-162.
16. Cockayne E. J., Hall G. W. C. Plane motion of a particle subject to curvature constraints // SIAM J. Control. 1975. Vol. 13, no. 1. P. 197-220.
17. Пацко В. С., Пятко С. Г., Федотов А. А. Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 320-328.

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ДЛЯ СБОРКИ МУСОРА В ОКОЛОЗЕМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Г.Л. Дегтярев, Б.А. Старостин, Р.Н. Файзутдинов

(КНИТУ-КАИ, Россия, 420111, К.Маркса, 10)

E-mail: rstfm@rambler.ru

TRAJECTORY PLANNING METHODS AND ALGORITHMS FOR SPACE DEBRIS REMOVAL

G.L. Degtyarev, B.A. Starostin, R.N. Faizutdinov

(KNPTU-KAI, 420111, Kazan, K.Marx str., 10)

Keywords: trajectory planning, space debris removal

Введение. В настоящее время техногенное загрязнение околоземного космического пространства (ОКП) стало существенным негативным фактором в его практическом освоении. С момента запуска первого советского спутника в 1957 г. по настоящее время системами контроля космического пространства США и России было зарегистрировано и каталогизировано около 40 000 космических объектов (КО) искусственного происхождения [1]. Это объекты размером более 10...30 см. Примерно 25 000 из них снизились под действием атмосферы настолько, что достигли плотных слоёв верхней атмосферы, разрушились и сгорели. Остальные, около 14 000, продолжают оставаться в космосе. Вследствие огромного запаса кинетической энергии столкновение любого из этих объектов с действующим космическим летательным аппаратом может повредить его или даже вывести из строя. Примером может послужить первый случай столкновения искусственных спутников: «Космос-2251» и «Иридиум-33», произошедший 10 февраля 2009 года. В результате оба спутника полностью разрушились, образовав свыше 600 обломков.

В настоящее время космический мусор (КМ) разных типов распределен в ОКП крайне неравномерно. Наиболее засорены те области орбит вокруг Земли, которые чаще всего используются для работы космических аппаратов. Это низкие околоземные орбиты (НОО), геостационарная орбита (ГСО) и солнечно-синхронные орбиты (ССО). В настоящее время в районе НОО вплоть до высот около 2000 км находится, по разным оценкам, порядка 220 тыс. техногенных объектов общей массой до 5000 тонн.

Несмотря на то, что фрагменты разрушений количественно превосходят все типы КМ, на цельные (не разрушенные) космические аппараты (КА) и ракеты-носители (РН) приходится наибольшая доля суммарной площади поперечного сечения и массы КМ, т.е. это наиболее опасные КО. Потенциальные столкновения с ними имеют наибольшую вероятность,

а последствия столкновений не идут ни в какое сравнение со всеми остальными: образуется гигантское количество обломков и осколков самых различных размеров и масс, постепенно охватывающих широкий, непрерывно расширяющийся спектр орбит. Причем большое количество крупных обломков способно к дальнейшим катастрофическим столкновениям. Дональд Кесслер из Джонсоновского космического Центра НАСА первым обратил внимание на то, что при достижении определенной критической плотности мусора в той или иной орбитальной области в результате все возрастающего числа столкновений может начаться процесс образования вторичных осколков, т.е. так называемый «каскадный эффект», или «синдром Кесслера». Таким образом, отработавшие КА и РН сильно увеличивают долгосрочный потенциал столкновений.

В 1990-х гг. уже существовали отдельные орбитальные области, в которых пространственная плотность КМ превышала критический уровень [2]. Еще в 1993 г. Э. Поттер [3] привел свидетельства уже начавшегося каскадного процесса в некоторых областях орбит, в частности, на высотах между 900 и 1000 км.

Для уменьшения риска столкновений в ОКП необходимо разработать комплекс мер по снятию с орбит крупных КО, прежде всего, в низкоорбитальной области, и перевод на орбиты захоронения крупных КО на ГСО и ССО. Принудительное снятие КО с орбит обходится сравнительно недорого для низко орбитальных КО или КО на эллиптических орбитах с низким перигеем. С ростом высоты их стоимость неприемлемо возрастает. В этом случае более оправдан перевод выработавших ресурс КА на орбиты захоронения, где они уже не представляют угрозы для действующих КА. Такие орбиты должны отстоять достаточно далеко от рабочих, чтобы естественные возмущения не вернули их вскоре назад.

Принудительный ввод КА и РН в атмосферу и перевод КА на орбиты захоронения может быть выполнен самими КО. Однако многие КА и РН не имеют собственных систем ориентации и коррекции орбит. Могут также понадобиться более мощные системы энергоснабжения, сложные командные системы для длительного сохранения работоспособности и возможности выполнения маневров торможения. Чтобы иметь возможность выполнять такого типа маневры, традиционные проекты КА и РН нуждаются в соответствующих модификациях.

Поэтому для очистки ОКП от КМ необходима разработка специальной космической транспортной техники. Идея активного удаления КМ с орбит возникла почти лет 30 назад [2]. Однако из-за технической сложности и чрезвычайно высокой стоимости подобных проектов их не относили к разряду практически реализуемых. Самая оптимистическая оценка стоимости реализации подобного проекта [2] – более 15 млн. дол. на каждый

КО в нижней орбитальной области, не считая затрат на разработку маневровых систем.

События 2007, 2009 гг. (разрушения КА «Фенгюн-1С», «Иридиум-33», «Космос-2251») и последние модельные исследования, подтвердившие явную нестабильность популяции КМ в низкоорбитальной области (ниже 2000 км), дали новый импульс для дискуссий на эту тему. В 2010 г. президент США Обама заявил, что национальная космическая политика США предусматривает проведение исследований и развитие технологий удаления КО из ОКП. Были даны соответствующие директивы NASA и Министерству обороны США.

Международная академия астронавтики (IAA) после фундаментальных исследований, инициированных ею в конце 2006 г., пришла к выводу о необходимости сосредоточиться на активном удалении из космоса больших и малых нефункциональных КО – отработавших КА, ступеней РН, сопутствующих космическим миссиям фрагментов, которые служат потенциальным источником дальнейшего развития каскадного эффекта.

В настоящее время рассматриваются различные варианты активного удаления КМ из ОКП. Например, это может быть КА оснащенный вместительным контейнером и системой утилизации, которая позволит либо сжигать мусор, либо оттащить его на безопасные орбиты. Такой проект рассматривается РКК “Энергия”. Европейским союзом финансируется проект LEOSWEEP [4] для создания технологии активного удаления крупного КМ с НОО с помощью ионного луча. Для реализации этой концепции используется космический аппарат, на борту которого современными ионными двигателями генерируется бесконтактный ионный поток. КА движется по орбите объекта космического мусора на небольшом расстоянии от него (10–20 метров) и воздействует на него с помощью энергии ионного луча. Предполагается, что применение ионных лучей обеспечит безопасный увод космических обломков с орбиты, так как механическое воздействие на объект опасно возможностью разрушения объекта и образованием новых обломков.

Операции по сбору КМ требуют очень больших финансовых затрат, поэтому важное значение имеет планирование этих операций. Актуальна задача разработки методов и алгоритмов планирования траекторий КА-мусоросборщиков, обеспечивающих удаление множества объектов КМ с минимальными затратами топлива. Такая задача рассматривается в данной работе.

Постановка задачи. Будем предполагать, что КА-мусоросборщик выведен на низкую промежуточную орбиту. Имеется N КО, предназначенных для уборки из ОКП. В любой момент времени может быть подана команда на выполнение КА маневра для обеспечения встречи с КО и выполнения операции его утилизации. По завершении операции утилизации, ап-

парат снова продолжает работу. Для пополнения запасов топлива к аппарату время от времени направляется специальный космический танкер-заправщик.

В общем случае существует множество траекторий перелета, обеспечивающих встречу КА и КО, среди которых есть минимизирующие время встречи, минимизирующие расход топлива и другие. Выбор конкретной траектории зависит от ряда факторов, которые должны быть учтены перед стартом КА. В связи с этим важно знать информацию обо всех возможных траекториях встречи с КО, которые осуществимы КА. Это множество реализуемых траекторий зависит как от параметров КА, так и КО.

Множество реализуемых перелетов (МРП) ограничено рядом факторов. В первую очередь – это запас топлива на борту КА, что определяет максимально возможный стартовый импульс, и требуемые условия встречи с КО, определяющие интервал допустимых относительных скоростей в момент сближения КА и КО. Кроме того, множество осуществимых, или реализуемых, перелетов зависит от типа КА, его оснащения и от первоначального движения конкретного КА до начала маневра. Эти ограничения называются условиями реализуемости перелета.

Операция дозаправки КА достаточно дорогостояща, поэтому необходимо обеспечить утилизацию как можно большего количества КО без дополнительных дозаправок.

Ставится задача: для КА-мусоросборщика и N объектов КО _{i} ($i = \overline{1, N}$), движущихся по заданным орбитам, необходимо выбрать траекторию, обеспечивающую встречу КА с одним из объектов КО _{i} , удовлетворяющую условия реализуемости и обеспечивающую наилучшие возможности по продолжению операций утилизации КМ с точки зрения затрат топлива.

Как известно [5], в общем случае расчет траектории движения КА сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей движение космического аппарата (КА) при принятой модели действующих сил. Точный расчет выполняется с применением ЭВМ и требует достаточно громоздких вычислений.

При оптимизации траекторий сборки мусора расчет траекторий движения приходится выполнять многократно. Для выполнения массовых расчетов исходную модель движения КА необходимо упростить. Упрощенные зависимости позволяют быстро проанализировать большое количество вариантов траекторий. На основании этого анализа выбирается небольшое количество вариантов, которые в дальнейшем исследуются с применением более точных методов.

Рассмотрим упрощенную модель движения КА и КО, используемую для построения множеств реализуемых перелетов. В ньютоновском гравитационном поле притягивающего центра F движутся КА и КО по круго-

вым или эллиптическим орбитам, соответственно O_P и O_Q . Притяжение между КА и КО отсутствует. Предполагается, что энерговооруженность КА достаточно большая, и активные участки его траектории аппроксимируются импульсным изменением скорости. Принятые допущения соответствуют классической модельной задаче небесной механики – ограниченной задаче двух тел.

Пусть t_P и t_Q – времена движения, соответственно, КА по орбите O_P и КО по орбите O_Q . Поставим в соответствие каждому моменту времени t_P точку P орбиты O_P , в которой в этот момент времени находится КА, а каждому моменту времени t_Q точку Q орбиты O_Q , в которой в этот момент времени находится КО. В некоторый момент времени t_P КА стартует со своей орбиты и встречается с КО в момент времени t_Q . Все возможные перелеты КА между точками пространства P и Q назовем PQ -перелетами, а участки траекторий между точками пространства P и Q – PQ -траекториями. Известно [5], что каждой паре точек P и Q соответствует множество PQ -траекторий. Для того, чтобы PQ -перелет обеспечивал встречу КА с КО, необходимо, чтобы в момент попадания КА в точку Q там же оказался и КО, т.е. время τ полета КА по PQ -траектории должно удовлетворять равенству $\tau = t_Q - t_P$.

Таким образом, каждая пара (t_P, t_Q) однозначно определяет положения КА в начале и конце PQ -траектории, обеспечивающей встречу, и требуемое время полета по ней τ . Согласно теореме Ламберта [5], этой паре соответствуют две траектории встречи: в прямом и обратном направлении. Однако обратные перелеты невыгодны с точки зрения затрат энергии, и в дальнейшем исключим их из рассмотрения. Тогда каждой паре (t_P, t_Q) соответствует единственная траектория встречи КА и КО, которая находится в результате решения известной краевой задачи небесной механики – задачи Ламберта.

Введем в рассмотрение координатную плоскость T^2 , координатами точек в которой являются параметры t_P и t_Q . Каждая точка плоскости T^2 изображает некоторую траекторию встречи, однако эта траектория может либо удовлетворять, либо не удовлетворять тем или иным условиям реализуемости. Обозначим Ξ множество точек плоскости T^2 , одновременно удовлетворяющих всем условиям реализуемости. В дальнейшем множество Ξ будем называть множеством реализуемых перелетов (МРП).

Введем следующие обозначения: $\bar{v}_P$ – вектор скорости КА в точке P до начала маневра; $\bar{v}_Q$ – вектор скорости КО в предполагаемой точке встречи Q ; $\bar{v}_1$ – вектор скорости КА в точке P после подачи импульса маневра; $\bar{v}_2$ – вектор скорости КА в точке Q ;

Введем условия, которым должны удовлетворять траектории встречи.

1) Ограничена величина импульса скорости старта КА $\Delta \bar{v}_n = \bar{v}_1 - \bar{v}_p$:

$$\Delta v_n \leq \Delta v_{nmax}, \quad (1)$$

где Δv_{nmax} – заданная константа. Геометрически неравенство (1) означает, что конец вектора скорости в начале маневра $\bar{v}_1$ должен находиться внутри шара радиуса Δv_{nmax} с центром на конце вектора $\bar{v}_p$.

2) Выполнено ограничение на величину вектора относительной скорости КА и КО в точке встречи $\Delta \bar{v}_k = \bar{v}_2 - \bar{v}_q$:

$$\Delta v_k \leq \Delta v_{kmax}, \quad (2)$$

где Δv_{kmax} – заданная константа. Это ограничение означает, что вектор $\bar{v}_2$ должен находиться внутри шара радиусом Δv_{kmax} , центр которого находится на конце вектора $\bar{v}_q$.

В дальнейшем траектории встречи, удовлетворяющие перечисленным условиям, будем называть реализуемыми, а сами эти условия – условиями реализуемости соответственно 1 и 2. Обозначим Ξ_1 и Ξ_2 – множества реализуемости, определяемые условиями реализуемости 1 и 2, соответственно. Тогда МРП Ξ определяется соотношением $\Xi = \Xi_1 \cap \Xi_2$.

Для построения МРП необходимо для каждой пары $(t_p, t_q) \in T^2$ проверить соответствие траектории встречи, определяемой этой парой, условиям реализуемости 1 и 2.

Как известно [5], импульс скорости характеризует количество топлива, затраченное КА на совершение маневра. Поэтому условие (1) определяет множество перелетов с орбиты O_p в точки орбиты O_q с затратами топлива ограниченными величиной характеристической скорости Δv_{nmax} . Аналогично, условие (2) определяет множество маневров в конце траектории перелета с затратами топлива ограниченными величиной характеристической скорости Δv_{kmax} , обеспечивающих переход на орбиту O_q .

Рассмотрим два значения характеристической скорости $0 < \Delta v_{n1} \leq \Delta v_{nmax}$ и $0 < \Delta v_{k1} \leq \Delta v_{kmax}$. Пусть $\Xi_1^{\Delta v_{n1}}$ – МРП, определяемое ограничением $\Delta v_n \leq \Delta v_{n1}$, $\Xi_2^{\Delta v_{k1}}$ – МРП, определяемое ограничением $\Delta v_k \leq \Delta v_{k1}$. Тогда МРП $\Xi_{\Delta v_{n1}}^{\Delta v_{k1}} = \Xi_1^{\Delta v_{n1}} \cap \Xi_2^{\Delta v_{k1}}$ определяет множество перелетов между орбитами O_p и O_q , с затратами топлива ограниченными величиной характеристической скорости $\Delta v_{n1} + \Delta v_{k1}$.

Таким образом, задача планирования траекторий, обеспечивающих перелет к объектам КО_i ($i = \overline{1, N}$), сводится к выбору КО_i для которого $\Xi_{\Delta v_{n1}}^{\Delta v_{k1}}$ имеет минимальное значение $\Delta v_{n1} + \Delta v_{k1}$.

Алгоритм построения МРП. Для построения множества реализуемых перелетов используется метод обхода вдоль границы [6]. Введем функционал, позволяющий определить принадлежность точки МРП, определяемой условиями реализуемости i , $i=1,2$

$$G_i(\varphi_P, \varphi_Q) = (t_{max}^i - \tau)(\tau - t_{min}^i), \quad (3)$$

где φ_P, φ_Q – угловые положения КА и КО, соответствующие точкам P и Q орбит O_P и O_Q ; t_{max}^i, t_{min}^i – максимально и минимально возможные значения времен перелета из точки P орбиты КА в точку Q орбиты КО, определяемые условием реализуемости i . Эти величины зависят от φ_P, φ_Q и вычисляются по формулам Ламберта; τ – время перелета КА по траектории встречи с КО.

Функционал $G_i(\varphi_P, \varphi_Q)$ обладает следующими свойствами:

$G_i(\varphi_P, \varphi_Q) > 0$, если точка принадлежит МРП;

$G_i(\varphi_P, \varphi_Q) = 0$, если точка лежит на границе МРП;

$G_i(\varphi_P, \varphi_Q) < 0$, если точка не принадлежит МРП.

Алгоритм вычисления функционала $G_i(\varphi_P, \varphi_Q)$ представлен ниже.

Алгоритм 1. Вычисление функционала $G_i(\varphi_P, \varphi_Q)$

1. Вычислить по формуле Кеплера значения времен t_P и t_Q , соответствующие угловым положениям КА φ_P и КО φ_Q .
2. Найти время τ перелета КА по траектории встречи с КО: $\tau = t_Q - t_P$.
3. По параметрам орбит O_P и O_Q найти r_P – расстояние от фокуса орбиты O_P до точки P и r_Q – расстояние от фокуса орбиты O_Q до точки Q .
4. Найти величину угла перелета $\Phi = \varphi_Q - \varphi_P$.
5. По теореме Ламберта вычислить t_{max}^i, t_{min}^i – максимальное и минимальное значения времен перелета, соответствующие границам ограничений (1), (2) и углу перелета Φ [6].
6. Вычислить $G_i(\varphi_P, \varphi_Q)$ по формуле (3).

При использовании метода обхода вдоль границы должна быть известна хотя бы одна точка, лежащая на границе искомой области. Для поиска первой точки границы области используем функционал $G_i^2(\varphi_P, \varphi_Q)$. Этот функционал положителен во всех точках плоскости времен, кроме точек границы МРП, где он равен нулю. Зададим начальные значения параметров $\varphi_{P0}, \varphi_{Q0}$, а также константу ε , определяющую желаемую точность определения точек границы МРП в плоскости времен. Координаты $(\varphi_{P0}, \varphi_{Q0})$ точки, лежащей на границе МРП, получаем путем минимизации функционала $G_i^2(\varphi_P, \varphi_Q)$. Далее изменяем значение параметра φ_Q на вели-

чину $\Delta\varphi_Q$: $\varphi_{Q1} = \varphi_{Q0} + \Delta\varphi_Q$. Для получения новой точки границы МРП вычисляется значение $G_i(\varphi_P, \varphi_{Q1})$ и производится перемещение вдоль прямой $\varphi_Q = \varphi_{Q1}$ с шагом $\Delta\varphi_P$ с вычислением на каждом шаге значения функционала $G_i(\varphi_P, \varphi_{Q1})$ до тех пор, пока знак функционала не изменится на противоположный (рис.1).

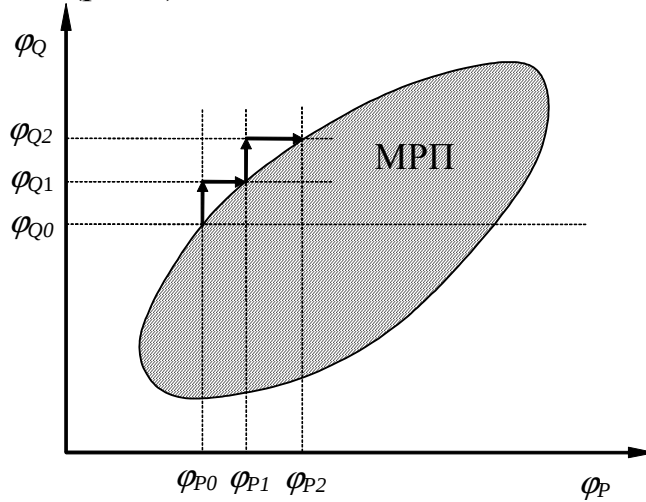


Рис. 1. Метод обхода вдоль границы

Смена знака функционала означает переход через границу МРП. Для получения с заданной точностью значения координаты φ_{P1} точки, лежащей на границе МРП, используется процедура интерполяции по формуле

$$\varphi_{P1}^{j+1} = \frac{\varphi_{P1(+)}^j G(\varphi_{P1(-)}^j, \varphi_{Q1}) - \varphi_{P1(-)}^j G(\varphi_{P1(+)}^j, \varphi_{Q1})}{G(\varphi_{P1(-)}^j, \varphi_{Q1}) - G(\varphi_{P1(+)}^j, \varphi_{Q1})}, \quad (4)$$

где $G(\varphi_{P1(+)}^j, \varphi_{Q1})$ – значение функционала внутри искомой области, $G(\varphi_{P1(-)}^j, \varphi_{Q1})$ – значение функционала вне искомой области. Интерполяционный процесс выполняется до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность ε .

Далее вся процедура повторяется для нового значения параметра φ_Q . Ниже представлен алгоритм построения границ МРП.

Алгоритм 2. Построение границы МРП для перелетов между произвольными орбитами.

1. Задать параметры орбит O_P и O_Q ; параметры условий реализуемости; начальные значения параметров φ_{P-} , φ_{Q-} ; константу ε , задающую желаемую точность определения границ МРП в плоскости времен.

2. Для условий реализуемости $i=1,2$ выполняются шаги алгоритма

3. Найти первую точку $(\varphi_{P0}, \varphi_{Q0})$ границы МРП по начальным значениям параметров φ_{P-} , φ_{Q-} путем минимизации функционала $G_i^2(\varphi_P, \varphi_Q)$.

4. Задать $\Delta\varphi_Q$ – приращение угла φ_Q и $\Delta\varphi_P$ – приращение угла φ_P .
5. Получить следующее значение параметра $\varphi_Q = \varphi_Q + \Delta\varphi_Q$.
8. Принять в качестве текущего значения для угла φ_P величину φ_{P0} :
 $\varphi_P = \varphi_{P0}$.
9. Вычислить значение функционала $G_i(\varphi_P, \varphi_Q)$ (Алгоритм 1).
10. Получить следующее значение параметра φ_P :
 если $G_i(\varphi_P, \varphi_Q) > 0$. то $\varphi_P = \varphi_P + \Delta\varphi_P$;
 если $G_i(\varphi_P, \varphi_Q) < 0$. то $\varphi_P = \varphi_P - \Delta\varphi_P$.
11. Вычислить значение функционала $G_i(\varphi_P, \varphi_Q)$.
12. Повторять шаги 10–11 алгоритма до тех пор, пока функционал $G_i(\varphi_P, \varphi_Q)$ не сменит свой знак на противоположный.
13. Уточнить значение параметра φ_P , соответствующего границе МРП с помощью процесса последовательных интерполяций по формуле (4) до достижения заданной точности ε .
14. Повторять шаги 5–13 до тех пор, пока значение угла φ_Q не достигнет заданного максимального значения φ_{Qmax} .
15. Повторить шаги 5–13 начиная с φ_{Q0} при отрицательном значении приращения угла $\Delta\varphi_Q$ до тех пор, пока значение угла φ_Q не достигнет заданного минимального значения φ_{Qmin} .

Правая граница МРП строится по тому же алгоритму, только на 3-м шаге ищется точка, принадлежащая правой границе МРП.

Представленные в работе алгоритмы реализованы в системе Matlab. Приведены примеры расчетов планирования траекторий сборки мусора в околоземном пространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Назаренко А.И. Моделирование космического мусора. М.: ИКИ РАН, 2013. 216 с..
2. Вениаминов С.С., Червонов А.М. Комический мусор – угроза человечеству. – М.: ИКИ РАН, 2012, 192 с.
3. Potter A. Early detection of Collisional cascading // Proc. 1st European Conf. on Space Debris. ESA/ESOC. Darmstadt, Germany. 1993.
4. Ruiz, M., Urdampilleta I., Bombardelli, C., Ahedo, E., Merino, M. and Cichocki, F., "The FP7 LEOSWEEP Project: Improving Low Earth Orbit Security With Enhanced Electric Propulsion," Space Propulsion Conference 2014, Köln, Germany, 19 - 22 May 2014.

5. Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика летательных аппаратов. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 352 с.

6. Старостин Б.А. Файзутдинов Р.Н. Быстродействующий алгоритм построения множеств реализуемых перелетов методом обхода вдоль границы. / Тезисы докладов 4 всероссийского Ахметгалеевского семинара "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением" 1–2 февраля, Казань, 2000 г.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ И УПРАВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВ

К.Г. Денисов (КНИТУ-КАИ, Россия, 420111, Казань,
К.Маркса, 10) E-mail: pmi@pmi.kstu-kai.ru

Н.Е. Роднищев (КНИТУ-КАИ, Россия, 420111, Казань,
К.Маркса, 10) E-mail: pmi@pmi.kstu-kai.ru

NUMERICAL METHOD OF IDENTIFICATION OF PARAMETERS AND CONTROL OF STOCHASTIC SYSTEMS WITH LIMITATIONS TYPE OF EQUALITY

K.G. Denisov (KNPTU-KAI, 420111, Kazan, K.Marx str., 10)
N.E. Rodnishchev (KNPTU-KAI, 420111, Kazan, K.Marx str., 10)

Keywords: The numerical method, identification, stochastic system, equality type constraints.

Введение. В работе рассматриваются необходимые условия идентификации стохастических систем на основе принципа Лагранжа. Это позволяет по виду формулы для первой вариации функционала Лагранжа построить градиентную процедуру численного решения задачи идентификации стохастических систем со сходимостью алгоритмов к необходимым условиям идентификации.

Постановка задачи. Рассматривается задача идентификации вектора параметров $a = (a_1, \dots, a_m)$ и вектор функции управления $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \dots, u_r(\cdot))$ нелинейной стохастической системы

$$dX_i = \sum_{j=1}^n (C_{ij}(t, X) dt + dw_{ij}(t)) \varphi_{ij}(t, X, u, a) + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t, X) d\eta_j(t),$$
$$X_i(t_0) = Y_{i0}, \quad (i = 1, \dots, n_0), \quad t \in [t_0, t_k], \quad (1)$$

$$dX_i = 0, \quad X_i(t_0) = B_i, \quad (i = n_0 + 1, \dots, n_0 + l_0)$$

по наблюдениям

$$Z_k = \sum_{v=1}^n c_{kv} Y_v + \dot{w}_k(t). \quad (2)$$

Эффективность идентификации оценивается минимумом функционала

$$I_0(u, a) = \int_{t_0}^{t_k} M \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k \left(Z_k - \sum_{v=1}^n c_{kv} Y_v \right)^2 \right] dt, \quad (3)$$

а цели управления, тактико-технические и эксплуатационные требования, предъявляемые к системе, определяются ограничениями на конечное состояние системы типа равенств:

$$I_s = M[f_s(Y_k)] - c_s = 0, \quad s \in J_1 = \{1, \dots, q\}; \quad (4)$$

Здесь $M[\cdot]$ – оператор математического ожидания; t – время, t_0, t_k – начальная и конечная точки рассматриваемого интервала времени $[t_0, t_k]$. $X = (Y, B)$ расширенный вектор состояний стохастической системы. $Y(t) = (Y_1(t), \dots, Y_i(t), \dots, Y_n(t))$ вектор функция состояния системы (1). $Y_i(t_k) = Y_{ik}$ – компоненты вектора состояния системы в конечный момент времени. B – случайный l_0 - мерный вектор, компоненты которого относятся к непрерывным случайным величинам характеризующим, в частности, отклонения параметров системы a от их номинальных значений. $dw_{ij}(t) = W_{ij}(t)dt$, $d\eta_j = N_j(t)dt$ – стохастические дифференциалы Стратоновича винеровских процессов $w_{ij}(t)$, $\eta_j(t)$. $C_{ij}(t, X)$, $\varphi_{ij}(t, X, u, a)$, $\sigma_{ij}(t, X)$ – заданные неслучайные функции, удовлетворяющие известным требованиям [1] существования решения (1). $Z_k(t)$ – наблюдаемая компонента вектора координат измерителя $Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_k(t), \dots, Z_{m_0}(t))$ ($m \leq n$). Матрица $|c_{kv}|_{m_0 \times n}$ определяет выбор наблюдаемых координат системы (1).

$I_s(u, a)$, $s \in \{0\} \cup J_1$ непрерывные и непрерывно дифференцируемые по совокупности переменных ограниченные функционалы. α_k – весовые коэффициенты.

Уравнения (1), как показано в [1] (стр. 480), имеют единственное решение и описывают на $[t_0, t_k]$ диффузионный марковский процесс. В соответствии с теорией марковских процессов [192] и принципом Лагранжа исходная задача идентификации (1) – (4) относительно расширенного вектора состояний системы $\bar{X} = (X, X_{n+1})$ сводится к эквивалентной терминальной задаче (5), (6) с распределенными параметрами относительно апостериорной плотности вероятности $p(t, \bar{x} | \bar{z})$.

$$F(v, \gamma) = I_0(v) + \sum_{s=1}^q \gamma_s I_s(v) \rightarrow \min_v. \quad (5)$$

Функционал Лагранжа характеризует эффективность идентификации управления системы (1) по наблюдениям (2) с апостериорной плотностью распределения траекторий

$$\frac{\partial p(t, \bar{x} | \bar{z})}{\partial t} = \bar{L}(t, \bar{x}, u, a) p(t, \bar{x} | \bar{z}) + \left(F(\bar{x}, z) - \int_{\Omega} F(\bar{x}, z) p(t, \bar{x} | \bar{z}) d\bar{x} \right) p(t, \bar{x} | \bar{z})$$

$$p(t, \bar{x} | \bar{z}) \Big|_{t=t_0} = p(t_0, \bar{x}), \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (6)$$

Здесь $\bar{x} = (x, x_{n+1})$ – реализация расширенного вектора состояний $\bar{X} = (X, X_{n+1})$. Компонента вектора X_{n+1} определяется решением дифференциального уравнения

$$dX_{n+1} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \left(Z_k - \sum_{v=1}^n c_{kv} X_v \right)^2 dt = g(X) dt, \quad t \in [t_0, t_k] \quad (7)$$

$$X_{n+1}(t_0) = 0.$$

$\bar{L}(t, \bar{x}, u, a)(p(t, \bar{x} | \bar{z}))$ – линейный оператор, определенный выражением:

$$\bar{L}(t, \bar{x}, u, a)(p(t, \bar{x} | \bar{z})) = L(t, x, u, a)(p(t, \bar{x} | \bar{z})) - \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} [g(x) p(t, \bar{x} | \bar{z})] \quad (8)$$

Здесь $L(t, x, u, a) p(t, x | \bar{z})$ эллиптический оператор, определяемый по формуле

$$L(t, x, u, a) p(t, x | \bar{z}) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [A_i(t, x, u, a) p(t, x | \bar{z})] +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i,p=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_p} [B_{ip}(t, x, u, a) p(t, x | \bar{z})] \quad (9)$$

с коэффициентами сноса

$$A_i(t, z) = \sum_{j=1}^n C_{ij} \varphi_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j,p,q=1}^n \left[\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial z_p} (\varphi_{pq} G_{ijpq}^w + \sigma_{pq} G_{ijq}^{w\eta}) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial z_p} (\varphi_{pq} G_{jprq}^{w\eta} + \sigma_{pq} G_{jq}^{\eta}) \right] \quad (10)$$

и диффузии

$$B_{ip}(t, z) = \sum_{j,q=1}^n [\varphi_{ij} (\varphi_{pq} G_{ijpq}^w + \sigma_{pq} G_{ijq}^{w\eta}) + \sigma_{ij} (\varphi_{pq} G_{jprq}^{w\eta} + \sigma_{pq} G_{jq}^{\eta})]. \quad (11)$$

В плотности распределения $p(t, x | \bar{z})$ вектор $\bar{z}$ означает, что используется вся наблюдаемая реализация выходного сигнала измерителя на интервале $[t_0, t_k]$. G_{ij}^w, G_j^η – интенсивности винеровских процессов $w_{ij}(t), \eta_j(t)$; $G_{ijpq}^w, G_{ijq}^{w\eta}, G_{jpq}^{\eta w}, G_{jq}^\eta$ – взаимные интенсивности винеровских процессов.

Необходимые условия идентификации задачи (5), (6) на основе принципа Лагранжа формулируются теоремой 1.

Теорема 1. Пусть $v^0 = (u^0, a^0)$ решение задачи идентификации (5), (6), а $I_s(v)$, $s = 0, \dots, q$, непрерывно дифференцируемые в окрестности точки $v^0 = (u^0, a^0)$. Тогда найдутся такие множители Лагранжа $\gamma_1, \dots, \gamma_q$, не все равные нулю такие, что точка $v^0 = (u^0, a^0)$ удовлетворяет необходимому условию локального минимума

$$-\int_{\Omega} x_{n+1} \delta p(t_k, \bar{x} | \bar{z}) d\bar{x} + \sum_{s=1}^q \gamma_s \int_{\Omega} f_s(x) \delta p(t_k, \bar{x} | \bar{z}) d\bar{x} = 0. \quad (12)$$

Используя теорему Дубовицкого-Милютина можно показать, что необходимые условия идентификации (5), (6) теоремы 1 эквивалентны необходимым условиям идентификации задачи (1) – (4), которые формулируются на основе общей теории экстремальных задач [2].

Численное решение задачи идентификации. Построим, аналогично [3], одношаговый метод последовательных приближений к решению невырожденной задачи идентификации (1) – (4) посредством варьирования управления $u(t)$ и параметров a в направлении подходящих, допустимых вариаций δu , δa по ограничениям (4). Эти направления обеспечивают в процессе идентификации убывание первой вариации (дифференциала Фреше) функционала (1)

$$I'_0(u, a)(\delta u, \delta a) = \int_{\Omega} x_{n+1} \delta p(t_k, \bar{x} | \bar{z}) d\bar{x} = \int_{t_0}^{t_k} M \left(\frac{\partial R^0}{\partial u} \right) \delta u dt + \left(\int_{t_0}^{t_k} M \left(\frac{\partial R^0}{\partial a} \right) dt \right) \delta a \quad (13)$$

в норме $L_2[t_0, t_f] \times E_m$ на невырожденном конусе касательных (подходящих) вариаций идентификации

$$I'_s(u, a)(\delta u, \delta a) = \int_{\Omega} f_s(x) \delta p(t_k, \bar{x} | \bar{z}) d\bar{x} =$$

$$= \int_{t_0}^{t_k} M \left(\frac{\partial R^s}{\partial u} \right) \delta u dt + \left(\int_{t_0}^{t_k} M \left(\frac{\partial R^s}{\partial a} \right) dt \right) \delta a = 0, \quad s \in J_1. \quad (14)$$

Так как $L_2[t_0, t_f] \times E_m$ подмножество гильбертова пространства H , то по теореме Рисса – Фреше сопряженное к нему пространство H^* отождествляется с H . Тогда дифференциалы Фреше $I'_s(u, a)(\delta u, \delta a)$, $s \in 0 \cup J_1$ на множестве $L_2[t_0, t_f] \times E_m$ будем рассматривать как скалярные произведения $I'_s(u) \delta u$ $I'_s(a) \delta a$ элементов $(I'_s(u), I'_s(a)) \in L_2[t_0, t_f] \times E_m$ из сопряженного пространства H^* , совпадающего с H , на элементы $(\delta u, \delta a) \in L_2[t_0, t_f] \times E_m$, где градиенты Фреше $I'_s(u), I'_s(a)$ согласно теореме Шварца представляют собой линейные функционалы, определяемые по формулам

$$I'_s(u) = M \left(\frac{\partial R^s}{\partial u} \right), \quad I'_s(a) = \int_{t_0}^{t_k} M \left(\frac{\partial R^s}{\partial a} \right) dt, \quad s \in 0 \cup J_1. \quad (15)$$

$$\text{где } \frac{\partial R^s}{\partial u} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda^s}{\partial x_i} \left[\frac{\partial A_i(t, x, u, a)}{\partial u} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,p=1}^n \frac{\partial^2 \lambda^s}{\partial x_i \partial x_p} \left[\frac{\partial B_{ip}(t, x, u, a)}{\partial u} \right],$$

$$\frac{\partial R^s}{\partial a} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda^s}{\partial x_i} \left[\frac{\partial A_i(t, x, u, a)}{\partial a} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,p=1}^n \frac{\partial^2 \lambda^s}{\partial x_i \partial x_p} \left[\frac{\partial B_{ip}(t, x, u, a)}{\partial a} \right], \quad s \in 0 \cup J_1.$$

$\lambda^s(t, x | \bar{z})$, $s \in 0 \cup J_1$ определяются из решения задач Коши

$$\frac{\partial \lambda^0}{\partial t} = -L^*(t, x, u, a) \lambda^0 + M[F(x, z)] \lambda^0 - g(x), \quad \lambda^0(t_k, x | \bar{z}) = x_{n+1}, \quad t \in [t_k, t_0];$$

$$\frac{\partial \lambda^s}{\partial t} = -L^*(t, x, u, a) \lambda^s + M[F(x, z)] \lambda^s, \quad \lambda^s(t_k, x | \bar{z}) = -f_s(x), \quad s \in J_1.$$

$$L^*(t, x, u, a) \lambda^s = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda^s}{\partial x_i} A_i(t, x, u, a) + \frac{1}{2} \sum_{i,p=1}^n \frac{\partial^2 \lambda^s}{\partial x_i \partial x_p} B_{ip}(t, x, u, a), \quad s \in 0 \cup J_1.$$

$F(x, z)$, характеризует свойства измерителя и определяется по формуле

$$F(x, z) = \sum_{k,p,q=1}^n \frac{1}{G_{pk}^N} c_{pq} x_q \left(z_k - \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n c_{kv} x_v \right),$$

где G_p^N, G_k^N – интенсивности белых шумов $N_p(t)$ $N_k(t)$ измерителя; G_{pk}^N – взаимные интенсивности шумов измерителя.

Определим множество $Q: Q = \{(u, a): I_0(u, a) + l \leq C_0\}, C_0 = I_0(u_0, a_0) + l$, где $(u_0, a_0) \in L_2[t_0, t_f] \times E_m$ точка, определяющая ограниченность множества Q . Направления убывания $\delta u, \delta a$ зададим направлениями градиентов функционала Лагранжа (5)

$$\delta u = \sum_{s=0}^q \gamma_s M \left(\frac{\partial R^s}{\partial u} \right), \delta a = \sum_{s=0}^q \gamma_s \int_{t_0}^{t_k} M \left(\frac{\partial R^s}{\partial a} \right) dt, \gamma_0 = 1, \quad (16)$$

с неизвестными множителями γ_s . Для определения неизвестных множителей γ_s из всех направлений идентификации (16) будем выбирать допустимые, которые с учетом нарушения ограничений (4), определим из соотношений

$$I'_k(u, a)(\delta u, \delta a) = \int_{t_0}^{t_k} M \left(\frac{\partial R^k}{\partial u} \right) \delta u dt + \left(\int_{t_0}^{t_k} M \left(\frac{\partial R^k}{\partial a} \right) dt \right) \delta a = I_k, k \in J_1. \quad (17)$$

Подставим (16) в (17). Тогда получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных множителей γ_s

$$\sum_{s=1}^q \gamma_s B_{ks} = I_k - B_{k0}, k \in J_1, \quad (18)$$

$$\text{где } B_{ks} = \int_{t_0}^{t_k} M \left(\frac{\partial R^k}{\partial u} \right) M \left(\frac{\partial R^s}{\partial u} \right) dt + \left(\int_{t_0}^{t_k} M \left(\frac{\partial R^k}{\partial a} \right) dt \right) \left(\int_{t_0}^{t_k} M \left(\frac{\partial R^s}{\partial a} \right) dt \right),$$

$$(k = 1, \dots, q; s = 1, \dots, q)$$

$$B_{k0} = \int_{t_0}^{t_k} M \left(\frac{\partial R^k}{\partial u} \right) M \left(\frac{\partial R^0}{\partial u} \right) dt + \left(\int_{t_0}^{t_k} M \left(\frac{\partial R^k}{\partial a} \right) dt \right) \left(\int_{t_0}^{t_k} M \left(\frac{\partial R^0}{\partial a} \right) dt \right), (k = 1, \dots, q),$$

Так как для невырожденной задачи идентификации (1) – (4) матрица $\|B_{ks}\|_{q \times q}$ невырожденная, то система линейных уравнений (18) однозначно определяет множители γ_s .

Таким образом, решение задачи идентификации (1) – (4) сводится к одношаговой итерационной последовательности приближений

$$u^{n+1} = u^n - h^n \delta u^n, \quad a^{n+1} = a^n - h^n \delta a^n, \quad (19)$$

Здесь $n = 0, 1, 2, \dots$ – номер итерации, h^n – величина шага на n – ой итерации, направления идентификации δu^n , δa^n на каждом шаге вычисляются по формулам (16).

Последовательность приближений (19) сходится к точке, удовлетворяющей необходимым условиям идентификации (12). Это устанавливается теоремой 2.

Теорема 2. Пусть Q – ограниченное замкнутое множество пространства переменных $v = (u, a) \in L_2[t_0, t_k] \times E_m$. $I_s(v)$, $s \in \{0\} \cup J_1$ дифференцируемые по Фреше функционалы, градиенты $I'_s(v)$ равномерно по $v = (u, a)$ линейно ограничены на Q

$$|I'_s(u, \cdot)| \leq K_0 |\delta u|_{L_2[\cdot]}, \quad |I'_s(a, \cdot)| \leq K_0 |\delta a|_{E_m},$$

и удовлетворяют условию Липшица

$$|I'_s(u, \cdot) - I'_s(u - \tau h \delta u, \cdot)| \leq K_1 \tau h |\delta u|_{L_2[\cdot]}, \quad |I'_s(a, \cdot) - I'_s(a - \tau h \delta a, \cdot)| \leq K_1 \tau h |\delta a|_{E_m};$$

матрица $\|B_{ks}\|_{q \times q}$ невырожденная, $0 \leq \varepsilon_1 \leq h^n \leq \bar{h}^n$,

$$\bar{h}^n = \min \left\{ 1, \frac{2}{K_1 + 2\varepsilon_2}, \frac{\delta}{l(v^n) + K_0 |\delta v^n|^2} \right\}.$$

Тогда для последовательности (19) с «любым» исходным приближением $v^n = (u^n, a^n)$ справедливы утверждения;

1) функционал $I_0(v^n)$ убывает по $v^n = (u^n, a^n)$, последовательность (1.103) сходится, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u^{n+1} - u^n| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a^{n+1} - a^n| = 0;$$

2) в любой предельной точке $v^0 = (u^0, a^0)$ последовательности (19) с требуемой степенью точности выполняются необходимые условия идентификации теоремы 1.

3) максимальное отклонение ограничений $l(v^n)$ (4) стремится к нулю $\lim_{n \rightarrow \infty} l(v^n) = 0$ и предельная точка $v^0 = (u^0, a^0)$ идентификации удовлетворяет ограничениям (4).

Заключение. Для решения задачи идентификации с ограничениями типа равенств на основе принципа Лагранжа предлагается численный метод, который представляет собой обобщение метода проекции градиента. Доказана сходимость этого метода к необходимым условиям идентификации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гихман И.Х., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М. : Наука, 1977, – 568с.
2. Роднищев Н.Е. Оптимизация управления нелинейных стохастических систем с ограничениями // Автоматика и телемеханика. № 2, 2001, С.87 – 101
3. Роднищев Н.Е. Приближенный метод поиска оптимального управления нелинейных стохастических систем с ограничениями // Автоматика и телемеханика. № 3, 2001, С.63 – 71.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ И УПРАВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВ

К.Г. Денисов (КНИТУ-КАИ, Россия, 420111, Казань,
К.Маркса, 10) E-mail: pmi@pmi.kstu-kai.ru

NECESSARY CONDITIONS FOR IDENTIFICATION OF PARAMETERS AND CONTROL OF STOCHASTIC SYSTEMS WITH LIMITATIONS TYPE OF EQUALITY

K.G. Denisov (KNPTU-KAI, 420111, Kazan, K.Marx str., 10)

Keywords: Markov process, identification, stochastic system, equality type constraints.

Введение. В настоящей работе в классе диффузионных марковских процессов формулируется задача идентификации нелинейных стохастических динамических систем со случайными параметрами, мультипликативными и аддитивными шумами и ограничениями типа равенств на параметры системы, функции управления и вектор состояния систем в конечный момент времени. Исследуются условия идентифицируемости таких систем и в терминах общей теории экстремальных задач Дубовицкого-Милютина формулируются необходимые условия идентификации.

Рассматриваемая задача допускает важные приложения, относящиеся, например, к идентификации основных проектных параметров летательных аппаратов, обеспечивающих наиболее вероятную доставку полезных грузов в заданную область.

В качестве примера здесь можно назвать задачу об идентификации параметров программы движения самолета по глиссаде, которые при автоматическом заходе на посадку с учетом ветровых возмущений и радиотехнических помех должны оставаться неизменными при случайном разбросе дальности самолета от взлетно-посадочной полосы и обеспечивать максимум вероятности посадки.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу идентификации вектора параметров $a = (a_1, \dots, a_m)$ и вектор функции управления $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \dots, u_r(\cdot))$ нелинейной стохастической системы

$$dY_i = \sum_{j=1}^n (C_{ij}(t, B) dt + dw_{ij}(t)) \varphi_{ij}(t, Y, u, a, B) + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t, Y, B) d\eta_j(t), \quad (1)$$
$$Y_i(t_0) = Y_{i0}, (i = 1, \dots, n), t \in [t_0, t_k]$$

по наблюдениям

$$Z_k = \sum_{v=1}^n c_{kv} Y_v + \dot{w}_k(t). \quad (2)$$

Эффективность идентификации оценивается минимумом функционала

$$I_0(u, a) = \int_{t_0}^{t_k} M \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k \left(Z_k - \sum_{v=1}^n c_{kv} Y_v \right)^2 \right] dt, \quad (3)$$

а цели управления, тактико-технические и эксплуатационные требования, предъявляемые к системе, определяются ограничениями на конечное состояние системы типа равенств:

$$I_s = M[f_s(Y_k)] - c_s = 0, \quad s \in J_1 = \{1, \dots, q\}; \quad (4)$$

Здесь $M[\cdot]$ – оператор математического ожидания; t – время, t_0, t_k – начальная и конечная точки рассматриваемого интервала времени $[t_0, t_k]$. $Y_i(t)$ – компонента вектор функции $Y(t) = (Y_1(t), \dots, Y_i(t), \dots, Y_n(t))$ состояния стохастической системы (1). $Y_i(t_k) = Y_{ik}$ – компоненты вектора состояния системы в конечный момент времени.

В качестве управления $u(\cdot)$ рассматривается r -мерное программное управление $u(t)$ или управление по обратной связи $u(t, y)$. Управление $u(\cdot) = u(t)$ – определяется из множества S :

$$S = \{ u(t) \in L_2[t_0, t_k] : u(t) \in U \text{ для почти всех } t \in [t_0, t_k] \},$$

где $L_2[t_0, t_k]$ – пространство измеримых функций с квадратичной метрикой, U – выпуклое множество в E_r . Если рассматривается управление с обратной связью $u(\cdot) = u(t, y)$, где $u(t, y)$ борелевская функция своих аргументов, то $u(t, y)$ рассматривается [1] либо как случайный элемент в L_2 , либо как неупреждающий относительно винеровских процессов $w_{ij}(t), \eta_j(t)$ процесс со значениями в U . a – детерминированный m – мерный вектор управляющих параметров, определяющий конструктивные и энергетические параметры системы. B – случайный l_0 – мерный вектор, компоненты которого относятся к непрерывным случайным величинам характеризующим, в частности, отклонения параметров системы a от их номинальных значений. $dw_{ij}(t) = W_{ij}(t)dt$, $d\eta_j = N_j(t)dt$ – стохастические дифференциалы Стратоновича винеровских процессов $w_{ij}(t), \eta_j(t)$. Процесс $w_{ij}(t)$ описывает, действующие на систему, мультипликативные шумы. Процесс $\eta_j(t)$ описывает аддитивные шумы. $W_{ij}(t)$ белые гауссовские шумы, которые

описывают случайные внутренние возмущения, присущие системе. $N_j(t)$ – белые гауссовские шумы, описывающие воздействия на систему внешней среды. $C_{ij}(t, B)$, $\varphi_{ij}(t, Y, u, a, B)$, $\sigma_{ij}(t, Y, B)$ – заданные неслучайные функции, удовлетворяющие известным требованиям [1] существования решения (1).

$Z_k(t)$ – наблюдаемая компонента вектора координат измерителя $Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_k(t), \dots, Z_{m_0}(t))$ ($m \leq n$). Матрица $|c_{kv}|_{m_0 \times n}$ определяет выбор наблюдаемых координат системы (1). $\dot{w}_k(t)$ производная винеровского процесса, $w_k(t)$ – компонента $R_k(t)$ аддитивного белого шума измерителя.

$I_s(u, a)$, $s \in J_1$ непрерывные и непрерывно дифференцируемые по совокупности переменных функционалы. $I_0(u, a)$ – дифференцируемый по совокупности переменных ограниченный функционал, α_k – весовые коэффициенты.

При принятых условиях относительно правых частей (1) и (4), согласно [2], решение (1) существует и единственно, однако это решение не обязательно может быть марковским процессом. Поэтому, для того, чтобы (1) описывали марковский процесс, вводится расширенный вектор состояний $X = (Y, B)$. Относительно вектора состояний $X = (Y, B)$ уравнения (1) сводятся к эквивалентной системе диффузионных стохастических дифференциальных уравнений

$$dX_i = \sum_{j=1}^n (C_{ij}(t, X) dt + dw_{ij}(t)) \varphi_{ij}(t, X, u, a) + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t, X) d\eta_j(t),$$

$$X_i(t_0) = Y_{i0}, \quad (i = 1, \dots, n_0), \quad t \in [t_0, t_k],$$

$$dX_i = 0, \quad X_i(t_0) = B_i, \quad (i = n_0 + 1, \dots, n_0 + l_0).$$
(5)

Уравнения (5), как показано в [3] (стр. 480), имеют единственное решение и описывают на $[t_0, t_k]$ диффузионный марковский процесс. Апостериорная плотность вероятности состояний $p(t, x | \bar{z})$ этого процесса, согласно [4], удовлетворяет параболическому уравнению

$$\frac{\partial p(t, x | \bar{z})}{\partial t} = L(t, x, u, a) p(t, x | \bar{z}) + \left(F(x, z) - \int_{\Omega} F(x, z) p(t, x | \bar{z}) dx \right) p(t, x | \bar{z}),$$

$$p(t, x | \bar{z}) \Big|_{t=t_0} = p(t_0, x), \quad t \in [t_0, t_k].$$
(6)

Здесь $L(t, x, u, a) p(t, x | \bar{z})$ эллиптический оператор, определяемый по формуле

$$L(t, x, u, a) p(t, x | \bar{z}) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [A_i(t, x, u, a) p(t, x | \bar{z})] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,p=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_p} [B_{ip}(t, x, u, a) p(t, x | \bar{z})] \quad (7)$$

с коэффициентами сноса

$$A_i(t, z) = \sum_{j=1}^n C_{ij} \varphi_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j,p,q=1}^n \left[\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial z_p} (\varphi_{pq} G_{ijpq}^w + \sigma_{pq} G_{ijq}^{w\eta}) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial z_p} (\varphi_{pq} G_{j pq}^{\eta w} + \sigma_{pq} G_{jq}^{\eta}) \right]$$

и диффузии

$$B_{ip}(t, z) = \sum_{j,q=1}^n [\varphi_{ij} (\varphi_{pq} G_{ijpq}^w + \sigma_{pq} G_{ijq}^{w\eta}) + \sigma_{ij} (\varphi_{pq} G_{j pq}^{\eta w} + \sigma_{pq} G_{jq}^{\eta})].$$

В плотности распределения $p(t, x | \bar{z})$ вектор $\bar{z}$ означает, что используется вся наблюдаемая реализация выходного сигнала измерителя на интервале $[t_0, t_k]$.

G_{ij}^w, G_j^{η} – интенсивности винеровских процессов $w_{ij}(t), \eta_j(t)$; $G_{ijpq}^w, G_{ijq}^{w\eta}, G_{j pq}^{\eta w}, G_{jq}^{\eta}$ – взаимные интенсивности винеровских процессов.

Если действующие на объект шумы не коррелированы, то коэффициенты сноса и диффузии определяются выражениями

$$A_i(t, z) = \sum_{j=1}^n C_{ij} \varphi_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^n \left[\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial z_i} \varphi_{ij} G_{ij}^w + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial z_i} \sigma_{ij} G_j^{\eta} \right], \\ B_{ii}(t, z) = \sum_{j=1}^n [\varphi_{ij}^2 G_{ij}^w + \sigma_{ij}^2 G_j^{\eta}].$$

Скалярная функция $F(x, z)$, характеризует свойства измерителя и определяется по формуле

$$F(x, z) = \sum_{k,p,q=1}^n \frac{1}{G_{pk}^R} c_{pq} x_q \left(z_k - \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n c_{kv} x_v \right).$$

G_p^R, G_k^R – интенсивности белых шумов $R_p(t), R_k(t)$ измерителя; G_{pk}^R – взаимные интенсивности шумов измерителя.

В соответствии с теорией марковских процессов [5] исходная задача идентификации (1) – (3) относительно расширенного вектора состояний системы $\bar{X} = (X, X_{n+1})$ сводится к эквивалентной терминальной задаче с распределенными параметрами относительно апостериорной плотности вероятности $p(t, \bar{x} | \bar{z})$

$$I_0(u, a) = \int_{\Omega} x_{n+1} p(t_k, \bar{x} | \bar{z}) d\bar{x} \rightarrow \min; \quad (8)$$

$$\frac{\partial p(t, \bar{x} | \bar{z})}{\partial t} = \bar{L}(t, \bar{x}, u, a) p(t, \bar{x} | \bar{z}) + \left(F(\bar{x}, z) - \int_{\Omega} F(\bar{x}, z) p(t, \bar{x} | \bar{z}) d\bar{x} \right) p(t, \bar{x} | \bar{z}),$$

$$p(t, \bar{x} | \bar{z}) \Big|_{t=t_0} = p(t_0, \bar{x}), \quad t \in [t_0, t_k]; \quad (9)$$

$$I_s = \int_{\Omega} f_s(x) p(t, \bar{x} | \bar{z}) d\bar{x} - c_s = 0, \quad s \in J_1 \quad (10)$$

Здесь $\bar{x} = (x, x_{n+1})$ – реализация расширенного вектора состояний $\bar{X} = (X, X_{n+1})$. Компонента вектора X_{n+1} определяется решением дифференциального уравнения

$$dX_{n+1} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \left(Z_k - \sum_{v=1}^n c_{kv} X_v \right)^2 dt = g(X) dt, \quad t \in [t_0, t_k] \quad (11)$$

$$X_{n+1}(t_0) = 0.$$

$\bar{L}(t, \bar{x}, u, a)(p(t, \bar{x} | \bar{z}))$ – линейный оператор, определенный выражением:

$$\bar{L}(t, \bar{x}, u, a)(p(t, \bar{x} | \bar{z})) = L(t, x, u, a)(p(t, \bar{x} | \bar{z})) - \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} [g(x) p(t, \bar{x} | \bar{z})] \quad (1.12)$$

Следует отметить, что задача идентификации (8) – (10) невырожденная – идентифицируемая, если наблюдаемая система (1), (2), описывающая марковский процесс с апостериорной плотностью распределения (9), управляемая [5]. Управляемость наблюдаемой системы (1) позволяет проводить идентификацию по критерию (8) путем варьирования параметров $a = (a_1, \dots, a_m)$ и функций управления $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \dots, u_r(\cdot))$.

Необходимые условия идентификации. Определим вектор $f(x) = f_1(x), \dots, f_s(x), \dots, f_q(x)$ и соответствующее ему множество $D \subseteq R^q$:

$$D = \left\{ \int_{\Omega} f(x) \delta p(t_k, \bar{x} | \bar{z}) dx \mid \delta p(t_k, \bar{x} | \bar{z}), \quad \delta u, \delta a - \text{удовлетворяют 1.12} \right\}$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} = L(t, x, u, a) \delta p - \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} [g(x) \delta p] + \left(F(x, z) - \int_{\Omega} F(x, z) p d\bar{x} \right) \delta p -$$

$$- p \int_{\Omega} F(x, z) \delta p d\bar{x} + (L_u(t, x, u, a) p) \delta u + (L_a(t, x, u, a) p) \delta a, \quad (12)$$

$$\delta p(t_0, \bar{x} | \bar{z}) = \delta p_0 = 0, \quad t \in [t_0, t_k],$$

где

$$L_u(t, x, u, a) p = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial A_i(t, x, u, a)}{\partial u} p \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,p=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_p} \left[\frac{\partial B_{ip}(t, x, u, a)}{\partial u} p \right],$$

$$L_a(t, x, u, a) p = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial A_i(t, x, u, a)}{\partial a} p \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,p=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_p} \left[\frac{\partial B_{ip}(t, x, u, a)}{\partial a} p \right]$$

условия идентифицируемости устанавливаются теоремой 1.

Теорема 1. *Задача (8) – (10) идентифицируема, если множество D совпадает с множеством R^q : $D = R^q$ и для любого вектора $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_q) \neq 0$ тождественно не равного нулю решение задачи Коши*

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -L^*(t, x, u, a) \lambda + M[F(x, z)] \lambda \quad (14)$$

$$\lambda(t_k, x) = - \sum_{s=1}^q \gamma_s f_s(x),$$

относительно ограниченной с компактным носителем функции $\lambda(t, x | \bar{z}) \in C^{1,2}$, тождественно удовлетворяет условию $L_u^*(t, x, u, a) \lambda \neq 0$, $L_a^*(t, x, u, a) \lambda \neq 0$ почти всюду на цилиндре $\Omega \times [t_0, t_k]$ и всех $\delta u \in L_2[t_0, x]$ $\delta a \in E_m$; система функций $f_s(x)$, $s \in J_1$ линейно независима.

Здесь

$$L^*(t, x, u, a) \lambda = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} A_i(t, x, u, a) + \frac{1}{2} \sum_{i,p=1}^n \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i \partial x_p} B_{ip}(t, x, u, a)$$

линейный оператор, сопряженный к оператору $L(t, x, u, a) p$.

Выражения линейных операторов $L_u^*(t, x, u, a) \lambda$, $L_a^*(t, x, u, a) \lambda$ имеют вид:

$$L_u^*(t, x, u, a) \lambda = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \left[\frac{\partial A_i(t, x, u, a)}{\partial u} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,p=1}^n \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i \partial x_p} \left[\frac{\partial B_{ip}(t, x, u, a)}{\partial u} \right],$$

$$L_a^*(t, x, u, a) \lambda = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \left[\frac{\partial A_i(t, x, u, a)}{\partial a} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,p=1}^n \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i \partial x_p} \left[\frac{\partial B_{ip}(t, x, u, a)}{\partial a} \right]$$

Необходимые условия идентификации устанавливаются теоремой 2.

Теорема 1.2. *Для того, чтобы решение задачи идентификации (8) – (10) достигалось в точке (u^0, a^0) , необходимо существование не равных одновременно нулю числа $\gamma_0 \geq 0$, вектора $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_q) \neq 0$, и ограниченных функций $\lambda_s(t, z | \bar{y})$, $s \in \{0\} \cup J_1$, определенных решениями задач Коши*

$$\frac{\partial \lambda^0}{\partial t} = -L^*(t, x, u, a) \lambda^0 + M[F(x, z)] \lambda^0 - g(x), \quad (15)$$

$$\lambda^0(t_k, x | \bar{z}) = x_{n+1}, \quad t \in [t_k, t_0];$$

$$\frac{\partial \lambda^s}{\partial t} = -L^*(t, x, u, a) \lambda^s + M[F(x, z)] \lambda^s, \quad t \in [t_k, t_0], \quad (16)$$

$$\lambda^s(t_k, x | \bar{z}) = -f_s(x), \quad s \in J_1$$

таких, что:

а) вектор-функция управления $u^0(t)$, которая определена в процессе идентификации системы по измерениям $z_k(t)$ (2), для почти всех $t \in [t_0, t_f]$ в равномерно близкой окрестности $u^0(t)$ удовлетворяет условию

$$M \left(\frac{\partial R^0}{\partial u} + \sum_{s=1}^{q_0} \gamma_s \frac{\partial R^s}{\partial u} \right) (u - u^0) \geq 0; \quad (17)$$

б) идентифицируемый вектор параметров a^0 удовлетворяет условию

$$\int_{t_0}^{t_f} M \left(\frac{\partial R^0}{\partial a} + \sum_{s=1}^{q_0} \gamma_s \frac{\partial R^s}{\partial a} \right) dt = 0, \quad (18)$$

где $R^0 = L^*(t, x, u^0, a^0) \lambda^0$, $R^s = L^*(t, x, u^0, a^0) \lambda^s$.

Следствие. Идентифицируемое управление $u^0(t)$, определенное в процессе идентификации, удовлетворяет условию.

$$M \left(\frac{\partial R^0}{\partial u} + \sum_{s=1}^q \gamma_s \frac{\partial R^s}{\partial u} \right) = 0 \quad (19)$$

или

$$M \left(\frac{\partial R^0}{\partial u} \right) = - \sum_{s=1}^q \gamma_s M \left(\frac{\partial R^s}{\partial u} \right) \quad (20)$$

Из (20) следует, что если управление u^0 идентифицировано в открытом ядре множества U , то правая часть (20) полагается равной нулю.

Поскольку условие (20) определяет r -мерный вектор, опорный к множеству U в точке u^0 , то из определения опорного функционала следует, что в равномерно близкой окрестности точки u^0 выполняется условие идентификации

$$M \left[R^0(u, \cdot) + \sum_{s=1}^q \gamma_s R^s(u, \cdot) \right] \geq M \left[R^0(u^0, \cdot) + \sum_{s=1}^q \gamma_s R^s(u^0, \cdot) \right]. \quad (21)$$

Заключение. Рассмотрены условия идентифицируемости и необходимые условия идентификации параметров и управления нелинейных стохастических систем с учетом различных требований, на параметры, управление и вектор состояний системы, которые описываются ограничениями типа равенств. Полученные условия идентификации, аналогично [6], позволяют строить численные методы идентификации параметров и управления стохастических систем со сходимостью алгоритмов к необходимым условиям идентификации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гихман И.Х., Скороход А.В. Управляемые случайные процессы. – Киев, Наукова думка, 1977, – 252с.
2. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М.:Мир,1978, – 317с.
3. Гихман И.Х., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М. : Наука, 1977, – 568с.
4. Евланов Л.Г., Константинов В.М. Системы со случайными параметрами. – М.: Наука. 1976. – 568 с.
5. Роднищев Н.Е. Оптимизация управления нелинейных стохастических систем с ограничениями // Автоматика и телемеханика. № 2, 2001, С.87 – 101
6. Роднищев Н.Е. Приближенный метод поиска оптимального управления нелинейных стохастических систем с ограничениями // АиТ. 2001. № 3. С. 63 – 71.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ ДИНАМИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ ПО ПРИНЦИПУ ЗАМЫКАЕМОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Н.М. Дмитрук (Белгосуниверситет, Беларусь, 220030, Минск,
Независимости, 4)
E-mail: dmitrukn@bsu.by

OPTIMAL CONTROL OF A LINEAR DYNAMICAL OBJECT VIA CLOSED STATE FEEDBACKS

N.M. Dmitruk (BSU, Belarus, 220030, Minsk, Nezavisimosti av., 4)

Keywords: optimal control, linear system, uncertainty, feedback control.

Введение. Рассматривается задача оптимального управления линейным динамическим объектом с неизвестными ограниченными возмущениями, который требуется за конечное время перевести с гарантией на терминальное множество, обеспечивая при этом минимальное гарантированное значение заданного критерия качества. Задачи оптимального управления в условиях неопределенности рассматриваются в литературе достаточно давно [1–3], однако сохраняют актуальность в связи с их практической значимостью.

Эффективное управление объектами в условиях неопределенности требует построения обратной связи. При наличии возмущений для определения оптимальной обратной связи используются различные подходы к формированию соответствующих задач оптимального управления (см. [4]), в зависимости от доступной в процессе управления информации о поведении системы. Например, в работах [5, 6] оптимальная обратная связь, построенная на основе оптимальных гарантирующих программ (не учитывающих информации о будущих состояниях), названа размыкаемой обратной связью. Там же, замыкаемая обратная связь определяется в предположении о возможности измерения состояний объекта и коррекции управляющих воздействий в один или несколько будущих моментов времени. В последнем случае результатом решения оптимизационной задачи будет стратегия управления. Другие подходы к определению оптимальных стратегий управления используются в теории робастного управления с прогнозирующей моделью [7–9].

Настоящая работа примыкает к исследованиям [5, 6], в которых рассматривались линейные задачи оптимального управления с терминальным критерием качества, и работам [4,10,11], посвященным терминальным линейно-квадратичным задачам с возмущениями. В отличие от перечисленных работ для рассматриваемой задачи значительно упрощен алгоритм построения оптимальных стратегий управления.

Постановка задачи. Рассмотрим объект управления, поведение которого на промежутке времени $T = [t_0, t_f]$ описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t) + f(t)w(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние, $u(t) \in \mathbb{R}$ – управляющее воздействие, $w(t) \in \mathbb{R}$ – неизвестное возмущение в момент времени t ; значения управляющих воздействий и возмущений ограничены: $|u(t)| \leq 1$, $|w(t)| \leq w^*$, $t \in T$; $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b(t), f(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in T$, – кусочно-непрерывные матричная и векторные функции.

Для управления объектом (1) будем использовать дискретные управляющие воздействия [6] с периодом квантования h : $u(t) \equiv u(s)$, $t \in [s, s+h]$, $s \in \Delta = \{t_0, t_0 + h, \dots, t_f - h\}$, $h = (t_f - t_0) / N$, $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$.

Целью управления является перевод системы (1) с гарантией, т.е. независимо от реализовавшегося возмущения, на заданное ограниченное терминальное множество $X_f = \{x \in \mathbb{R}^n : Hx \leq g\}$ ($H \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $g \in \mathbb{R}^m$) и минимизация полного импульса управляющего воздействия $\int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt$.

Простейшим подходом к достижению поставленной цели будет построение оптимальной гарантирующей программы [4, 6] $u^0(t)$, $t \in T$, – доступного управляющего воздействия с минимальным полным импульсом, гарантирующего выполнение включения $x(t_f) \in X_f$ при всех возможных возмущениях. Известно, однако, что оптимальная гарантирующая программа (если она существует) значительно недооценивает потенциальные возможности системы управления, поскольку не учитывает возможность поступления информации о ее поведении в будущем. Таковую возможность учтем, определив ниже *стратегию управления с одним моментом замыкания*.

Пусть $t_1 \in \Delta$. Момент времени t_1 разбивает промежуток управления T на $T_0 = [t_0, t_1[$ и $T_1 = [t_1, t_f]$; а также Δ на $\Delta_k = T_k \cap \Delta$, $k=0,1$; $N_1 = |\Delta_1|$. Следуя [6], t_1 назовем моментом замыкания системы (1).

Для $k=0,1$ определим: $U_k = \{u_k(\cdot) = (u_k(t), t \in T_k) : |u_k(t)| \leq 1, t \in T_k\}$ – множество всех доступных дискретных управляющих воздействий, определенных на k -ом промежутке, $W_k = \{w_k(\cdot) = (w_k(t), t \in T_k) : |w_k(t)| \leq w^*, t \in T_k\}$ – множество всех возможных возмущений; $x(t | x_k, u_k(\cdot), w_k(\cdot))$, $t \in T_k$, – траектория (1) с начальным состоянием $x(t_k) = x_k$, управлением $u_k(\cdot) \in U_k$ и возмущением $w_k(\cdot) \in W_k$; $X(t | x_k, u_k(\cdot)) = \{x = x(t | x_k, u_k(\cdot), w_k(\cdot)), w_k(\cdot) \in W_k\}$ –

множество всех возможных состояний системы (1) в момент времени $t \in T_k$, порожденных управлением $u_k(\cdot) \in U_k$ и всеми возмущениями $w_k(\cdot) \in W_k$.

Следуя [10], будем считать, что до начала процесса управления известно, что в момент t_1 можно будет: 1) измерить текущее состояние объекта управления $x(t_1) = x(t_1 | x_0, u_0(\cdot), w_0(\cdot))$; 2) скорректировать управляющее воздействие на интервале T_1 с учетом полученного измерения состояния.

С учетом дополнительных условий 1) – 2), решение рассматриваемой задачи будем искать в виде *стратегии управления* [10] вида

$$\pi_1 = \pi_1(t_0, x_0) = \{u_0(\cdot | x_0); u_1(\cdot | x_1), x_1 \in X(t_1 | x_0, u_0(\cdot | x_0))\},$$

где $u_k(\cdot | x_k) = (u_k(t | x_k), t \in T_k)$ – управляющее воздействие на T_k , $k=0,1$.

Стратегию π_1 назовем допустимой, если

$$X(t_f | x_1, u_1(\cdot | x_1)) \subseteq X_f, \forall x_1 \in X(t_1 | x_0, u_0(\cdot | x_0)).$$

Качество допустимой стратегии управления π_1 оценим значением

$$V(\pi_1) = \max_{w_0(\cdot) \in W_0} \left\{ \int_{T_0} |u_0(t | x_0)| dt + \int_{T_1} |u_1(t | x(t_1 | x_0, u_0(\cdot | x_0), w_0(\cdot)))| dt \right\}.$$

Оптимальной называется такая стратегия

$$\pi_1^0 = \pi_1^0(t_0, x_0) = \{u_0^0(\cdot | x_0); u_1^0(\cdot | x_1), x_1 \in X(t_1 | x_0, u_0^0(\cdot | x_0))\}, \quad (2)$$

на которой выполняется $V(\pi_1^0) = \min_{\pi_1} V(\pi_1)$.

Управляющее воздействие $u_0^0(\cdot | x_0)$ в составе оптимальной стратегии π_1^0 будем называть *оптимальной начальной программой*.

Оптимальная стратегия управления. Для формирования задач, определяющих оптимальную стратегию управления π_1^0 , последовательно рассмотрим промежутки T_1 (после момента замыкания t_1) и T_0 (до момента замыкания).

Промежуток $T_1 = [t_1, t_f]$. Пусть $x_1 \in X_1 = \{x_1 \in \mathbb{R}^n : \exists u_1(\cdot | x_1) \in U_1, X(t_f | x_1, u_1(\cdot | x_1)) \subseteq X_f\}$, т.е. для точки x_1 существует *гарантирующая программа* – доступное управляющее воздействие, определенное на T_1 , переводящее систему (1) на терминальное множество X_f при всех возможных возмущениях. Далее предполагаем, что параметры задачи таковы, что $X_1 = \emptyset$.

Задача управления системой (1) на промежутке T_1 состоит в отыскании *оптимальной гарантирующей программы* $u_1^0(\cdot | x_1)$ – гарантирующей программы с минимальным полным импульсом. Таким образом, опти-

мальная гарантирующая программа $u_1^0(\cdot | x_1)$ является решением следующей задачи

$$J_1(x_1) = \min_{u_1(\cdot) \in U_1} \int_{T_1} |u_1(t | x_1)| dt, \quad (3)$$

при условии $X(t_f | x_1, u_1(\cdot | x_1)) \subseteq X_f$.

Промежуток $T_0 = [t_0, t_1[$. Целью управления здесь будет гарантированное попадание системы на множество X_1 :

$$X(t_1 | x_0, u_0(\cdot | x_0)) \subseteq X_1, \quad (4)$$

что обеспечит существование оптимальной гарантирующей программы $u_1^0(\cdot | x_1)$, $\forall x_1 \in X(t_1 | x_0, u_0(\cdot | x_0))$. Будем считать, что при заданном x_0 существует $u_0(\cdot | x_0) \in U_0$, обеспечивающее включение (4), тогда стратегия управления $\pi_1 = \{u_0(\cdot | x_0); u_1^0(\cdot | x_1), x_1 \in X(t_1 | x_0, u_0(\cdot | x_0))\}$, является допустимой.

Оптимальная начальная программа $u_0^0(\cdot | x_0)$ на промежутке T_0 является решением следующей минимаксной задачи

$$V(\pi_1^0) = \min_{u_0(\cdot) \in U_0} \max_{w_0(\cdot) \in W_0} \left\{ \int_{T_0} |u_0(t)| dt + J_1(x(t_1 | x_0, u_0(\cdot), w_0(\cdot))) \right\}, \quad (5)$$

при условии (4).

Альтернативной (см. [7, 8]) будет следующая формулировка задачи (5)

$$V(\pi_1^0) = \min_{u_0(\cdot) \in U_0, \alpha} \left\{ \int_{T_0} |u_0(t)| dt + \alpha \right\}, \quad (6)$$

при условиях

$$x(t_1 | x_0, u_0(\cdot), w_0(\cdot)) \in X_1, J_1(x(t_1 | x_0, u_0(\cdot), w_0(\cdot))) \leq \alpha, \forall w_0(\cdot) \in W_0.$$

Обозначим $X_1(\alpha) = \{x_1 \in X_1 : J_1(x_1) \leq \alpha\}$. Тогда (6) примет вид

$$V(\pi_1^0) = \min_{u_0, \alpha} \left\{ \int_{T_0} |u_0(t)| dt + \alpha \right\}, \quad (7)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + b(t)u_0(t) + f(t)w_0(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad |u_0(t)| \leq 1, \quad t \in T_0, \\ x(t_1) &\in X_1(\alpha), \quad \forall w_0(\cdot) \in W_0. \end{aligned}$$

Таким образом, стратегия управления (2), состоящая из решения $u_0^0(\cdot | x_0)$ задачи (7) и решений $u_1^0(\cdot | x_1)$ задач (3) для состояний $x_1 \in X(t_1 | x_0, u_0^0(\cdot | x_0))$, будет оптимальной стратегией управления с моментом замыкания t_1 .

Оптимальная замыкаемая обратная связь. Выше сформулирована задача построения оптимальной стратегии управления $\pi_1^0 = \pi_1^0(t_0, x_0)$ для начальной позиции (t_0, x_0) . Эта стратегия строится до начала процесса управления и гарантирует, что в реальном процессе значение критерия качества будет не хуже $V(\pi_1^0)$. Качество процесса управления можно улучшить, если вместо $\pi_1^0(t_0, x_0)$ использовать обратную связь, определенную на основе оптимальных стратегий с моментами замыкания – *замыкаемую обратную связь* [5, 6, 10].

Определим оптимальную однократно замыкаемую обратную связь. Поскольку правила построения управлений, составляющих стратегию π_1^0 различны для промежутков управления T_0 и T_1 , правила построения оптимальной обратной связи для них также будут разными.

Промежуток $T_0 = [t_0, t_1[$. Погрузим задачу (7) в семейство задач, зависящее от позиции (τ, z) , $\tau \in \Delta_0$, $z \in \mathbb{R}^n$:

$$V(\pi_1^0(\tau, z)) = \min_{u_0, \alpha} \left\{ \int_{T_0(\tau)} |u_0(t)| dt + \alpha \right\}, \quad (8)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + b(t)u_0(t) + f(t)w_0(t), \quad x(\tau) = z, \quad |u_0(t)| \leq 1, \quad t \in T_0(\tau), \\ x(t_1) &\in X_1(\alpha), \quad \forall w_0(\cdot) \in W_0(\tau), \end{aligned}$$

где $W_0(\tau)$ – сужение множества W_0 на промежуток $T_0(\tau) = [\tau, t_1]$.

Обозначим $u_0^0(\cdot | \tau, z) = (u_0^0(t | \tau, z), t \in T_0(\tau))$ – оптимальная начальная программа в задаче (8) и определим следующую оптимальную стратегию в (τ, z) :

$$\pi_1^0(\tau, z) = \{u_0^0(\cdot | \tau, z); u_1^0(\cdot | x_1), x_1 \in X(t_1 | x_0, u_0^0(\cdot | \tau, z))\}.$$

Промежуток $T_1 = [t_1, t_f]$. Рассмотрим семейство задач

$$\min_{u_1} \int_{T_1(\tau)} |u_1(t)| dt, \quad (9)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + b(t)u_1(t) + f(t)w_1(t), \quad x(\tau) = z, \quad |u_1(t)| \leq 1, \quad t \in T_1(\tau) = [\tau, t_f], \\ x(t_f) &\in X_f, \quad \forall w_1(\cdot) \in W_1(\tau), \end{aligned}$$

зависящее от позиции (τ, z) , $\tau \in \Delta_1$, $z \in \mathbb{R}^n$. Пусть $u_1^0(\cdot | \tau, z) = (u_1^0(t | \tau, z), t \in T_1(\tau))$ – оптимальная гарантирующая программа задачи (9).

Оптимальную однократно замыкаемую обратную связь определим следующим образом:

$$u^0(\tau, z) = \begin{cases} u_0^0(\tau | \tau, z), \tau \in \Delta_0; \\ u_1^0(\tau | \tau, z), \tau \in \Delta_1. \end{cases} \quad (10)$$

Следуя [6], замыкаемую обратную связь (10) реализуем по ходу конкретного процесса управления в режиме реального времени. Будем считать, что в процессе управления объектом реализуется возмущение $w^*(t)$, $t \in T$, в дискретные моменты времени $\tau \in \Delta$ измеряются реализовавшиеся состояния $x^*(\tau)$.

Управление объектом (1) по принципу замыкаемой обратной связи осуществляется согласно следующему алгоритму:

- 1) Инициализация: $\tau = t_0$, $x^*(\tau) = x_0$.
- 2) При $\tau \in \Delta_0$ решить задачу (8) для текущей позиции $(\tau, x^*(\tau))$, найти $u_0^0(\cdot | \tau, x^*(\tau))$, положить $u^0(\tau, x^*(\tau)) = u_0^0(\tau | \tau, x^*(\tau))$.
- 3) При $\tau \in \Delta_1$ решить задачу (9) для текущей позиции $(\tau, x^*(\tau))$, найти $u_1^0(\cdot | \tau, x^*(\tau))$, положить $u^0(\tau, x^*(\tau)) = u_1^0(\tau | \tau, x^*(\tau))$.
- 4) На промежутке времени $[\tau, \tau + h[$ подать на вход объекта управляющее воздействие $u^*(t) \equiv u^0(\tau, x^*(\tau))$, $t \in [\tau, \tau + h[$.
- 5) Положить $\tau := \tau + h$, при $\tau < t_f$ получить измерение $x^*(\tau)$, вернуться к 2).

Для решения задачи (9) применяется метод, изложенный в работе [6]. Ниже предлагается новый подход к решению задачи (8) для произвольной позиции (τ, z) , $\tau \in \Delta_0$ (или задачи (7) при $\tau = t_0$).

Подчеркнем, что при построении оптимальной стратегии $\pi_1^0(\tau, z)$ необходимо находить лишь оптимальную начальную программу $u_0^0(\cdot | \tau, z)$, поскольку только она используется для управления системой (1) в реальном процессе.

Построение оптимальной начальной программы. Кратко изложим результаты, позволяющие эффективно вычислять $u_0^0(\cdot | \tau, z)$. Основная идея состоит в получении простого описания множества $X_1(\alpha)$, что позволит свести задачу (8) к эквивалентной задаче линейного программирования.

В классе дискретных управляющих воздействий множество $X_1(\alpha)$ – многогранник при всех значениях параметра $\alpha \geq 0$. Будем считать, что известна матрица $P \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$, строки $p_i \in \mathbb{R}^n$, $\|p_i\| = 1$, $i = \overline{1, m_1}$, которой – нормализованы к граням $X_1(\alpha)$. Тогда $X_1(\alpha) = \{x_1 \in \mathbb{R}^n : Px_1 \leq g(\alpha)\}$, где $g(\alpha) = (g_i(\alpha), i = \overline{1, m_1})^T$:

$$g_i(\alpha) = \max p_i^T x_1, \quad x_1 \in X_1(\alpha). \quad (11)$$

Далее используются следующие обозначения: $F(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t \in T$, – фундаментальная матрица решений однородной системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t): \dot{F}(t) = A(t)F(t), \quad F(t_0) = E; \quad G = HF(t_f)F^{-1}(t_1),$$

$$d(s) = \int_s^{s+h} F(t_1)F^{-1}(t)b(t)dt, \quad s \in \Delta;$$

$$Q = (q_i(s_i^j), i = \overline{1, m_1}, j = \overline{1, N_1}): q_i(s_i^1) \geq q_i(s_i^2) \geq \dots \geq q_i(s_i^{N_1}), \quad q_i(s) = |p_i^T d(s)|, \\ s \in \Delta_1;$$

$\omega(\alpha) = (1, \dots, 1, \{\alpha/h\}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{N_1}$, где дробная часть $\{\alpha/h\}$ является $[\alpha/h] + 1$ -ой компонентой;

$$\gamma_1 = (\gamma_1^j, i = \overline{1, m})^T: \gamma_1^j = \int_{T_1} |h_i^T F(t_f)F^{-1}(t)| dt w^*, \quad i = \overline{1, m};$$

$$\gamma_0(\tau) = (\gamma_0^j(\tau), i = \overline{1, m_1})^T: \gamma_0^j(\tau) = \int_{T_0(\tau)} |p_i^T F(t_1)F^{-1}(t)| dt w^*, \quad i = \overline{1, m_1};$$

$$g_1 = (g_i(0), i = \overline{1, m_1})^T: g_i(0) = \max p_i^T x_1, \quad Gx_1 \leq g - \gamma_1, \quad i = \overline{1, m_1}.$$

Следующее утверждение позволяет легко вычислять значения $f(\alpha)$:

Утверждение 1. При любом $0 \leq \alpha \leq t_f - t_1$ имеет место

$$g(\alpha) = g_1 + Q\omega(\alpha),$$

Доказательство утверждения 1 основано на применении результатов теории двойственности в линейном программировании к задаче (11).

На основании утверждения 1 задача (8) может быть представлена в виде

$$V(\pi_1^0(\tau, z)) = \min_{u_0, \alpha} \left\{ \int_{T_0(\tau)} |u_0(t)| dt + \alpha \right\}, \quad (12)$$

при условиях

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u_0(t) + f(t)w_0(t), \quad x(\tau) = z, \quad |u_0(t)| \leq 1, \quad t \in T_0(\tau),$$

$$Px(t_1) - Q\omega(\alpha) \leq g_1, \quad \forall w_0(\cdot) \in W_0(\tau).$$

Утверждение 2. Пусть $u_*^0(s), u^{*0}(s) \in \mathbb{R}$, $s \in \Delta_0$, $\omega^0 \in \mathbb{R}^{N_1}$ – решение задачи линейного программирования

$$\varphi^0 = \min_{u_*, u^*, \omega} \left\{ \sum_{s \in \Delta_0(\tau)} (u^*(s) + u_*(s)) + \sum_{j=1}^{N_1} \omega_j \right\},$$

$$\sum_{s \in \Delta_0(\tau)} Pd(s)(u^*(s) - u_*(s)) - Q\omega \leq g_1 - \gamma_0(\tau) - PF(t_1)F^{-1}(\tau)z,$$

$$0 \leq u_*(s) \leq 1, \quad 0 \leq u^*(s) \leq 1, \quad s \in \Delta_0(\tau) = \Delta_0 \cap T_0(\tau),$$

$$0 \leq \omega_j \leq 1, \quad j = \overline{1, N_1}.$$

Тогда

$$u_0^0(t | \tau, z) \equiv u^{*0}(s) - u_*^0(s), \quad t \in [s, s+h[, \quad s \in \Delta_0(\tau), \quad \alpha^0 = h \sum_{j=1}^{N_1} \omega_j,$$

– оптимальная начальная программа и оптимальное значение параметра задачи (8) (эквивалентной ей задачи (12)). При этом $V(\pi_1^0(\tau, z)) = h\varphi^0$.

Пример. Рассмотрим задачу оптимального управления системой

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u + w, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u + w, \quad x(0) = x_0,$$

которую требуется перевести на множество $X_f = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_j| \leq x^*, j=1,2\}$.

Параметрам задачи присвоим значения: $t_f = 10$, $x_0 = (5, 0)$, $x^* = 2$, $w^* = 0.3$. Будем использовать дискретные управляющие воздействия с периодом квантования $h=0.1$. В качестве момента замыкания выберем $t_1 = 7$. В данном примере матрица P содержит 254 строки, которых достаточно для представления $X_1(\alpha)$ при любом значении параметра. Каждая строка находится в $\bigcup_{s \in \Delta_1} \ker(d^T(s)) \cup \bigcup_{s_1, s_2 \in \Delta_1} \ker(d^T(s_1) + d^T(s_2)) \cup \bigcup_{s_1, s_2 \in \Delta_1} \ker(d^T(s_1) - d^T(s_2))$.

Оптимальное начальное управление в задаче (7) ($\tau = t_0$) имеет вид

$$u_0^0(t | x_0) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 0.9[\cup [2.5, 4[\cup [5.6, 7], \\ 1, & t \in [0.9, 2.4[, \\ 0.7731, & t \in [2.4, 2.5[, \\ -1, & t \in [4, 5.6[. \end{cases}$$

При этом $V(\pi_1^0) = 4.8792$, $\alpha^0 = 1.7018$.

Для сравнения в начальной позиции (t_0, x_0) построена оптимальная гарантирующая программа. Ее полный импульс оказался равен 5.6563. Также оптимальное начальное управление $u_0^0(\cdot | x_0)$ было построено двумя способами: по решению задачи (7) и с помощью алгоритма из [6]. Оба подхода реализованы в MATLAB. При этом время работы алгоритма из [6] более чем в 50 раз превысило время решения задачи (7).

При реализации оптимальной замыкаемой обратной связи согласно алгоритму, изложенному выше, рассмотрен процесс, в котором реализовалось возмущение $w^*(t) \equiv -0.3$, $t \in [0, 5[$; $w^*(t) \equiv 0.3$, $t \in [5, 10]$. Достигнуто значение критерия качества равное 3.4351. Для сравнения была реализована оптимальная размыкаемая обратная связь (см. [6]) на основе оптимальных гарантирующих программ. При этом получено значение критерия качества, равное 3.6737.

Этот, а также другие численные эксперименты позволяют сделать вывод о том, что учет даже одной точки замыкания может повысить качество процесса управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Witsenhausen H. A minimax control problem for sampled linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1968. – Vol. 13, № 1. – P. 5-21.
2. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. – М.: Наука, 1985.
3. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977.
4. Костюкова О.И., Курдина М.А. Оптимальные гарантированные стратегии управления с промежуточными моментами коррекции // Тр. Ин-та матем. – 2006. – Т. 14, № 1. – С. 82-93.
5. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костина Е.А. Замыкаемые обратные связи по состоянию для оптимизации неопределенных систем управления // Автоматика и телемеханика. – 1996. – № 7, 8.
6. Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2004. – Т. 44, № 2. – С. 265-286.
7. Scokaert P.O.M., Mayne D.Q. Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems // IEEE Transactions on Automatic control. – 1998. – Vol. 43, № 8. – P. 1136-1142.
8. Bemporad A., Borrelli F., Morari M. Min-max control of constrained uncertain discrete-time linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2003. – Vol. 48, № 9. – P. 1600-1606.
9. Goulart P.J., Kerrigan E.C., Maciejowski J.M. Optimization over state feedback policies for robust control with constraints // Automatica. – 2006. – Vol. 42, № 4. – P. 523-533.
10. Kostyukova O., Kostina E. Robust optimal feedback for terminal linear-quadratic control problems under disturbances // Mathematical programming. – 2006. – Vol. 107, № 1-2. – P. 131-153.
11. Kostina E., Kostyukova O. Worst-case control policies for (terminal) linear-quadratic control problems under disturbances // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2009. – Vol. 19, № 17. – P. 1940-1958.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Абдуллаев В.М.</i> Об одной задаче управления отопительной системой с обратной связью	3
<i>Айда-заде К.Р.</i> Численное решение задачи оптимизации размещения точек замера состояния при управлении с обратной связью.....	8
<i>Алексеев Ф.Ф.</i> Методы декомпозиции и синтез нечетких логических регуляторов для сложных децентрализованных интеллектуальных систем управления с оценкой области адекватности полученных моделей	15
<i>Алпаров А.У., Благоев А.Е.</i> Модифицированная реверсивная широтно импульсная модуляция	25
<i>Аль Барри С.Х.</i> Идентификация параметров модели углового движения цели в оптической следящей системе	32
<i>Ананьев Б.И.</i> Гарантированная фильтрация линейных систем нейтрального типа	40
<i>Асанова А.Т.</i> О задаче управления для системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с интегральным условием.....	52
<i>Аузяк А.Г., Дегтярев Г.Л., Дремов Ф.В., Пидодня В.Т.</i> Приближённая оптимизация режима работы электродвигателя рулевого привода ЛА	59
<i>Афанасьев В.А., Балоев А.А., Мещанов А.С.</i> Универсальные решения линейных стационарных разностных уравнений	66
<i>Баландин Д.В.</i> Оптимальное по Парето обобщенное H ₂ -управление	74
<i>Барбашова Т.Ф., Игнатов А.И., Сазонов В.В.</i> Солнечная ориентация спутника-гиростата	83
<i>Барсегян В.Р.</i> Об одной задаче граничного оптимального управления колебаниями струны с ограничениями в промежуточные моменты времени.....	92
<i>Бильченко Н.Г., Бильченко Г.Г.</i> О синтезе управления в обратных задачах теплообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов.....	99
<i>Бильченко Н.Г., Бильченко Г.Г.</i> О вычислительных экспериментах по построению эффективного управления теплообменом в прямых и обратных задачах гиперзвуковой аэродинамики.....	109
<i>Бортаковский А.С.</i> Достаточные условия оптимальности моментов переключений непрерывно-дискретных динамических систем	119
<i>Бурдинов К.А., Карпов А.И., Кренев В.А.</i> Методика разработки и исследование динамики систем автоматического управления бортовыми комплексированными оптико-электронными приборами с применением компьютерных технологий.....	130

<i>Васюкова О.Э., Самсонов В.А.</i> Об идентификации параметров модели управляемого маятника по амплитудам установившихся движений	140
<i>Востриков А.С.</i> Сравнительный анализ предельных законов стабилизации нелинейных нестационарных объектов	147
<i>Гаркушенко В.К., Аль Барри С.Х.</i> Синтез дискретно-непрерывного управления для нестационарной следящей системы при неопределенных возмущениях	158
<i>Гладун А.В.</i> Обеспечение равномерного вращения твердого тела с помощью спарки гироудинов.....	168
<i>Грумондз В.Т., Полищук М.А., Карпежников Е.И.</i> Управление спуском в атмосфере беспилотного планирующего крылатого летательного аппарата с крыльями большого удлинения	176
<i>Губаев А.Р.</i> Оценка состояния насосного агрегата	186
<i>Гусев М.И., Зыков К.В.</i> О задаче достижимости для нелинейной системы с интегральными ограничениями на управление	190
<i>Дегтярев Г.Л., Файзутдинов Р.Н., Старостин Б.А.</i> Методы и алгоритмы планирования траекторий для сборки мусора в околоземном пространстве	199
<i>Денисов К.Г., Роднищев Н.Е.</i> Численный метод идентификации параметров и управления стохастических систем с ограничениями типа равенств	209
<i>Денисов К.Г.</i> Необходимые условия идентификации параметров и управления стохастических систем с ограничениями типа равенств.....	217
<i>Дмитрук Н.М.</i> Оптимальное управление линейным динамическим объектом по принципу замыкаемой обратной связи.....	225

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА,
УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ

ТРУДЫ XI МЕЖДУНАРОДНОЙ
ЧЕТАЕВСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

ТОМ 3

Секция 3. УПРАВЛЕНИЕ

Часть I

13 – 17 июня 2017 г.

*Статьи воспроизводятся с оригиналов, представленных авторами,
и Издатель не несет ответственности за содержание статей*

Ответственный за выпуск В.Н. Милёхин
Компьютерная верстка – Н.Н. Семёнова
Дизайн обложки – Н.Н. Семёнова

Подписано в печать 05.06.17.
Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 13,7. Тираж 300 экз. Заказ Б 35.

Издательство КНИТУ-КАИ
420111, Казань, К. Маркса, 10

ISBN 978-5-7579-2231-7

