115-летию со дня рождения Н.Г. Четаева
и памяти академика АН РТ
Т.К. Сиразетдинова
посвящается

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ

ТРУДЫ XI МЕЖДУНАРОДНОЙ ЧЕТАЕВСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

ТОМ 3

Секция 3. УПРАВЛЕНИЕ

Часть III

Казань, 13 – 17 июня 2017 г.

Министерство образования и науки Российской Федерации
Российская академия наук
Министерство образования и науки Республики Татарстан
Национальный комитет по автоматическому управлению
Академия наук Республики Татарстан
Научный совет РАН по теории управляемых процессов и автоматизации
Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова
Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ»

115-летию со дня рождения Н.Г. Четаева
и памяти академика АН РТ
Т.К. Сиразетдинова посвящается

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ

ТРУДЫ XI МЕЖДУНАРОДНОЙ ЧЕТАЕВСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

ТОМ 3

Секция 3. УПРАВЛЕНИЕ

Часть III

13 – 17 июня 2017 г.

Казань 2017

УДК 531.01 (063) + 531.391.5 (063) + 004 (063)
ББК 22.211 + 22.236.37 + 32.97
Ан 64

Ан 64 **Аналитическая механика, устойчивость и управление**: труды XI Международной Четаевской конференции. Т. 3. Секция 3. Управление. Ч. III. Казань, 13 – 17 июня 2017 г. – Казань: КНИТУ-КАИ, 2017. – 260 с.

ISBN 978-5-7579-2233-1 (т. 3, ч. III)
ISBN 978-5-7579-2230-0 (т. 3)
ISBN 978-5-7579-2227-0

Представлены доклады, посвященные актуальным проблемам теории и практики управления сложными динамическими системами, в том числе по методам оптимального управления, теории игр, интеллектуальному управлению в условиях неопределенности.

Использование опубликованных материалов будет способствовать расширению связей и повышению эффективности отечественных и зарубежных научно-образовательных центров в области управления.

УДК 531.01 (063) + 531.391.5 (063) + 004 (063)
ББК 22.211 + 22.236.37 + 32.97

Редакционная коллегия:

Васильев С.Н., академик РАН
Козлов В.В., академик РАН
Дегтярёв Г.Л., академик АН РТ, д.т.н., профессор
Балоев А.А., д.т.н., профессор
Тутубалин П.И., к.т.н., доцент

Ответственные секретари:

Хасанов А.Ю., к.т.н., доцент
Петрув И.В.

ISBN 978-5-7579-2233-1 (т. 3, ч. III)
ISBN 978-5-7579-2230-0 (т. 3)
ISBN 978-5-7579-2227-0

© Авторы, перечисленные в содержании, 2017
© Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ И УПРАВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА НЕРАВЕНСТВ

Н.Е. Роднищев (КНИТУ-КАИ, Россия, 420111, Казань, К.Маркса, 10) E-mail: pmi@pmi.kstu-kai.ru

NECESSARY CONDITIONS FOR IDENTIFICATION OF PARAMETERS AND CONTROL OF STOCHASTIC SYSTEMS WITH RESTRICTIONS TYPE OF INEQUALITIES

N.E. Rodnishchev (KNPTU-KAI, 420111, Kazan, K.Marx str., 10)

Keywords: Markov process, identification, stochastic system, restrictions of the type of inequalities

Введение. В работе исследуются необходимые условия идентификации нелинейных стохастических систем с ограничениями типа неравенств, основанные на схеме общей теории экстремальных задач.

Идентификация нелинейных стохастических систем с ограничениями типа неравенств – это большой класс задач, с которыми достаточно часто приходится сталкиваться на практике и в собственно математических проблемах. Это обусловлено в основном сложностью рассматриваемых задач, решение которых представляют собой определенные математические трудности.

В настоящей работе рассматриваются задачи идентификации параметров и управления нелинейных стохастических систем по настраиваемой модели в классе диффузионных Марковских процессов с учетом ограничений типа неравенств. Эти ограничения описывают различные требования, предъявляемые к системе. Обеспечение этих требований сужает множество состояний системы и допустимые области определения параметров и управления систем, и требуют привлечения нового математического аппарата для исследования задач идентификации.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу идентификации вектора параметров $a=(a_1,...,a_m)$ и вектор функции управления $u(\cdot)=(u_1(\cdot),...,u_r(\cdot))$ нелинейной стохастической системы относительно расширенного вектора состояний $X=(Y,B)$

$$dX_i=\sum_{j=1}^{n}\left(C_{ij}(t,X)dt+dw_{ij}(t)\right)\varphi_{ij}(t,X,u,a)+\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}(t,X)d\eta_j(t),$$

$$X_i(t_0)=Y_{i0},\ (i=1,\ldots,n_0),\ t\in[t_0,t_k], \qquad (1)$$

$$dX_i = 0,\ \ X_i(t_0) = B_i,\ \ (i = n_0+1,...,n_0+l_0)$$

по наблюдениям

$$Z_k = \sum_{v=1}^{n} c_{kv} Y_v + \dot{w}_k(t). \qquad (2)$$

Эффективность идентификации оценивается минимумом функционала

$$I_0(u,a) = \int_{t_0}^{t_k} M\left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(Z_k - \sum_{v=1}^{n} c_{k_v} Y_v\right)^2\right] dt, \qquad (3)$$

а цели управления, тактико-технические и эксплуатационные требования, цели управления (тактико-технические, эксплуатационные) и другие требования, предъявляемые к системе, описываются смешанными ограничениями типа неравенств на фазовые координаты системы, параметры и функции управления:

$$I_s(u,a) = \int_{\Omega} f_s(y,a)\, p(t_k, y \mid \overline{z}) dx - b_s \le 0, \quad s \in J_1 = \{1,...,q\};$$

$$\psi_s(u) \le 0, \quad s \in J_2 = \{1,...,q_0\}, \qquad (4)$$

$$g_s(a) \le 0,\ s \in J_3 = \{1,...,m_0\}.$$

Здесь $M[\cdot]$ – оператор математического ожидания; t – время, t_0, t_k – начальная и конечная точки рассматриваемого интервала времени $[t_0, t_k]$. $Y_i(t)$-компонента вектор функции $Y(t) = (Y_1(t),...,Y_i(t),...,Y_n(t))$ состояния стохастической системы (1). $Y_i(t_k) = Y_{ik}$ – компоненты вектора состояния системы в конечный момент времени.

В качестве управления $u(\cdot)$ рассматривается r-мерное программное управление $u(t)$ или управление по обратной связи $u(t, y)$. Управление $u(\cdot) = u(t)$ – детерминированная r-мерная вектор-функция определяется из множества S:

$$S = \{u(t) \in L_2[t_0, t_k] : u(t) \in U \quad \textit{для почти всех } t \in [t_0, t_k]\},$$

где U-выпуклое компактное множество в $E_r : U = \{u \in E_r : \psi_s(u) \le 0, s \in J_2\}$. Если рассматривается управление с обратной связью $u(\cdot) = u(t, y)$, то $u(t, y)$ борелевская функция своих аргументов со значениями в U. a – детерминированный m-мерный вектор управляющих параметров из выпуклого компактного множества $E_m : a \in E_m$, $E_m = \{a : g_s(a) \le 0, s \in J_3\}$, определяющий конструктивные и энергетические параметры системы. B – случайный l_0 - мерный вектор, компоненты которого относятся к не-

прерывным случайным величинам характеризующим, в частности, отклонения параметров системы a от их номинальных значений. $dw_{ij}(t) = W_{ij}(t)dt$, $d\eta_j = N_j(t)dt$ – стохастические дифференциалы Стратоновича винеровских процессов $w_{ij}(t), \eta_j(t)$. Процесс $w_{ij}(t)$ описывает, действующие на систему, мультипликативные шумы. Процесс $\eta_j(t)$ описывает аддитивные шумы. $W_{ij}(t)$ белые гауссовские шумы, которые описывают случайные внутренние возмущения, присущие системе. $N_j(t)$ – белые гауссовские шумы, описывающие воздействия на систему внешней среды. $C_{ij}(t,B)$, $\varphi_{ij}(t,Y,u,a,B)$, $\sigma_{ij}(t,Y,B)$ – заданные неслучайные функции, удовлетворяющие известным требованиям [1] существования решения (1).

$Z_k(t)$ – наблюдаемая компонента вектора координат измерителя $Z(t) = (Z_1(t),...,Z_k(t),...,Z_{m_0}(t))$ $(m \le n)$. Матрица $|c_{kv}|_{m_0 \times n}$ определяет выбор наблюдаемых координат системы (1). $\dot{w}_k(t)$ производная винеровского процесса, $w_k(t)$ – компонента $R_k(t)$ аддитивного белого шума измерителя.

$I_s(u,a)$, $s \in J_1$ непрерывные и непрерывно дифференцируемые по совокупности переменных функционалы. $I_0(u,a)$ – дифференцируемый по совокупности переменных ограниченный функционал, α_k – весовые коэффициенты.

Относительно расширенного вектора состояний $X = (Y,B)$ задача (1) – (4), в соответствие с теорией марковских процессов сводится к детерминированной задаче

$$I_0(\upsilon) = \int_\Omega x_{n+1} p(t_k, \bar{x} | \bar{z}) d\bar{x} \to \min; \tag{5}$$

$$\frac{\partial p(t,\bar{x}|\bar{z})}{\partial t} = \bar{L}(t,\bar{x},u,a)\, p(t,\bar{x}|\bar{z}) + \left(F(x,z) - \int_\Omega F(x,z)\, p(t,\bar{x}|\bar{z})\, d\bar{x} \right) p(t,\bar{x}|\bar{z}),$$

$$p(t,x|\bar{z})\big|_{t=t_0} = p(t_0,x), \quad t \in [t_0,t_k]. \tag{6}$$

$$I_s(\upsilon) = \int_\Omega f_s(x,a)\, p(t_k,\bar{x}\,|\,\bar{z})\, d\bar{x} - b_s \le 0, \quad s \in J_1;$$

$$\psi_s(u) \le 0, \quad s \in J_2, \tag{7}$$

$$g_s(a) \le 0, \; s \in J_3.$$

Здесь $\upsilon = (u,a)$, $\bar{x} = (x, x_{n+1})$ – реализация расширенного вектора состояний $\bar{X} = (X, X_{n+1})$. Компонента вектора X_{n+1} определяется решением

дифференциального уравнения

$$dX_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left(Z_k-\sum_{v=1}^{n}c_{kv}X_v\right)^2dt=g(X)dt,\ t\in[t_0,t_k]\qquad X_{n+1}(t_0)=0.$$

$\bar{L}(t,\bar{x},u,a)\left(p(t,\bar{x}|\bar{z})\right)$ – линейный оператор, определенный выражением:

$$\bar{L}(t,\bar{x},u,a)\left(p(t,\bar{x}|\bar{z})\right)=L(t,x,u,a)\left(p(t,\bar{x}|\bar{z})\right)-\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\left[g(x)p(t,\bar{x}|\bar{z})\right]$$

$L(t,x,u,a)\,p(t,x|\bar{z})$ эллиптический оператор, определяемый по формуле

$$L(t,x,u,a)\,p(t,x|\bar{z})=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[A_i(t,x,u,a)\,p(t,x|\bar{z})\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,p=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_p}\left[B_{ip}(t,x,u,a)\,p(t,x|\bar{z})\right]$$

с коэффициентами сноса

$$A_i(t,z)=\sum_{j=1}^{n}C_{ij}\varphi_{ij}+\frac{1}{2}\sum_{j,p,q=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial z_p}\left(\varphi_{pq}G^{w}_{ijpq}+\sigma_{pq}G^{w\eta}_{ijq}\right)+\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial z_p}\left(\varphi_{pq}G^{\eta w}_{jpq}+\sigma_{pq}G^{\eta}_{jq}\right)\right]$$ и

диффузии

$$B_{ip}(t,z)=\sum_{j,q=1}^{n}\left[\varphi_{ij}\left(\varphi_{pq}G^{w}_{ijpq}+\sigma_{pq}G^{w\eta}_{ijq}\right)+\sigma_{ij}\left(\varphi_{pq}G^{\eta w}_{jpq}+\sigma_{pq}G^{\eta}_{jq}\right)\right].$$

В плотности распределения $p(t,x\,|\,\bar{z})$ вектор $\bar{z}$ означает, что используется вся наблюдаемая реализация выходного сигнала измерителя на интервале $[t_0,t_k]$.

G^{w}_{ij},G^{η}_{j} – интенсивности винеровских процессов $w_{ij}(t),\eta_j(t)$; $G^{w}_{ijpq},G^{w\eta}_{ijq},G^{\eta w}_{jpq},G^{\eta}_{jq}$ – взаимные интенсивности винеровских процессов.

Скалярная функция $F(x,z)$, характеризует свойства измерителя и определяется по формуле

$$F(x,z)=\sum_{k,p,q=1}^{n}\frac{1}{G^{R}_{pk}}c_{pq}x_q\left(z_k-\frac{1}{2}\sum_{v=1}^{n}c_{kv}x_v\right).$$

G^{R}_{p},G^{R}_{k} – интенсивности белых шумов $R_p(t)$ $R_k(t)$ измерителя; G^{R}_{pk} – взаимные интенсивности шумов измерителя.

Необходимые условия идентификации. Условие невырожден-ности (идентифицируемости) задачи (5) – (7), устанавливается теоремой 1, которая утверждает.

Теорема 1. *Пусть существует такая точка* (p,u,a), *что* $I_s(u,a)<0$ *при всех* $s\in J_1$, $\psi_s(u)<0$ *при всех* $s\in J_2$, $g_s(a)<0$ *при всех* $s\in J_3$ (*условие Слейтера*). *Тогда задача* (5) – (7) *невырожденная* (*идентифицируема*) *по*

наблюдениям (2), *если совокупность вариаций* $(\delta p, \delta u, \delta a) \in K$ *касательных к множеству*

$$Q = \left\{ p,u,a \left| \frac{\partial\, p(t,\overline{x}\,|\,\overline{z})}{\partial t} - \overline{L}\left(t,\overline{x},u,a,\right) p(t,\overline{x}\,|\,\overline{z}) - \right.\right.$$

$$\left. - \left(F(x,z) - \int\limits_{\Omega} F(x,z) p(t,\overline{x}\,|\,z)\, dx \right) p(t,\overline{x}\,|\,\overline{z}) = 0, \quad p(t_0,\overline{x}) = p_0 \right\}$$

в точке (p,u,a) *есть подпространство*

$$K = \left\{ \delta p, \delta u, \delta a \left| \frac{\partial\, \delta p}{\partial t} - \overline{L}(t,\overline{x},u,a)\delta p - \left(F(x,z) - \int\limits_{\Omega} F(x,z) p\, dx \right) \delta p + \right.\right.$$

$$\left. + p \int\limits_{\Omega} F(x,z) \delta p\, dx - \left(L_u\left(t,\overline{x},u,a\right) p \right) \delta u - \left(L_a\left(t,\overline{x},u,a\right) p \right) \delta a = 0,\ \delta p(t,\overline{x}\,|\,z)\big|_{t=t_0} = \delta p_0 \right\}.$$

Здесь

$$L_u\left(t,x,u,a\right) p = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial A_i\left(t,x,u,a\right)}{\partial u}\, p \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,p=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_p} \left[\frac{\partial B_{ip}\left(t,x,u,a\right)}{\partial u}\, p \right],$$

$$L_a\left(t,x,u,a\right) p = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial A_i\left(t,x,u,a\right)}{\partial a}\, p \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,p=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_p} \left[\frac{\partial B_{ip}\left(t,x,u,a\right)}{\partial a}\, p \right].$$

Необходимые условия идентификации задачи (5) – (7) устанавливаются теоремой 2.

Теорема 2. *Для идентификации стохастической системы* (1) *с плотностью распределения* (6) *по наблюдениям* (2) *в точке* $\left(u^0, a^0\right)$, *доставляющей минимум функционалу* (5) *с ограничениями* (7) *необходимо существование не равных одновременно нулю числа* $\gamma_0 \geq 0$, *векторов* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_{q_0}) \geq 0$, $\mu = (\mu_1, ..., \mu_{r_0}) \geq 0, \beta = (\beta_1, ..., \beta_{m_0}) \geq 0$ *и ограниченных функций* $\lambda^s\left(t,\overline{x}\middle|\overline{z}\right)$, $s \in \{0\} \bigcup J_1$, *определенных решениями задач Коши*

$$\frac{\partial \lambda^0}{\partial t} = -L^*(\cdot)\lambda^0 + M\left[F(x,z)\right]\lambda^0 - g\left(x\right), \tag{8}$$

$$\lambda^0\left(t_k, x\middle|\overline{z}\right) = x_{n+1}, \quad t \in \left[t_k, t_0\right].$$

$$\frac{\partial \lambda^s}{\partial t} = -L^*(\cdot)\lambda^s + M\left[F(x,z)\right]\lambda^s, \tag{9}$$

$$\lambda^s\left(t_k, x\middle|\overline{z}\right) = f_s(x,a), \quad t \in \left[t_k, t_0\right].)$$

таких, что

а) *идентифицируемое управление* u^0 *по измерениям* (2) *для почти всех* $t \in [t_0, t_k]$ *в равномерно близкой окрестности* $u^0(t)$ *удовлетворяет условию*

$$\left[M\left(\frac{\partial R^0}{\partial u} + \sum_{s=1}^{q_0} \alpha_s \frac{\partial R^s}{\partial u} \right) + \sum_{s=1}^{r_0} \mu_s \chi_{T_s} \frac{\partial \psi_s}{\partial u} \right] (u - u^0) \geq 0 \qquad (10)$$

б) *идентифицируемый вектор параметров* a^0 *удовлетворяет условию*

$$\int_{t_0}^{t_f} M\left(\frac{\partial R^0}{\partial a} \right) dt + \sum_{s=1}^{q_0} \alpha_s M\left(\frac{\partial f_s(z,a)}{\partial a} + \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial R^s}{\partial a} dt \right) + \sum_{s=1}^{m_0} \beta_s \frac{\partial g_s}{\partial a} = 0. \qquad (12)$$

Следствие. *Идентифицируемое управление* u^0 *удовлетворяет условию.*

$$M\left(\frac{\partial R^0}{\partial u} + \sum_{s=1}^{q_0} \alpha_s \frac{\partial R^s}{\partial u} \right) + \sum_{s=1}^{r_0} \mu_s \chi_{T_s} \frac{\partial \psi_s}{\partial u} = 0 \qquad (13)$$

или

$$M\left(\frac{\partial R^0}{\partial u} \right) = -\sum_{s=1}^{q_0} \alpha_s M\left(\frac{\partial R^s}{\partial u} \right) - \sum_{s=1}^{r_0} \mu_s \chi_{T_s} \frac{\partial \psi_s}{\partial u} \qquad (14)$$

В выражениях (8), (9) $L^*(\cdot)\lambda^s$, $s \in 0 \cup J_1$ определяется выражением

$$L^*(t,x,u,a)\lambda^s = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda^s}{\partial x_i} A_i(t,x,u,a) + \frac{1}{2} \sum_{i,p=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda^s}{\partial x_i \partial x_p} B_{ip}(t,x,u,a).$$

В выражениях (10) – (14)

$$\frac{\partial R^s}{\partial u} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda^s}{\partial x_i} \left[\frac{\partial A_i(t,x,u,a)}{\partial u} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,p=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda^s}{\partial x_i \partial x_p} \left[\frac{\partial B_{ip}(t,x,u,a)}{\partial u} \right], \; s \in 0 \cup J_1$$

$$\frac{\partial R^s}{\partial a} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda^s}{\partial x_i} \left[\frac{\partial A_i(t,x,u,a)}{\partial a} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,p=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda^s}{\partial x_i \partial x_p} \left[\frac{\partial B_{ip}(t,x,u,a)}{\partial a} \right], \; s \in 0 \cup J_1$$

Из (14) следует, что если управление u^0 идентифицировано в открытом ядре множества U, то правая часть (14) полагается равной нулю.

Поскольку условие (13) определяет r-мерный опорный вектор

$$M\left(\frac{\partial R^0}{\partial u} + \sum_{s=1}^{q_0} \alpha_s \frac{\partial R^s}{\partial u} \right) + \sum_{s=1}^{r_0} \mu_s \chi_{T_s} \frac{\partial \psi_s}{\partial u}$$

к множеству $U = \{u \in E_r : \psi_s(u) \leq 0, s \in J_3\}$ в точке u^0, то из определения опорного функционала следует, что

$$M\left[R^0(u,\cdot)+\sum_{s=1}^{q_0}\alpha_s R^s(u,\cdot)\right]+\sum_{s=1}^{r_0}\mu_s\chi_{T_s}\psi_s(u)\geq \tag{15}$$

$$M\left[R^0(u^0,\cdot)+\sum_{s=1}^{q_0}\alpha_s R^s(u^0,\cdot)\right]+\sum_{s=1}^{r_0}\mu_s\chi_{T_s}\psi_s(u^0)$$

Отсюда, с учетом определения характеристической функции χ_{T_s}

$$\chi_{T_s}=\begin{cases}1, \textit{ если } t\in T_s\\ 0 \textit{ в противномслучае}\end{cases}$$

на множества $T_s=\{t\in[t_0,t_k]:\psi_s(u)=0\}$, следует, что в открытом ядре множества U в равномерно близкой окрестности точки u^0 выполняется условие идентификации

$$M\left[R^0(u,\cdot)+\sum_{s=1}^{q_0}\alpha_s R^s(u,\cdot)\right]\geq M\left[R^0(u^0,\cdot)+\sum_{s=1}^{q_0}\alpha_s R^s(u^0,\cdot)\right]. \tag{16}$$

Заключение. Полученные условия идентификации, аналогично [1], позволяют строить численные методы идентификации параметров и управления стохастических систем с ограничениями типа неравенств со сходимостью алгоритмов к необходимым условиям идентификации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боднер В.А., Роднищев Н.Е., Юриков Е.П. Оптимизация терминальных стохастических систем. М.: Машиностроение, 1987.

О ПРИМЕНЕНИИ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

К.А. Рыбаков (МАИ, Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4)
E-mail: rkoffice@mail.ru

ON THE APPLICATION OF THE SPECTRAL METHOD FOR OPTIMAL CONTROL PROBLEMS IN DYNAMICAL SYSTEMS WITH CONSTRAINTS

K.A. Rybakov (MAI, 125993, Moscow, Volokolamskoe highway, 4)

Keywords: dynamical systems, geometric constraints, optimal control, spectral method.

Введение. В работе рассматриваются вопросы, связанные с построением множеств допустимых управлений при геометрических ограничениях в спектральной форме математического описания и их применением в задачах оптимального управления динамическими системами.

Спектральная форма математического описания систем управления предполагает представление входных и выходных сигналов системы с помощью коэффициентов разложения их по ортонормированным или биортонормированным функциям. По принятой в [1] терминологии это означает, что сигналы представляются спектральными характеристиками. При приближенном решении различных задач теории управления используются конечные наборы ортогональных функций для представления сигналов, таким образом, спектральные характеристики – это, как правило, векторы с конечным числом элементов. Если никаких ограничений на сигналы, например, на управляющие воздействия не задано, то в скалярном случае спектральные характеристики – это всевозможные L-мерные векторы, где L – число функций выбранной ортогональной системы. Если же ограничения заданы, то возникает *задача построения множества допустимых спектральных характеристик*.

Для произвольной системы ортонормированных или биортонормированных функций найти точно такое множество затруднительно, поэтому была предложена методика для его аппроксимации с помощью построения выпуклой многогранной области при любом заданном L для скалярных управляющих воздействий. Эта методика подробно описана в [2, 3]. Искомое множество можно аппроксимировать сколь угодно точно, а в некоторых случаях таким множеством являются множества, ограниченные правильными многогранниками: гипероктаэдром или гиперкубом в L-мерном пространстве.

В представленной работе указанные выше результаты обобщаются на случай векторных управляющих воздействий, рассматриваются геометрические ограничения, при которых допустимые значения управления принадлежат множеству, ограниченному q-мерным параллелотопом или q-мерным эллипсоидом, где q – размерность вектора управления. Точно также геометрические ограничения могут быть учтены и для координат выходного сигнала.

Множество допустимых управлений в одномерном случае. Будем рассматривать скалярную функцию $u(t)\colon\ T \to \mathbb{R}^1$ и полную систему биортонормированных функций $\{q^{\text{р}}(i,t), q^{\text{в}}(j,t)\}_{i=0}^{\infty}$ в пространстве $L_2(T;\nu(t))$, $T=[t_0,t_1]$, для которой

$$(q^{\text{р}}(i,t), q^{\text{в}}(j,t))_{L_2(T;\nu(t))} = \int_{t_0}^{t_1} \nu(t) q^{p}(i,t) q^{\text{в}}(j,t)\,dt = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases} \qquad i,j = 0,1,2,\ldots,$$

где функции $\{q^{\text{р}}(i,t), q^{\text{в}}(j,t)\}_{i=0}^{\infty}$ кусочно-непрерывны на T, $\nu(t)$ – весовая функция ($\nu(t)$ полагается тождественно равной единице, если специально не оговорено иное). Система функций $\{q^{\text{р}}(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ называется базисом разложения, а $\{q^{\text{в}}(j,t)\}_{i=0}^{\infty}$ – базисом восстановления.

Таким образом, если $u(t)\in L_2(T;\nu(t))$, а далее это подразумевается, то

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i q^{\text{в}}(i,t), \quad t\in T, \tag{1}$$

где u_i – коэффициенты разложения функции $u(t)$:

$$u_i = (q^{\text{р}}(i,t), u(t))_{L_2(T;\nu(t))} = \int_{t_0}^{t_1} \nu(t) q^{p}(i,t) u(t)\,dt, \quad i=0,1,2,\ldots$$

Спектральной характеристикой U функции $u(t)$, определенной относительно базиса разложения $\{q^{\text{р}}(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$, называется упорядоченная совокупность коэффициентов u_i, представленных в виде бесконечной матрицы-столбца: $U=[u_0\ u_1\ u_2\ldots]^{\text{T}}$. Преобразование, ставящее в соответствие функции ее спектральную характеристику, называют спектральным преобразованием и обозначают $\mathbb{S}$, тогда $U=\mathbb{S}[u(t)]$, $u(t)=\mathbb{S}^{-1}[U]$ согласно (1), $\mathbb{S}^{-1}$ – обратное спектральное преобразование [1, 4, 5].

Наряду с точным представлением функции $u(t)$ в виде ряда (1) можно рассматривать задачу приближенного представления в виде частичной суммы:

$$u(t) \approx u_L(t) = \sum_{i=0}^{L-1} u_i q^{\text{в}}(i,t), \tag{2}$$

где L – порядок усечения спектральных характеристик, тогда спектральная характеристика представляется матрицей-столбцом: $U=[u_0\ u_1..u_{L-1}]^{\mathrm{T}}\in\square^{L}$.

Предположим, что для функции $u(t)$ задано дополнительное условие вида $|u(t)|\le\upsilon$, часто используемое в задачах оптимального управления с геометрическими ограничениями, т.е. $u(t)$ – допустимое управление некоторой динамической системой, υ – заданное положительное число, t – время. Задача построения множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания состоит в нахождении множества спектральных характеристик $\mathbb{U}_L\subset\square^{L}$, соответствующего функциям из $L_2(T;\nu(t))_L\cap\{u(t):|u(t)|\le\upsilon\}$ при спектральном преобразовании $\mathbb{S}$ с заданным порядком усечения L, где

$L_2(T;\nu(t))_L=\mathrm{Lin}\{q^{\mathrm{в}}(0,t),q^{\mathrm{в}}(1,t),\ldots,q^{\mathrm{в}}(L-1,t)\}$.

Для финитных базисных систем $\{q^{\mathrm{р}}(i,t),q^{\mathrm{в}}(j,t)\}_{i=0}^{L-1}$ в условии ортогональности индексы i,j ограничены: $i,j=0,1,\ldots,L-1$. Вместо формулы (1) может быть использовано только представление функции $u(t)$ в виде линейной комбинации функций базиса восстановления (2). Финитные базисы разложения и восстановления обозначим $\{q^{\mathrm{р}}(i,t)\}_{i=0}^{L-1}$ и $\{q^{\mathrm{р}}(i,t)\}_{i=0}^{L-1}$ соответственно. Точное равенство $u(t)=u_L(t)$ возможно только при $u(t)\in L_2(T;\nu(t))_L$.

Системы ортонормированных функций $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ или $\{q(i,t)\}_{i=0}^{L-1}$ можно рассматривать как частный случай систем биортонормированных функций $\{q^{\mathrm{р}}(i,t),q^{\mathrm{в}}(j,t)\}_{i=0}^{\infty}$ или $\{q^{\mathrm{р}}(i,t),q^{\mathrm{в}}(j,t)\}_{i=0}^{L-1}$, если $q(i,t)=q^{\mathrm{в}}(i,t)=q^{\mathrm{р}}(i,t)$, $i=0,1,2,\ldots$ или $i=0,1,\ldots,L-1$.

В статье [2] показано, что множество $\mathbb{U}_L$ – выпуклое, замкнутое и ограниченное подмножество пространства $\square^{L}$, симметричное относительно нуля, соответствующего управлению $u(t)\equiv0$:

$$u(t)\in L_2(T;\nu(t))_L\cap\{u(t):|u(t)|\le\upsilon\}\ \Leftrightarrow\ U=\mathbb{S}[u(t)]\in\mathbb{U}_L.$$

Граница множества $\mathbb{U}_L$ является образом управлений, достигающих заданного ограничения υ. Важным результатом является исследование частных случаев, когда множество $\mathbb{U}_L$ можно конструктивно описать, например, задав его границу правильным многогранником.

Отметим, что при $L>4$ существует всего три правильных многогранника с точностью до преобразования подобия: L-мерный симплекс, L-мерный гипероктаэдр и L-мерный гиперкуб. При $L\le4$ правильных многогранников больше трех, но применение такого небольшого числа ортонормированных или биортонормированных функций не имеет особого смысла

при решении практических задач. Рассмотрим случай $L>4$ более подробно. L-мерный симплекс не может быть границей множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания, поскольку не обладает нужными свойствами симметрии. Двум оставшимся многогранникам соответствуют система функций Уолша [4] и несколько систем финитных функций, например, локальные полиномиальные сплайны специального вида [3].

В частности, если в качестве полной системы ортонормированных функций $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ на отрезке $T=[0,1]$ взять функции Уолша, то $\mathbb{U}_L$ будет гипероктаэдром в L-мерном пространстве:

$$u(t)\in L_2([0,1])_L \cap \{u(t):|u(t)|\le 1\} \;\Leftrightarrow\; U=\mathbb{S}[u(t)]\in \mathbb{U}_L=\{U:\|U\|_{\lozenge}\le 1\},$$

где $\|U\|_{\lozenge}=|u_0|+|u_1|+\ldots+|u_{L-1}|$ – октаэдрическая норма вектора в $\mathbb{R}^L$.

Если же в качестве финитной системы биортонормированных функций $\{q^{\text{п}}(i,t),q^{\text{в}}(j,t)\}_{i=0}^{L-1}$ на отрезке $T=[0,1]$ использовать локальные полиномиальные сплайны, то $\mathbb{U}_L$ будет гиперкубом в L-мерном пространстве:

$$u(t)\in L_2([0,1])_L \cap \{u(t):|u(t)|\le 1\} \;\Leftrightarrow\; U=\mathbb{S}[u(t)]\in \mathbb{U}_L=\{U:\|U\|_{\square}\le 1\},$$

где $\|U\|_{\square}=\max\{|u_0|,|u_1|,\ldots,|u_{L-1}|\}$ – кубическая норма вектора в $\mathbb{R}^L$.

Случай, когда $T=[t_0,t_1]$ и $|u(t)|\le\upsilon$ при $t_0\neq 0$, $t_1\neq 1$ и $\upsilon\neq 1$, отличается от рассмотренного выше только тем, что соответствующий многогранник связан с границей $\mathbb{U}_L$ преобразованием подобия с коэффициентом $\upsilon\sqrt{t_1-t_0}$, т.е. при $T=[t_0,t_1]$ получим $\mathbb{U}_L=\{U:\|U\|_{\lozenge}\le\upsilon\sqrt{t_1-t_0}\}$ или $\mathbb{U}_L=\{U:\|U\|_{\square}\le\upsilon\sqrt{t_1-t_0}\}$ при выборе функций Уолша или локальных полиномиальных сплайнов.

Для других систем ортонормированных и биортонормированных функций множество допустимых управлений в спектральной форме математического описания можно приближенно аппроксимировать выпуклой многогранной областью согласно методике, изложенной в статьях [2, 3]. В этих же статьях есть некоторые примеры таких аппроксимаций для значений $L=3$ и $L=4$ для полиномов Лежандра, тригонометрических функций, функций Хаара и др.

Множество допустимых управлений в многомерном случае. Далее рассмотрим вектор-функцию $u(t):\ T\to\mathbb{R}^q$ с координатами $u_l(t)\in L_2(T;\nu(t))$, $l=1,\ldots,q$, а также, как и ранее, систему биортонормированных функций (возможно, финитную).

Если ограничения на множество допустимых значений управления задаются q-мерным параллелотопом, то построение спектрального аналога этого множества тривиально. Пусть $|u_l(t)|\le\upsilon_l$, тогда достаточно построить множества $\mathbb{U}_L^l$ для каждой координаты вектора управления:

$$u_l(t)\in L_2(T;\nu(t))_L\cap\{u_l(t):\,|u_l(t)|\le\upsilon_l\}\ \Leftrightarrow\ U_l=\mathbb{S}[u_l(t)]\in\mathbb{U}_L^l,\ \ l=1,\ldots,q.$$

Фактически, множеством допустимых управлений в спектральной форме математического описания будет прямое произведение $\mathbb{U}_L^1\times\ldots\times\mathbb{U}_L^q$, которому должен принадлежать упорядоченный набор спектральных характеристик $(U_1,\ldots,U_q)$.

Если же ограничения на множество допустимых значений управления определяются q-мерным эллипсоидом, то построение спектрального аналога этого множества осуществляется следующим образом. Пусть $\sum_{l,r=1}^{q}Q_{lr}u_l(t)u_r(t)\le\upsilon$ – ограничения на управление, где Q_{lr} – элементы положительно полуопределенной симметрической матрицы Q. Тогда, обозначая $u_{\square}(t)=\sum_{l,r=1}^{q}Q_{lr}u_l(t)u_r(t)$ и пользуясь тем, что $0\le u_{\square}(t)\le\upsilon$ и, следовательно, $|u_{\square}(t)|\le\upsilon$, получаем

$$u_{\square}(t)\in L_2(T;\nu(t))_L\cap\{u_{\square}(t):\,|u_{\square}(t)|\le\upsilon\}\ \Leftrightarrow\ U_{\square}=\mathbb{S}[u_{\square}(t)]\in\mathbb{U}_L,$$

где при построении множества $\mathbb{U}_L$ достаточно воспользоваться результатами для одномерного случая.

Осталось выразить спектральную характеристику $U_{\square}$ через спектральные характеристики $U_1,\ldots,U_q$ координат вектора управления. Для этого определим спектральную характеристику множительного звена V и воспользуемся свойством линейности спектрального преобразования и свойством спектрального преобразования произведения функций [1, 4, 5]. Тогда

$$U_{\square}=\mathbb{S}[u_{\square}(t)]=\mathbb{S}\left[\sum_{l,r=1}^{q}Q_{lr}u_l(t)u_r(t)\right]=$$

$$=\sum_{l,r=1}^{q}Q_{lr}\mathbb{S}[u_l(t)u_r(t)]=\sum_{l,r=1}^{q}Q_{lr}(VU_l)U_r,$$

следовательно,

$$u_l(t)\in L_2(T;\nu(t))_L\cap\left\{u_l(t):\,\sum_{l,r=1}^{q}Q_{lr}u_l(t)u_r(t)\le\upsilon\right\},\ \ l=1,\ldots,q,\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ U_{\square}=\mathbb{S}[u_{\square}(t)]=\sum_{l,r=1}^{q}Q_{lr}(VU_l)U_r\in\mathbb{U}_L.$$

Другой вариант при ограничениях на множество допустимых значений управления, задаваемых q-мерным эллипсоидом, – проверка условия вида $|u_{\square}(t)|\le\upsilon/2$, где $u_{\square}(t)=\sum_{l,r=1}^{q}Q_{lr}u_l(t)u_r(t)-\upsilon/2$. Тогда

$$U_{\square}=\mathbb{S}[u_{\square}(t)]=\mathbb{S}\left[\sum_{l,r=1}^{q}Q_{lr}u_l(t)u_r(t)-\upsilon/2\right]=$$

$$=\sum_{l,r=1}^{q}Q_{lr}\mathbb{S}[u_l(t)u_r(t)]-\upsilon/2\,\mathbb{S}[1]=\sum_{l,r=1}^{q}Q_{lr}(VU_l)U_r-(\upsilon/2)I,$$

где $I = \mathbb{S}[1]$ – спектральная характеристика функции, тождественно равной единице, следовательно,

$$u_l(t) \in L_2(T;\nu(t))_L \cap \left\{u_l(t):\ \sum_{l,r=1}^{q} Q_{lr} u_l(t) u_r(t) \le \upsilon\right\},\ \ l = 1,\ldots,q,\ \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \ U_{\square} = \mathbb{S}[u_{\square}(t)] = \sum_{l,r=1}^{q} Q_{lr} (VU_l) U_r \in \mathbb{U}_L,$$

причем в последней формуле множество $\mathbb{U}_L$ определяется величиной $\upsilon / 2$, а не υ, как выше.

Если выбрана система функций Уолша [4] для представления координат вектора управления, то проверка на его допустимость сводится к вычислению октаэдрической нормы спектральных характеристик $U_1,\ldots,U_q$ или $U_{\square}$, а если выбрана система локальных полиномиальных сплайнов [3], то для проверки на допустимость управления требуется лишь вычислить кубическую норму спектральных характеристик $U_1,\ldots,U_q$ или $U_{\square}$. Такая проверка является неотъемлемой частью решения задачи нахождения оптимального управления с геометрическими ограничениями при использовании прямых методов оптимизации [6, 7].

Применение к задаче оптимального управления разворотом космического аппарата. В качестве примера рассмотрим задачу оптимального управления детерминированной динамической системой седьмого порядка, которая задается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_0(t) &= \tfrac{1}{2}\left(-\lambda_1(t) w_1(t) - \lambda_2(t) w_2(t) - \lambda_3(t) w_3(t)\right),\\
\dot{\lambda}_1(t) &= \tfrac{1}{2}\left(\lambda_0(t) w_1(t) - \lambda_3(t) w_2(t) + \lambda_2(t) w_3(t)\right),\\
\dot{\lambda}_2(t) &= \tfrac{1}{2}\left(\lambda_3(t) w_1(t) + \lambda_0(t) w_2(t) - \lambda_1(t) w_3(t)\right),\\
\dot{\lambda}_3(t) &= \tfrac{1}{2}\left(-\lambda_2(t) w_1(t) + \lambda_1(t) w_2(t) + \lambda_0(t) w_3(t)\right),\\
\dot{w}_1(t) &= N_1 w_2(t) w_3(t) + u_1(t),\\
\dot{w}_2(t) &= N_2 w_3(t) w_1(t) + u_2(t),\\
\dot{w}_3(t) &= N_3 w_1(t) w_2(t) + u_3(t),
\end{aligned} \qquad (3)$$

где $\lambda(t) = [\lambda_0(t)\ \ \lambda_1(t)\ \ \lambda_2(t)\ \ \lambda_3(t)]^{\mathrm{T}}$ – кватернион поворота космического аппарата, $w(t) = [w_1(t)\ \ w_2(t)\ \ w_3(t)]^{\mathrm{T}}$ – вектор угловой скорости, $N_1 = (I_2 - I_3)/I_1$, $N_2 = (I_3 - I_1)/I_2$, $N_3 = (I_1 - I_2)/I_3$, I_l – главные моменты инерции, $u_l(t) = M_l(t)/I_l$, $M(t) = [M_1(t)\ \ M_2(t)\ \ M_3(t)]^{\mathrm{T}}$ – вектор главного момента внешних сил; $T = [t_0, t_1]$ – заданный отрезок времени разворота; краевые условия имеют вид $\lambda_i(t_0) = \lambda_{i0}$, $\lambda(t_1) = \lambda_{i1}$, $w_l(t_0) = w_{l0}$, $w_l(t_1) = w_{l1}$, $i = 0,1,2,3$, $l = 1,2,3$.

Ограничения на вектор управления можно задать в виде множества, ограниченного параллелепипедом или эллипсоидом, т.е.

$$|M_l(t)| \le M_l^*, \quad l = 1,2,3, \quad \text{или} \quad \underbrace{\sum_{l,r=1}^{3} Q_{lr} M_l(t) M_r(t)}_{M_{\square}(t)} \le M^*, \tag{4}$$

где M_l^* и M^* – заданные числа, Q_{lr} – элементы заданной положительно полуопределенной симметрической матрицы Q размера 3×3 (в этой задаче управлением является вектор $M(t)$).

Функционал качества управления квадратичный:

$$J = \tfrac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{l,r=1}^{3} R_{lr} M_l(t) M_r(t) \right) dt \to \min_{M(t)}, \tag{5}$$

где R_{lr} – элементы положительно определенной симметрической матрицы R.

Динамические системы такого типа подробно рассмотрены в работах [8–13]. В них варьируется постановка задачи оптимального управления, например, в функционал качества могут входить координаты вектора угловой скорости $w(t)$ при отсутствии краевых условий на эти координаты, рассматривается другой тип функционала качества, но для примера применения спектрального метода это не так принципиально.

Из-за ограничений на объем статьи привести подробное решение задачи приближенного нахождения оптимального управления не представляется возможным, поэтому ограничимся спектральным аналогом указанных выше соотношений и сформулируем задачу конечномерной оптимизации.

Пусть $\{q^{\text{п}}(i,t), q^{\text{в}}(j,t)\}_{i=0}^{\infty}$ ($\{q^{\text{п}}(i,t), q^{\text{в}}(j,t)\}_{i=0}^{L-1}$) – система биортонормированных функций в пространстве $L_2(T)$ (здесь ограничимся случаем, когда весовая функция $\nu(t)$ тождественно равна единице, чтобы не усложнять и без того громоздкие выражения); L – порядок усечения спектральных характеристик; $q^{\text{п}}(t_0)$ и $q^{\text{п}}(t_0)$ – векторы значений функций базиса разложения в начальный и конечный моменты времени t_0 и t_1 (векторы $L\times1$); $\mathcal{P}$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования (матрица $L\times L$); V – спектральная характеристика множительного звена (трехмерная матрица $L\times L\times L$); Λ_i, W_l и U_l – спектральные характеристики функций $\lambda_i(t)$, $w_l(t)$ и $u_l(t)$ (векторы $L\times1$), т.е.

$$\Lambda_i = \mathbb{S}[\lambda_i(t)], \quad W_l = \mathbb{S}[w_l(t)], \quad U_l = \mathbb{S}[u_l(t)], \quad i = 0,1,2,3, \quad l = 1,2,3.$$

С учетом введенных обозначений, а также свойств спектральных характеристик операторов дифференцирования при заданных краевых условиях [5, 14], имеем

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{P}^T\Lambda_0 + \lambda_{01}q^{\mathrm{p}}(t_1) - \lambda_{00}q^{\mathrm{p}}(t_0) &= \tfrac{1}{2}\big(-(VW_1)\Lambda_1 - (VW_2)\Lambda_2 - (VW_3)\Lambda_3\big),\\
-\mathcal{P}^T\Lambda_1 + \lambda_{11}q^{\mathrm{p}}(t_1) - \lambda_{10}q^{\mathrm{p}}(t_0) &= \tfrac{1}{2}\big((VW_1)\Lambda_0 - (VW_2)\Lambda_3 + (VW_3)\Lambda_2\big),\\
-\mathcal{P}^T\Lambda_2 + \lambda_{21}q^{\mathrm{p}}(t_1) - \lambda_{20}q^{\mathrm{p}}(t_0) &= \tfrac{1}{2}\big((VW_1)\Lambda_3 + (VW_2)\Lambda_0 - (VW_3)\Lambda_1\big),\\
-\mathcal{P}^T\Lambda_3 + \lambda_{31}q^{\mathrm{p}}(t_1) - \lambda_{30}q^{\mathrm{p}}(t_0) &= \tfrac{1}{2}\big(-(VW_1)\Lambda_2 + (VW_2)\Lambda_1 + (VW_3)\Lambda_0\big), \qquad (6)\\
-\mathcal{P}^T W_1 + w_{11}q^{\mathrm{p}}(t_1) - w_{10}q^{\mathrm{p}}(t_0) &= N_1(VW_2)W_3 + U_1,\\
-\mathcal{P}^T W_2 + w_{21}q^{\mathrm{p}}(t_1) - w_{20}q^{\mathrm{p}}(t_0) &= N_2(VW_3)W_1 + U_2,\\
-\mathcal{P}^T W_3 + w_{31}q^{\mathrm{p}}(t_1) - w_{30}q^{\mathrm{p}}(t_0) &= N_3(VW_1)W_2 + U_3,
\end{aligned}
$$

где $U_l = (1/I_l)M_l$, M_l – спектральные характеристики функций $M_l(t)$ (векторы $L\times 1$), т.е. $M_l = \mathbb{S}[M_l(t)]$, $l = 1,2,3$.

Запишем ограничения для спектральных характеристик. Если ограничения на множество допустимых значений управления задаются параллелепипедом, т.е. $|M_l(t)| \le M_l^*$, $l = 1,2,3$, то при выборе функции Уолша [4] получим условия

$$M_l \in \mathbb{M}_L^l = \{M : \| M \|_{\Diamond} \le M_l^* \sqrt{t_1 - t_0}\}, \qquad (7.1)$$

а если применять локальные полиномиальные сплайны, то

$$M_l \in \mathbb{M}_L^l = \{M : \| M \|_{\square} \le M_l^* \sqrt{t_1 - t_0}\}. \qquad (7.2)$$

Когда ограничения на множество допустимых значений управления задаются эллипсоидом, т.е. $\sum_{l,r=1}^{3} Q_{lr}M_l(t)M_r(t) \le M^*$, то для функций Уолша [4] будем иметь

$$M_{\square} \in \mathbb{M}_L = \{M : \| M \|_{\Diamond} \le M^* \sqrt{t_1 - t_0}\}, \qquad (7.3)$$

а для локальных полиномиальных сплайнов

$$M_{\square} \in \mathbb{M}_L = \{M : \| M \|_{\square} \le M^* \sqrt{t_1 - t_0}\}, \qquad (7.4)$$

где $M_{\square} = \sum_{l,r=1}^{3} Q_{lr}(VM_l)M_r$.

Далее преобразуем функционал качества управления (5) в спектральную область, для этого воспользуемся свойствами спектральных характеристик линейных функционалов [4], адаптируя их для систем биортонормированных, а не ортонормированных функций. Тогда

$$J_{\mathbb{S}} = \tfrac{1}{2}\sum_{l,r=1}^{3} R_{lr}M_l^{\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{в}}M_r \to \min_{(M_1,M_2,M_3)}, \qquad (8)$$

где $\Delta^{\mathrm{в}}$ – спектральная характеристика связи (матрица $L\times L$) [5, 14], т.е. матрица Грама для базиса восстановления $\{q^{\mathrm{в}}(j,t)\}_{i=0}^{\infty}$. Если используется

система ортонормированных функций, то $\Delta^{в}$ – единичная матрица $L \times L$.

Таким образом задача оптимального управления (3)–(5) сведена к задаче оптимизации (6)–(8). Выбор формулы (7), т.е. (7.1), (7.2), (7.3) или (7.4), осуществляется исходя из заданных ограничений на множество допустимых значений управления и выбранной системы функций для представления координат вектора состояния и управления спектральными характеристиками (функций Уолша или локальных полиномиальных сплайнов).

Размерность этой задачи оптимизации $3L$. Ее можно решить известными методами поиска условного экстремума функций многих переменных или свести к задаче безусловной оптимизации и применить соответствующие методы поиска безусловного экстремума [15], получив таким образом приближенное решение задачи оптимального управления.

Отметим, что при выборе других систем ортонормированных или биортонормированных функций проверка допустимости управления сложнее (для построения спектрального аналога множества допустимых управлений требуются значительные вычислительные затраты). Если весовая функция $\nu(t)$ отлична от тождественно равной единице, то усложняются уравнения (6), а именно в левой части каждого равенства будет дополнительное слагаемое, и усложняется спектральный аналог функционала качества управления, т.е. выражение (8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. – М.: Наука, 1974.

2. Рыбаков К.А. Построение множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания // Вычислительные технологии. – 2015. Т. 20. № 3. – С. 58–74.

3. Рыбаков К.А. Спектральные аналоги множества допустимых управлений для финитных базисных систем // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2016. № 2. – С. 40–71.

4. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. – М.: Вузовская книга, 2015.

5. Рыбин В.В. Моделирование нестационарных систем управления целого и дробного порядка проекционно-сеточным спектральным методом. – М.: Изд-во МАИ, 2013.

6. Пантелеев А.В. Применение эволюционных методов глобальной оптимизации в задачах оптимального управления детерминированными системами. – М.: Изд-во МАИ, 2013.

7. Пантелеев А.В., Скавинская Д.В., Алешина Е.А. Метаэвристические алгоритмы поиска оптимального программного управления. – М.: ИНФРА-М, 2016.

8. Левский М.В. Об одном случае оптимального управления пространственной ориентацией космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2012. № 4. – С. 115–130.

9. Левский М.В. Кинематически оптимальное управление переориентацией космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2015. № 1. – С. 119–136.

10. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Особый режим управления в задаче оптимального разворота произвольного твердого тела (космического аппарата) // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2012. № 2. – С. 145–152.

11. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Аналитическое решение задачи оптимального по быстродействию разворота сферически-симметричного космического аппарата в классе конических движений // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2014. № 2. – С. 13–24.

12. Мурзабеков З.Н., Айпанов Ш.А. Оптимальное управление разворотом космического аппарата с квадратичным целевым функционалом // Математическая теория управления и механика. Международная конференция, Суздаль, 5–9 июля 2013 г.: Тез. докл. – М.: МИАН, 2013. – С. 169–171.

13. Айпанов Ш.А., Мурзабеков З.Н. Оптимальная пространственная переориентация космического аппарата при двусторонних ограничениях на управления // Проблемы оптимизации сложных систем. X Международная Азиатская школа-семинар, Булан-Соготту, 25 июля – 5 августа 2014 г.: Тр. конф. – 2014. – С. 22–28.

14. Рыбаков К.А., Рыбин В.В. Моделирование распределенных и дробно-распределенных процессов и систем управления спектральным методом. – М.: Изд-во МАИ, 2016.

15. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. – СПб.: Изд-во «Лань», 2015.

РАЗРАБОТКА УНИВЕРСАЛЬНОЙ БЕСПИЛОТНОЙ АВИАЦИОННОЙ ПЛАТФОРМЫ ВЕРТИКАЛЬНОГО ВЗЛЕТА-ПОСАДКИ МУЛЬТИРОТОРНОГО ТИПА ПОВЫШЕННОЙ ГРУЗОПОДЪЕМНОСТИ

М.И. Сабиров (ОКБ Авиарешения, 420034 Казань, ул. Декабристов 131, помещение 1220)
E-mail: msabirov@ardntechnology.com

С.С. Виноградов (КНИТУ-КАИ им. А.Н.Туполева, Россия, 420111, Казань, К.Маркса, 10)
E-mail: s.s.vinogradov@gmail.com

Н.Р. Зиннуров (ОКБ Авиарешения, 420034 Казань, ул. Декабристов 131, помещение 1220)
E-mail: nzinnurov@ardntechnology.com

THE DEVELOPMENT OF MULTI-PURPOSE MULTI-ROTOR VTOL UNMANNED AIRCRAFT PLATFORM WITH INCREASED LOAD CAPACITY

M.I. Sabirov (EDB Aviareshenia, 420034 Kazan, Dekabristov str., 131, 1220 rm)

S.S. Vinogradov (KNRTU-KAI named after A.N.Tupolev, 420111, Kazan, K.Marx str., 10)

N.R. Zinnurov (EDB Aviareshenia, 420034 Kazan, Dekabristov str., 131, 1220 rm)

Keywords: FLYP, Flying Platform, VTOL, quadrocopter, unmanned aircraft, rotorcraft, payload, load transportation, ACS, automatic control system, autopilot.

Введение. Среди множества беспилотных воздушных судов вертолетного типа, решающих задачу вертикального взлёта-посадки, широкое распространение получили мультикоптеры в связи с простотой конструкции и дешевизной. Однако данная схема обладает большим недостатком: в сравнении с традиционными схемами рабочая область несущих винтов мультикоптеров значительно меньше, что приводит к низкой энергоэффективности и сужению области применения.

В данном докладе представлены результаты исследований, направленные на поиск схемы беспилотного воздушного судна вертолетного типа, объединяющей в себе простоту конструкции мультикоптера и энергетическую эффективность вертолета традиционной схемы, которая позволит с высокой эффективностью решить задачу транспортировки тяжелого груза. Полученные результаты апробируются на созданной масштабной модели путем реальных летных испытаний.

Постановка задачи. Целью исследований является разработка беспилотного воздушного судна вертолетного типа, который позволит решить задачи транспортировки груза, недоступные дешевыми и простым мультикоптерам, а также тяжелым и дорогим вертолетам. Разрабатываемый аппарат должен удовлетворять следующим характеристикам: находиться в воздухе не менее 3 часов, обеспечивать транспортировку груза порядка 100 килограмм, обладать крейсерской скоростью около 50 км/ч и иметь габариты удобные для транспортировки по автомобильным дорогам.

Современные мультикоптеры обладают максимальной грузоподъемностью порядка 10 килограммов и небольшим временем автономной работы. Во многих странах ведутся работы по разработке новых аппаратов, способных решить поставленные задачи. Так, например, в воздушных судах, представленных в [1-4], увеличение грузоподъемности осуществляется за счет увеличения общего количества винтов и их диаметра при сохранении мультикоптерной схемы.

К недостаткам аппаратов данной конструкции можно отнести низкую энергоэффективность и большую стоимость. Несмотря на увеличенные размеры, также как и на малоразмерных мультикоптерах, для создания основной тяги используются электродвигатели и аккумуляторные батареи.

В работах [5] и [6] продемонстрирован аппарат AirMule. Для повышения грузоподъемности используются продольная схема расположения двух винтов большого диаметра, при этом перемещение в горизонтальной плоскости осуществляется при помощи толкающих винтов-импеллеров и рулевых поверхностей, отклоняющих потоки воздуха. Максимальная полезная нагрузка составляет 227 кг. В качестве силовой установки используется турбовальный двигатель, обеспечивающий высокую энергоэффективность. Аппарат способен находиться в воздухе до пяти часов. Основным недостаткам данной конструкции является стоимость, ограничивающая применение AirMule в гражданских целях.

Еще один способ решения поставленной цели - объединение нескольких схем в одну. В статье [7] к трикоптеру добавляется винт большого диаметра, создающий основную тягу. При этом малые винты трикоптера обеспечивают угловую стабилизацию и перемещение по горизонту.

В данном докладе представлена новая схема, обеспечивающая достижение поставленных задач. Предлагается объединить преимущества двух схем: схемы с поперечным расположением винтов большого диаметра и квадрокоптерной схемой расположения винтов по углам.

Таким образом, производится разделение функций аппарата. Удержание на заданной высоте осуществляется при помощи двух синхронно вращающихся в противоположных направлениях винтов большого диаметра. Управление движением аппарата в горизонтальной плоскости осуществля-

ется при помощи восьми управляющих электродвигателей с винтами, установленными в спарках по четырем углам. Для изменения угла рысканья используется воздушный поток, создаваемый несущими винтами. Четыре пластины, управляемые сервоприводами, устанавливаются попарно под винтами и отклоняют воздушный поток, создавая вращающий момент вокруг вертикальной оси. Управляющие двигатели и рулевые поверхности приводятся в движение от генератора, который вращает бензиновый двигатель внутреннего сгорания.

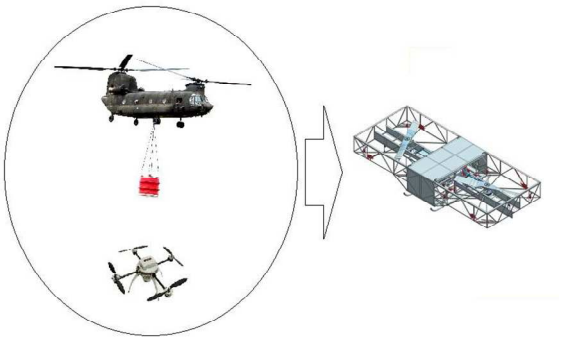

Рис. 1. Объединение двух схем

Для реализации аппарата была спроектирована конструктивно-силовая схема аппарата, выбран ДВС, спроектированы винты и редуктор. Были разработаны электрогенератор и силовой блок, регуляторы электродвигателей и сервоприводы; разработан собственный автопилот и получены законы управления.

Предварительная оценка показала, что конструкция данного воздушного судна, названного FLYP (от англ. FLYP - flying platform), позволяет повысить энергетическую эффективность на 20% в сравнении с квадрокоптером подобного размера.

Расчет винтомоторной группы и силовая установка. Исходя из требований к разрабатываемому воздушному судну итерационным методом были рассчитаны параметры и подобрано оборудование винтомоторной группы и силовой установки, с характеристиками, представленными в таблице 1.

Таблица 1

Основные параметры винтомоторной группы и силовой установки

Тип ДВС	4-х тактный
Максимальная мощность, л.с.	220
Удельный расход. гр./кВт*ч	330
Номинальная мощность л.с	165
Максимальный крутящий момент, Н*м	205
Редуктор	С ЭЦ зацеплением
КПД трансмиссии	93%
Мощность генератора, л.с.	11

На основе этих данных и с учетом требований к FLYP был разработан винт диаметром 2,8 м. Геометрические характеристики винта представлены в таблице 2. Основой для разработки послужила кривая, образуемая из точек аэродинамического профиля NACA 23012 хордой 0.2 м с носком в начале координат.

Все сечения, кроме концевого, повернуты относительно хорды на 25%. Концевое сечение повернуто относительно начала координат.

Таблица 2

Геометрические характеристики винта

Относительный радиус r/R	Крутка, град	Хорда, м	Отн. толщина c/b, %
0.2	18	0.2975	15
0.45	18	0.2825	12
0.5	17	0.275	12
0.55	17	0.2675	12
0.6	16	0.26	12
0.65	16	0.2525	12
0.7	15	0.245	12
0.9	9	0.2	9
1	6	0.1	6

Расчет создаваемой тяги производился с помощью метода численного интегрирования по радиусу и азимуту, описанный в [8]. Результат расчета представлен на рисунке 2.

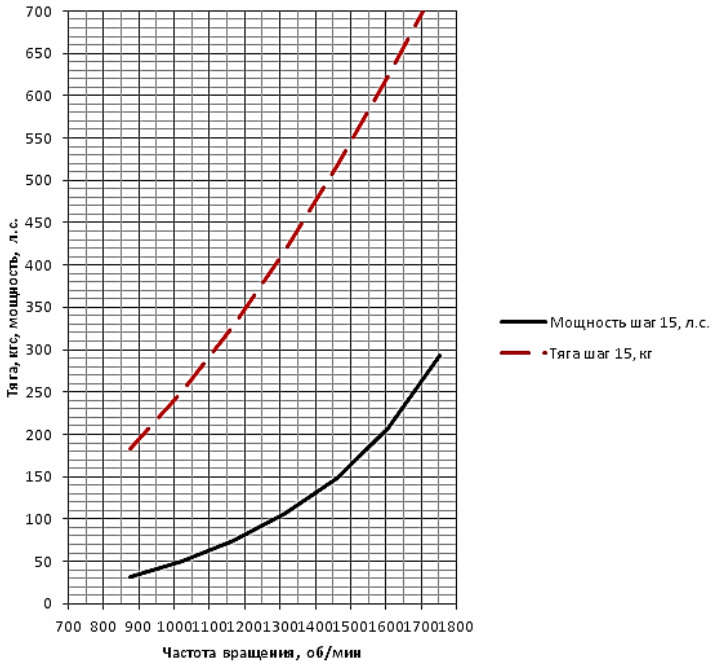

Рис. 2. Тяга и потребная мощность изолированного винта диаметром 2.8 м

С учетом общего веса FLYP, равного 367 кг, был получен запас тяги равный 245 кгс, что обеспечивает выполнение заданных требований.

Рис. 3. Масштабная модель FLYP

Разработка масштабной модели. Для исследования динамических характеристик и отработки законов управления создана уменьшенная модель разрабатываемой беспилотной авиационной платформы в масштабе 1 к 5. В данной масштабной модели учитываются массово-инерционные характеристики и соблюдается отношение максимальной тяги к суммарной массе FLYP. При этом на масштабной модели используются автопилот и набор датчиков соответствующие оборудованию полномасштабного аппарата. На рисунке 3 представлена масштабная модель с установленной рамой для отработок на стенде взлёта/посадки.

Разработка автопилота. Задачей разработанного автопилота для FLYP является обеспечение полностью автоматического полета по полетному заданию, формируемому на наземном пункте управления.

Используется следующая датчиковая группа: IMU-сенсор (включающий в себя акселерометры, гироскопы и магнитометры), барометр, лазерный высотомер, GPS и ГЛОНАСС. Стоит отметить, что в полноразмерной версии дополнительно используются датчики тока, температурные датчики, датчики давления на ДВС, датчики уровня жидкости в топливных баках и GPS-компас. Использование последнего связано с высоким магнитным полем генератора, вносящим помехи в работу магнитометра.

Для синтеза алгоритмов управления автопилота первоначально с использованием специально разработанных стендов были получены передаточные функции объекта управления по каналам крена, тангажа и рыскания. Уравнения зависимостей перемещения по высоте и горизонту были получены аналитическим путем.

Верификация полученных зависимостей по всем каналам производилась после разработки автопилота путем летных испытаний масштабной модели с замкнутым контуром системы автоматического управления.

На основе полученных передаточных функций разработана двухуровневая структура автопилота: внутренний уровень - обеспечение управления и стабилизации по углам крена, тангажа и рыскания (рисунок 4); внешний уровень - обеспечение управления и стабилизации по глобаль-

ным прямоугольным координатам X, Y и Z (рисунок 5). Синтез законов управления производился поканально с использованием типовых и многорежимных ПИД-регуляторов, изменяющих свою структуру исходя из режима полета.

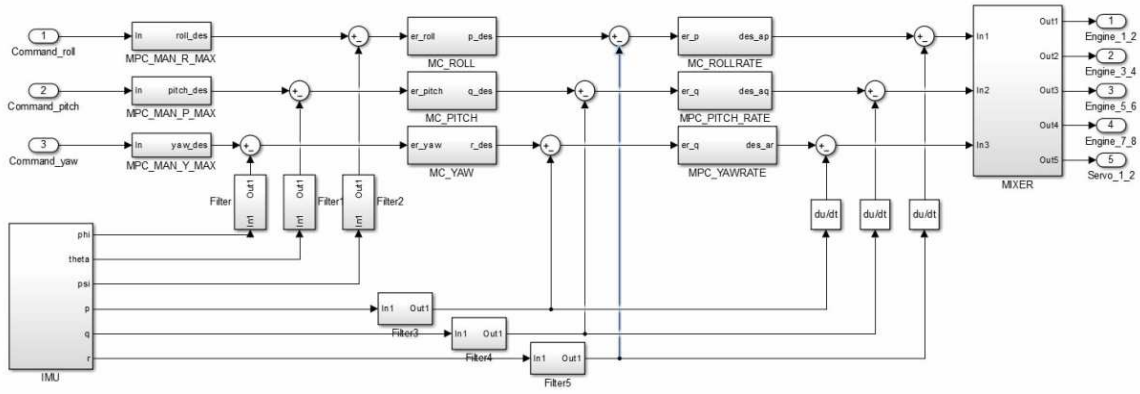

Рис. 4. Внутренний контур автопилота

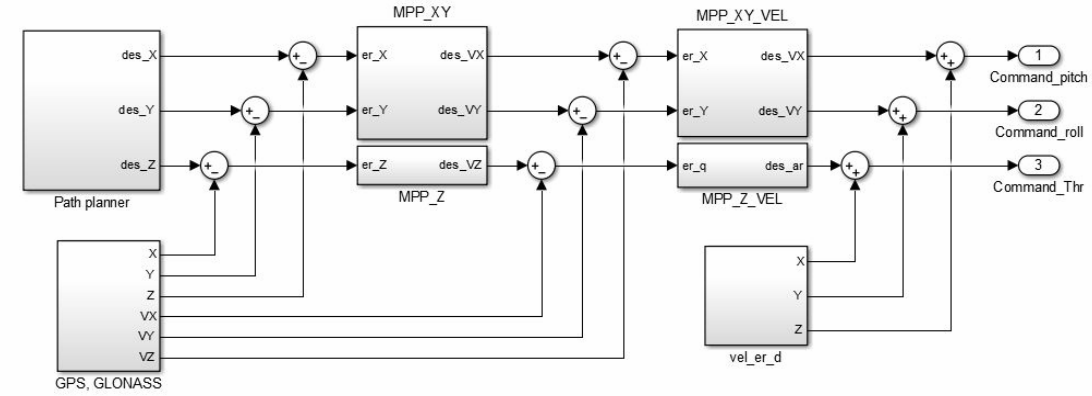

Рис. 5. Внешний контур автопилота

Для целей отладки и испытаний возможно отключение верхнего уровня автопилота и управление аппаратом при помощи пульта дистанционного управления через радиоканал.

Моделирование и летные эксперименты масштабной модели. На рисунках 6 и 7 представлены результаты летного эксперимента при полете по заданному маршруту. На рисунке 6 представлена реакция полученных ранее передаточных функций каналов крена, тангажа, рыскания и высоты на управляющие команды, полученные при моделировании и из эксперимента. На рисунке 7 желаемая траектория полета изображена пунктирной линией.

Полученные результаты подтверждают работоспособность системы управления и эффективность выбранной схемы аппарата. Сходимость результатов моделирования и летных экспериментов равняется 98%, что подтверждает правильность полученных зависимостей по каналам тангажа, крена, рыскания и высоты.

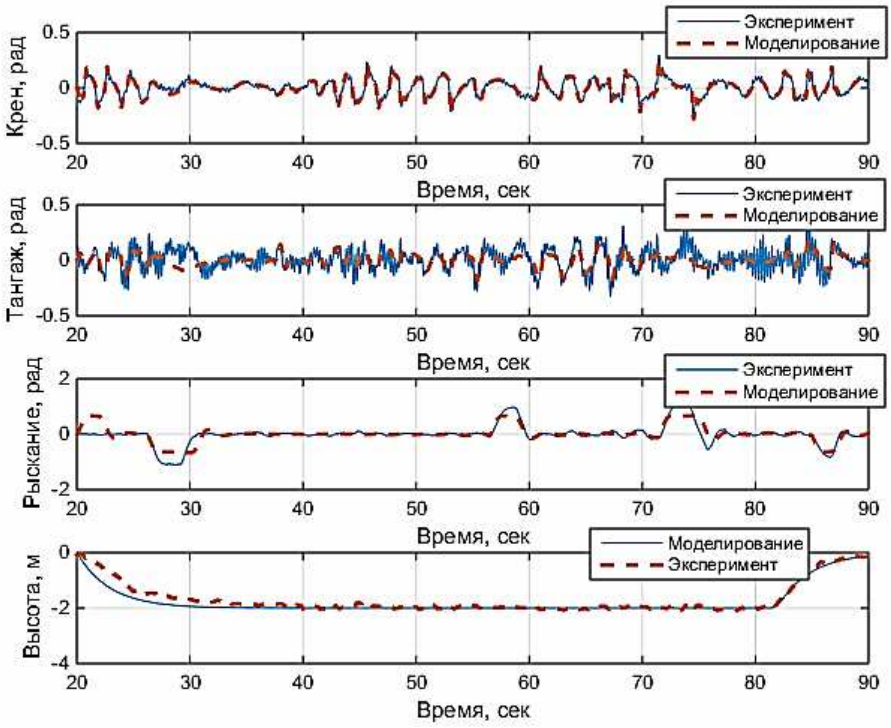

Рис. 6. Графики изменения углов крена, тангажа, рыскания и высоты, полученные при выполнении полетного задания

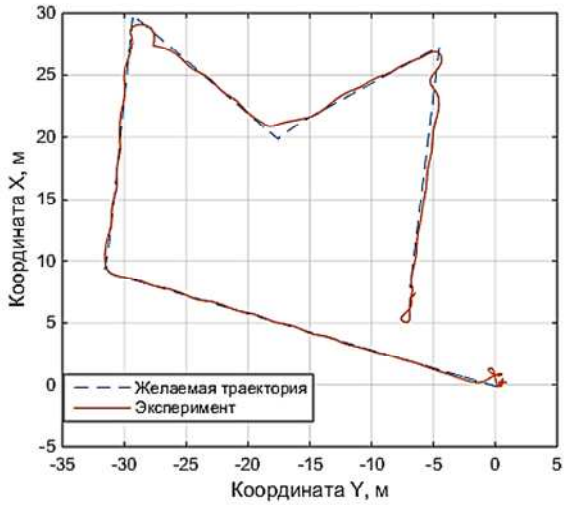

Рис. 7. Траектория полета по маршруту

Заключение. С использованием указанных выше данных собран полномасштабный прототип FLYP. В 2016 году были проведены первичные летные испытания и испытания в аэродинамической трубе Т-101 ЦАГИ им. профессора Н. Е. Жуковского, которые подтвердили предварительные расчеты по возможности создания необходимого запаса тяги. По результатам испытаний были уточнены аэродинамика, тяговые и моментные зависимости при крейсерской и максимальной скоростях полета.

На данный момент проводятся стендовые и летные испытания второго прототипа FLYP с целью повышения качества и безопасности полетов. На рисунке 8 представлен второй прототип FLYP и его летные испытания.

а *б*

Рис. 8. а) Модель второго прототипа FLYP и б) его летные испытания

При разработке FLYP удалось эффективно обойти фундаментальные ограничения мультикоптеров по грузоподъемности и продолжительности полета за счёт разделения функций маршевых винтов с ДВС, создающих основную тягу, и малых электродвигателей с высоким быстродействием, обеспечивающих управление.

С учетом повышенной грузоподъемности и большого времени автономной работы данный летательный аппарат может быть использован для доставки грузов, мониторинга и опыления в сельском хозяйстве.

Технические решения, используемые во FLYP защищены патентами РФ N143505, 146731 и Международной заявкой № PCT/US16/18334. При этом при подготовке международной заявки было изучено более 1200 российских и зарубежных патентов. Патентный поиск подтвердил новизну технических решений FLYP.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. Agarwal, J.-P. Castillo, M. Henz, L. Shengmu, S. S. Poh En, S. Vinod, W. Yuyao, J. D. Weigl, X. Yushu, X. Zan, Snowstorm – Design and Construction of a Electric Recreational Flying Machine \\ 2016 Eleventh International Conference on Ecological Vehicles and Renewable Energies (EVER), 6-8 April 2016, pp.4.

2. EHANG|Official Site-EHANG 184 autonomous aerial vehicle. [Электронный ресурс] // URL: www.ehang.com/ehang184 (дата обращения 15.01.2017).

3. FLIKE - The Ultimate Flying Bike. [Электронный ресурс] // URL: http://whatisflike.com/ (дата обращения 15.01.2017).

4. Tactical Robotics LTD. Airmule description [Электронный ресурс] // URL: http://www.hover-bike.com/ (дата обращения 15.01.2017).

5. AirMule - Tactical Robotics [Электронный ресурс] // URL: http:// www.tactical-robotics.com/category/airmule (дата обращения 15.01.2017).

6. AirMule - UrbanAero. URL: http://www.urbanaero.com/category/ air-mule (дата обращения 15.01.2017).

7. Scott Driessens and Paul E. I. Pounds. Towards A More Efficient Quadrotor Configuration // 2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS) November 3-7, 2013. Tokyo, Japan

8. М.Л. Миль, А.В. Некрасов, А.С. Браверман, Л.Н. Гроодко, М.А. Лейканд, Вертолеты. Расчет и проектирование. Книга 1 Аэродинамика // Издательство «Машиностроение». Москва - 1966.

СЕТЕВОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГАМИЛЬТОНОВЫМИ СИСТЕМАМИ НА ПРИМЕРЕ УПРАВЛЕНИЯ ЭНЕРГИЕЙ МАЯТНИКА

Р.Э. Сейфуллаев (ИПМаш РАН, 199178, Россия, Санкт-Петербург, Большой пр. ВО, 61)
E-mail: ruslan.seifullaev@yandex.ru

NETWORKED CONTROL OF HAMILTONIAN SYSTEMS IN THE CASE OF PENDULUM ENERGY CONTROL

R.E. Seifullaev (IPME RAS, 199178, St.Petersburg, Bolshoy pr. VO, 61)

Keywords: networked control, quantization, time-delay, event-trigger

Введение. Дискретное управление непрерывными процессами стало популярным в теории управления с ростом использование компьютеров и коммуникационных сетей (включая сеть интернет). Эти сети могут быть значительно загруженными, что накладывает информационные ограничения при передаче данных по каналу связи. В результате разумным становиться передавать по сети только такое количество информации, которое реально необходимо для достижения поставленной цели управления. Таким образом, возникает задача анализа влияния сетевых аспектов (квантования по уровню, запаздывания, дискретизации по времени и т.д.) на устойчивость системы. Также для уменьшения количества передаваемой по сети информации можно использовать так называемое "событийное управление" (event-triggered control) [1,2,3,4], которое позволяет избегать передачи пакета данных, когда обновленный входной сигнал не приведет к значительному изменению выходного сигнала.

В работе рассматривается задача управления энергией нелинейной гамильтоновой системы в условиях сетевых ограничений. Данная проблема является нетривиальной, так как, в отличие от большинства работ, посвященных сетевому управлению, где основной целью является традиционная стабилизация системы в точке равновесия, в данном случае имеет место задача стабилизации многообразия. Подход продемонстрирован на примере управления энергией маятника. В качестве номинального управления выбран регулятор, основанный на методе скоростного градиента [5], который позволяет стабилизировать систему в произвольно заданном уровне энергии в случае отсутствия квантования (запаздывания, дискретизации). Далее эффект сетевого воздействия представляется в виде дополнительной ошибки входного сигнала, после чего используется ляпуновская теория для анализа устойчивости. В качестве кандидата для функции Ляпунова выбирается квадрат отклонения текущего уровня энергии от желаемого. После дополнительного анализа показано, что в случае присутст-

вия сетевых аспектов функция Ляпунова не является всюду убывающей, однако, периоды и величины возможного возрастания ограничены, а убывающее поведение является доминирующим. В результате получены оценки ширину области начальных данных и области притяжения, в которую траектория входит за конечное время.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнение маятника

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l}\sin\varphi(t) + \frac{1}{ml^2}u(t), \quad (1)$$

где φ – угол отклонения ($\varphi = 0$ в нижнем положении), u – управляющий вращающий момент, g – гравитационная постоянная, m и l – масса и длина маятника соответственно. Обозначим вектор состояния систеы (1) через $x = [\varphi, \dot{\varphi}]^T$, $x \in \mathbb{R}^2$.

Предположим, что $H(\varphi, \dot{\varphi})$ – полная энергия маятника, т.е.

$$H(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos\varphi),$$

а начальный уровень $H(x_0)$ лежит между 0 и h, где $h < 2mgl$ – некоторая положительная величина.

Рассмотрим следующий закон обратной связи

$$u(t) = U(x(t)) = -\gamma\,(H(x(t)) - H_*)\,\dot{\varphi}(t), \quad (2)$$

где $\gamma > 0$, и H_* ($0 < H_* < h$) – целевой уровень энергии.

Алгоритм управления (2) основан на *методе скоростного градиента* [5, 6] и обеспечивает достижение следующей цели:

$$\lim_{t\to\infty} V\,(x(t)) = 0, \quad (3)$$

где целевая функция задана в виде

$$V(x) = \frac{1}{2}(H(x) - H_*)^2.$$

Рассмотрим множество $X_h = \{x: 0 < H(x) \le h\}$. Пусть множество $\mathcal{X} = \{x_i : x_i \in X_h, i \in \square\} \cup x_{sat}$ является конечным подмножеством множества $X_h \cup x_{sat}$, где $x_{sat} \in \mathbb{R}^2$. Рассмотрим квантователь $q(x)$: $\mathbb{R}^2 \to \mathcal{X}$, предложенный в [7]. Предположим, что $X_i = \{x \in \mathbb{R}^2 : q(x) = x_i\}$ – области квантования такие, что $\cup X_i = X_h$. Следовательно, $q(x) = x_i$ для всех $x \in X_i$, $i \in \square$. Когда x не принадлежит объединению областей квантования, квантователь насыщается, т.е. $q(x) = x_{sat}$, если $x \notin X_h$.

Предположим, что для измерения вектора состояния x доступны только квантованные сигналы $q(x)$. Тогда закон управления (2) не применим. Следовательно, вместо непрерывного управления (2) рассмотрим квантованный по состоянию закон

$$u(t) = U(q(x(t))). \quad (4)$$

Отметим, что поскольку квантование осуществляется по состоянию, правая часть дифференциального уравнения (1), (4) является разрывной. Решения дифференциального уравнения (1), (4) понимаются в смысле решений по Филиппову [8].

Также рассмотрим случай дискретизации управляющего сигнала (2) по времени

$$u(t) = U(t_k), \quad t_k \le t < t_{k+1}, \tag{5}$$

где последовательность $\{t_k\}$ является последовательностью моментов квантования $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \cdots$, $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$.

Рассмотрим два различных способа генерации последовательности $\{t_k\}$.

- *Переменное квантование* ([9]). Предположим, что

$$t_{k+1} - t_k = T_k \le T_{max}, \quad \forall k = 0,1,2,\ldots, \tag{6}$$

где T_k и T_{max} – положительные величины.

- *Непрерывный событийный генератор (event-trigger).*

Предположим, что временнАя последовательность $\{t_k\}$ генерируется с помощью непрерывного событийного генератора [4]:

$$t_{k+1} = \min\{t > t_k \mid |e(t)| \ge \Delta\}, \tag{7}$$

где $\Delta > 0$ и $e(t) = U(t_k) - U(t)$.

Кроме этого, рассмотрим регулятор (2) с постоянным запаздыванием по времени:

$$u(t) = U\big(x(t-\tau)\big), \tag{8}$$

где $\tau > 0$.

Поскольку вместо непрерывного регулятора (2) используются регуляторы (4), (5) или (6), цель управления (3) не достижима. Поэтому вместо цели (3), рассмотрим следующую цель управления:

$$\limsup_{t\to\infty} |H(x(t)) - H_*| < \kappa_1, \tag{9}$$

где $0 < \kappa_1 < |H_* - H(x_0)|$.

Таким образом, задача состоит в нахождении условий достижения (9) в случаях, когда обратная связь квантуется по уровню, времени или содержит временную задерку. Другими словами, требуется определить оценку κ_1 цели (9) в зависимости от границы ошибки квантователя (в случае регулятора (2)), границы T_{max} интервалов дискретизации (в случае регулятора (5), (6)), величины Δ (в случае регулятора (5), (7)) или величины запаздывания τ (в случае регулятора (8)).

Основной результат. Рассмотрим замкнутую систему (1), (2) с дополнительной ошибкой $e(t)$:

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l}\sin\varphi(t) + \frac{1}{ml^2}(U(t) + e(t)), \qquad (10)$$

где

$$|e(t)| < \Delta_e, \quad \Delta_e > 0. \qquad (11)$$

Пусть h_* – положительная величина, удовлетворяющая условию $h_* < \min\{H_*, h - H_*\}$. Рассмотрим следующие функции скалярной переменной y с параметром Δ_e:

$$f_{\Delta_e}^{\{1\}}(y) = H_* - h_* - \frac{3ml^2\,\Delta_e^2}{\gamma^2 y^2},$$

$$f_{\Delta_e}^{\{2\}}(y) = \frac{g}{l}\sqrt{1 - \left(1 - \frac{f_{\Delta_e}^{\{0\}}(y)}{mgl}\right)^2} - \frac{\Delta_e}{ml^2}\left(\frac{h_*\sqrt{6}}{y} + 1\right),$$

где $f_{\Delta_e}^{\{0\}}(y) = \min\left\{2mgl - H_* - h_*, f_{\Delta_e}^{\{1\}}(y)\right\}$,

$$f_{\Delta_e}^{\{3\}}(y) = 4h_*^2 - y^2 - \frac{16\sqrt{6}\,\Delta_e^2}{\gamma^2 f_{\Delta_e}^{\{2\}}(y)\,y},$$

$$f_{\Delta_e}^{\{4\}}(y) = \frac{1}{12}\,y^2\arccos\left(1 - \frac{f_{\Delta_e}^{\{1\}}(y)}{mgl}\right) f_{\Delta_e}^{\{1\}}(y) - \frac{\Delta_e^2}{\gamma^2}.$$

Определим для любых $b > a \geq 0$ множество

$$H_{[a,b]}^{-1} = \{x \in X_h : a \leq H(x) \leq b\}.$$

Для формулировки основного результата требуется следующая лемма, доказательство которой аналогично доказательству Теоремы 1 в [10].

Лемма 1 *Пусть следующая система неравенств*

$$0 < y < 2h_*, \quad f_{\Delta_e}^{\{1\}}(y) > 0, \quad f_{\Delta_e}^{\{2\}}(y) > 0, \quad f_{\Delta_e}^{\{3\}}(y) > 0, \quad f_{\Delta_e}^{\{4\}}(y) > 0 \qquad (12)$$

разрешима относительно y. *Тогда для любого решения* $y = h_1$ *системы (12) и любых начальных условий* $x(0) \in H^{-1}_{[H_* - \kappa_{\Delta_e}^{\{2\}}, H_* + \kappa_{\Delta_e}^{\{2\}}]}$ *траектории замкнутой системы (10) удовлетворяют* $x(t) \in H^{-1}_{[H_* - h_*, H_* + h_*]}$ *для всех* $t \geq 0$, *и существует* $T > 0$ *такое, что* $x(t) \in H^{-1}_{[H_* - \kappa_{\Delta_e}^{\{1\}}, H_* + \kappa_{\Delta_e}^{\{1\}}]}$ *для всех* $t \geq T$, *где*

$$\kappa_{\Delta_e}^{\{1\}} = \sqrt{\frac{1}{4}h_1^2 + \frac{2\sqrt{6}\,\Delta_e^2}{\gamma^2 h_1 f_{\Delta_e}^{\{2\}}(h_1)}}, \qquad (13)$$

$$\kappa_{\Delta_e}^{\{2\}} = \sqrt{h_*^2 - \frac{2\sqrt{6}\,\Delta_e^2}{\gamma^2 h_1 f_{\Delta_e}^{\{2\}}(h_1)}}, \qquad (14)$$

т.е. цель (9) достигается при κ_1, определенном в (13).

Рассмотрим систему (1) замкнутую квантованной обратной связью (4).

Теорема 1. *Пусть система неравенств (12) разрешима относительно y при*

$$\Delta_e = \frac{1}{2} ml^2 \Delta_2^3 + \frac{3l\sqrt{2mh}}{2}\Delta_2^2 + (4h - H_*)\Delta_2 + 2g\sqrt{2mh}\sin\frac{\delta}{2},$$

где Δ_1 и Δ_2 – границы на ошибку квантования по компонентам φ и $\dot{\varphi}$ соответственно, а $\delta = \min\{\pi, \Delta_1\}$. Тогда для любого ее решения $y = h_1$ и любых начальных условий

$$|H(x(0)) - H_*| \le \kappa_{\Delta_e}^{\{2\}}$$

траектории замкнутой системы (1), (4) удовлетворяют

$$|H(x(t)) - H_*| \le h_*,$$

и существует $T > 0$ такое, что

$$|H(x(t)) - H_*| \le \kappa_{\Delta_e}^{\{1\}}$$

для всех $t \ge T$, где $\kappa_{\Delta_e}^{\{1\}}$ и $\kappa_{\Delta_e}^{\{2\}}$ определены в (13) и (14).

Доказательство результата Теоремы 1 можно найти в [10].

Рассмотрим теперь систему (1), замкнутую квантованной по времени обратной связью (5), когда последовательность моментов переключения генерируется с помощью событийного генератора (7). Главной задачей при использовании событийного генератора является обеспечение отсутствия так называемого Зено (Zeno)-поведения, когда может произойти генерация бесконечного числа моментов за конечный промежуток времени.

Введем следующие обозначения:

$$U_{max} = \gamma\sqrt{\frac{2h}{ml^2}}\max\{H_*, h - H_*\},$$

$$r_{max} = \gamma\left[\left(\frac{g}{l} + \frac{U_{max}}{ml^2}\right)(2h + \max\{H_*, h - H_*\}) + 2gh\right].$$

Следующая теорема доказывает отсутствие Зено-поведения у системы и устанавливает оценки на область сходимости для событийного генератора (7).

Теорема 2. *Рассмотрим замкнутую систему (1), (5), (7). Следующие утверждения являются верными:*

1. *Для всех $k > 0$ и $x \in X_h$ выполнены неравенства:*

$$|t_{k+1} - t_k| \le T_{min}, \qquad (15)$$

где $T_{min} = \frac{\Delta}{r_{max}}$.

2. Пусть система неравенств (12) разрешима относительно y *при* $\Delta_e = \Delta$. *Тогда для любого ее решения* $y = h_1$ *и любых начальных условий*

$$|H(x(0)) - H_*| \le \kappa_{\Delta_s}^{\{2\}}$$

траектории замкнутой системы (1), (5), (7) удовлетворяют

$$|H(x(t)) - H_*| \le h_*,$$

и существует $T > 0$ *такое, что*

$$|H(x(t)) - H_*| \le \kappa_{\Delta_s}^{\{1\}}$$

для всех $t \ge T$, *где* $\kappa_{\Delta_s}^{\{1\}}$ *и* $\kappa_{\Delta_s}^{\{2\}}$ *определены в (13) и (14) соответственно для* $\Delta_e = \Delta$.

Доказательство. Часть 1. Легко видеть, что для $x \in X_h$ выполнено

$$|H(x) - H_*| \le \max\{H_*, h - H_*\}, \tag{16}$$

и

$$|\dot{\varphi}| \le \sqrt{\frac{2h}{ml^2}}. \tag{17}$$

Тогда

$$|U(t)| = \gamma\,|H(x(t)) - H_*||\dot{\varphi}(t)|U_{max}, \tag{18}$$

и

$$|\ddot{\varphi}(t)| = \left|\frac{g}{l}\sin\varphi(t) + \frac{1}{ml^2}U(t_k)\right|\frac{g}{l} + \frac{U_{max}}{ml^2}. \tag{19}$$

Прямыми вычислениями получаем

$$|\dot{e}(t)| = \left|\dot{U}(t)\right| = \gamma\,|ml^2\dot{\varphi}^2(t)\ddot{\varphi}(t) + mgl\dot{\varphi}^2(t)\sin\varphi(t)$$

$$+(H(x(t)) - H_*)\ddot{\varphi}(t)|. \tag{20}$$

Из (16)–(20) следует, что

$$|\dot{e}(t)| \le r_{max}. \tag{21}$$

Таким образом, для $x \in X_h$ из (7), (21) и равенства $e(t_k) = 0$ получаем (15).

Часть 2. Система (1), (5) может быть переписана в форме (10), где из условия переключения в (7) следует, что

$$|e(t)| < \Delta. \tag{22}$$

Тогда утверждение части 2 следует из Леммы 1. Теорема 2 доказана.

Теперь рассмотрим случай переменных интервалов дискретизации (6).

Теорема 3. *Пусть система неравенств (12) разрешима относительно* y *при* $\Delta_e = \Delta_s$, *где*

$$\Delta_s = \gamma\, T_{max} \left(\frac{2g}{l}\,(H_* + h_*) + \left[\frac{g}{l} + \frac{\gamma}{ml^2} \sqrt{\frac{2(H_* + h_*)}{ml^2}}\, h_* \right] [2H_* + 3h_*] \right).$$

Тогда для любого ее решения $y = h_1$ *и любых начальных условий*

$$|H(x(0)) - H_*| \le \kappa^{\{2\}}_{\Delta_s}$$

траектории замкнутой системы (1), (5), (6) удовлетворяют

$$|H(x(t)) - H_*| \le h_*,$$

и существует $T > 0$ *такое, что*

$$|H(x(t)) - H_*| \le \kappa^{\{1\}}_{\Delta_s}$$

для всех $t \ge T$, *где* $\kappa^{\{1\}}_{\Delta_s}$ *и* $\kappa^{\{2\}}_{\Delta_s}$ *определены в (13) и (14) соответственно для* $\Delta_e = \Delta_s$.

Доказательство. Перепишем замкнутую систему (1), (5), (6) в форме (10), где $e(t) = U(t_k) - U(t)$. Тогда из Леммы 1 следует, что достаточно проверить неравенство

$$|e(t)| < \Delta_s \tag{23}$$

для $x(t) \in H^{-1}_{[H_* - h_*, H_* + h_*]}$.

Так как $|H(x) - H_*| \le h_*$, получаем $|\dot{\varphi}| \le \sqrt{\frac{2(H_* + h_*)}{ml^2}}$. Тогда неравентсва (18) и (19) выполнены при $U_{max} = \gamma h_* \sqrt{\frac{2(H_* + h_*)}{ml^2}}$, и так как $e(t) \le T_{max} |\dot{e}(t)|$, неравенство (23) следует из (20).

Замечание. Условия для системы с запаздыванием (1), (8) получаются аналогично Теореме 3, где роль параметра T_{max} играет величина запаздывания τ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-08-01728) и СПбГУ (тема 6.38.230.2015).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Borgers D. , Heemels W. P. M. H.. Event-separation properties of event-triggered control systems. IEEE Trans. Automat. Control, 2014. Vol. 59. P. 2644–2656.

2. Tallapragada P. , Chopra N. Event-triggered decentralized dynamic output feedback control for LTI systems. In Proceedings of IFAC Workshop on Disturbed Estimation and Control in Networked Systems, 2012. P. 31–36.

3. Tallapragada P. , Chopra N. Event-triggered dynamic output feedback control for LTI systems. In Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control, 2012. P. 6597–6602.

4. Tabuada P. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007. Vol. 52(9). P. 1680–1685.

5. Фрадков А.Л. Кибернетическая физика: принципы и примеры. СПб.: Наука, 2003. С. 208.

6. Фрадков А. Л. Схема скоростного градиента и его применения в задачах адаптивного управления. Автоматика и телемеханика, 1979. № 9. С. 90–101.

7. Liberzon D. Hybrid feedback stabilization of systems with quantized signals. Automatica, 2003. Vol. 39. P. 1543–1554.

8. Филиппов, А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

9. Fridman E., Seuret A., Richard J.P. Robust Sampled-Data Stabilization of Linear Systems: an Input Delay Approach. Automatica, 2004. V. 40. No. 8. P. 1441–1446.

10. Seifullaev R., Fradkov A., Liberzon D.. Energy control of a pendulum with quantized feedback. Automatica, 2016. Vol. 67. P.171–177.

МНОГОПРОДУКТОВАЯ МОДЕЛЬ ПРОИЗВОДСТВА НА ОСНОВЕ РЕГИСТРОВ БУХГАЛТЕРСКОГО УЧЕТА

Р.Т. Сиразетдинов , Д.С. Марков
(КНИТУ-КАИ, 420111, Казань, К.Маркса, 10)
E-mail: tm@tm.kstu-kai.ru

MULTI PRODUCTION MODEL OF PRODUCTION BASED ON ACCOUNTING REGISTERS

R.T. Sirazetdinov , D.S. Markov
(KNRTU-KAI, 420111, Kazan, K.Marks str., 10)

Keywords: multi production, dynamic modeling, accounting registers

Введение. Данные научные исследования ведутся в рамках научной школы моделирования и управления сложными системами академика Академии наук Республики Татарстан Т.К. Сиразетдинова, которая развивается в КНИТУ-КАИ.

Постановка задачи. Строится дискретная динамические математические модель многопродуктового производства. Модель строится на основе структуры бухгалтерского учета, что позволяет легко идентифицировать параметры модели и интерпретировать результаты моделирования.

В основу математической модели предприятия с многопродуктовой системой производства положена структурная модель бухгалтерского счета [1, 2] и математическая модель счета, которая в алгебраическом виде описывается следующим образом [3-5]:

$$S(t) = S(t - \Delta t) + U_{in}(t) - U_{out}(t), \quad (1)$$

где:

$S(t)$ – сальдо на текущий момент времени;

$S(t - \Delta t)$ – сальдо на предыдущий момент времени;

U_{in} – оборот по дебету - входящий поток;

U_{out} – оборот по кредиту - выходящий поток;

Δt – период дискретности.

На рис.1. изложена блок схема производственной части финансово-хозяйственной деятельности предприятия, в агрегированном виде.

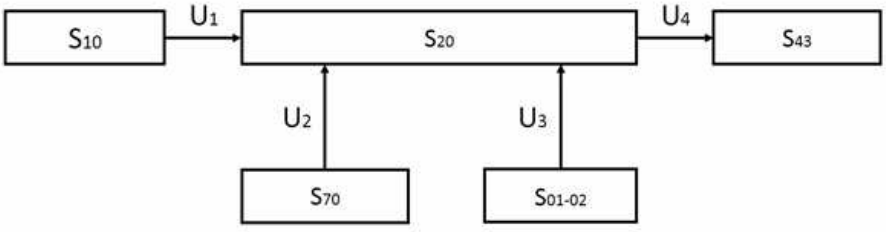

Рис.1. Агрегированная схема производственной модели

На этой схеме отражены следующие элементы:

S_{10} – склад сырья и материалов;

S_{70} – расчет по оплате труда;

$S_{01\text{-}02}$ – основные средства;

S_{20} – основное производство;

S_{43} – склад готовой продукции.

Этими же обозначениями определяются остатки соответствующих счетов. Объемы средств, перемещающихся между блоками за период Δt , т.е. потоки, обозначены следующим образом:

U_1 – отпуск материалов в производство;

U_2 – учет заработной платы;

U_3 – амортизация основных средств;

U_4 – выпуск готовой продукции.

Схема работает следующим образом. Со склада материалов S_{10}, поступают ресурсы U_1 на основное производство S_{20}. Рабочие выполняющие работу на предприятии отдают свой труд в эквиваленте зарплаты U_2, который учитывается на S_{70}. Аналогичным путем учитывается износ основных средств $S_{01\text{-}02}$ как амортизация. Поток готовой продукции U_4 поступает на склад S_{43}.

Исходя из выражения (1), распишем формулу для производственного блока:

$$S_{20}(t) = S_{20}(t - \Delta t) + U_1(t) + U_2(t) + U_3(t) - U_4(t). \qquad (2)$$

Задавая программу выпуска готовой продукции X_{prog} за период Δt, определяется необходимое количество материалов, труда и оборудования для производства:

$$\begin{cases} V_v = K_v\ X_{prog} \\ V_l = K_l\ X_{prog} \\ V_f = K_f\ X_{prog} \end{cases}, \qquad (3)$$

где:

V_v –объем материалов, необходимый для производства X_{prog};

V_l –фонд рабочего времени, необходимый для производства X_{prog};

V_f –фонд станочного времени, необходимый для производства X_{prog};

K_v – коэффициент материалоемкости на выпуск единицы продукции;

K_l - коэффициент трудоемкости на выпуск единицы продукции;

K_f - коэффициент станочного времени, требуемого для выпуска единицы продукции.

На каждом рассматриваемом интервале времени Δt количество имеющихся в наличии ресурсов ограничено следующими величинами:

V_v^M – объем материалов;
V_l^M – фонд рабочего времени;
V_f^M – фонд станочного времени.

Тогда реализуемая на каждом интервале времени производственная программа X_{re} ограничена и определяется выражением:

$$X_{re} = min\left[X_{prog}, \frac{V_v^M}{K_v}, \frac{V_l^M}{K_l}, \frac{V_f^M}{K_f}\right]. \quad (4)$$

Определив реализуемую программу выпуска по выражению (4), рассчитывается требуемое количество ресурсов для производства по формулам (3).

Приведенные выше выражения рассматривались для скалярных величин V_v , V_l и V_f . Однако они справедливы и для векторов, т.е. когда в производстве используется несколько видов материалов, несколько видов квалификации трудовых ресурсов, несколько видов оборудования. Программа выпуска может быть ограничена любым из рассматриваемых компонент. В случае же многопродуктового производства, когда X_{prog} является векторной величиной, выражение (4), ограничивающее программу выпуска, заменяется системой неравенств, в правой части которой находятся запасы ресурсов на соответствующем интервале времени Δt.

Вышеизложенный подход лег в основу динамической модели финансово-хозяйственной деятельности предприятия и алгоритмов прогнозирования его функционирования. Он позволяет решать задачи анализа и прогнозирования деятельности производственного предприятия или группы предприятий, основываясь на имеющихся ресурсах предприятия и возможной ситуации на рынках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сиразетдинов Т.К. Динамическое моделирование экономических объектов. - Казань: Фэн, 1996, 224с.

2. Сиразетдинов Т.К., Родионов В.В., Сиразетдинов Р.Т. Динамическое моделирование экономики региона. - Казань: Фэн, 2005, 320с.

3. Сиразетдинов Р.Т., Еникеев И.А. Структурная схема динамической экономико-математической модели предприятия на основе бухгалтерского плана счетов // Общество, государство, личность: Проблемы взаимодействия в условиях рыночной экономике, VII межвузовская научно-практическая конференция.. - Казань: 2006. - С. 224-226.

4. Сиразетдинов Р.Т., Марков Д.С. Дискретное моделирование производственного процесса на основе регистров бухгалтерского учета // Новые технологии, материалы и оборудование российской авиакосмической от-

расли: Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием, 10 – 12 августа 2016 г.: Сборник докладов. Том 2. - Казань: Академия наук РТ, 2016. - С. 218.

5. Сиразетдинов Р.Т., Самодуров А.В., Еникеев И.А., Марков Д.С. Динамическая модель производственного предприятия на основе регистров бухгалтерского учета и её идентификация // Материалы международной научно-тех-нической конференции «Инновационные машиностроительные технологии, оборудования и материалы – 2015» (МНТК ИМТОМ-2015). Ч.2. . - Казань: Фолиант, 2015. - С. 93.

НАВЕДЕНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИЕЙ ИНФОРМАЦИОННОГО СПУТНИКА В НАЧАЛЬНЫХ РЕЖИМАХ

Е.И. Сомов, С.А. Бутырин (СамГТУ, Россия, 443100, Самара, Молодогвардейская, 244) E-mail: e_somov@mail.ru butyrinsa@mail.ru

GUIDANCE AND ATTITUDE CONTROL OF AN INFORMATION SATELLIE IN THE INITIAL MODES

Ye.I. Somov. S.A. Butyrin (SamSTU, Russia, 443100, Samara)

Keywords: spacecraft, guidance, attitude control, initial modes

Введение. После отделения информационного спутника от ракеты-носи-теля и механического раскрытия его солнечных батарей (СБ) космический аппарат (КА) кувыркается – вращается с вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ произвольного направления в связанной с корпусом КА системе координат (ССК) и модулем до 5 град/с. В результате выполнения начальных режимов ориентации КА угловое положение ССК должно быть стабилизировано в орбитальной системе координат (ОСК), в частности совпадать с ОСК. В составе начальных режимов ориентации КА традиционно выделяют [1] успокоение (остановка вращения), определение ориентации (возможно с поиском внешних ориентиров), поворотные маневры (ПМ) для приведения ориентации КА к заданной (например, в ОСК) и поддержание такой ориентации при подготовке бортового оборудования системы управления ориентацией (СУО) для последующего выполнения основных режимов. Например, начальные режимы ориентации геостационарного спутника связи SESAT, созданного АО «Информационные спутниковые системы им. акад. М.Ф. Решетнева» [2], выполнялись с помощью приборов ориентации на Солнце, Землю и широтно-импульсного управления реактивными двигателями (РД) с поиском Солнца, Земли [3,4] и угловой стабилизацией КА в ОСК при разгоне ротора гироскопического стабилизатора.

В статье предлагается оригинальная схема выполнения начальных режимов ориентации информационного спутника на произвольной орбите высотой от 600 до 1500 км с применением бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС), корректируемой сигналами кластера звёздных датчиков и спутников навигационных систем ГЛОНАСС/GPS. Приводятся результаты исследования динамики таких режимов СУО КА землеобзора на солнечно-синхронной орбите высотой 720 км.

Математические модели. При выполнении режима успокоения КА в приборном составе его СУО предусмотрены гироскопические датчики угловой скорости (ДУС) для измерения вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, магнитометры для измерения вектора индукции $\mathbf{B}$ магнитного поля Земли, дви-

гательная установка (ДУ) на основе 8 РД малой тяги (рис. 1) и магнитный привод (МП) с цифровым управлением вектора электромагнитного момента (ЭММ) $\mathbf{L}$. Астроинерциальная система определения углового положения (СОУП) входит в состав БИНС. Основным электромеханическим приводом в составе СУО является кластер четырёх реактивных двигателей-маховиков (ДМ) по схеме *General Electric*, рис. 2, которая обладает возможностью управлять ориентацией КА при отказе любого одного маховика.

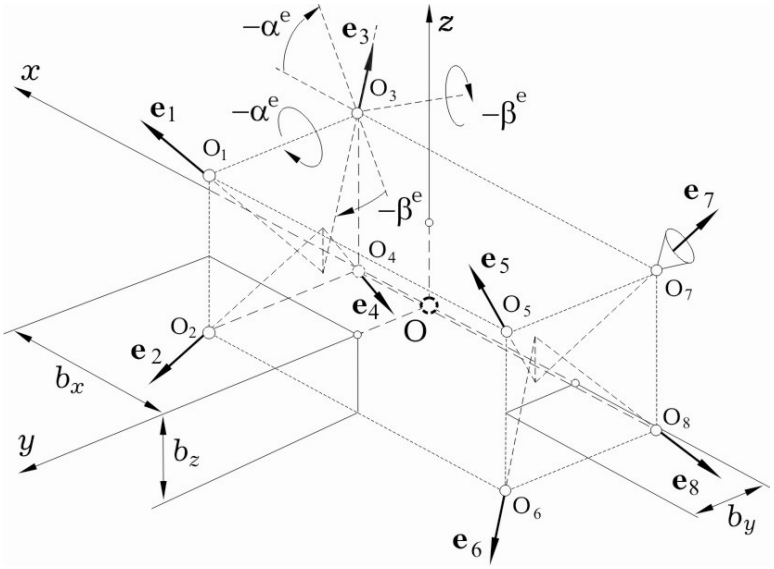

Рис. 1. Схема ДУ на основе восьми РД малой тяги

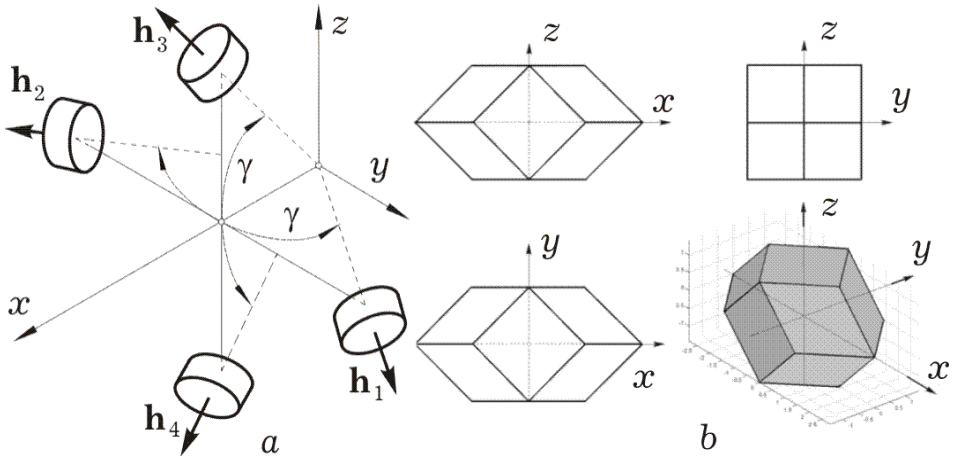

Рис. 2. Схема General Electric (a) and оболочка её КМ (b)

В ССК $Oxyz$ оси вращения ДМ располагаются на поверхности конуса с углом полу-раствора γ. Используются стандартные обозначения $\mathrm{col}(\cdot)=\{\cdot\}$, $\mathrm{line}(\cdot)=[\cdot]$, $(\cdot)^{\mathrm{t}}$, $[\mathbf{a}\times]$ и $\circ,\tilde{}$ для векторов, матриц и кватернионов, $C_\gamma \equiv \cos\gamma$, $S_\gamma \equiv \sin\gamma$, применяется вектор модифицированных пара-

метров Родрига (МПР) $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_i\} = \mathbf{e}\,\mathrm{tg}(\Phi/4)$ с традиционными обозначениями орта Эйлера $\mathbf{e}$ и угла Φ собственного поворота, который взаимно-однозначно связан с кватернионом $\boldsymbol{\Lambda}$ прямыми $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\lambda}/(1+\lambda_0)$ и обратными $\lambda_0 = (1-\sigma^2)/(1+\sigma^2)$, $\boldsymbol{\lambda} = 2\boldsymbol{\sigma}/(1+\sigma^2)$ соотношениями. Стандартным образом вводятся инерциальная система координат (ИСК) и ОСК $Ox^{\circ}y^{\circ}z^{\circ}$, кватернион $\boldsymbol{\Lambda}^{\circ}$ и углы ориентации ССК относительно ОСК по крену ϕ_1, рысканию ϕ_2 и тангажу ϕ_3, которые используются в последовательности 312 при индексах осей $i = 1,2,3 \equiv 1 \div 3 \equiv x, y, z$. Кватернион ориентации КА в ИСК представляется как $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_{\circ} \circ \boldsymbol{\Lambda}^{\circ}$, где $\boldsymbol{\Lambda}_{\circ}$ – кватернион ориентации ОСК в ИСК. Орты $\mathbf{e}_p$, $p = 1 \div 8$, осей сопел 8 РД и векторы $\boldsymbol{\rho}_p$ точек O_p приложения вектора тяги РД в ССК представляются столбцами. Каждый РД имеет широтно-импульсную модуляцию (ШИМ) тяги с периодом T_u^{e} и временным запаздыванием T_{zu}^{e}, что описывается нелинейным непрерывно-дискретным соотношением $p_p(t) = \mathrm{P}^{\mathrm{m}}\,\mathrm{PWM}(t - T_{zu}^{\mathrm{e}}, t_r, \tau_m, \mathrm{v}_{pr}) \quad \forall t \in [t_r, t_{r+1})$. Здесь функции

$$\mathrm{PWM}(t, t_r, \tau_m, \mathrm{v}_{pr}) \equiv \begin{cases} \mathrm{sign}\,\mathrm{v}_{pr} & t \in [t_r, t_r + \tau_{pr}) \\ 0 & t \in [t_r + \tau_{pr}, t_{r+1}) \end{cases};$$

$$\tau_{pr} = \begin{cases} 0 & |\mathrm{v}_{pr}| \le \tau_m \\ \mathrm{sat}(T_u^{\mathrm{e}}, |\mathrm{v}_{pr}|) & |\mathrm{v}_{pr}| > \tau_m \end{cases},$$

$t_r = r\,T_u^{\mathrm{e}}$, $t_{r+1} = t_r + T_u^{\mathrm{e}}$; $r \in \mathrm{N}_0 \equiv [0,1,2,3...)$, где P^{m} – номинальное значение тяги, одинаковое для всех РД в составе ДУ. В ССК вектор тяги p-го РД вычисляется по формуле $\mathbf{P}_p(t) = -p_p(t)\mathbf{e}_p$, а векторы силы $\mathbf{R}^{\mathrm{e}}$ и момента $\mathbf{M}^{\mathrm{e}}$ двигательной установки – по соотношениям $\mathbf{R}^{\mathrm{e}} = \Sigma\mathbf{P}_p(t)$ и $\mathbf{M}^{\mathrm{e}} \equiv \{m_i^{\mathrm{e}}\} = \Sigma[\boldsymbol{\rho}_p \times]\mathbf{P}_p(t)$.

Модель углового движения корпуса КА принимается в простейшем виде

$$\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega}/2\,;\ \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}\times]\mathbf{G} + \mathbf{M}^{\mathrm{r}} + \mathbf{M}^{\mathrm{m}} + \mathbf{M}^{\mathrm{e}} + \mathbf{M}^{\mathrm{d}},\ J_r\mathbf{A}_{\gamma}^{\mathrm{t}}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{h}} = \mathbf{M} - \mathbf{M}^{\mathrm{f}}. \quad (1)$$

Здесь при $\mathbf{K} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ вектор $\mathbf{G} = \mathbf{K} + \mathbf{H}$ представляет кинетический момент (КМ) электромеханической СУО, столбцы $\mathbf{H} = \{\mathrm{H}_i\}$ и $\mathbf{h} = \{\mathrm{h}_p = J_r\Omega_p\}$, $p = 1 \div 4$ – КМ кластера и отдельных ДМ, причем $\mathbf{H} = \mathbf{A}_{\gamma}\,\mathbf{h}$, где матрица $\mathbf{A}_{\gamma}$ составлена из ортов осей вращения ДМ в ССК; $\mathbf{M}^{\mathrm{r}} = -\mathbf{H}^{*}$ – управляющий момент кластера ДМ, где $(\cdot)^{*}$ – символ локальной производной по времени; вектор механического момента МП $\mathbf{M}^{\mathrm{m}} = \{m_i^{\mathrm{m}}\} = -\mathbf{L} \times \mathbf{B}$, где век-

тор электромагнитного момента (ЭММ) $\mathbf{L}=\{l_i\}$ с ограниченными компонентами $|l_i|\le \mathrm{l}^{\mathrm{m}}$ и вектор индукции магнитного поля Земли $\mathbf{B}=\mathbf{b}\mathrm{B}$ с ортом $\mathbf{b}$ определены в ССК; векторы-столбцы $\mathbf{M}=\{m_p\}$ и $\mathbf{M}^{\mathrm{f}}=\{m_p^{\mathrm{f}}\}$ представляют управляющие моменты и моменты сил сухого трения по осям вращения ДМ, а вектор $\mathbf{M}^{\mathrm{d}}$ – внешние возмущающие моменты. Ресурсы каждого ДМ по управляющему и кинетическому моментам ограничены, $|m_p(t)|\le \mathrm{m}^{\mathrm{m}}, |\mathrm{h}_p(t)|\le \mathrm{h}^{\mathrm{m}},\ p=1\div 4$.

Если задано программное угловое движение КА $\mathbf{\Lambda}^p(t),\boldsymbol{\omega}^p(t),\dot{\boldsymbol{\omega}}^p(t)$ в ИСК, то кватерниону рассогласования $\mathbf{E}=(e_0,\mathbf{e})=\tilde{\mathbf{\Lambda}}^p\circ\mathbf{\Lambda}$ с вектором $\mathbf{e}=\{e_i\}$ соответствует вектор параметров Эйлера $\boldsymbol{E}=\{e_0,\mathbf{e}\}$, матрица $\mathbf{C}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{E})=\mathbf{I}_3-2[\mathbf{e}\times]\mathbf{Q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}}$, где $\mathbf{Q}_{\mathrm{e}}=\mathbf{I}_3 e_0+[\mathbf{e}\times]$ и вектор погрешности ориентации $\delta\boldsymbol{\phi}=\{\delta\phi_i\}=\{2e_0e_i\}$.

Алгоритмы широтно-импульсного управления. Для схемы ДУ на рис. 2 орты $\mathbf{r}_p$ векторов $\boldsymbol{\rho}_p$ вычисляются как $\mathbf{r}_p=\boldsymbol{\rho}_p/\rho$, где $\rho=(b_x^2+b_y^2+b_z^2)^{1/2}$ является модулем точек O_p приложения векторов тяги РД в ССК. При обозначениях

$$\boldsymbol{\tau}_r=\{\tau_{pr}\};\ \mathbf{D}^{\mathrm{e}}=\{[\mathbf{e}_p],[\mathbf{r}_p\times\mathbf{e}_p]\};\ \tilde{\mathbf{r}}^p=\mathbf{R}^p/\mathrm{P}^{\mathrm{m}};\ \tilde{\mathbf{m}}^p=\mathbf{M}^p/(\mathrm{P}^{\mathrm{m}}\rho);$$

$$\mathbf{t}^p=\{\tilde{\mathbf{r}}^p,\tilde{\mathbf{m}}^p\},$$

где векторы $\mathbf{R}^p$ и $\mathbf{M}^p$ представляют заданные в ССК *импульсы* векторов сил $\mathbf{R}^{\mathrm{e}}=\mathbf{R}$ и моментов $\mathbf{M}^{\mathrm{e}}=\mathbf{M}$ ДУ, проблема заключается в решении векторного уравнения $\mathbf{D}^{\mathrm{e}}\,\boldsymbol{\tau}_r=\mathbf{t}^p,\quad \boldsymbol{\tau}_r\in R_+^8,\quad \mathbf{t}^p\in R^6$ при условии $0\le\tau_{pr}\le T_u^{\mathrm{e}}\ \ \forall p=1\div 8$ относительно компонентов вектора-столбца $\boldsymbol{\tau}_r=\{\tau_{pr}\}$, когда прямоугольная матрица $\mathbf{D}^{\mathrm{e}}$ и вектор-столбец $\mathbf{t}^p\in R^6$ заданы. При использовании псевдообратной матрицы $(\mathbf{D}^{\mathrm{e}})^{\#}\equiv(\mathbf{D}^{\mathrm{e}})^{\mathrm{t}}(\mathbf{D}^{\mathrm{e}}(\mathbf{D}^{\mathrm{e}})^{\mathrm{t}})^{-1}$ разработанный закон распределения длительностей τ_{pr} тяги всех 8 РД на каждом полуинтервале времени $t\in[t_r,t_{r+1})$ ШИМ их тяги с периодом T_u^{e} имеет простую алгоритмическую форму [5]:

$$\begin{aligned}&\tilde{\boldsymbol{\tau}}_r\equiv\{\tilde{\tau}_{pr}\}=(\mathbf{D}^{\mathrm{e}})^{\#}\mathbf{t}^{pg};\ \tilde{\tau}_{pr}=:\tilde{\tau}_{pr}-\min(\tilde{\tau}_{pr}),\\ &\textit{if}\ \ q\equiv\max(\tilde{\tau}_{pr})>T_u^{\mathrm{e}}\ \textit{then}\ \ \tau_{pr}=\tilde{\tau}_{pr}-T_u^{\mathrm{e}}\tilde{\tau}_{pr}/q.\end{aligned}\qquad(2)$$

Искомые векторы тяги $\mathbf{R}$ и момента $\mathbf{M}$ ДУ определяются как $\mathbf{R}(t)=\mathrm{P}^{\mathrm{m}}\tilde{\mathbf{r}}(t)$ и $\mathbf{M}(t)=\mathrm{P}^{\mathrm{m}}\rho\,\tilde{\mathbf{m}}(t)$. В задаче успокоения КА потребный импульс вектора сил ДУ $\mathbf{R}^p=\mathbf{0}$, поэтому здесь соблюдается условие $\mathbf{R}(t_r)=\mathrm{P}^{\mathrm{m}}\tilde{\mathbf{r}}(t_r)=\mathbf{0}$.

На первом этапе режима успокоения КА с помощью ДУ для каждого полуинтервала $t \in [t_r, t_{r+1})$ с периодом T_u^{e} формируются команды для вектора $\mathbf{M}_r = \mathbf{M}_r^{\mathrm{e}} = -a\mathbf{K}_r$ управляющего момента ДУ, где $\mathbf{K}_r = \mathbf{K}(t_r)$ и $\boldsymbol{\omega}_r = \boldsymbol{\omega}(t_r)$. При этом определяется вектор потребной вариации *импульса* (pulse) этого момента

$$\mathbf{M}_r^{\mathrm{e}\,p} \equiv \Delta \mathrm{I}_r^{\mathrm{e}}\, \mathbf{e}_r^{\mathrm{e}} \equiv \int_{t_r}^{t_{r+1}} \mathbf{M}(\tau)\, d\tau = -a \int_{t_r}^{t_{r+1}} \mathbf{K}(\tau)\, d\tau = -\mathbf{K}_r (1 - \exp(-aT_u^{e}))$$

с модулем $\Delta \mathrm{I}_r^{\mathrm{e}}$ и ортом $\mathbf{e}_r^{\mathrm{e}} = \mathbf{k}_r = \mathbf{K}_r / K_r$, далее эта команда поступает на ДУ с ШИМ тяги РД. Ограниченность вектора момента ДУ $\mathbf{M}_r(t)$ проявляется в последней строке алгоритма (2), поэтому для обеспечения экономичности режима успокоения КА по расходу топлива ДУ определяется такое значение постоянного параметра $a > 0$, при котором сначала реализуется ШИМ управления РД по типу «максимального быстродействия», а затем следует переход к широтно-импульсному управлению РД по типу «минимального принуждения» [5].

Дискретная фильтрация и цифровое управление. Второй этап режима успокоения выполняется магнитным приводом с цифровым управлением его ЭММ. Здесь в моменты времени t_r с периодом T_u^{m} вычисляется вектор потребной вариации *импульса* момента МП $\mathbf{M}_r^{\mathrm{m}\,p} \equiv \Delta \mathrm{I}_r^{\mathrm{m}}\, \mathbf{e}_r^{\mathrm{m}} = -\mathbf{K}_r (1 - \exp(-aT_u^{\mathrm{m}}))$ с модулем $\Delta \mathrm{I}_r^{\mathrm{m}}$ и ортом $\mathbf{e}_r^{\mathrm{m}} = \mathbf{k}_r$ в ССК. Для формирования цифрового управления магнитным приводом (вектора ЭММ) $\mathbf{L}_r = \{l_{ir}\}$ на периоде T_u^{m} вычисляется орт $\mathbf{b}_r = \mathbf{B}_r / B_r$ и определяется взаимная ориентация ортов $\mathbf{b}_r$ и $\mathbf{e}_r^{\mathrm{m}}$ в ССК. Если $|(\mathbf{b}_r, \mathbf{e}_r^{\mathrm{m}})| > \cos(\pi/3)$, то на текущем периоде дискретности МП не включается, иначе формируется вектор ЭММ $\mathbf{L}_r = -(\Delta \mathrm{I}_r^{\mathrm{m}} / T_u^{\mathrm{m}})(\mathbf{b}_r \times \mathbf{e}_r^{\mathrm{m}}) / B_r$ с ограниченными компонентами $|l_{ir}| \le \mathrm{l}^{\mathrm{m}}$. Описанный алгоритм цифрового управления МП применяется также для разгрузки кластера ДМ от вектора накопленного КМ.

Для кластера ДМ принципиальная проблема заключается в распределении векторов его кинетического $\mathbf{H}$ и управляющего $\mathbf{M}^{\mathrm{r}} = -\mathbf{H}^{*}$ моментов между четырьмя ДМ. Для решения этой проблемы используется скалярная функция настройки, которая обеспечивает однозначное распределение векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{M}^{\mathrm{r}}$ по явным аналитическим соотношениям. В СУО применяются дискретная рекуррентная фильтрация сигналов СОУП с периодом T_p, цифровой закон управления кластером ДМ с периодом T_u, компенсационная схема разгрузки от накопленного КМ с помощью цифрового управления МП с периодом T_u^{m} и компенсация влияния моментов сил сухого трения m_p^{f} по осям вращения ДМ с использованием дискретного наблюдателя Луенбергера [6].

Постановка задачи. Задача состоит в исследовании новой схемы начальных режимов ориентации информационного спутника с применением БИНС, корректируемой сигналами кластера звёздных датчиков и спутниковых систем ГЛОНАСС/GPS. В этой схеме выполняются следующие режимы:

1. начального успокоения (остановки вращения) КА в ИСК с помощью экономичного широтно-импульсного управления ДУ и на завершающем этапе – цифрового управления МП по сигналам ДУС и магнитометра;

2. начального включения БИНС, проверки её работоспособности и определения как ориентации, так и положения КА в ИСК при выключенных ДУ и МП;

3. начального включения основного контура управления ориентацией КА с кластером ДМ и его разгрузкой от накопленного КМ с помощью цифрового управления МП, этот режим завершается угловой стабилизацией КА в ИСК и расчетом на борту КА параметров потребного пространственного поворотного маневра КА на интервале $t \in \mathrm{T_p} \equiv [t_{\mathrm{i}}^{p}, t_{\mathrm{f}}^{p}]$, $t_{\mathrm{f}}^{p} \equiv t_{\mathrm{i}}^{p} + T_p$ с краевыми условиями

$$\boldsymbol{\Lambda}(t_{\mathrm{i}}^{p}) = \boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{i}};\ \boldsymbol{\omega}(t_{\mathrm{i}}^{p}) = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{i}};\ \boldsymbol{\varepsilon}(t_{\mathrm{i}}^{p}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}};\ \boldsymbol{\Lambda}(t_{\mathrm{f}}^{p}) = \boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{f}};\ \boldsymbol{\omega}(t_{\mathrm{f}}^{p}) = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{f}};\ \boldsymbol{\varepsilon}(t_{\mathrm{f}}^{p}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{f}};\ \boldsymbol{\varepsilon}^{*}(t_{\mathrm{f}}^{p}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{f}}^{*} \quad (3)$$

при ограничениях на модули векторов $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ и $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ для перехода в ОСК;

4. выполнения ПМ с краевыми условиями (3) и переводом ориентации КА по кратчайшему пути в режим регулярной угловой стабилизации КА в ОСК.

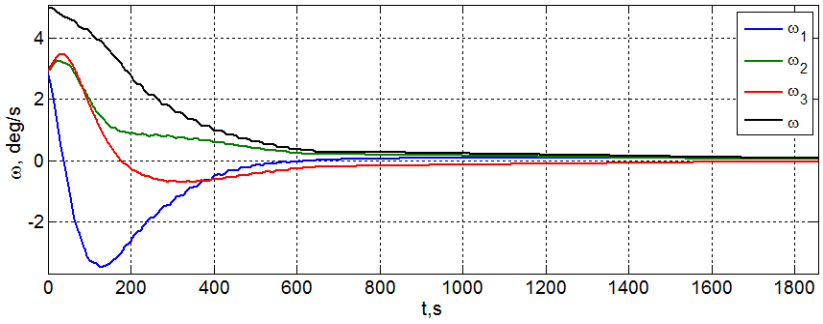

Рис. 3. Режимы успокоения и начального включения БИНС $\forall t \in [0,1856)$ с

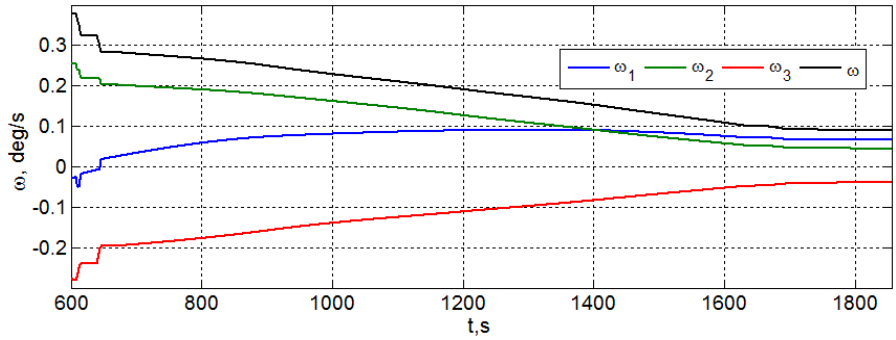

Рис. 4. Завершение успокоения КА с помощью МП и включение БИНС

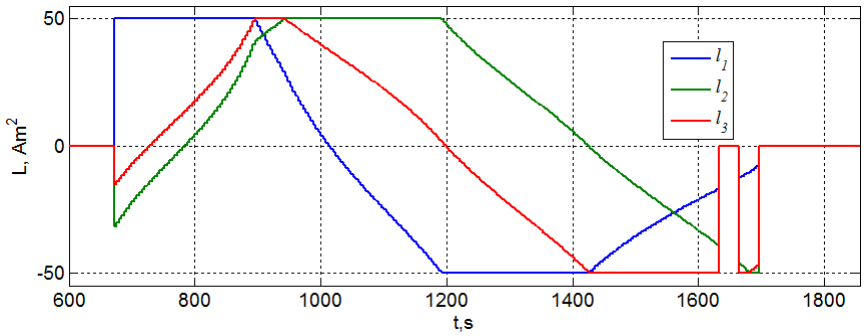

Рис. 5. Электромагнитный момент МП при завершении успокоения КА

Результаты компьютерной имитации начальных режимов. Пусть КА выведен на ССО высотой 720 км и при раскрытых панелях СБ его тензор инерции $\mathbf{J} = \mathrm{diag}\{812; 587; 910\}$ кгм^2, применяемая ДУ имеет конструктивные параметры $b_x = 1$ м, $b_y = 0.7$ м, $b_z = 0.6$ м, $\alpha^{\mathrm{e}} = \pi/3$, $\beta^{\mathrm{e}} = \pi/6$ (рис. 2) при номинальной тяге каждого РД $\mathrm{P}^{\mathrm{m}} = 0.5$ Н, периоде ШИМ тяги РД $T_u^e = 32$ с и параметрах $T_{zu}^{\mathrm{e}} = 0.25$ с, $\tau_m = 2$ с, а используемый МП имеет период цифрового управления $T_u^{\mathrm{m}} = 4$ с и ограничение $\mathrm{l}^{\mathrm{m}} = 50$ Am^2 на компоненты вектора ЭММ.

На рис. 3 приведены результаты имитации режимов успокоения КА для значения вектора ~~а~~ $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{o}} = \boldsymbol{\omega}(0) = \{\omega_{oi}\}$ при $\omega_{oi} = 5/\sqrt{3}$ град/с и включения БИНС. Здесь при $a = 0.0015$ $\forall t \in [0,192)$ с шестью периодами $T_u^{\mathrm{e}} = 32$ с сначала реализуется ШИМ управления РД по типу «максимального быстродействия», а затем следует переход к ШИМ управления РД по типу «минимального принуждения» $\forall t \in [192,640)$ с до выполнения условия $|\boldsymbol{\omega}(t)| \le \Delta_{\omega}^{\mathrm{o}} = 0.3$ град/с.

На полуинтервале времени $t \in [640,1664)$ с реализуется завершающий этап успокоения КА с помощью цифрового управления МП (рис. 4 и 5) до выполнения условия $|\boldsymbol{\omega}(t)| \le \Delta_{\omega}^{*} = 0.1$ град/с.

На полуинтервале времени $t \in [1664,1856)$ происходит включение БИНС, полетная верификация работы и настройка этой системы, здесь ДУ и МП выключены, см. рис. 4 и 5.

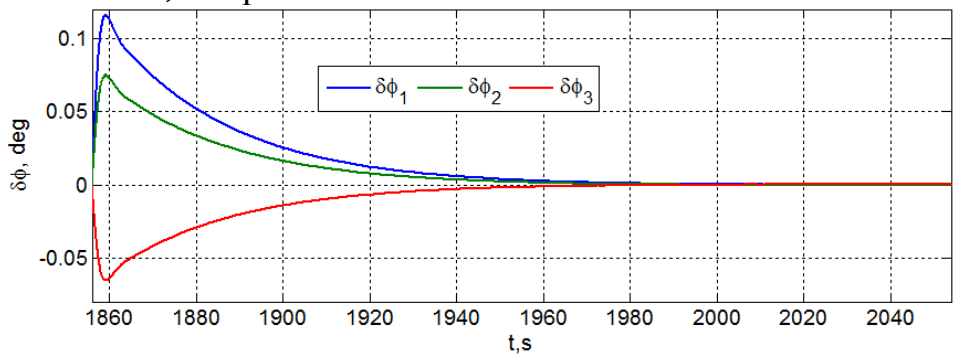

Рис.6. Ошибки угловой стабилизации КА при включении контура управления

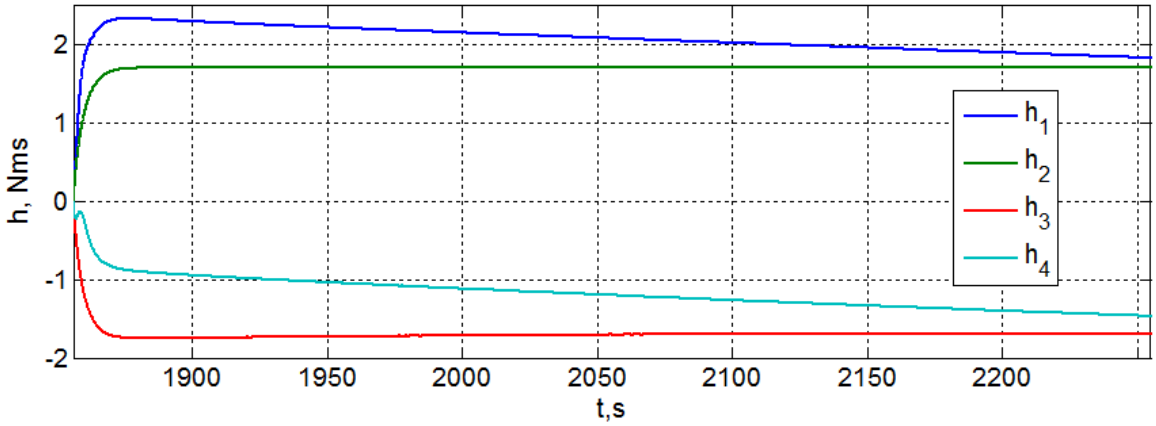

Рис 7. Кинетические моменты ДМ при включении контура управления

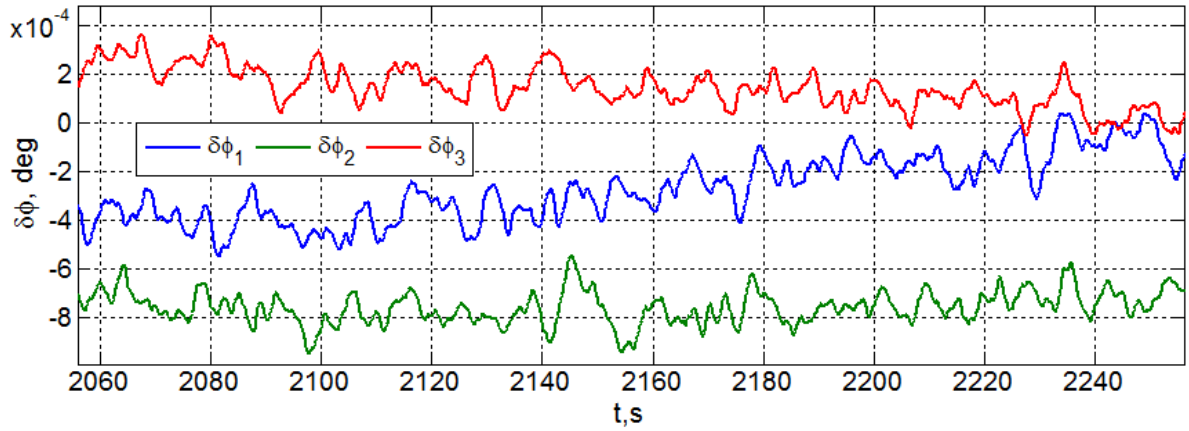

Рис. 8. Установившиеся ошибки угловой стабилизации КА в ИСК

Важный третий начальный режим КА реализуется на полуинтервале времени $t \in [1856, 2256)$ с (рис. 6) при первом включении контура управления ориентацией КА с кластером четырех ДМ и магнитным приводом для его разгрузки от накопленного КМ $\mathbf{H}^{a}$. Включение этого контура для начальной стабилизации произвольного углового положения корпуса КА в ИСК, в котором работоспособен хотя один звездный датчик в составе СОУП, выполняется при условии баланса электромеханической СУО по вектору КМ $\mathbf{G} = \mathbf{K} + \mathbf{H} \equiv \mathbf{0}$. При фиксированном угловом положении корпуса КА в ИСК вектор $\boldsymbol{\omega}(t) \equiv \mathbf{0}$, но «парковое» состояние кластера ДМ с вектором его КМ $\mathbf{H} \equiv \mathbf{0}$ реализуется при значениях КМ отдельных ДМ $h_p \neq 0$, $\forall p = 1 \div 4$ в соответствии с применяемым явным законом настройки кластера. Поэтому при включении данного контура происходит переход кластера ДМ к «парковому» состоянию с одновременным «впитыванием» остаточного КМ корпуса и разгрузкой такого КМ кластера ДМ с помощью цифрового управления МП. На рис. 6 и 7 приведены ошибки угловой стабилизации КА и КМ двигателей-маховиков при включении контура, а на

рис. 8 – установившиеся ошибки угловой стабилизации корпуса КА в ИСК, обусловленные влиянием гравитационного момента. При компьютерной имитации этого начального режима учитывался дискретный шум СОУП с СКО $\sigma^{m} = 1$ угл. сек при измерении углового положения КА с периодом $T_p = 1/8$ с, дискретная фильтрация измерений выполнялась с этим же периодом, а цифровое управление ДМ формировалось с периодом $T_u = 1/4$ с.

Бортовой расчет закона наведения КА при его ПМ на интервале времени $t \in [2256, 2464]$ с длительностью 208 секунд с краевыми условиями (3) в виде

$\boldsymbol{\sigma}_{\text{i}} = \{0.3548, 2.5047, -0.9879\}$;

$\boldsymbol{\omega}_{\text{i}} = \{0.00117429, 0.00075912, -0.00066496\}$ рад/с;

$\boldsymbol{\sigma}_{\text{f}} = \{-0.1325, 0.4154, 0.3779\}$; $\boldsymbol{\omega}_{\text{f}} = \{0, 0, -0.0010573825493796 3\}$ рад/с выполнен

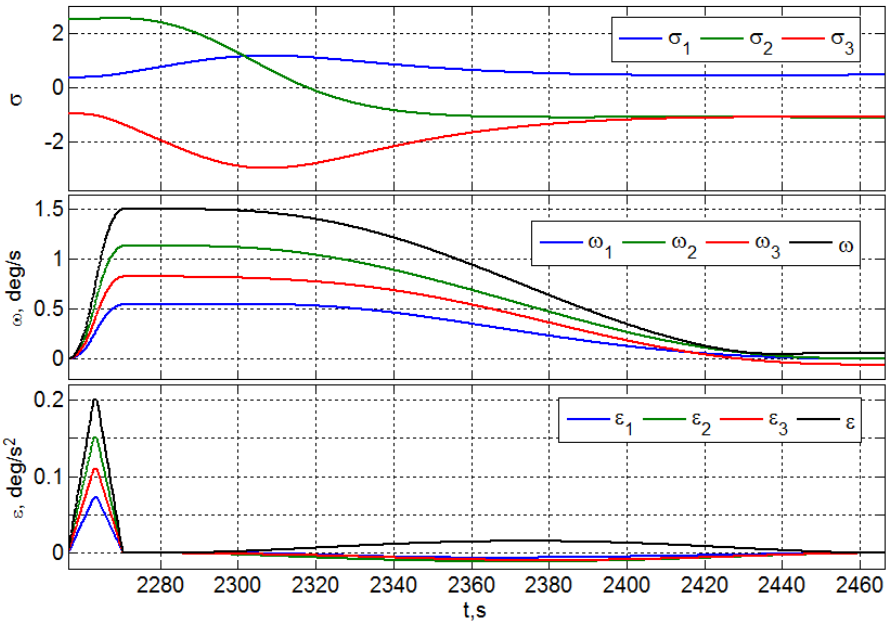

Рис. 9. Векторный сплайновый закон наведения КА для выполнения ПМ

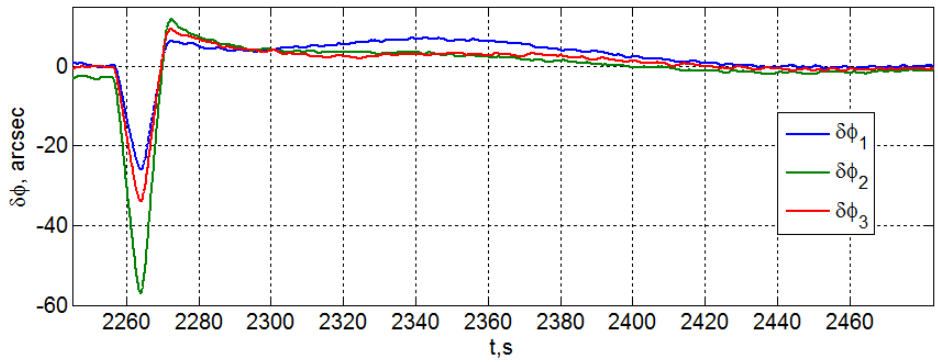

Рис. 10. Погрешности угловой стабилизации КА при выполнении ПМ

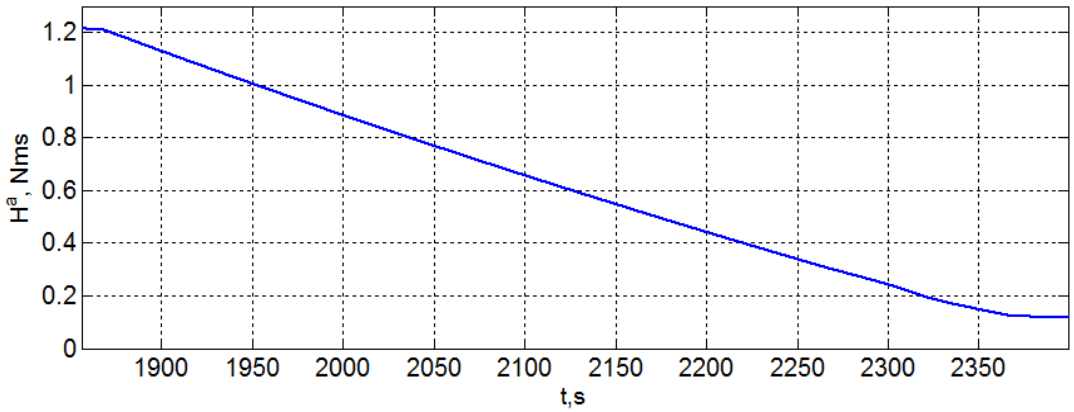

Рис. 11. Модуль накопленного КМ при разгрузке кластера ДМ

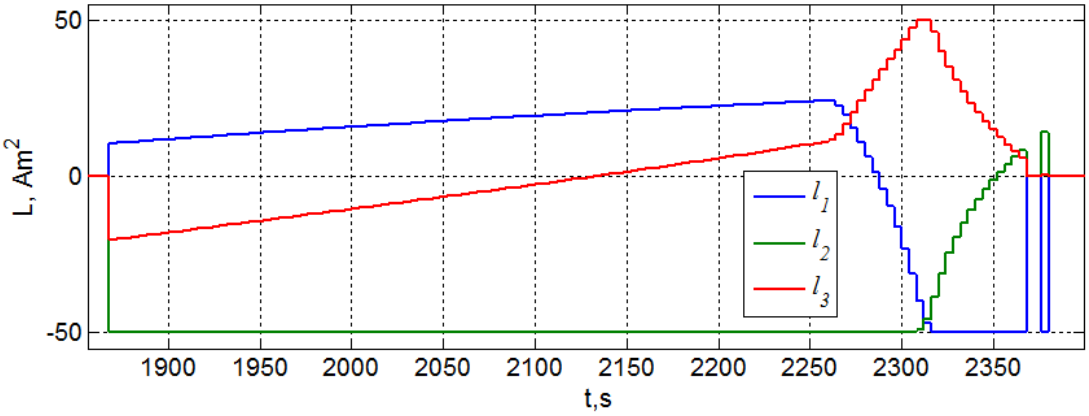

Рис. 12. Вектор ЭММ МП при разгрузке кластера ДМ от накопленного КМ

по аналитическим соотношениям при краткосрочном прогнозе орбитального движения КА на основе данных систем ГЛОНАСС/GPS, получаемых БИНС. Синтезированный закон наведения ИСК при развороте КА вокруг оси Эйлера на угол 167.99 град представлен на рис. 9, где цветами выделены компоненты векторов $\boldsymbol{\sigma}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ – синим цветом по крену, зеленым по рысканию и красным по тангажу, а модули векторов $\boldsymbol{\omega}(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ отмечены черным цветом.

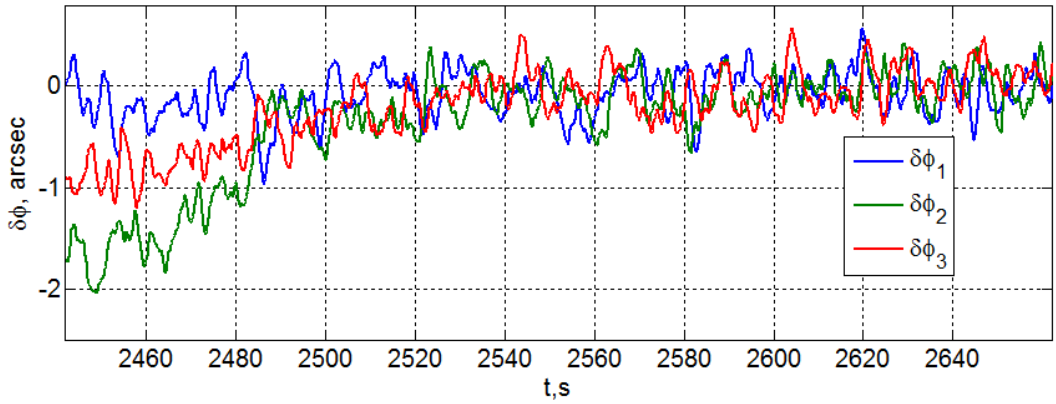

Рис. 13. Погрешности угловой стабилизации КА в ОСК

Погрешности реализации ПМ КА приведены на рис. 10, процессы при разгрузке кластера ДМ – на рис. 11 и 12, а на рис. 13 представлены погрешности при завершении ПМ ($t = 2464$ с) и последующей угловой стабилизации КА в ОСК.

Заключение. Предложена новая схема выполнения начальных режимов ориентации информационных КА на низких орбитах с применением БИНС, корректируемой сигналами кластера звёздных датчиков и спутников навигационных систем ГЛОНАСС/GPS. Приведены результаты исследования динамики таких режимов СУО спутника землеобзора массой ≈ 1000 кг на ССО высотой 720 км, которые получены на основе методов компьютерной имитации.

Работа поддержана РФФИ (грант 17-08-01708) и отделением ЭММПУ РАН (программа фундаментальных исследований № 13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, Физматлит, 1974.

2. Somov Ye.I., Butyrin S.A., Rayevsky V.A., Titov G.P., Baiget A., Rogers R.C. Nonlinear dynamics of gyromoment attitude control system at communication satellite SESAT // Proceedings of 5th IFAC Symposium “Nonlinear Control Systems”. 2001. Vol. 3. P. 1399-1404.

3. Somov S. Damping dynamics of a flexible satellite at pulse-width modulation of an engine control // Russian Aeronautics. 2005. Vol. 48, no. 4. P. 34-44.

4. Сомов С.Е. Анализ колебаний конструкции спутника при наведении на Солнце и Землю с широтно-импульсной модуляцией управления двигателями // Известия Самарского научного центра РАН. 2007. Том 9, №3. С. 847-858.

5. Сомов С.Е. Экономичное широтно-импульсное управление электрореактивными двигателями при торможении вращения упругого космического аппарата // Известия Самарского научного центра РАН. 2016. Том 18. № 4(6). С. 1138-1144.

6. Somov Ye., Butyrin S., Somov S. Adaptive-robust attitude & orbit control of a small satellite motion // Proceedings of 23 Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. Saint Petersburg. 2016. P. 349-355.

АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ В КОСМИЧЕСКОМ ТЕЛЕСКОПЕ ЗЕМЛЕОБЗОРА ПРИ СКАНИРУЮЩЕЙ СЪЕМКЕ

Е.И. Сомов, С.А. Бутырин (СамГТУ, Россия, 443100, Самара, Молодогвардейская, 244) E-mail: e somov@mail.ru butyrinsa@mail.ru

ANALYSIS OF AN IMAGE MOTION IN A SPACE LAND-SURVEY TELESCOPE DURING A SCANNING OBSERVATION

Ye.I. Somov, S.A. Butyrin (SamSTU, Russia, 443100, Samara)

Keywords: a space land-survey, telescope, an image motion, analysis

Введение. Рассматривается космический аппарат (КА) землеобзора, оснащенный телескопом с набором матриц оптико-электронных преобразователей (ОЭП) в его фокальной плоскости (ФП) с взаимным перекрытием в продольном направлении и сдвигом друг относительно друга в поперечном направлении.

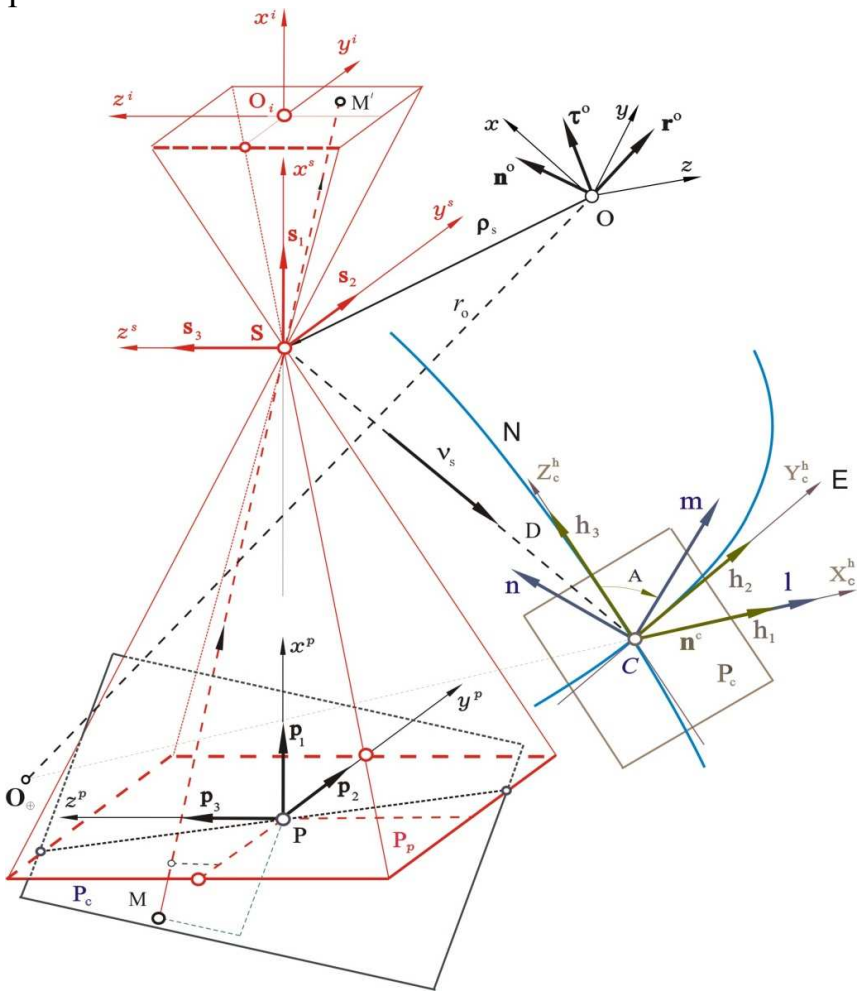

Рис. 1. Схема съемки земной поверхности и формирования изображения

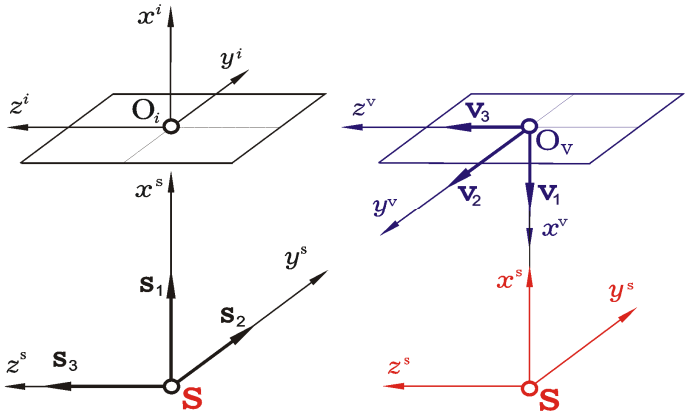

Рис. 2. Телескопная и визирная системы координат

При съемке заданных участков поверхности Земли матрицы ОЭП работают в режиме временного запаздывания и накопления (ВЗН). Используются стандартные системы координат (СК) – инерциальная (ИСК, базис $\mathbf{I}_\oplus$) и геодезическая Гринвичская (ГСК, базис $\mathbf{E}$) СК с началом в центре Земли $O_\oplus$; горизонтная (ГорСК, базис $\mathbf{H}$) с эллипсоидальными геодезическими координатами L, B и H, орбитальная (ОСК $Ox^\circ y^\circ z^\circ$, базис $\mathbf{O}$) и связанная с корпусом КА (ССК $Oxyz$, базис $\mathbf{B}$) СК с началом в его центре масс O, рис. 1. Вводятся также телескопная СК (ТСК, базис $\mathbf{S}$) с началом в центре оптического проектирования S, СК поля изображения $O_i x^i y^i z^i$ (ПСК, базис $\mathbf{F}$) с началом в центре O_i ФП телескопа и визирная СК (ВСК $O_v x^v y^v z^v$, базис $\mathbf{V}$) с началом в центре O_v набора матриц ОЭП, рис. 2. При известном орбитальном движении КА сканирующая съемка определяется законом углового наведения КА, при котором происходит требуемое движение получаемого оптического изображения на поверхности ОЭП. На земном эллипсоиде маршрут съемки отображается следом проекций ОЭП, составляя полосу захвата. В системе управления ориентацией (СУО) КА землеобзора массой до 1000 кг применяются электромеханический привод в виде кластера четырёх реактивных двигателей-маховиков (ДМ) по схеме *General Electric* (*GE*) с разгрузкой накопленного кинетического момента (КМ) магнитным приводом (МП) с цифровым управлением и инерциальная система определения углового положения (СОУП) с коррекцией сигналами от звёздных датчиков. Кратко представляются разработанные методы синтеза векторных сплайновых законов наведения, алгоритмы цифрового управления кластером ДМ, магнитным приводом и рассматриваются две задачи

1. обоснования требований к точности перемещения изображения при сканирующей съемке с накоплением электронных сигналов по столбцам ОЭП;

2. разработки методов анализа скорости движения изображения (СДИ) и перемещения накопленного электронного изображения в процессе съемки.

Математические модели. В ССК $Oxyz$ оси вращения четырёх ДМ по схеме *GE* располагаются на поверхности конуса с осью симметрии Ox и углом полу-раствора γ. Далее используются обозначения $\mathrm{col}(\cdot)=\{\cdot\}$, $\mathrm{line}(\cdot)=[\cdot]$, $(\cdot;\cdot)$, $(\cdot)^{\mathrm{t}}$, $[\mathbf{a}\times]$ и $\circ,\tilde{}$ для векторов, матриц и кватернионов. Вводятся углы ориентации ССК относительно ОСК по крену ϕ_1, рысканию ϕ_2 и тангажу ϕ_3, которые применяются в последовательности 312 элементарных поворотов, кватернионы $\boldsymbol{\Lambda}$ ориентации ССК в ИСК и $\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{s}}$ ориентации ТСК в ГСК, а также вектор модифицированных параметров Родрига (МПР) $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_i\}=\mathbf{e}\,\mathrm{tg}(\Phi/4)$ с традиционными обозначениями орта Эйлера $\mathbf{e}$ и угла Φ собственного поворота. Вектор $\boldsymbol{\sigma}$ взаимно-однозначно связан с кватернионом $\boldsymbol{\Lambda}$ прямыми $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\lambda}/(1+\lambda_0)$ и обратными $\lambda_0=(1-\sigma^2)/(1+\sigma^2)$, $\boldsymbol{\lambda}=2\boldsymbol{\sigma}/(1+\sigma^2)$ соотношениями.

Пусть $\mathbf{G}=\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}+\mathbf{H}$ является вектором суммарного КМ электромеханической СУО, столбцы $\mathbf{H}=\{\mathrm{H}_i\}$ и $\mathbf{h}=\{\mathrm{h}_p=J_r\Omega_p\}$, $p=1\div 4$ представляют КМ кластера и отдельных ДМ, которые связаны соотношением $\mathbf{H}=\mathbf{A}_\gamma\mathbf{h}$, где матрица $\mathbf{A}_\gamma$ составлена из ортов осей вращения ДМ; вектор $\mathbf{M}^{\mathrm{r}}$ управляющего момента кластера ДМ формируется в виде $\mathbf{M}^{\mathrm{r}}=-\mathbf{H}^{*}$, где $(\cdot)^{*}$ – символ локальной производной по времени, вектор $\mathbf{M}^{r}=-\mathbf{A}_\gamma(\mathbf{M}-\mathbf{M}^{\mathrm{f}})$, где столбцы $\mathbf{M}=\{m_p\}$ и $\mathbf{M}^{\mathrm{f}}=\{m_p^{\mathrm{f}}\}$ представляют управляющие моменты и моменты сил сухого трения по осям вращения ДМ; вектор механического момента МП $\mathbf{M}^{\mathrm{m}}=\{m_i^{\mathrm{m}}\}=-\mathbf{L}\times\mathbf{B}$, где вектор электромагнитного момента $\mathbf{L}=\{l_i\}$ с ограниченными компонентами $|l_i|\le \mathrm{l}^{\mathrm{m}}$ и вектор индукции магнитного поля Земли $\mathbf{B}=\mathbf{b}\mathrm{B}$ с ортом $\mathbf{b}$ определены в ССК, а ресурсы каждого ДМ по управляющему и кинетическому моментам ограничены: $|m_p(t)|\le \mathrm{m}^{\mathrm{m}}, |\mathrm{h}_p(t)|\le \mathrm{h}^{\mathrm{m}}$. Пусть дискретное измерение кватерниона $\boldsymbol{\Lambda}_l^m=\boldsymbol{\Lambda}^m(t_l)\equiv\boldsymbol{\Lambda}(t_l)\circ\boldsymbol{\Lambda}_l^n$ ориентации КА с помощью СОУП выполняется с периодом T_p, где кватернион $\boldsymbol{\Lambda}_l^n=\boldsymbol{\Lambda}^n(t_l)$ представляет центрированный гауссовский шум, $t_{l+1}=t_l+T_p$, $l\in \mathrm{N}_0\equiv[0,1,2,...)$, а дискретное измерение угловых скоростей вращения ДМ $\boldsymbol{\Omega}_{ps}=\boldsymbol{\Omega}_p(t_s)$ – в моменты времени t_s с периодом T_q, $t_{s+1}=t_s+T_q$, $s\in \mathrm{N}_0$. Будем также считать, что в моменты времени t_k с периодом T_u, $t_{k+1}=t_k+T_u$, $k\in \mathrm{N}_0$ формируется цифровое управление ДМ, а в моменты времени t_r с периодом T_u^m, $t_{r+1}=t_r+T_u^m$, $r\in \mathrm{N}_0$ – цифровое управление МП.

Если корпус КА считать свободным твердым телом с тензором инерции $\mathbf{J}$, то при наличии баланса СУО спутника по вектору КМ $\mathbf{G} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H} \equiv \mathbf{0}$ модель динамики углового движения КА принимает вид $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\varepsilon}$ с вектором ускорения $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{M}^{\mathrm{r}}$, а модель углового движения КА – кинематическое представление

$$\dot{\boldsymbol{\Lambda}}(t) = \boldsymbol{\Lambda}(t) \circ \boldsymbol{\omega}(t)/2; \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t); \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{*}(t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \mathbf{v}. \tag{1}$$

Модули векторов $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^{*}(t)$ ограничены, $|\boldsymbol{\omega}(t)| \le \overline{\omega}$, $|\boldsymbol{\varepsilon}(t)| \le \overline{\varepsilon}$ и $|\boldsymbol{\varepsilon}^{*}(t)| \le \overline{\varepsilon}^{*}$, что обусловлено ограниченностью областей вариации векторов КМ $\mathbf{H}$ и управляющего момента $\mathbf{M}^{\mathrm{r}} = -\mathbf{H}^{*}$ кластера ДМ, а также допустимым темпом его изменения. Пусть ортогональная матрица $\widetilde{\mathbf{C}} = \| \widetilde{c}_{ij} \|$ определяет ориентацию ТСК относительно ГСК, а скалярная функция $D(t)$ представляет дальность наблюдения вдоль оси визирования с ортом $\mathbf{v}_s$, рис. 1. Представление координат произвольной точки M в основной плоскости пространства предметов $\mathbf{P}_c$ (см. рис. 1) непосредственно в оптическом базисе $\mathbf{S} = \{\mathbf{s}_i\}$ и применение классических соотношений центральной проекции теории оптических систем приводит к следующим формулам связи координат точки M и её отображения $\mathrm{M}'(y^i, z^i)$ в основной плоскости $y^i \mathrm{O}_i z^i$ базиса $\mathbf{F}$:

$$\widetilde{y}^i = -y^s / x^s; \quad \widetilde{z}^i = -z^s / x^s; \quad x^s \equiv -D/q^i, \quad q^i \equiv 1 - (\widetilde{c}_{21}\widetilde{y}^i + \widetilde{c}_{31}\widetilde{z}^i)/\widetilde{c}_{11}.$$

Здесь $\widetilde{y}^i = y^i / f_e$ и $\widetilde{z}^i = z^i / f_e$ являются нормированными фокальными координатами указанной точки, где f_e – эквивалентное фокусное расстояние телескопа. Пусть далее векторы-столбцы $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}^s = \{\omega_{\mathrm{e}i}^s\}$ и $\mathbf{v}_{\mathrm{e}}^s = \{\mathrm{v}_{\mathrm{e}i}^s\}$ представляют в ТСК соответственно векторы абсолютной угловой скорости и скорости поступательного движения центра масс КА относительно ГСК. Тогда продольная $\widetilde{V}_y^i(\widetilde{y}^i, \widetilde{z}^i)$ и поперечная $\widetilde{V}_z^i(\widetilde{y}^i, \widetilde{z}^i)$ компоненты вектора $\widetilde{\mathbf{V}}^i(\widetilde{y}^i, \widetilde{z}^i)$ нормированной СДИ точки $\mathrm{M}'(y^i, z^i)$ вычисляются по явному соотношению

$$\begin{bmatrix} \widetilde{V}_y^i(\widetilde{y}^i, \widetilde{z}^i) \\ \widetilde{V}_z^i(\widetilde{y}^i, \widetilde{z}^i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\widetilde{y}}^i \\ \dot{\widetilde{z}}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{y}^i & 1 & 0 \\ \widetilde{z}^i & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^i \widetilde{\mathrm{v}}_{\mathrm{e}1}^s - \widetilde{y}^i \omega_{\mathrm{e}3}^s + \widetilde{z}^i \omega_{\mathrm{e}2}^s \\ q^i \widetilde{\mathrm{v}}_{\mathrm{e}2}^s - \omega_{\mathrm{e}3}^s - \widetilde{z}^i \omega_{\mathrm{e}1}^s \\ q^i \widetilde{\mathrm{v}}_{\mathrm{e}1}^s + \omega_{\mathrm{e}2}^s + \widetilde{y}^i \omega_{\mathrm{e}1}^s \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где $\widetilde{\mathrm{v}}_{\mathrm{e}i}^s = \mathrm{v}_{\mathrm{e}i}^s / D(t)$, $i = 1,2,3 \equiv 1 \div 3$.

Потребная точность перемещения изображения при сканировании. Основной режим работы СУО КА наблюдения – поддержание программной ориентации телескопа с такой позиционной и/или скоростной

точностью, при которой ухудшение качества получаемой информации за счет погрешностей этой системы будет не больше заданного. Здесь важными характеристиками являются: (i) точность наведения оси визирования телескопа на объект наблюдения; (ii) точность гидирования (слежения), которая представляет вариации перемещения изображения объекта относительно среднего положения. Для получения качественной информации необходимо накопление энергетического уровня сигнала. Для матриц ОЭП важным параметром является период пространственной дискретизации $\delta_y = \delta_z \equiv \delta^i$, которому соответствует пространственная частота Найквиста $N_n = 1/(2\delta^i)$. В матрицах ОЭП организуется сканирование изображения вдоль столбцов с K шагами накопления. При этом задается тактовая частота F_{e} переключения строк с временем накопления t_{e} на каждой строке, а задержка между поступлениями отдельных строк оптического изображения на очередную строку матрицы ОЭП равна времени перемещения электронного изображения вдоль столбца от одного элемента к другому. Таким образом, накопление электронного сигнала происходит в одних и тех же зарядовых пакетах, но в пространственно различных элементах матрицы ОЭП, а матрица уровней яркости $\mathbf{Q}^{\text{e}}$ кадра изображения формируется последовательно из строк сигналов, «считанных» с назначенной K-ой строки ОЭП, и временная задержка в формировании этой строки составляет $T_{\text{z}}^{\text{e}} = (K-1)t_{\text{e}}$. Введем обозначения: $\Delta V_y(t)$ – рассогласование скоростей перемещения оптического и электронного изображений вдоль произвольного столбца матриц ОЭП; $V_z(t)$ – поперечная скорость оптического изображения в произвольном элементе центральной строки матриц ОЭП; $s_y(t)$ и $s_z(t)$ – погрешности сдвигов изображения в продольном и поперечном направлениях, соответствующие скоростям $\Delta V_y(t)$, $V_z(t)$ и сформированные на K шагах накопления электронных зарядов в элементах столбца матриц ОЭП; $m_y^s(t)$, $m_z^s(t)$ и $\sigma_y^s(t)$, $\sigma_z^s(t)$ – соответственно математические ожидания и среднеквадратичные отклонения (СКО) функций $s_y(t)$ и $s_z(t)$. Перемещение изображения, независимо от вызвавших его источников, приводит к ухудшению качества регистрируемого изображения. Сдвиг изображения $s(t)$ учитывается как один из независимых видов погрешностей в цепи формирования изображения, включающей влияние турбулентности атмосферы и облачности, деформации волнового фронта оптической системы с учетом технологических возможностей изготовления её элементов, погрешностей юстировки при влиянии теплофизических факторов и др.

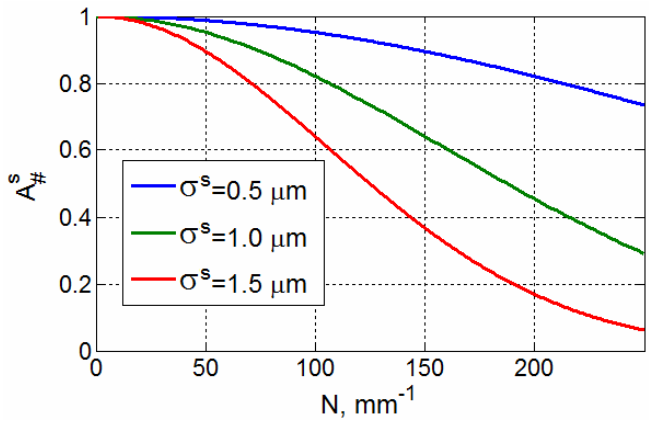

Рис. 3. ЧКХ влияния сдвига изображения

Потребная точность стабилизации перемещения изображения на матрице ОЭП определяется по допустимому уменьшению частотно-контрастной характеристики (ЧКХ) сдвига изображения $A^s_{\#}(N) = \exp(-2(\pi\sigma^s N)^2)$ на прост-ранственной частоте N_s, которая назначается с учетом чувствительности ОЭП и требуемого отношения сигнал/шум. На рис. 3 приведены ЧКХ $A^s_{\#}$ для 3 значений σ^s.

Синтез законов наведения спутника землеобзора. С применением известных приемов космической геодезии авторами созданы аналитические методики синтеза законов наведения КА при сканирующей съемке наземных объектов с применением матриц ОЭП с ВЗН [1,2]. Задача вычисления кватерниона $\mathbf{\Lambda}$ ориентации связанного базиса $\mathbf{B}$ относительно инерциального базиса $\mathbf{I}_{\oplus}$, векторов угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$, как явных функций на интервале времени произвольной длительности, решается на основе векторного сложения всех элементарных движений ТСК в ГСК с учетом текущей перспективы наблюдения при задании начальных координат наземного объекта и потребного геодезического азимута A сканирования. С использованием (2) согласованные компоненты столбца $\boldsymbol{\omega}^s_e(t)$ и кватерниона $\mathbf{\Lambda}^s_e(t)$ получаются численным интегрированием уравнения $\dot{\mathbf{\Lambda}}^s_e = \mathbf{\Lambda}^s_e \circ \boldsymbol{\omega}^s_e/2$ для криволинейных маршрутов с оптимальным выравниванием продольной СДИ и с дополнительным учетом ряда кинематических условий – для трассовых, ортодромических маршрутов сканирующей съемки, для формирования изображений земных площадей и получения их стереоизображений и др. Векторное сплайновое представление законов наведения спутника при сканирующей съемке с заданной точностью основывается на интерполяции значений векторной функции МПР $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_i\}$, для которой прямые и обратные кинематические уравнения имеют вид

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \tfrac{1}{4}(1-\sigma^2)\boldsymbol{\omega} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\omega} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega});\ \boldsymbol{\omega} = \frac{4}{(1+\sigma^2)^2}[(1-\sigma^2)\dot{\boldsymbol{\sigma}} - 2(\boldsymbol{\sigma}\times\dot{\boldsymbol{\sigma}}) + 2\boldsymbol{\sigma}(\dot{\boldsymbol{\sigma}},\boldsymbol{\sigma})],$$

а вторая производная этой функции вычисляется по формуле

$$\ddot{\boldsymbol{\sigma}} = \tfrac{1}{2}[-(\boldsymbol{\sigma},\dot{\boldsymbol{\sigma}})\boldsymbol{\omega} + \tfrac{1}{2}(1-\sigma^2)\boldsymbol{\varepsilon} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}\times\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\varepsilon} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\sigma}(\dot{\boldsymbol{\sigma}},\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon})].$$

С использованием этих соотношений интерполяция значений вектора МПР выполняется по явным аналитическим соотношениям [3].

При наличии двух смежных временных интервалов сканирующей съемки с уже известными краевыми условиями по кватерниону $\mathbf{\Lambda}$, векторам $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$, а также по вектору $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ в момент времени начала второго маршрута, возникает задача поворотного маневра (ПМ) спутника землеобзора на интервале времени $t \in \mathrm{T_p} \equiv [t_\mathrm{i}^p, t_\mathrm{f}^p]$, $t_\mathrm{f}^p \equiv t_\mathrm{i}^p + T_p$ с краевыми условиями

$$\mathbf{\Lambda}(t_\mathrm{i}^p) = \mathbf{\Lambda}_\mathrm{i};\ \boldsymbol{\omega}(t_\mathrm{i}^p) = \boldsymbol{\omega}_\mathrm{i};\ \boldsymbol{\varepsilon}(t_\mathrm{i}^p) = \boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i};\ \mathbf{\Lambda}(t_\mathrm{f}^p) = \mathbf{\Lambda}_\mathrm{f};\ \boldsymbol{\omega}(t_\mathrm{f}^p) = \boldsymbol{\omega}_\mathrm{f};\ \boldsymbol{\varepsilon}(t_\mathrm{f}^p) = \boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{f};\ \boldsymbol{\varepsilon}^*(t_\mathrm{f}^p) = \boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{f}^*. \quad (3)$$

Разработанный аналитический метод синтез закона наведения КА при ПМ основан на необходимом и достаточном условии разрешимости классической задачи Дарбу. Решение получается сложением трех элементарных вращений «вложенных» базисов $\mathbf{E}_k$ вокруг ортов $\mathbf{e}_k$, $k = 1 \div 3$ Эйлера, положение которых следует из условий (3) модели (1). Кватернион $\mathbf{\Lambda}(t)$ определяется произведением $\mathbf{\Lambda}(t) = \mathbf{\Lambda}_\mathrm{i} \circ \mathbf{\Lambda}_1(t) \circ \mathbf{\Lambda}_2(t) \circ \mathbf{\Lambda}_3(t)$, где $\mathbf{\Lambda}_k(t) \equiv (\cos(\varphi_k(t)/2), \mathbf{e}_k \sin(\varphi_k(t)/2))$, функция $\varphi_k(t)$ определяет угол k-го поворота, $k = 1 \div 3$. В силу неподвижности орта $\mathbf{e}_k$ в базисе $\mathbf{E}_{k-1}$ имеем $\boldsymbol{\omega}_k(t) = \dot{\varphi}_k(t)\mathbf{e}_k$, $\boldsymbol{\varepsilon}_k(t) = \ddot{\varphi}_k(t)\mathbf{e}_k$, $\boldsymbol{\varepsilon}_k^*(t) \equiv \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k(t) = \dddot{\varphi}_k(t)\mathbf{e}_k$.

Введем обозначения $\boldsymbol{\omega}^{(k)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(k)}$, $k = 1 \div 3$ векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ в базисе $\mathbf{E}_k$, оператор $\mathbf{a}_{k-1}^{(k)} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{\Lambda}_k) \equiv \tilde{\mathbf{\Lambda}}_k \circ \mathbf{a}_{k-1} \circ \mathbf{\Lambda}_k$ преобразования вектора $\mathbf{a}_{k-1}$ из базиса $\mathbf{E}_{k-1}$ в базис $\mathbf{E}_k$ и назначим $\boldsymbol{\omega}_1(t) = \dot{\varphi}_1(t)\mathbf{e}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_1(t) = \ddot{\varphi}_1(t)\mathbf{e}_1$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1(t) \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_1^*(t) = \dddot{\varphi}_1(t)\mathbf{e}_1$. Векторы угловой скорости, углового ускорения и локальной производной ускорения в ССК определяются значениями этих же векторов в базисе $\mathbf{E}_3$, которые формируются по рекуррентным формулам, $k = 2,3$:

$$\boldsymbol{\omega}_{k-1}^{(k)} = \mathbf{\Phi}(\boldsymbol{\omega}_{k-1}, \mathbf{\Lambda}_k);\ \boldsymbol{\varepsilon}_{k-1}^{(k)} = \mathbf{\Phi}(\boldsymbol{\varepsilon}_{k-1}, \mathbf{\Lambda}_k);\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k-1}^{(k)} = \mathbf{\Phi}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k-1}, \mathbf{\Lambda}_k);\ \boldsymbol{\omega}^{(k)} = \boldsymbol{\omega}_{k-1}^{(k)} + \boldsymbol{\omega}_k;$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{k-1}^{(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}_\kappa + \boldsymbol{\omega}_{k-1}^{(k)} \times \boldsymbol{\omega}_k;\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(k)} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k-1}^{(k)} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \boldsymbol{\omega}_{k-1}^{(k)} \times \boldsymbol{\varepsilon}_k + (2\boldsymbol{\varepsilon}_{k-1}^{(k)} + \boldsymbol{\omega}_{k-1}^{(k)} \times \boldsymbol{\omega}_k) \times \boldsymbol{\omega}_k.$$

В результате по явным соотношениям получаются векторные функции $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}^{(3)}(t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)}(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^*(t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(3)}(t)$. Эти векторы представляются в аналитическом виде при задании сплайнов $\varphi_k(t)$ различных порядков с использованием в общем случае трех участков интервала поворотного манёвра [4]:

1. участок разгона с оптимизацией по быстродействию при ограничениях, где КА переводится на движение с вектором угловой скорости по орту $\mathbf{e}_3$;

2. участок движения с постоянным вектором угловой скорости по орту $\mathbf{e}_3$;

3. завершающий участок движения КА с гарантированным точным выполнением краевых условий на правом конце ПМ при использовании векторных сплайнов 6-го порядка.

При этом все параметры скалярных сплайнов $\varphi_k(t)$ вычисляются по явным аналитическим соотношениям.

Пусть для КА землеобзора на солнечно-синхронной орбите высотой 720 км имеется задание на съемку российских столиц (рис. 4) в такой последовательности временных интервалов при отсчете времени от момента прохождения восходящего узла орбиты: ориентация КА в ОСК $\forall t \in [0,870)$ с; поворотный манёвр ПМ1 длительностью 40 с $\forall t \in [870,910)$ с; маршрут М1 съемки с выравниванием продольной СДИ длительностью 40 с $\forall t \in [910,950)$ с при начальной точке в ГСК с долготой $L = 37.8$ град, широтой $B = 54.3$ град и геодезическим азимутом $A = -12$ град; ПМ2 длительностью 55 с $\forall t \in [950,1005)$ с; маршрут М2 трассовой съемки длительностью 15 с $\forall t \in [1005,1020)$ с начальными значениями углов крена $\phi_1 = 8$ град и тангажа $\phi_3 = 0$.

На рис. 5 представлен автоматически синтезированный закон наведения КА в ИСК для выполнения такого задания. Здесь цветами выделены компоненты векторов $\boldsymbol{\sigma}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ – синим цветом по крену, зеленым по рысканию
и красным по тангажу, а модули векторов $\boldsymbol{\omega}(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ – черным цветом.

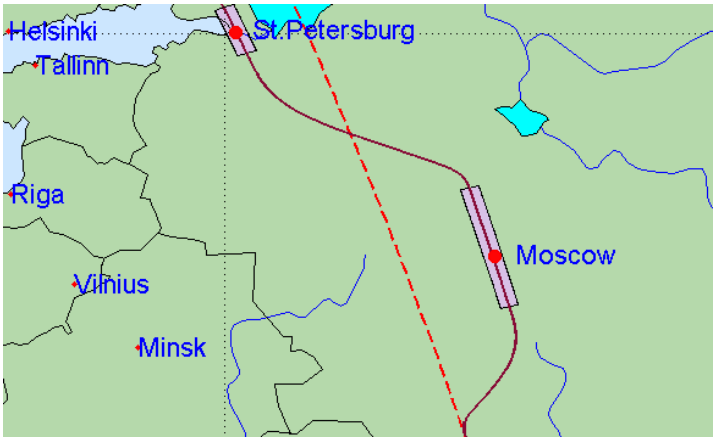

Рис. 4. Маршруты съемки двух российских столиц на карте

Цифровое управление ориентацией спутника. Для кластера ДМ принципиальная проблема заключается в распределении векторов его кинетического $\mathbf{H}$ и управляющего $\mathbf{M}^{\text{r}} = -\mathbf{H}^{*}$ моментов между 4 ДМ. Здесь применяется скалярная функция настройки для однозначного распределения векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{M}^{\text{r}}$ по явным аналитическим соотношениям. Введем обозначения $S_\gamma = \sin\gamma$, $C_\gamma = \cos\gamma$ и нормированный вектор КМ

$\boldsymbol{h} \equiv \{x, y, z\} = \mathbf{H}/\mathrm{h}^{\mathrm{m}} = \mathbf{A}_{\gamma}\,\mathbf{h}$, где $x = x_1 + x_2$, $x_1 = C_{\gamma}(h_1 + h_2)$, $x_2 = C_{\gamma}(h_3 + h_4)$; $\mathbf{h} = \{h_p\}$, $h_p = \mathrm{h}_p / \mathrm{h}^{\mathrm{m}}$ и $|h_p| \le 1$. Распределение вектора КМ $\boldsymbol{h}$ выполняется по закону $f_{\rho} = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 + \rho(\tilde{x}_1\tilde{x}_2 - 1) = 0$, где $0 < \rho < 1$; $\tilde{x}_1 = x_1 / q_y$, $\tilde{x}_2 = x_2 / q_z$; $q_s = (4C_{\gamma}^2 - s^2)^{1/2}$, $s = y,z$:

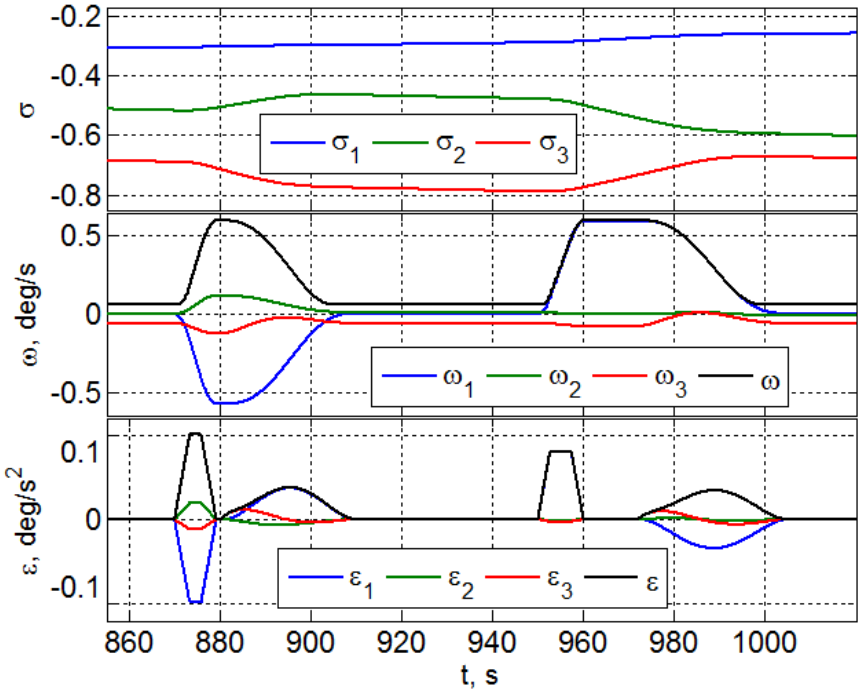

Рис. 5. Векторный сплайновый закон наведения

(i) $q \equiv q_y + q_z$; $\Delta \equiv (q/\rho)(1 - (1 - 4\rho[(q_y - q_z)(x/2) + \rho(q_y q_z - (x/2)^2)]/q^2)^{1/2})$ и явное распределение КМ между парами в виде $x_1 = (x + \Delta)/2$, $x_2 = (x - \Delta)/2$;

(ii) распределение КМ между ДМ в каждой паре по очевидным соотношениям;

(iii) вычисление столбца $\mathbf{M} = \{m_p\} = (\{\mathbf{A}, \mathbf{a}^{\mathrm{f}}\})^{-1}\{-\mathbf{M}^{\mathrm{r}}, -\mathrm{h}^{\mathrm{m}}\mathrm{Sat}(\phi_{\rho}, \mu_{\rho} f_{\rho})\}$ с параметрами $\phi_{\rho}, \mu_{\rho} > 0$ и компонентами строки $\mathbf{a}^{\mathrm{f}} = [a_p^{\mathrm{f}}]$ в виде

$$a_{1,2}^{\mathrm{f}} = 2C_{\gamma}[2C_{\gamma}^2 \pm S_{\gamma}^2 h_2(h_1 - h_2)][1 + \rho C_{\gamma}(h_3 + h_4)/q_z]/q_y^3;$$
$$a_{3,4}^{\mathrm{f}} = 2C_{\gamma}[2C_{\gamma}^2 \mp S_{\gamma}^2 h_4(h_3 - h_4)][1 + \rho C_{\gamma}(h_1 + h_2)/q_y]/q_z^3.$$

В СУО применяется компенсационная схема разгрузки кластера ДМ от накопленного КМ с помощью цифрового управления МП с периодом T_u^m и компенсация влияния моментов сил сухого трения m_p^{f} по осям вращения ДМ, идентифицируемых дискретным наблюдателем Луенбергера с периодом T_q [4]. Если задано программное движение КА $\boldsymbol{\Lambda}^p(t), \boldsymbol{\omega}^p(t)$ в

ИСК, то кватерниону рассогласования $\mathbf{E}=(e_0,\mathbf{e})=\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{p}\circ\mathbf{\Lambda}$ с вектором $\mathbf{e}=\{e_i\}$ соответствует вектор параметров Эйлера $\boldsymbol{E}=\{e_0,\mathbf{e}\}$, матрица погрешности $\mathbf{C}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{E})=\mathbf{I}_3-2[\mathbf{e}\times]\mathbf{Q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}}$, где $\mathbf{Q}_{\mathrm{e}}=\mathbf{I}_3 e_0+[\mathbf{e}\times]$ и вектор погрешности ориентации $\delta\boldsymbol{\phi}=\{\delta\phi_i\}=\{2e_0e_i\}$, а вектор рассогласования по угловым скоростям $\delta\boldsymbol{\omega}=\{\delta\omega_i\}=\boldsymbol{\omega}-\mathbf{C}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{E})\boldsymbol{\omega}^{p}(t)$.

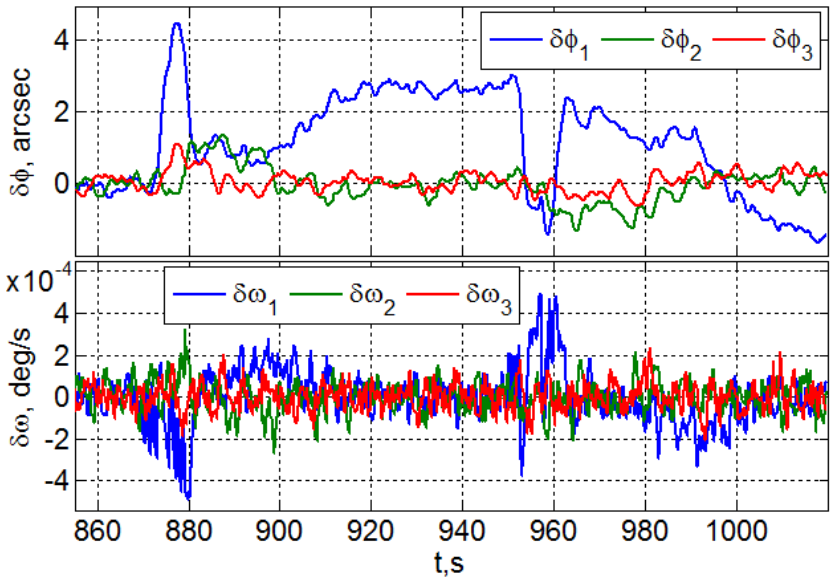

Рис. 6. Погрешности стабилизации КА по углам и угловым скоростям

Выполняется фильтрация значений вектора углового рассогласования с периодом T_p и используя разработанный закон управления кластером ДМ [4] формируются команды цифрового управления каждым ДМ с периодом T_u. При компьютерной имитации работы СУО применялись такие периоды дискретности: $T_q=1/32\,\mathrm{c}$; $T_p=1/8\,\mathrm{c}$; $T_u=1/4\,\mathrm{c}$ и $T_u^m=32$ с. Пусть при $t_*=820$ с имеется вектор накопленного КМ кластера ДМ $\mathbf{H}(t_*)=\{2.5,0.4,0.8\}$ Нмс и в этот момент начинается разгрузка кластера с помощью цифрового управления МП при $1^{\mathrm{m}}=50\,\mathrm{Ам}^2$. При погрешностях СОУП с СКО $\sigma^{\mathrm{m}}=1$ угл. сек на рис. 6 представлены ошибки стабилизации углового движения КА при выполнении указанного задания на съемку российских столиц, см. детали в [5]. Здесь наблюдается погрешность угловой стабилизации КА ≈ 2.75 угл. сек в канале крена при съемке Москвы $\forall t\in[910,950)$ с, обусловленная влиянием гравитационного момента, см. также рис. 7. Эта погрешность приводит к смещению центральной линии маршрута М1 примерно на 10 м при полосе захвата ≈ 39 км на поверхности Земли, что компенсируется при наземной обработке снимков.

Анализ движения изображения при сканирующей съемке. Фактические значения кинематических параметров пространственного движения КА землеобзора используются в (2) для анализа движения изображения на

поверхности ОЭП при сканирующей съемке. При этом сначала вычисляются фактические значения продольной V_y^i и поперечной V_z^i скоростей оптического изображения, рассогласования ΔV_y и $\Delta V_z \equiv V_z = V_z^i$ этих СДИ с учетом перемещения электронного изображения вдоль столбцов матриц ОЭП для накопления электронного сигнала и на основе численного интегрирования формируются погрешности $s_y(t)$ и $s_z(t)$ в синхронизации перемещений оптического и электронного изображений в продольном и поперечном направлениях для заданных точек матриц ОЭП. Далее в «скользящем окне» из K строк вычисляются текущие положения накопленного электронного изображения вдоль соответствующего столбца матрицы ОЭП и формируются значения математического ожидания m_y^s, m_z^s и СКО σ_y^s, σ_z^s погрешностей перемещения электронного изображения, накопленного в K-ой строке, в продольном и поперечном направлениях.

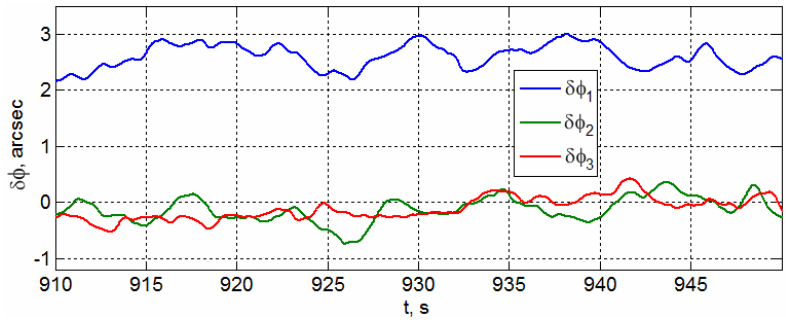

Рис. 7. Погрешности угловой стабилизации телескопа при съемке Москвы

На рис. 8 и 9 в верхней части представлены рассогласования СДИ $\Delta V_y(t)$, $V_z(t)$ и ниже – текущие значения m_y^s, m_z^s и σ_y^s, σ_z^s перемещения изображения в

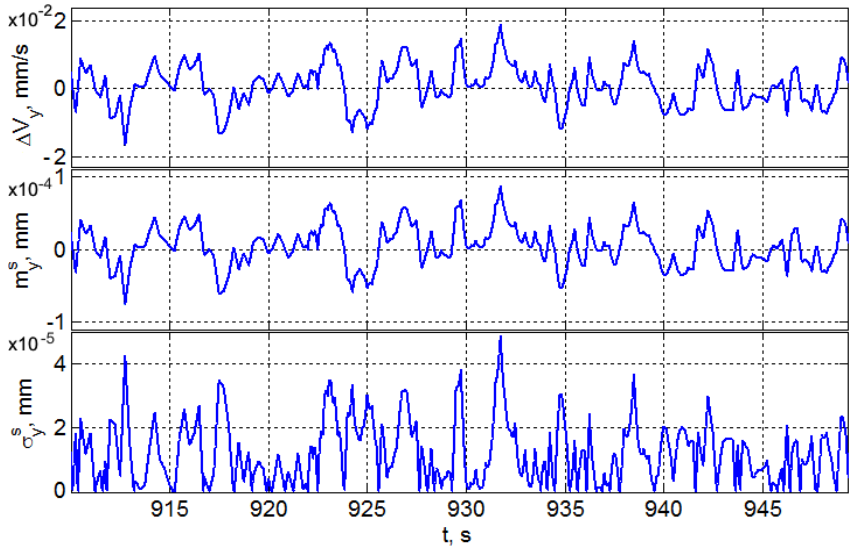

Рис. 8. Характеристики продольного движения изображения в центре ФП

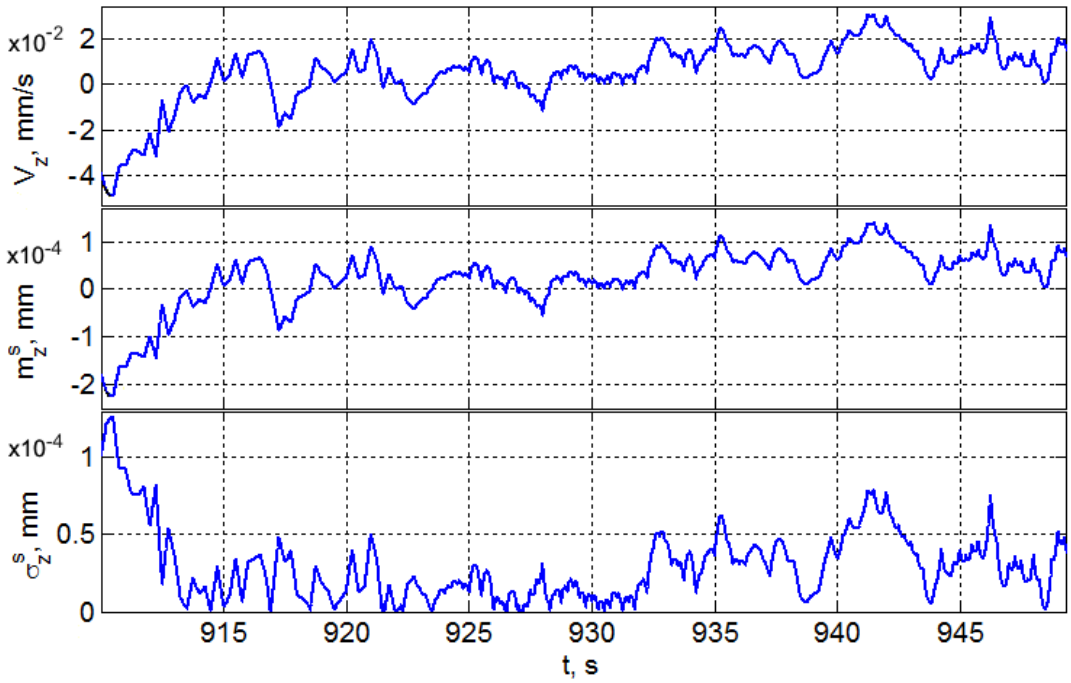

Рис. 9. Характеристики поперечного движения изображения в центре ФП

центре ФП при съемке Москвы при $K = 64$ строках накопления. С целью интегральной оценки таких характеристик на всём интервале сканирующей оптико-электронной съемки удобно использовать их средние значения $\overline{m}_y^s, \overline{m}_z^s$ и $\overline{\sigma}_y^s, \overline{\sigma}_z^s$. Эти характеристики приведены в таб. 1 для столбцов матриц ОЭП, соответствующих центру, левому и правому краям кадра электронного изображения.

Таблица 1

Погрешности стабилизации электронного изображения	$\overline{m}_y^s$, μm	$\overline{m}_z^s$, μm	$\overline{\sigma}_y^s$, μm	$\overline{\sigma}_z^s$, μm
По центру кадра	0.0011	−0.0017	0.0100	0.0140
На левом краю кадра	−0.0040	0.1500	0.0110	0.0930
На правом краю кадра	0.0190	−0.1700	0.0140	0.1010

Согласно этой таблице погрешность стабилизации накапливаемого электронного изображения наиболее проявляется в поперечном направлении на правом краю набора матриц ОЭП, где $\overline{m}_z^s = -0.170\,\mu m$ и $\overline{\sigma}_z^s = 0.101\,\mu m$. Оценка условной СКО $\tilde{\sigma}_z^s$, соответствующей среднему значению такой погрешности, даёт $\tilde{\sigma}_z^s = [(\overline{m}_z^s)^2 + (\overline{\sigma}_z^s)^2]^{1/2} \approx 0.2\ \mu m$. Используя рис. 3, нетрудно убедиться, что реализованная в СУО точность наведения и стабилизации углового движения КА землеобзора гарантирует отсутствие «смаза» получаемого электронного изображения для всего набора матриц оптико-электронных преобразователей.

Заключение. Представлены методы синтеза законов наведения и результаты анализа движения изображения при сканирующей оптико-электронной съемке Земли телескопом на борту КА с цифровой системой управления.

Работа поддержана РФФИ (грант 17-08-01708) и отделением энергетики, механики, машиностроения и процессов управления РАН (программа фундаментальных исследований № 13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сомов Е.И., Бутырин С.А. Алгоритмы наведения и гиросилового управления ориентацией спутников землеобзора при сканирующей оптико-электрон-ной съемке // Сб. трудов научно-технической конференции «Техническое зрение в системах управления 2012». М.: Институт космических исследований РАН. 2012. С. 61-69.

2. Somov S., Butyrin S., Somova T. Optimization of guidance and attitude control for land-survey mini-satellites // AIP Conference Proceedings. 2014. Vol. 1637. P. 1018-1027.

3. Somova T. Vector spline guidance laws and in-flight support of attitude control system for a land-survey satellite // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. 2016. Vol. 7, no. 4. P. 587-597.

4. Somov Ye., Butyrin S., Somov S. Adaptive-robust attitude & orbit control of a small satellite motion // Proceedings of 23 Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. Saint Petersburg. 2016. P. 349-355.

5. Сомова Т.Е. Алгоритмы наведения и цифрового управления ориентацией маневрирующего спутника землеобзора // Известия Самарского научного центра РАН. 2016. Том 18, № 4(6). С. 1173-1180.

ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СПУТНИКОМ ЗЕМЛЕОБЗОРА ПРИ НАЧАЛЬНОЙ ОСТАНОВКЕ ВРАЩЕНИЯ И УДЕРЖАНИИ НА СОЛНЕЧНО-СИНХРОННОЙ ОРБИТЕ

С.Е. Сомов (СамГТУ, Россия, 443100, Самара, Молодогвардейская, 244) E-mail: s_somov@mail.ru

PULSE-WIDTH CONTROL OF A LAND-SURVEY SATELLITE DURIG INITIAL STOP OF THE ROTATION AND STATION-KEEPING ON SUN-SYNCHRONOUS ORBIT

S.Ye. Somov (SamSTU, Russia, 443100, Samara)

Keywords: spacecraft, pulse-width control, stop of rotation, station-keeping

Введение. После отделения спутника в транспортной конфигурации от ракеты-носителя возникает вращение космического аппарата (КА) с вектором угловой скорости произвольного направления. Далее выполняется механическое раскрытие упругой конструкции солнечных батарей (СБ) и после затухания их колебаний спутник продолжает кувыркаться – вращаться с вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ также произвольного направления и модулем до 5 град/с. Первоочередная задача состоит в успокоении (остановке вращения) КА для последующего определения направлений на внешние ориентиры в связанной с корпусом КА системе координат (ССК).

При использовании солнечно-синхронной орбите (ССО) скорость прецессии плоскости этой орбиты равна средней угловой скорости годового движения Земли вокруг Солнца. При решении задач космического землеобзора необходимо обеспечить синхронность прецессии орбитальной плоскости ССО со средним движением Земли вокруг Солнца, стабильность высоты полета и местного солнечного времени на одной и той же широте, а также повторяемость прохождения трассы спутника через смежные районы съемки для полного покрытия заданного района земной поверхности.

В статье рассматриваются вопросы экономичного широтно-импульсного управления КА при начальной остановке его вращения с помощью электрореактивных двигателей (ЭРД) и решается задача синтеза алгоритмов управления 8 ЭРД в составе корректирующей установки (КДУ) при удержании спутника землеобзора на ССО.

Математические модели. Предполагается совпадение положений центра масс КА и полюса О ССК $Oxyz$. На рис. 1 приведена схема спутника землеобзора с четырьмя упругими панелями СБ и указана ССК, а на рис. 2 – схема корректирующей двигательной установки (КДУ). Орты $\mathbf{e}_p$, $p = 1 \div 8$, осей сопел восьми ЭРД имеют в ССК представления в виде столбцов

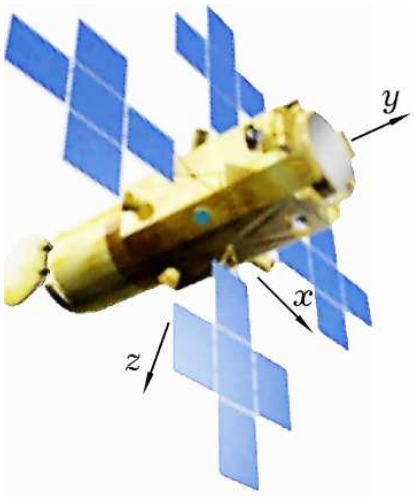

Рис. 1. Схема КА землеобзора

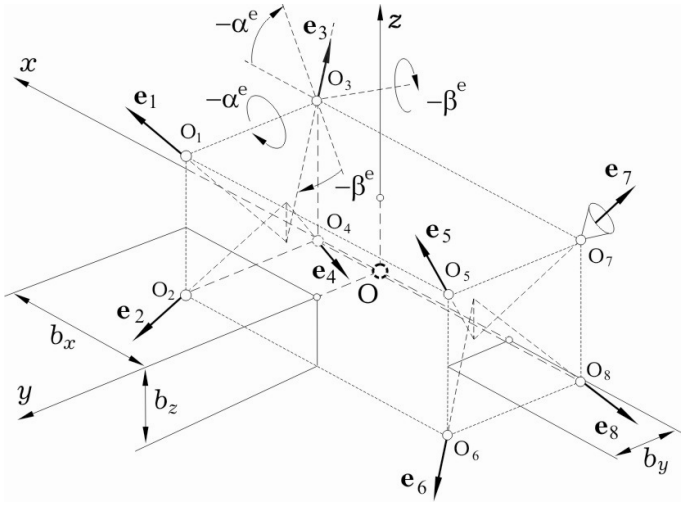

Рис. 2. Схема КДУ на основе 8 ЭРД

$$\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_8 = \begin{bmatrix} C_\alpha C_\beta \\ C_\alpha S_\beta \\ S_\alpha \end{bmatrix};\ \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_7 = \begin{bmatrix} C_\alpha C_\beta \\ C_\alpha S_\beta \\ -S_\alpha \end{bmatrix};\ \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_6 = \begin{bmatrix} C_\alpha C_\beta \\ -C_\alpha S_\beta \\ S_\alpha \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{e}_4 = -\mathbf{e}_5 = \begin{bmatrix} C_\alpha C_\beta \\ -C_\alpha S_\beta \\ -S_\alpha \end{bmatrix},$$

где $S_x = \sin x, C_x = \cos x$, $x = \alpha^{e}, \beta^{e}$. Векторы $\boldsymbol{\rho}_p$, $p = 1 \div 8$, точек O_p приложения вектора тяги ЭРД в ССК (рис. 2) также представляются столбцами

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix};\ \boldsymbol{\rho}_2 = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ -b_z \end{bmatrix};\ \boldsymbol{\rho}_3 = \begin{bmatrix} b_x \\ -b_y \\ b_z \end{bmatrix};\ \boldsymbol{\rho}_4 = \begin{bmatrix} b_x \\ -b_y \\ -b_z \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\rho}_5 = \begin{bmatrix} -b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix};\ \boldsymbol{\rho}_6 = \begin{bmatrix} -b_x \\ b_y \\ -b_z \end{bmatrix};\ \boldsymbol{\rho}_7 = \begin{bmatrix} -b_x \\ -b_y \\ b_z \end{bmatrix};\ \boldsymbol{\rho}_8 = \begin{bmatrix} -b_x \\ -b_y \\ -b_z \end{bmatrix},$$

Каждый ЭРД имеет широтно-импульсную модуляцию (ШИМ) тяги с периодом T_u^{e} и временным запаздыванием T_{zu}^{e}, что описывается нелинейными непрерывно-дискретными соотношениями $p_p(t) = \mathrm{P}^{m}\ \mathrm{PWM}(t - T_{zu}^{e}, t_r, \tau_m, \mathrm{v}_{pr})\ \ \forall t \in [t_r, t_{r+1})$ [1]. Здесь функции

$$\mathrm{PWM}(t, t_r, \tau_m, \mathrm{v}_{pr}) \equiv \begin{cases} \operatorname{sign} \mathrm{v}_{pr} & t \in [t_r, t_r + \tau_{pr}) \\ 0 & t \in [t_r + \tau_{pr}, t_{r+1}) \end{cases};$$

$$\tau_{pr} = \begin{cases} 0 & |\mathrm{v}_{pr}| \le \tau_m \\ \mathrm{sat}(T_u^{\mathrm{e}}, |\mathrm{v}_{pr}|) & |\mathrm{v}_{pr}| > \tau_m \end{cases},$$

$t_r = rT_u^{\mathrm{e}}$, $t_{r+1} = t_r + T_u^{\mathrm{e}}$; $r \in \mathrm{N}_0 \equiv [0,1,2,3...)$, где P^{m} – номинальное значение тяги, одинаковое для всех ЭРД в составе КДУ. В ССК вектор тяги p-го ЭРД вычисляется по формуле $\mathbf{P}_p(t) = -p_p(t)\mathbf{e}_p$, а векторы силы $\mathbf{R}^{\mathrm{e}}$ и момента $\mathbf{M}^{\mathrm{e}}$ КДУ – по соотношениям $\mathbf{R}^{\mathrm{e}} = \Sigma\mathbf{P}_p(t)$ и $\mathbf{M}^{\mathrm{e}} = \Sigma[\boldsymbol{\rho}_p\times]\mathbf{P}_p(t)$. В режиме успокоения КА применяется блок простых гироскопических датчиков угловой скорости при дискретном выходном сигнале $\boldsymbol{\omega}_s \equiv \boldsymbol{\omega}(t_s) = \{\omega_s\}$ с периодом T_q, $t_s = sT_q$, $t_{s+1} = t_s + T_q$, $s \in \mathrm{N}_0$ при наличии шумов и дискретизации по уровню.

Если принять спутник в виде твердого тела и ССК $Oxyz$ с началом в фиксированной точке конструкции – полюсе O, совпадающим с центром масс C спутника, то модель динамики его пространственного движения имеет вид $\mathrm{m}(\mathbf{v}_{\mathrm{o}}^{\bullet} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{\mathrm{o}}) = \mathbf{R}_{\mathrm{o}}$; $\dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K} = \mathbf{M}_{\mathrm{o}}$, где $\mathbf{K} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ – вектор кинетического момента (КМ), а $\mathbf{R}_{\mathrm{o}}$ и $\mathbf{M}_{\mathrm{o}}$ – главные векторы внешних сил и моментов, представленные в ССК. В уравнении поступательного движения остается зависимость от вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в инерциальной системе координат (ИСК).

Постановка задачи. Модель вращательного движения КА с упругими панелями СБ в режиме успокоения представляется в виде

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{D}_q\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M} - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}; \quad \mathbf{D}_q^{\mathrm{t}}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{A}^q\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{A}^q(\mathbf{V}_q\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}_q\mathbf{q}). \qquad (1)$$

где $\mathbf{M} = \mathbf{M}^{\mathrm{e}} = \{\mathrm{M}_i^{\mathrm{e}}\} = \{\mathrm{M}_i\}$ является вектором внешнего управляющего момента, формируемый КДУ на основе 8 ЭРД. Пусть в момент времени $t = 0$ известен вектор $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{o}} = \boldsymbol{\omega}(0)$ произвольного направления с модулем $|\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{o}}| = \omega_{\mathrm{o}} \le \overline{\omega}_{\mathrm{o}}$ при заданном значении $\overline{\omega}_{\mathrm{o}}$. Тогда при известном тензоре инерции $\mathbf{J}$ корпуса КА в этот момент времени известно значение вектора КМ $\mathbf{K}(0) = \mathbf{K}_{\mathrm{o}} \equiv \mathbf{J}\,\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{o}}$ с модулем K_{o}. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ измеряется и затем фильтруется с периодом T_q, вектор момента $\mathbf{M}^{\mathrm{e}} = \mathbf{M}$ КДУ формируется с ШИМ тяги 8 ЭРД с периодом T_u^{e}.

Задача успокоения вращательного движения КА состоит в разработке закона управления $\mathbf{M}^{\mathrm{e}} \equiv \mathbf{M} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\omega})$, который начиная с момента времени T_ω обеспечивает выполнение условия $\boldsymbol{\omega}(t) \in \mathbf{S}_\omega\{\boldsymbol{\omega}(t) : |\boldsymbol{\omega}(t)| \le \Delta_\omega^{\mathrm{o}}\ \forall t \ge T_\omega\}$, где скалярная постоянная величина $\Delta_\omega^{\mathrm{o}}$ определяет размер множества $\mathbf{S}_\omega$.

Удержание КА землеобзора на ССО выполняется за счет эпизодической коррекции его траекторного движения с помощью КДУ при ШИМ тя-

ги 8 ЭРД. Пусть спутник массой $\mathrm{m}=1000$ кг оснащен панелями СБ суммарной площади 50 кв.м и движется по ССО высотой $H = 600$ км и наклонением $i = 97.8$ град. Для времени прохождения восходящего узла 08:00:00 по Гринвичу над земной поверхностью с геодезической долготой $L_\Omega = 90$ град долгота восходящего узда (ДВУ) $\Omega = 331.36$ град. Ставится задача управления КДУ в этом режиме.

Локально-оптимальное непрерывное управление. В классе локально-оптимальных непрерывных законов успокоения КА наиболее популярны [2-4] закон управления с минимальным принуждением и закон управления, оптимальный по быстродействию. При моделировании КА в виде свободного твердого тела из (1) следует модель движения $\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}$, где принято обозначение $\dot{\mathbf{K}} \equiv \mathbf{K}^* = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}$. Для определения структуры вектора непрерывного управляющего момента $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\omega})$ из условия минимума принуждения $\mathrm{M}^2 = \| \mathbf{M} \|^2$ введем функцию Ляпунова $\mathrm{v} = \mathrm{K}^2 = (\mathbf{K}, \mathbf{K})$ и вычислим ее производную в виде [5] $\dot{\mathrm{v}} = 2(\mathbf{K}, \dot{\mathbf{K}}) = 2(\mathbf{K}, \mathbf{M} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}) = 2(\mathbf{K}, \mathbf{M})$. При выборе линейного закона управления $\mathbf{M} = -a\,\mathbf{K} = -a\,\mathrm{K}\,\mathbf{k}$ с ортом $\mathbf{k} = \mathbf{K}/\mathrm{K}$ и постоянным параметром $a > 0$ имеем $\dot{\mathrm{v}} = -2a(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = -2a\mathrm{v}$, прямым интегрированием получается соотношение $\mathrm{v}(t) = \mathrm{v}_\mathrm{o} \exp(-2at)$, где $\mathrm{v}_\mathrm{o} = \mathrm{K}_\mathrm{o}^2 = (\mathbf{K}_\mathrm{o}, \mathbf{K}_\mathrm{o})$ и $\mathbf{K}_\mathrm{o} = \mathbf{J}\,\boldsymbol{\omega}_\mathrm{o}$. Отсюда следуют явные соотношения для оценки изменения во времени модуля вектора КМ $\mathrm{K}(t) = \mathrm{K}_\mathrm{o} \exp(-at)$, вектора кинетического момента $\mathbf{K}(t) = \mathbf{K}_\mathrm{o} \exp(-at)$ и вектора внешнего управляющего момента $\mathbf{M}(t) = -a\,\mathbf{K}_\mathrm{o} \exp(-at)$.

При выборе закона управления в виде $\mathbf{M} = -m\mathbf{K}/\mathrm{K} = -m\,\mathbf{k}$, ограниченного по модулю постоянным параметром $m > 0$, получаются соотношения [5] $\dot{\mathrm{v}} = -2m\,\mathrm{v}/\sqrt{\mathrm{v}} = -2m\sqrt{\mathrm{v}}$, $d\,\mathrm{v}/\sqrt{\mathrm{v}} = -2m\,dt$ и $\mathrm{v}^{1/2}(t) = \mathrm{K}(\mathrm{t}) = \mathrm{K}_\mathrm{o} - m\,t$. Такой закон управления является оптимальным по быстродействию.

Широтно-импульсное управления при успокоении. При формировании команды $\mathbf{M}_r = -a\,\mathbf{K}_r$ для вектора управляющего момента, где $\mathbf{K}_r = \mathbf{K}(t_r)$ и $\boldsymbol{\omega}_r = \boldsymbol{\omega}(t_r)$, на каждом полуинтервале времени $t \in [t_r, t_{r+1})$ с заданным периодом T_u^e сначала определяется вектор потребного постоянного импульса (pulse) управляющего момента по формуле

$$\mathbf{M}_r^p \equiv \int_{t_r}^{t_{r+1}} \mathbf{M}(\tau)\,d\tau = -a \int_{t_r}^{t_{r+1}} \mathbf{K}(\tau)\,d\tau = -\mathbf{K}_r(1 - \exp(-aT_u^e)) \qquad (2)$$

и эта векторная команда поступает на КДУ с ШИМ тяги восьми ЭРД. Естественно возникает вопрос: каким же образом можно создать вектор потребного импульса момента $\mathbf{M}^p(t)$ *произвольного направления* в ССК, если

орты $\mathbf{e}_p$ осей сопел ЭРД фиксированы в ССК и каждый ЭРД может находиться только в двух состояниях – включен (тяга $p_p(t) = \mathrm{P}^{\mathrm{m}}$) либо выключен (тяга $p_p(t) = 0$) ? Именно для решения этой проблемы применяется ШИМ тяги всех 8 ЭРД, что обеспечивает выполнение заданного значения вектора $\mathbf{M}^p(t)$ в моменты времени $t = t_r = r T_u^{\mathrm{e}}$. Для схемы КДУ на рис. 2 орты $\mathbf{r}_p$ векторов $\boldsymbol{\rho}_p$ вычисляются как $\mathbf{r}_p = \boldsymbol{\rho}_p / \rho$, где скаляр $\rho = (b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)^{1/2}$ является единым модулем точек O_p приложения векторов тяги ЭРД в ССК. При обозначениях

$\boldsymbol{\tau}_r = \{\tau_{pr}\}$; $\quad \mathbf{D}^{\mathrm{e}} = \{[\mathbf{e}_p], [\mathbf{r}_p \times \mathbf{e}_p]\}$; $\quad \tilde{\mathbf{r}}^p = \mathbf{R}^p / \mathrm{P}^{\mathrm{m}}$; $\quad \tilde{\mathbf{m}}^p = \mathbf{M}^p / (\mathrm{P}^{\mathrm{m}} \rho)$;

$\mathbf{t}^p = \{\tilde{\mathbf{r}}^p, \tilde{\mathbf{m}}^p\}$, где векторы $\mathbf{R}^p$ и $\mathbf{M}^p$ представляют заданные в ССК *импульсы* векторов сил $\mathbf{R}^{\mathrm{e}} = \mathbf{R}$ и моментов $\mathbf{M}^{\mathrm{e}} = \mathbf{M} \equiv \{\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3\}$ КДУ, принципиальная проблема заключается в решении векторного уравнения $\mathbf{D}^{\mathrm{e}}\, \boldsymbol{\tau}_r = \mathbf{t}^p$, $\boldsymbol{\tau}_r \in R_+^8$, $\mathbf{t}^p \in R^6$ при условии $0 \le \tau_{pr} \le T_u^{\mathrm{e}} \quad \forall p = 1 \div 8$ относительно компонентов вектора-столбца $\boldsymbol{\tau}_r = \{\tau_{pr}\}$, когда прямоугольная матрица $\mathbf{D}^{\mathrm{e}}$ и вектор-столбец $\mathbf{t}^p \in R^6$ заданы.

При использовании псевдообратной матрицы $(\mathbf{D}^{\mathrm{e}})^{\#} \equiv (\mathbf{D}^{\mathrm{e}})^{\mathrm{t}} (\mathbf{D}^{\mathrm{e}} (\mathbf{D}^{\mathrm{e}})^{\mathrm{t}})^{-1}$ разработанный закон распределения длительностей τ_{pr} тяги всех 8 ЭРД на каждом полуинтервале времени $t \in [t_r, t_{r+1})$ ШИМ их тяги с периодом T_u^{e} имеет простую алгоритмическую форму [1,5]:

$$\begin{aligned} &\hat{\boldsymbol{\tau}}_r \equiv \{\hat{\tau}_{pr}\} = (\mathbf{D}^{\mathrm{e}})^{\#} \mathbf{t}^{pg}; \; \tilde{\tau}_{pr} =: \hat{\tau}_{pr} - \min(\hat{\tau}_{pr}), \\ &\textit{if} \quad q \equiv \max(\tilde{\tau}_{pr}) > T_u^{\mathrm{e}} \; \textit{then} \; \tau_{pr} = \tilde{\tau}_{pr} - T_u^{\mathrm{e}} \tilde{\tau}_{pr} / q. \end{aligned} \tag{3}$$

Искомые векторы тяги $\mathbf{R}$ и момента $\mathbf{M}$ КДУ определяются как $\mathbf{R}(t) = \mathrm{P}^{\mathrm{m}} \tilde{\mathbf{r}}(t)$ и $\mathbf{M}(t) = \mathrm{P}^{\mathrm{m}} \rho\, \tilde{\mathbf{m}}(t)$. В задаче успокоения КА потребный импульс вектора сил КДУ $\mathbf{R}^p = \mathbf{0}$, поэтому здесь соблюдается условие $\mathbf{R}(t_r) = \mathrm{P}^{\mathrm{m}} \tilde{\mathbf{r}}(t_r) = \mathbf{0}$.

Непрерывный закон управления $\mathbf{M}(t) = -a\, \mathrm{K}(t)\, \mathbf{k}(t)$ можно представить в виде $\mathbf{M}(t) = -m(t)\, \mathbf{k}(t)$, где скалярная функция $m(t) = a\, \mathrm{K}(t)$. Ограниченность вектора управляющего момента КДУ $\mathbf{M}_k(t)$ (2), который формируется с помощью ШИМ тяги всех 8 ЭРД на полуинтервале времени $t \in [t_r, t_{r+1})$, проявляется в последней строке алгоритма (3). Поэтому для обеспечения экономичности режима успокоения КА по энергопотреблению и расходу топлива КДУ рационально определить такое значение постоянного параметра $a > 0$, при котором сначала реализуется широтно-импульсное управление ЭРД по типу «максимального быстродействия», а

затем следует автоматический переход к широтно-импульсному управлению ЭРД по типу «минимального принуждения».

Компьютерная имитация успокоения спутника. Пусть КА движется по указанной выше ССО и при 4 раскрытых панелях СБ (см. рис. 1) его тензор инерции $\mathbf{J} = \mathrm{diag}\{812; 587; 910\}$ кг м^2. В рамках модели (1) значения парциальных частот первого тона Ω_j^1 и декремента δ упругих колебаний каждой панели СБ таковы: $\Omega_j^1 \approx 0.6$ р/с (частота ≈ 0.1 Гц) и $\delta = 0.01$. Имитация работы КДУ выполнена при конструктивных параметрах $b_x = 1$ м, $b_y = 0.7$ м, $b_z = 0.6$ м, $\alpha^e = \pi/3$, $\beta^e = \pi/6$ (рис. 2), номинальной тяге каждого ЭРД $\mathrm{P}^m = 83$ мН, периоде ШИМ тяги ЭРД $T_u^e = 64$ с, запаздывании $T_{zu}^e = 0.25$ с и минимальной длительности включения $\tau_m = 2$ с. Было принято, что измерение вектора $\boldsymbol{\omega}$ при СКО шума $\sigma_\omega = 0.0033$ град/с и дискретная фильтрация выполняются с периодом $T_q = 1$ с, а процесс успокоения считается завершенным в момент времени T_ω для условия $\boldsymbol{\omega}(t) \in \mathbf{S}_\omega\{\boldsymbol{\omega}(t) : |\boldsymbol{\omega}(t)| \le \Delta_\omega^o \ \forall t \ge T_\omega\}$ при значении $\Delta_\omega^o = 0.05$ град/с.

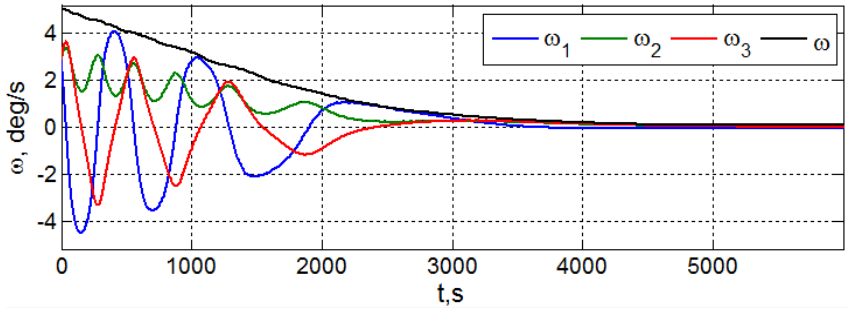

Рис.3. Переходные процессы при успокоении КА

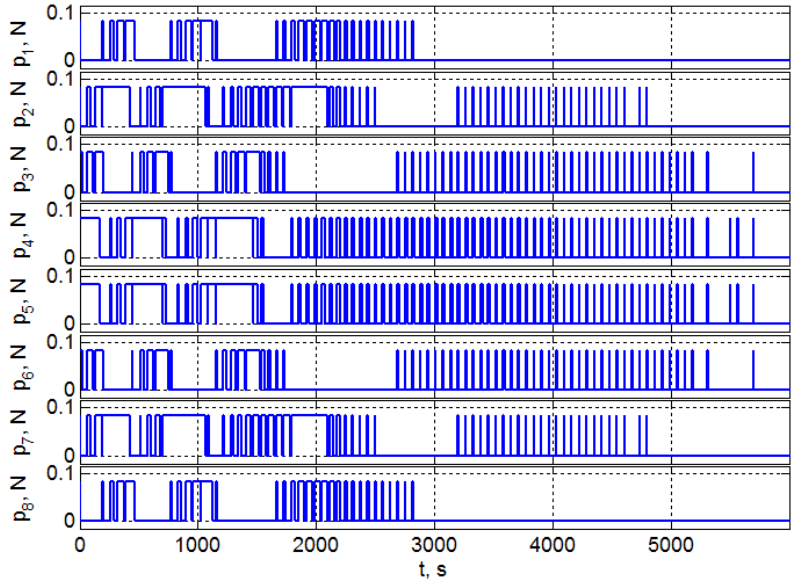

Рис. 4. Временные диаграммы ШИМ тяги ЭРД при успокоении КА

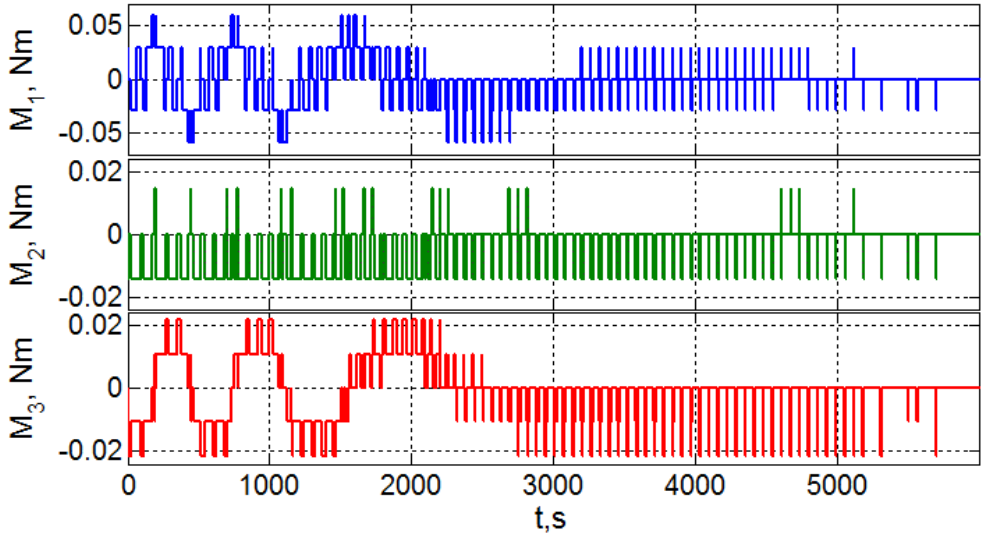

Рис. 5. Изменение моментов КДУ при успокоении КА

Орт вектора начальных условий $\boldsymbol{\omega}_o = \{\omega_{oi}\}, |\boldsymbol{\omega}_o| = 5$ град/с генерировался в произвольном случайном направлении. Далее приводятся результаты для значения вектора начальных условий $\boldsymbol{\omega}_o = \{\omega_{oi}\}$ при $\omega_{oi} = 5/\sqrt{3}$ град/с. В результате выполненных численных исследований был обоснован выбор постоянного параметра $a = 0.0015$, при котором достигается компромисс между быстродействием завершения успокоения КА и экономичностью этого режима по энергопотреблению и расходу топлива КДУ. На рис. 3 представлены переходные процессы при успокоении КА с таким значением параметра a. Здесь начиная с момента времени $t = 2048$ с при значении модуля угловой скорости $\omega = 1.37$ град/с реализуется широтно-импульсное управление КДУ по типу «минимального принуждения». На рис. 4 и 5 приведены временные диаграммы ШИМ тяги всех восьми ЭРД и изменения моментов КДУ на интервале времени выполненной компьютерной имитации. На этих и последующих рисунках синим цветом выделена принадлежность угловых скоростей и управляющих моментов к каналу 1 (крена), зеленым цветом – к каналу 2 (рыскания) и красным цветом – к каналу 3 (тангажа), см. рис. 1, а модуль вектора $\boldsymbol{\omega}(t)$ выделен черным цветом.

Широтно-импульсное управления при коррекции орбиты. Будем считать, что при выполнении коррекции орбиты спутник имеет фиксированную ориентацию в ОСК (углы крена $\gamma = -10$ град, рыскания $\psi = 3$ град и тангажа $\theta = 8$ град) и коэффициент его лобового сопротивления $c_x = 2.5$ при учете аэродинамических сил. Солнце находится с одной стороны плоскости ССО – угол между направлением на Солнце и плоскостью орбиты равен -28.11 град, силы аэродинамического сопротивления

при указанной фиксированной ориентации ССК в ОСК имеют несимметричный характер. В силу такой несимметричности притяжение Солнца и давление солнечного излучения приводит к вариациям положения орбитальной плоскости ССО (наклонения i и ДВУ Ω), а силы аэродинамического сопротивления монотонно изменяют форму этой орбиты (фокальный параметр и эксцентриситет). Поэтому было выполнено численное исследование влияния всех внешних возмущающих сил (без включения КДУ) для рассматриваемого спутника на ССО с указанными параметрами. При этом влияние гравитационного поля Земли учитывалось 8 компонентами аналитического представления его потенциальной функции. Для используемых данных КА и ССО наибольшее влияние оказывают сопротивление земной атмосферы, гравитация Солнца и силы солнечного давления. При этом суточное изменение радиус-вектора ССО равно 28 м, за 10 суток полета уменьшение высоты орбиты составит более 280 м. Удержание КА на ССО может быть достигнуто только за счет эпизодической коррекции траектории спутника, в рассматриваемом случае с помощью КДУ на основе ЭРД. В отличие от КДУ с реактивными двигателями большой тяги, здесь коррекция орбитальных параметров выполняется на длительных временных интервалах и поэтому возможно аналитическое определение корректирующих силовых воздействий. При этом в ССК определяется вектор-функция $\mathbf{R}^p(t)$ потребного *импульса* (pulse) вектора корректирующей силы, которая должна быть реализована КДУ на основе ЭРД.

Для одновременной компенсации монотонного уменьшения высоты орбиты и поддержания её наклонения предложено [6,7] при каждой орбитальной коррекции выполнять два сеанса включения КДУ в окрестности восходящего и нисходящего узлов ССО, а для коррекции ДВО орбиты – только один сеанс включения КДУ в окрестности точки ССО с орбитальной долготой 90 град. В случае рассматриваемой ССО выполненное численное исследование показало, что при коррекции такой орбиты по высоте и наклонению требуется в плоскости $x^{\circ}Oz^{\circ}$ орбитальной системы координат (ОСК) создать вектор $\mathbf{R}^p = \{\mathrm{R}_i^p\}$ импульса силы с модулем $\mathrm{R}^p = 56$ Нс на каждом из двух сеансов включения КДУ длительностью 416 с при 13 периодах $T_u^{\mathrm{e}} = 32$ с широтно-импульсного управления. Такие коррекции ССО должны выполняться с периодичностью 10 суток, причем в окрестности восходящего узла орбиты вектор силы должен направляться под углом -47 град относительно оси $+Ox^{\circ}$ ОСК, а в окрестности нисходящего узла орбиты – под углом $+47$ град относительно этой же оси. Для ежегодной коррекции ДВО требуется создавать вектор силы только по оси $+Oz^{\circ}$ ОСК при длительности включения КДУ не более 384 с.

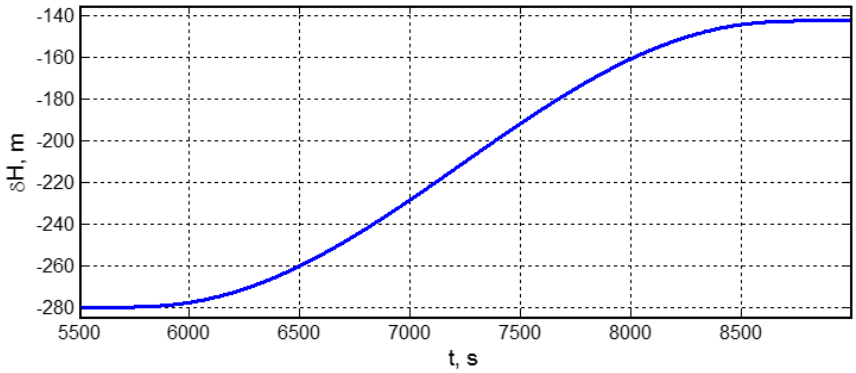

Рис. 6. Вариация высоты ССО при 2 сеансах орбитальной коррекции

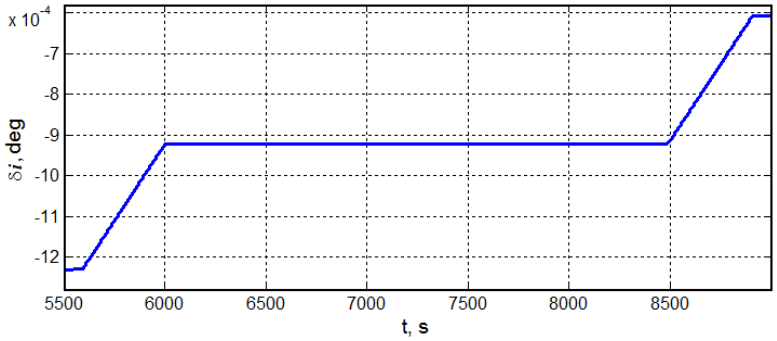

Рис. 7. Вариация наклонения ССО при 2 сеансах орбитальной коррекции

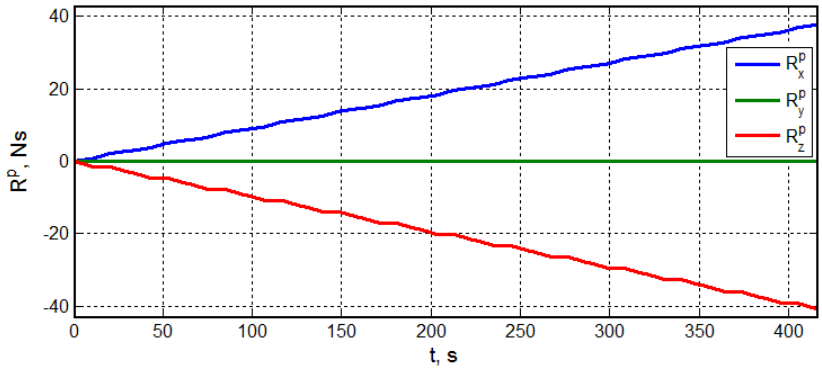

Рис. 8. Вариация импульса вектора силы КДУ на одном сеансе коррекции

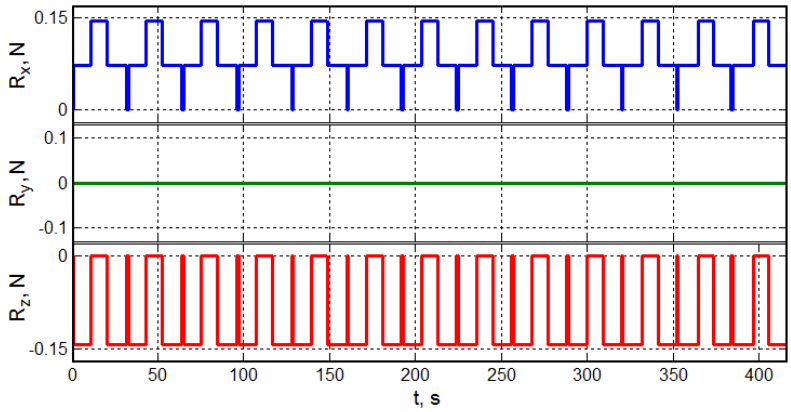

Рис. 9. Вариации ШИМ вектора силы КДУ на одном сеансе коррекции

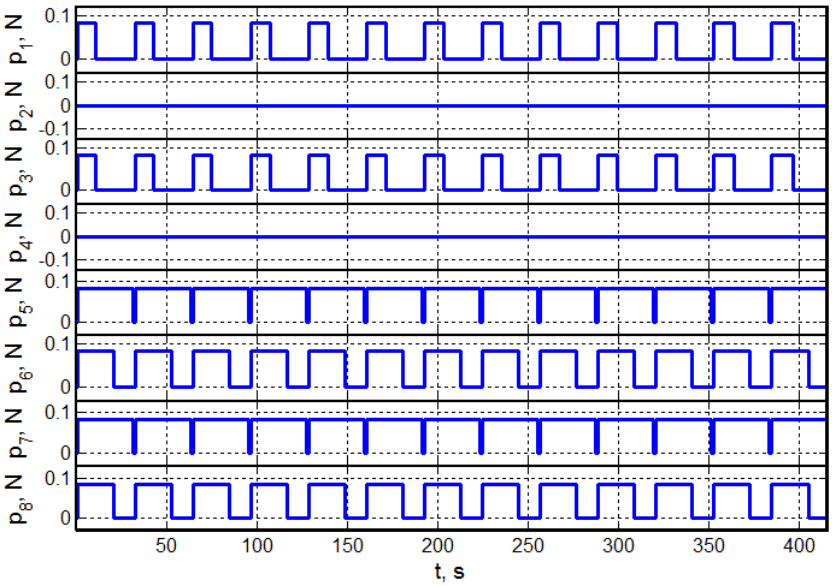

Рис. 10. Вариации ШИМ тяги восьми ЭРД на одном сеансе коррекции

На рис. 6 и 7 представлены вариации корректируемой ССО по высоте $\delta H(t)$ и наклонению $\delta i(t)$ относительно их номинальных значений при выполнении двух сеансов работы КДУ на временном интервале $t \in [5500,9000]$ с начиная момента времени $t = 5593$ с. На рис. 8, 9 и 10 приведены временные диаграммы вариаций компонентов векторов импульса и тяги КДУ, а также результаты ШИМ тяги каждого из 8 ЭРД при выполнении одного сеанса коррекции.

Заключение. Представлены алгоритмы широтно-импульсного управления ЭРД в режиме успокоения упругого спутника и приведены результаты исследования разработанных алгоритмов. Предложена и исследована схема экономичного управления, основанная на сочетании алгоритмов управления КДУ на основе восьми ЭРД по типам «максимального быстродействия» и «минимального принуждения». Кратко описан метод удержания спутника землеобзора на солнечно-синхронной орбите высотой 600 км, где существенно проявляется влияние сопротивления земной атмосферы. Созданы алгоритмы широтно-импульсного управления ЭРД в составе корректирующей двигательной установки и приведены результаты апробации разработанных алгоритмов.

Работа поддержана РФФИ (грант 17-08-01708) и отделением ЭММПУ РАН (программа фундаментальных исследований № 13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сомов С.Е. Экономичное широтно-импульсное управление при разгрузке силового гирокомплекса системы ориентации мини-спутника // Проблемы управления. 2014. № 4. С. 60-68.

2. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.И. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.

3. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987.

4. Фурасов В.Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. М.: Наука, 1977.

5. Сомов С.Е. Экономичное широтно-импульсное управление электрореактивными двигателями при торможении вращения упругого космического аппарата // Известия Самарского научного центра РАН. 2016. Том 18. № 4(6). С. 1138-1144.

6. Сомов С.Е. Широтно-импульсное управление электрореактивными двигателями при коррекции орбитального движения спутника // Известия Самарского научного центра РАН. 2015. Том 17. № 6(3). С. 713-720.

7. Somov S. Pulse-width control of electro-reaction engines for a station-keeping of land-survey satellite on sun-synchronous orbit // AIP Conference Proceedings. 2017. Vol. 1798. P. 020151(1-8).

ВЕКТОРНЫЕ СПЛАЙНОВЫЕ ЗАКОНЫ НАВЕДЕНИЯ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ПОЛЕТНОЙ ПОДДЕРЖКИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ СПУТНИКА ЗЕМЛЕОБЗОРА

Т.Е. Сомова (СамГТУ, Россия, 443100, Самара, Молодогвардейская, 244) E-mail: te_somova@mail.ru

VECTOR SPLINE GUIDANCE LAWS AND COMPUTER TECHNOLOGY FOR IN-FLIGHT SUPPORT OF A LAND-SURVEY SATELLITE ATTITUDE CONTROL SYSTEM

T.Ye. Somova (SamSTU, Russia, 443100, Samara)

Keywords: a land-survey spacecraft, guidance law, control system

Введение. В системах управления ориентацией (СУО) спутников землеобзора массой до 1000 кг применяются электромеханические приводы в виде кластера реактивных двигателей-маховиков (ДМ) с разгрузкой накопленного кинетического момента (КМ) магнитным приводом (МП). Минимально-избыточная схема *General Electric* (*GE*), рис. 1, обладает возможностью управлять ориентацией космического аппарата (КА) при отказе любого одного маховика.

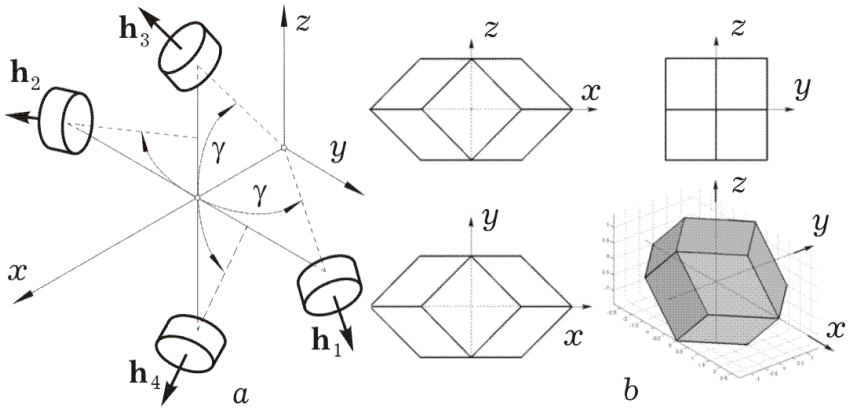

Рис. 1. Схема GE (a) and оболочка ее КМ (b)

В исследуемой СУО применяются астроинерциальная система определения углового положения (СОУП) и цифровое управление как кластером ДМ, так и МП. В [1] приведены разработанные методы синтеза законов углового наведения КА землеобзора при выполнении произвольного маршрута сканирующей съемки и технология представления таких законов на основе интерполяции расчетных данных векторной функцией модифицированных параметров Родрига (МПР). В данной работе рассматриваются вопросы синтеза алгоритмов векторных сплайновых законов наведения и

алгоритмов цифрового управления ориентаций спутника землеобзора при выполнении последовательности маршрутов сканирующей съемки и поворотных маневров (ПМ) КА с краевыми условиями общего вида и кратко представляется компьютерная технология для полетной поддержки системы управления ориентацией КА с применением анимации пространственного движения спутника.

Математические модели. В системе координат $Oxyz$, связанной с корпусом КА (ССК), оси вращения четырёх ДМ по схеме *GE*, рис. 1, располагаются на поверхности конуса с углом полу-раствора γ. Далее используются стандартные обозначения $\mathrm{col}(\cdot)=\{\cdot\}$, $\mathrm{line}(\cdot)=[\cdot]$, $(\cdot)^{\mathrm{t}}$, $[\mathbf{a}\times]$ и $\circ,\tilde{}$ для векторов, матриц и кватернионов, а также $C_\gamma \equiv \cos\gamma$ и $S_\gamma \equiv \sin\gamma$. Вводятся орбитальная система координат (ОСК $Ox^{\mathrm{o}}y^{\mathrm{o}}z^{\mathrm{o}}$), кватернион $\mathbf{\Lambda}^{\mathrm{o}}$ и углы ориентации ССК относительно ОСК по крену ϕ_1, рысканию ϕ_2 и тангажу ϕ_3, которые используются в последовательности 312 при индексах осей $i=1,2,3\equiv\ 1\div 3\equiv x,y,z$. Кватернион ориентации КА в инерциальной системе координат (ИСК) представляется как $\mathbf{\Lambda}=\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{o}}\circ\mathbf{\Lambda}^{\mathrm{o}}$, где $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{o}}$ – кватернион ориентации ОСК в ИСК. Модель углового движения КА учитывает упругость его конструкции и имеет вид

$$\dot{\mathbf{\Lambda}}=\mathbf{\Lambda}\circ\boldsymbol{\omega}/2\,;\quad \mathbf{A}^{\mathrm{o}}\{\dot{\boldsymbol{\omega}},\ddot{\mathbf{q}},\dot{\mathbf{\Omega}}\}=\{\mathbf{F}^{\omega},\mathbf{F}^{\mathrm{q}},\mathbf{F}^{\Omega}\}, \tag{1}$$

$$\mathbf{F}^{\omega}=-[\boldsymbol{\omega}\times]\mathbf{G}+\mathbf{M}^{\mathrm{m}}+\mathbf{M}^{\mathrm{d}};\quad \mathbf{F}^{\mathrm{q}}=-\mathbf{A}^{q}(\mathbf{V}_q\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{W}_q\mathbf{q});\quad \mathbf{F}^{\Omega}=\mathbf{M}-\mathbf{M}^{\mathrm{f}};$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{o}}=\begin{bmatrix}\mathbf{J} & \mathbf{D}_q & \mathbf{A}_\gamma\\ \mathbf{D}_q^{\mathrm{t}} & \mathbf{A}^{q} & \mathbf{0}\\ J_r\mathbf{A}_\gamma^{\mathrm{t}} & \mathbf{0} & J_r\mathbf{I}_4\end{bmatrix};\quad \mathbf{A}_\gamma=\begin{bmatrix}C_\gamma & C_\gamma & C_\gamma & C_\gamma\\ S_\gamma & -S_\gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & S_\gamma & -S_\gamma\end{bmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{G}=\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}+\mathbf{H}$ является вектором суммарного кинетического момента (КМ) электромеханической системы, столбцы $\mathbf{H}=\{\mathsf{H}_i\}$ и $\mathbf{h}=\{\mathsf{h}_p=J_r\Omega_p\}$, $p=1\div 4$, представляют КМ кластера и отдельных ДМ, причем $\mathbf{H}=\mathbf{A}_\gamma\,\mathbf{h}$; $\mathbf{A}^{q}=\mathrm{diag}\{\mu_j\}$; $\mathbf{V}_q=\mathrm{diag}\{\frac{\delta}{\pi}\Omega_j^s\}$; $\mathbf{W}_q=\mathrm{diag}\{(\Omega_j^s)^2\}$; $\mathbf{M}^{\mathrm{m}}=\{m_i^{\mathrm{m}}\}$; $\mathbf{M}=\{m_p\}$; $\mathbf{M}^{\mathrm{f}}=\{m_p^{\mathrm{f}}\}$; вектор механического момента МП $\mathbf{M}^{\mathrm{m}}=\{m_i^{\mathrm{m}}\}=-\mathbf{L}\times\mathbf{B}$, где вектор электромагнитного момента $\mathbf{L}=\{l_i\}$ с ограниченными компонентами $|l_i|\le \mathrm{l}^{\mathrm{m}}$ и вектор индукции магнитного поля Земли $\mathbf{B}=\mathbf{b}\,\mathrm{B}$ с ортом $\mathbf{b}$ определены в ССК; векторы-столбцы $\mathbf{M}=\{m_p\}$ и $\mathbf{M}^{\mathrm{f}}=\{m_p^{\mathrm{f}}\}$ представляют управляющие моменты и моменты сил сухого трения по осям вращения ДМ, а вектор $\mathbf{M}^{\mathrm{d}}$ – внешние возмущающие моменты. Ресурсы каждого ДМ по управляющему и кинетическому моментам ограничены, $|m_p(t)|\le \mathrm{m}^{\mathrm{m}}$, $|\mathsf{h}_p(t)|\le \mathrm{h}^{\mathrm{m}}$, $p=1\div 4$.

Вектор $\mathbf{M}^{\mathrm{r}}$ управляющего момента кластера ДМ формируется в виде $\mathbf{M}^{\mathrm{r}} = -\mathbf{H}^{*}$, где $(\cdot)^{*}$ – символ локальной производной по времени. При простейшем моделировании корпуса КА с закрепленным телескопом в виде свободного твердого тела с тензором инерции $\mathbf{J}$ вектор его КМ $\mathbf{G} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H} \equiv \mathbf{G}_0$, где $\mathbf{G}_0$ является постоянным вектором. Пусть СУО спутника сбалансирована по вектору КМ с условием $\mathbf{G}_0 \equiv \mathbf{0}$. При этом модель динамики углового движения КА принимает вид $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\varepsilon}$ с вектором углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{M}^{\mathrm{r}}$, а модель углового движения КА – кинематическое представление

$$\dot{\boldsymbol{\Lambda}}(t) = \boldsymbol{\Lambda}(t) \circ \boldsymbol{\omega}(t)/2; \qquad \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t); \qquad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}^{*}(t) = \mathbf{v}. \qquad (2)$$

Модули векторов $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^{*}(t)$ ограничены, $|\boldsymbol{\omega}(t)| \le \overline{\omega}$, $|\boldsymbol{\varepsilon}(t)| \le \overline{\varepsilon}$ и $|\boldsymbol{\varepsilon}^{*}(t)| \le \overline{\varepsilon}^{*}$, что обусловлено ограниченностью областей вариации векторов КМ $\mathbf{H}$ и управляющего момента $\mathbf{M}^{\mathrm{r}} = -\mathbf{H}^{*}$ кластера ДМ, а также допустимым темпом его изменения. Далее применяется вектор МПР $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_i\} = \mathbf{e}\,\mathrm{tg}(\Phi/4)$ с традиционными обозначениями орта Эйлера $\mathbf{e}$ и угла Φ собственного поворота. Вектор $\boldsymbol{\sigma}$ однозначно связан с кватернионом $\boldsymbol{\Lambda}$ прямыми $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\lambda}/(1+\lambda_0)$ и обратными $\lambda_0 = (1-\sigma^2)/(1+\sigma^2)$, $\boldsymbol{\lambda} = 2\boldsymbol{\sigma}/(1+\sigma^2)$ соотношениями. Пусть дискретное измерение кватерниона ориентации $\boldsymbol{\Lambda}_l^m = \boldsymbol{\Lambda}^m(t_l)$ КА с помощью СОУП выполняется с периодом T_p, где $\boldsymbol{\Lambda}^m(t_l) = \boldsymbol{\Lambda}(t_l) \circ \boldsymbol{\Lambda}_l^n$, кватернион $\boldsymbol{\Lambda}_l^n = \boldsymbol{\Lambda}^n(t_l)$ представляет центрированный гауссовский шум, $t_{l+1} = t_l + T_p$, $l \in N_0 \equiv [0,1,2,...)$, а дискретное измерение угловых скоростей вращения ДМ $\boldsymbol{\Omega}_{ps} = \boldsymbol{\Omega}_p(t_s)$ – в моменты времени t_s с периодом T_q, $t_{s+1} = t_s + T_q$, $s \in N_0$. Будем считать, что в моменты времени t_k с периодом T_u, $t_{k+1} = t_k + T_u$, $k \in N_0$ формируется цифровое управление ДМ, а в моменты времени t_r с периодом $T_u^m >> T_u$, $t_{r+1} = t_r + T_u^m$, $r \in N_0$ – цифровое управление магнитным приводом.

Постановка задачи. Как отмечено выше, для выполнения произвольных маршрутов сканирующей съемки разработаны алгоритмы наведения в виде набора гладко сопряженных векторных сплайнов МПР $\boldsymbol{\sigma}(t)$ 7-го порядка [1,2]. Тогда при наличии двух смежных временных интервалов сканирующей съемки с уже известными краевыми условиями по кватерниону $\boldsymbol{\Lambda}$, векторам $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$, а также по вектору $\boldsymbol{\varepsilon}^{*}$ в момент времени начала второго маршрута, возникает задача ПМ спутника. Пространственные поворотные маневры КА землеобзора на интервале времени $t \in \mathrm{T_p} \equiv [t_{\mathrm{i}}^p, t_{\mathrm{f}}^p]$, $t_{\mathrm{f}}^p \equiv t_{\mathrm{i}}^p + T_p$ с краевыми условиями

$$\boldsymbol{\Lambda}(t_{\mathrm{i}}^p) = \boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{i}}; \boldsymbol{\omega}(t_{\mathrm{i}}^p) = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{i}}; \boldsymbol{\varepsilon}(t_{\mathrm{i}}^p) = \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}}; \boldsymbol{\Lambda}(t_{\mathrm{f}}^p) = \boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{f}}; \boldsymbol{\omega}(t_{\mathrm{f}}^p) = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{f}}; \boldsymbol{\varepsilon}(t_{\mathrm{f}}^p) = \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{f}}; \boldsymbol{\varepsilon}^{*}(t_{\mathrm{f}}^p) = \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{f}}^{*}. \quad (3)$$

при ограничениях на модули векторов $\boldsymbol{\omega}(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ не являются единственными, поэтому ставится первая задача – синтез закона наведения КА при ПМ с использованием только аналитических соотношений.

Момент сил сухого трения скачком изменяет свое значение при смене направления вращения каждого ДМ, что приводит к проблеме обеспечения требуемой точности стабилизации движения КА в процессе сканирующей съемки. Вторая задача состоит в синтезе алгоритмов дискретной фильтрации, цифрового управления кластером ДМ с идентификацией и компенсацией моментов сил сухого трения по осям их вращения. Для полетной идентификации таких моментов используется дискретный наблюдатель Луенбергера и полученная дискретная оценка применяется для компенсации влияния момента сил сухого трения при формировании цифрового управления ДМ.

Третья задача заключается в синтезе алгоритмов цифрового управления МП при разгрузке кластера ДМ. Здесь используется компенсационная схема, где векторные командные сигналы посылаются одновременно как на кластер ДМ, так и на МП, причем эти сигналы равны по *импульсу* момента МП на периоде цифрового управления ДМ, но имеют противоположные знаки.

Наконец, четверная задача состоит в кратком представлении компьютерной технологии для полетной поддержки системы управления ориентацией КА с применением анимации пространственного движения спутника.

Законы наведения при поворотных маневрах. При модели углового движения КА (2) и указанных ограничениях на модули векторов $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^*(t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ разработанный [3] аналитический метод синтез закона наведения КА при ПМ на интервале времени $t \in \mathrm{T_p} \equiv [t_\mathrm{i}^p, t_\mathrm{f}^p]$ с краевыми условиями (3) основывается на необходимом и достаточном условии разрешимости задачи Дарбу. Здесь решение представляется как результат сложения трех одновременно происходящих элементарных поворотов «вложенных» базисов $\mathbf{E}_k$ вокруг ортов $\mathbf{e}_k$, $k = 1 \div 3$ осей Эйлера, положение которых определяется по краевым условиям (3) модели (2). При этом искомый кватернион $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ определяется произведением $\boldsymbol{\Lambda}(t) = \boldsymbol{\Lambda}_\mathrm{i} \circ \boldsymbol{\Lambda}_1(t) \circ \boldsymbol{\Lambda}_2(t) \circ \boldsymbol{\Lambda}_3(t)$, где $\boldsymbol{\Lambda}_k(t) \equiv (\cos(\varphi_k(t)/2), \mathbf{e}_k \sin(\varphi_k(t)/2))$, функ-ция $\varphi_k(t)$ определяет угол k-го поворота. В силу неподвижности орта $\mathbf{e}_k$ в базисе $\mathbf{E}_{k-1}$ имеем $\boldsymbol{\omega}_k(t) = \dot{\varphi}_k(t)\mathbf{e}_k$, $\boldsymbol{\varepsilon}_k(t) = \ddot{\varphi}_k(t)\mathbf{e}_k$, $\boldsymbol{\varepsilon}_k^*(t) \equiv \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k(t) = \dddot{\varphi}_k(t)\mathbf{e}_k$. Введем обозначения $\boldsymbol{\omega}^{(k)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(k)}, k = 1 \div 3$ векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ в базисе $\mathbf{E}_k$, оператор $\mathbf{a}_{k-1}^{(k)} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{a}_{k-1}, \boldsymbol{\Lambda}_k) \equiv \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_k \circ \mathbf{a}_{k-1} \circ \boldsymbol{\Lambda}_k$ преобразования вектора $\mathbf{a}_{k-1}$ из базиса $\mathbf{E}_{k-1}$ в базис $\mathbf{E}_k$ и назначим

$\boldsymbol{\omega}_1(t)=\dot{\varphi}_1(t)\mathbf{e}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_1(t)=\ddot{\varphi}_1(t)\mathbf{e}_1$ и $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1(t)=\dddot{\varphi}_1(t)\mathbf{e}_1$. Векторы угловой скорости, углового ускорения и локальной производной ускорения в ССК определяются значениями этих же векторов в базисе $\mathbf{E}_3$, которые формируются по рекуррентным формулам, $k=2,3$:

$$\boldsymbol{\omega}_{k-1}^{(k)}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\omega}_{k-1},\boldsymbol{\Lambda}_k);\quad \boldsymbol{\varepsilon}_{k-1}^{(k)}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\varepsilon}_{k-1},\boldsymbol{\Lambda}_k);\quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k-1}^{(k)}=\boldsymbol{\Phi}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k-1},\boldsymbol{\Lambda}_k);\quad \boldsymbol{\omega}^{(k)}=\boldsymbol{\omega}_{k-1}^{(k)}+\boldsymbol{\omega}_k;$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}=\boldsymbol{\varepsilon}_{k-1}^{(k)}+\boldsymbol{\varepsilon}_{\kappa}+\boldsymbol{\omega}_{k-1}^{(k)}\times\boldsymbol{\omega}_k;\quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(k)}=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k-1}^{(k)}+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k+\boldsymbol{\omega}_{k-1}^{(k)}\times\boldsymbol{\varepsilon}_k+(2\boldsymbol{\varepsilon}_{k-1}^{(k)}+\boldsymbol{\omega}_{k-1}^{(k)}\times\boldsymbol{\omega}_k)\times\boldsymbol{\omega}_k.$$

В результате при назначении набора скалярных сплайнов $\varphi_k(t)$ по явным аналитическим соотношениям получаются векторные функции $\boldsymbol{\omega}(t)=\boldsymbol{\omega}^{(3)}(t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(t)=\boldsymbol{\varepsilon}^{(3)}(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(3)}(t)$.

По кватерниону $\boldsymbol{\Lambda}^*\equiv(\lambda_0^*,\boldsymbol{\lambda}^*)=\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{\mathrm{i}}\circ\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{f}}$ назначим орт $\mathbf{e}_3=\boldsymbol{\lambda}^*/\sin(\varphi^*/2)$ третьего поворота, где угол $\varphi^*=2\arccos(\lambda_0^*)$. Для 1-го и 2-го поворотов краевые условия принимаются в виде $\boldsymbol{\Lambda}_1(t_{\mathrm{i}}^p)=\boldsymbol{\Lambda}_1(t_{\mathrm{f}}^p)=\mathbf{1}$ и $\boldsymbol{\Lambda}_2(t_{\mathrm{i}}^p)=\boldsymbol{\Lambda}_2(t_{\mathrm{f}}^p)=\mathbf{1}$, а для 3-го поворота – как $\boldsymbol{\Lambda}_3(t_{\mathrm{i}}^p)=\mathbf{1}$, $\boldsymbol{\Lambda}_3(t_{\mathrm{f}}^p)=(\cos(\varphi_3^{\mathrm{f}}/2),\mathbf{e}_3\sin(\varphi_3^{\mathrm{f}}/2))$, где $\varphi_3^{\mathrm{f}}=\varphi^*$ и $\mathbf{1}$ – единичный кватернион. Это соответствует значениям углов $\varphi_1^{\mathrm{i}}=\varphi_1^{\mathrm{f}}=0$ и $\varphi_2^{\mathrm{i}}=\varphi_2^{\mathrm{f}}=0$. Орт $\mathbf{e}_1$ оси Эйлера 1-го поворота назначается из условия его ортогональности орту $\mathbf{e}_3$, а орт $\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1$. Векторы $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)\equiv\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ представляются в аналитическом виде при задании сплайнов $\varphi_k(t)$ различных порядков с использованием в общем случае трех участков заданного интервала ПМ [3]:

1) участок разгона с оптимизацией по быстродействию при ограничениях, где КА из условий на левом конце ПМ переводится на движение с вектором угловой скорости по орту $\mathbf{e}_3$;

2) участок движения с постоянным вектором угловой скорости по орту $\mathbf{e}_3$;

3) завершающий участок движения КА с гарантированным выполнением заданных краевых условий на правом конце ПМ при использовании сплайнов шестого порядка. При этом все параметры скалярных сплайнов $\varphi_k(t)$ вычисляются по явным аналитическим соотношениям.

Законы наведения для последовательности маршрутов. Пусть для КА землеобзора на солнечно-синхронной орбите (ССО) высотой 720 км имеется задание на съемку окрестностей российских столиц (рис. 2) в такой последовательности временных интервалов при отсчете времени от момента прохождения восходящего узла орбиты: ориентация КА в ОСК $\forall t\in[0,870)$ с; ПМ1 длительностью 40 с $\forall t\in[870,910)$ с; маршрут М1 съемки с выравниванием продольной СДИ длительностью 40 с $\forall t\in[910,950)$ с при начальной точке в гринвичской системе координат с

долготой $L = 37.8$ град, широтой $B = 54.3$ град и геодезическим азимутом $A = -12$ град; ПМ2 длительностью 55 с $\forall t \in [950,1005)$ с; маршрут М2 трассовой съемки длительностью 15 с $\forall t \in [1005,1020)$ с начальными значениями углов крена $\phi_1 = 8$ град и тангажа $\phi_3 = 0$. На рис. 3 представлен синтезированный закон наведения КА в ИСК для выполнения указанного задания, здесь цветами выделены компоненты векторов $\boldsymbol{\sigma}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ – синим цветом по крену, зеленым по рысканию и красным по тангажу, а модули векторов $\boldsymbol{\omega}(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ отмечены черным цветом.

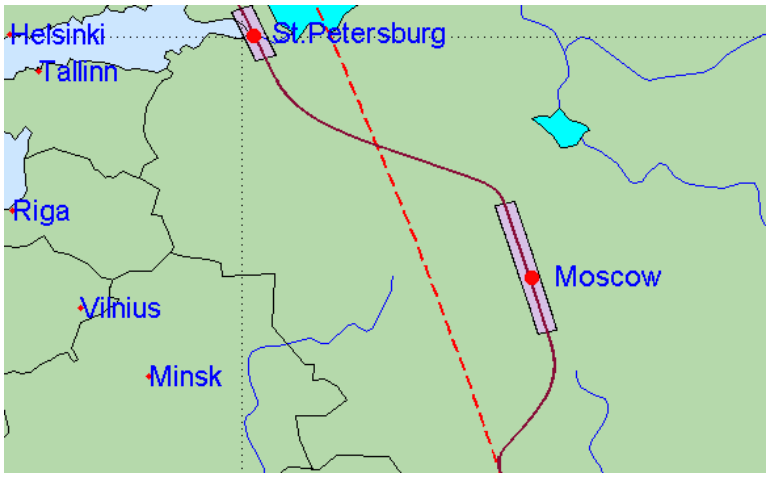

Рис. 2. Маршруты съемки российских столиц на карте

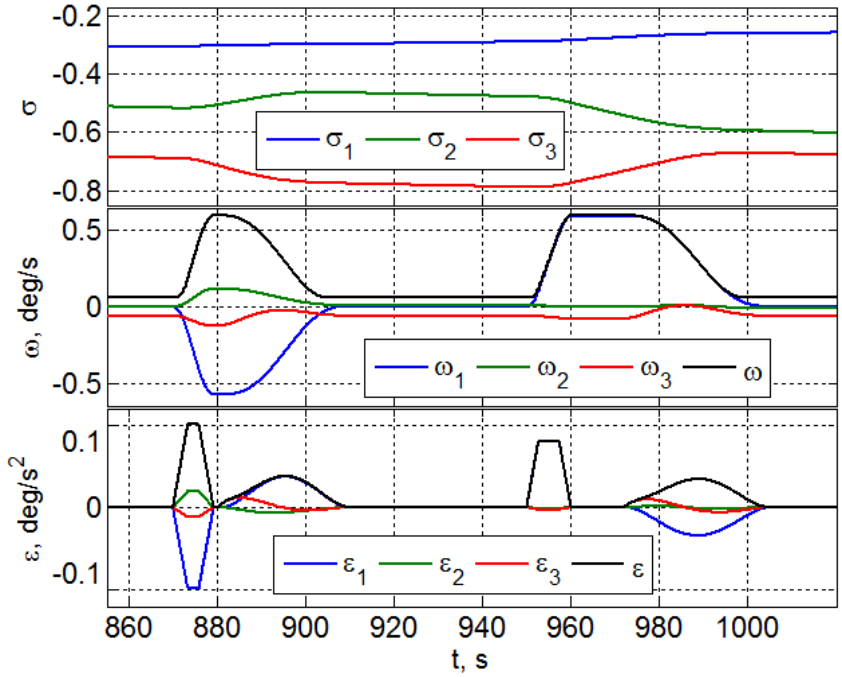

Рис. 3. Векторный сплайновый закон наведения

Управление кластером ДМ. Для кластера четырех ДМ принципиальная проблема заключается в распределении векторов его кинетического

$\mathbf{H}$ и управляющего $\mathbf{M}^{\mathrm{r}} = -\mathbf{H}^{*}$. При некоторых упрощениях эта проблема состоит в одновременном решении двух уравнений

$$\mathbf{A}_{\gamma}\,\mathbf{h} = \mathbf{H} \quad \forall\, \mathbf{H} \in \mathbf{R}^{3}, \mathbf{h} \in \mathbf{R}^{4}; \quad \mathbf{A}_{\gamma}\mathbf{M} = -\mathbf{M}^{\mathrm{r}} = \mathbf{H}^{*}; \ \forall\, \mathbf{M}^{\mathrm{r}} \in \mathbf{R}^{3}, \mathbf{M} \in \mathbf{R}^{4}. \qquad (4)$$

Используемый подход к разрешению уравнений (4) основан на применении скалярной функции настройки кластера и позволяет однозначно распределять векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{M}^{\mathrm{r}} = -\mathbf{H}^{*}$ между 4 ДМ по явным аналитическим соотношениям. Введем нормированный вектор КМ кластера $\boldsymbol{h} \equiv \{x, y, z\} = \mathbf{H}/\mathrm{h}^{\mathrm{m}} = \mathbf{A}_{\gamma}\,\mathbf{h}$, где $x = x_1 + x_2$, $x_1 = C_{\gamma}(h_1 + h_2)$, $x_2 = C_{\gamma}(h_3 + h_4)$; $\mathbf{h} = \{h_p\}$, $h_p = \mathrm{h}_p / \mathrm{h}^{\mathrm{m}}$ и $|\,h_p\,| \le 1$. Распределение вектора $\boldsymbol{h}$ выполняется по закону $f_{\rho}(\boldsymbol{h}) = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 + \rho(\tilde{x}_1\tilde{x}_2 - 1) = 0$, где $\tilde{x}_1 = x_1 / q_y; \tilde{x}_2 = x_2 / q_z$, $q_s = (4C_{\gamma}^2 - s^2)^{1/2}$, $s = y,z$, при $q \equiv q_y + q_z$; $0 < \rho < 1$:

(i) $\Delta \equiv (q/\rho)(1 - (1 - 4\rho[(q_y - q_z)(x/2) + \rho(q_y q_z - (x/2)^2)]/q^2)^{1/2})$; $x_1 = (x + \Delta)/2$, $x_2 = (x - \Delta)/2$; (ii) распределение КМ между ДМ в каждой паре по очевидным формулам; (iii) $\mathbf{M} = \{m_p\} = (\{\mathbf{A}, \mathbf{a}^{\mathrm{f}}\})^{-1}\{-\mathbf{M}^{\mathrm{r}}, -\mathrm{h}^{\mathrm{m}}\,\mathrm{sat}(\phi_{\rho}, \mu_{\rho} f_{\rho})\}$, где параметры $\phi_{\rho}, \mu_{\rho} > 0$ и компоненты строки $\mathbf{a}^{\mathrm{f}} = [a_p^{\mathrm{f}}]$ имеют явный вид

$$a_{1,2}^{\mathrm{f}} = 2C_{\gamma}[2C_{\gamma}^2 \pm S_{\gamma}^2 h_2(h_1 - h_2)][1 + \rho C_{\gamma}(h_3 + h_4)/q_z]/q_y^3;$$
$$a_{3,4}^{\mathrm{f}} = 2C_{\gamma}[2C_{\gamma}^2 \mp S_{\gamma}^2 h_4(h_3 - h_4)][1 + \rho C_{\gamma}(h_1 + h_2)/q_y]/q_z^3.$$

Идентификация момента сил сухого трения. Для простоты рассмотрим только один ДМ, индекс p не используется. Модель движения ДМ представляется в нормированном виде $\dot{\Omega}(t) = a(t) - a^{\mathrm{f}}(t)$, где управляющее ускорение $a(t) = m(t)/J_r$, ускорение $a^{\mathrm{f}}(t) = a_{\mathrm{o}}^{\mathrm{f}}\,\mathrm{sgn}(\Omega(t)) \in [-a_{\mathrm{o}}^{\mathrm{f}}, a_{\mathrm{o}}^{\mathrm{f}}]$ отражает влияние момента сил сухого трения и при моменте инерции ДМ J_r параметр $a_{\mathrm{o}}^{\mathrm{f}} = m_{\mathrm{o}}^{\mathrm{f}} / J_r = \mathrm{const}$. В предположении $a^{\mathrm{f}}(t) = a^{\mathrm{f}}(t_s) = a_s^{\mathrm{f}} = \mathrm{const} \ \ \forall t \in [t_s, t_{s+1})$ для получения оценки $\hat{a}_s^{\mathrm{f}}$ значения a_s^{f} применяется дискретный идентификатор Луенбергера $\hat{\Omega}_{s+1} = \hat{\Omega}_s + (a_s - \hat{a}_s^{\mathrm{f}})\,T_s + g_1^{\mathrm{f}}\,\delta\Omega_s; \hat{a}_{s+1}^{\mathrm{f}} = \hat{a}_s^{\mathrm{f}} + g_2^{\mathrm{f}}\,\delta\Omega_s; \delta\Omega_{s+1} = \Omega_{s+1} - \hat{\Omega}_{s+1}$ с периодом T_q, где постоянные параметры g_1^{f} и g_2^{f} определяются по явным аналитическим соотношениям. Дискретная оценка момента сил сухого трения получается в виде $\hat{m}^{\mathrm{f}}(t_s) = \hat{m}_s^{\mathrm{f}} = J_r\,\hat{a}_s^{\mathrm{f}}$.

Цифровое управление магнитным приводом. Компенсационная схема разгрузки кластера ДМ основана на следующих положениях. Вычисляются модуль I^{m} и орт $\mathbf{e}^{\mathrm{m}}$ вектора потребного *импульса* механического момента МП в ССК, назначается его вариация $\Delta\mathrm{I}^{\mathrm{m}}$ на периоде T_u^m циф-

рового управления МП и рассчитывается постоянная команда $\mathbf{M}_k^{\mathrm{cu}} = \{m_{ik}^{\mathrm{cu}}\} = (\Delta \mathrm{I}^{\mathrm{m}} / T_u^m)\mathbf{e}^{\mathrm{m}}$ *компенсации* импульса механического момента МП, которая периодом цифрового управления T_u поступает на кластер ДМ.

В моменты времени t_r, $r \in \mathrm{N}_0$ вычисляется орт $\mathbf{b}_r = \mathbf{B}_r / B_r$ и определяется взаимная ориентация ортов $\mathbf{b}_r$ и $\mathbf{e}_r^{\mathrm{m}}$ в ССК; если $|(\mathbf{b}_{\mathrm{r}}, \mathbf{e}_r^{\mathrm{m}})| > \cos(\pi/3)$, то на очередном периоде дискретности МП не включается, иначе вычисляются вектор $\mathbf{L} = \{l_i\} = -(\Delta \mathrm{I}^{\mathrm{m}} / T_u^m)(\mathbf{b}_r \times \mathbf{e}_r^{\mathrm{m}}) / B_r$ потребного электромагнитного момента МП на этом шаге цифрового управления МП с периодом T_u^m.

Цифровое управление ориентацией спутника. Пусть задано программное движение КА $\mathbf{\Lambda}^p(t), \boldsymbol{\omega}^p(t), \dot{\boldsymbol{\omega}}^p(t)$ в ИСК. Кватерниону рассогласования $\mathbf{E} = (e_0, \mathbf{e}) = \tilde{\mathbf{\Lambda}}^p \circ \mathbf{\Lambda}$ с вектором $\mathbf{e} = \{e_i\}$ соответствует вектор параметров Эйлера $\boldsymbol{E} = \{e_0, \mathbf{e}\}$, матрица погрешности $\mathbf{C}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{E}) = \mathbf{I}_3 - 2[\mathbf{e}\times]\mathbf{Q}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}}$, где $\mathbf{Q}_{\mathrm{e}} = \mathbf{I}_3 e_0 + [\mathbf{e}\times]$ и вектор погрешности ориентации $\delta\boldsymbol{\phi} = \{\delta\phi_i\} = \{2e_0 e_i\}$. Вектор рассогласования по угловым скоростям вычисляется по формуле $\delta\boldsymbol{\omega} = \{\delta\omega_i\} = \boldsymbol{\omega} - \mathbf{C}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{E})\boldsymbol{\omega}^p(t)$.

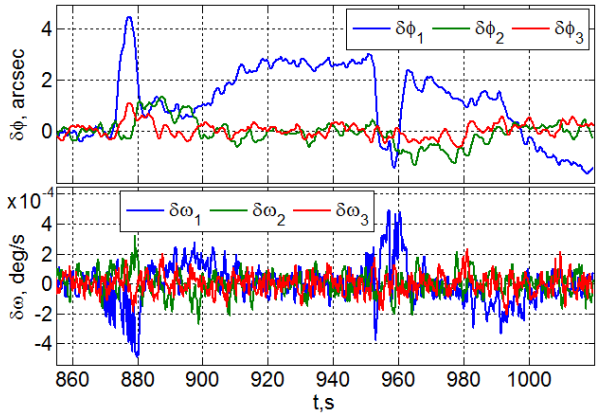

Рис. 4. Погрешности стабилизации КА по углам и угловым скоростям

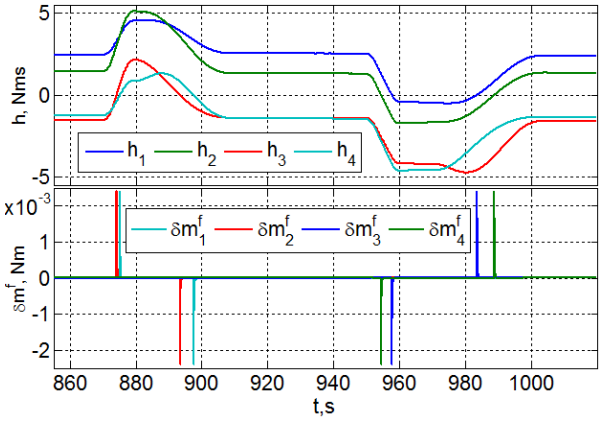

Рис. 5. Вариации КМ ДМ и погрешности идентификации моментов трения

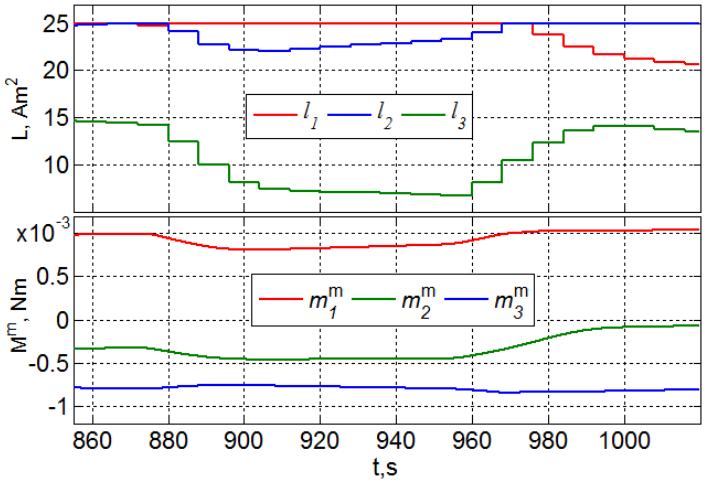

Рис. 6. Векторы электромагнитного и механического моментов МП

Выполняется фильтрация значений вектора углового рассогласования с периодом T_p и используя разработанный закон управления кластером ДМ [4] формируются команды цифрового управления каждым ДМ. При этом вектор $\mathbf{M}_k^{\mathrm{r}} + \mathbf{M}_k^{\mathrm{cu}}$ с помощью описанного выше явного закона распределения КМ между 4 ДМ «пересчитывается» в вектор-столбец $\mathbf{M}_k = \{m_{pk}\}$ управляющих моментов ДМ, которые при добавлении к ним компенсации $\hat{m}_k^{\mathrm{f}}$ влияния моментов сил сухого трения фиксируются на полуинтервале цифрового управления каждого ДМ с периодом T_u.

Результаты имитации. Для компьютерной имитации работы СУО при выполнении задания на съемку российских столиц применялись периоды дискретности $T_q = 1/32\,\mathrm{c}$; $T_p = 1/8\,\mathrm{c}$; $T_u = 1/4\,\mathrm{c}$ и $T_u^m = 8$ с. Пусть при $t_* = 820$ с имеется вектор накопленного КМ кластера ДМ $\mathbf{H}(t_*) = \{2.5, 0.4, 0.8\}$ Нмс и в этот момент времени начинается разгрузка кластера с помощью цифрового управления МП при $\mathrm{l}^{\mathrm{m}} = 25$ Ам^2. При погрешностях СОУП с СКО $\sigma^{\mathrm{m}} = 1$ угл. сек, дискретной фильтрации вектора рассогласования и цифровом управлении кластером ДМ с периодом $T_u = 0.25$ с ошибки стабилизации углового движения КА представлены на рис. 4. На рис. 5 приведены изменения КМ двигателей-маховиков и ошибки $\delta m_p^{\mathrm{f}} = m_p^{\mathrm{f}} - \hat{m}_p^{\mathrm{f}}$ идентификации моментов сил сухого трения по осям их вращения. Нетрудно убедиться, что кратковременные ошибки в оценке моментов сил сухого трения практически не проявляются в рассогласованиях по углам и угловым скоростям движения спутника в процессе выполнения им заданного закона углового наведения. Векторы электромагнитного и механического момента МП приведены на рис. 6. В целом рис. 4 демонстрирует эффективность применения компенсационной схемы одно-

временного цифрового управления кластером ДМ и магнитным приводом для его разгрузки.

Технология полетной поддержки СУО. Для повышения надежности и живучести СУО спутника землеобзора при отказах бортовых приборов в наземном центре управления полетом (ЦУП) обеспечивается её полетная поддержка. Для операторов ЦУП важная проблема состоит в восприятии фактической ориентации спутника относительно направлений на объекты внешней космической обстановки (на Солнце, Землю, Луну и др.) при возникновении аварийной ситуации в работе СУО, когда ее ресурсы не позволяют выполнить автоматическую диагностику и восстановление работоспособности с помощью реконфигурации контура управления. Компьютерные средства анимации позволяют исключить эту проблему: на двух соседних мониторах одновременно отображаются пространственные движения спутника с одинаковыми значениями параметров и начальных условиях – на первом мониторе по фактической телеметрической информации, а на втором – по результатам компьютерной имитации движения КА с одинаковыми значениями параметров, начальных условий и вариантами возможных отказов бортовых приборов в контуре управления. Векторные сплайновые законы наведения спутника позволяет существенно упростить анимацию его пространственного движения. Разработанная программа визуализации [4,5] использует векторные сплайны и позволяет изменять масштаб изображения, временной темп анимации и перспективу наблюдения сцены пространственного движения спутника. На рис. 7 представлен кадр анимации движения КА землеобзора – взгляд с высоты 750 км над северным полюсом Земли.

Рис. 7. Кадр анимации движения спутника землеобзора

Заключение. Приведено решение задачи аналитического синтеза векторных сплайновых законов наведения КА землеобзора при выполнении им последовательности маршрутов сканирующей съемки и пространствен-

ных поворотных манёвров между ними с краевыми условиями общего вида.

Разработаны алгоритмы цифрового управления кластером ДМ с идентификацией и компенсацией моментов сил сухого трения по осям их вращения. Для полетной идентификации таких моментов используется дискретный наблюдатель Луенбергера и полученная дискретная оценка применяется для компенсации влияния момента сил сухого трения при формировании цифрового управления ДМ.

Созданы алгоритмы цифрового управления магнитным приводом при разгрузке кластера ДМ от накопленного кинетического момента. Здесь использована компенсационная схема – векторные командные сигналы посылаются одновременно как на кластер ДМ, так и на МП, причем эти сигналы равны по импульсу механического момента магнитного привода на периоде цифрового управления ДМ, но имеют противоположные знаки.

Приведены результаты компьютерной имитации работы СУО спутника землеобзора на ССО высотой 720 км при одновременном цифровом управлении магнитным приводом в процессе разгрузки кластера ДМ от накопленного кинетического момента.

Кратко представлена компьютерная технология для полетной поддержки СУО КА с использованием векторных сплайнов и применением анимации пространственного движения спутника.

Работа поддержана РФФИ (грант 17-08-01708) и отделением ЭММПУ РАН (программа фундаментальных исследований № 13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сомова Т.Е. Векторное полиномиальное представление законов наведения и анимация движения спутника землеобзора // Известия Самарского научного центра РАН. 2015. Том 17, № 6(3). С. 726-733.

2. Somova T. Attitude guidance and control, simulation and animation of a land-survey mini-satellite motion // Journal of Aeronautics and Space Technologies. 2016. Vol. 9, no. 2. P. 35-45.

3. Somov Ye., Butyrin S., Somova T. Synthesis of the vector spline guidance laws for a land-survey satellite at scanning observation and rotational maneuvers // Proceedings of International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems”. Moscow. 2016. P. 1-4.

4. Somova T. Digital and pulse-width attitude control, imitation and animation of land-survey mini-satellite // Proceedings of 7th IEEE/AIAA International Conference on Recent Advances in Space Technologies. Istanbul. 2015. P. 765 -770.

5. Сомова Т.Е. Применение имитации и анимации для полетной поддержки систем управления информационных спутников // Проблемы управления. 2014. № 5. С. 70-78.

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТРАНСПОРТИРОВКЕ ВЯЗКОЙ СЛАБОСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПО ТРУБОПРОВОДУ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Н.В. Сорокина (СПбПУ Петра Великого, Россия, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая, 29)
e-mail: snv_special@inbox.ru

NUMERICALLY-ANALYTICAL SOLUTION OF THE TRANSPORTATION PROBLEM FOR THE VISCOUS WEAKLY COMPRESSIBLE LIQUID, MOVING THROUGH THE PIPELINE WITH NON-STATIONARY BOUNDARY CONDITIONS

N.V. Sorokina (Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая, 29)
e-mail: snv_special@inbox.ru

Keywords: Weakly compressible liquid, pipeline, non-stationary hydrodynamics, navier-stokes equations

1. Введение

Физические и химические свойства жидкостей, транспортируемых по трубопроводным сетям, во многом определяют проектные и рабочие параметры трубопроводов. В нефтяной отрасли трубопроводы служат для перекачивания широкого спектра углеводородов и их смесей, сильно отличающихся по химическим и физическим свойствам: продукты нефтепереработки (бензин, авиационное топливо, керосин, дизельное топливо, мазут и др.), нефтехимическое сырье (бензол, стирол, пропилен и т.д.), ароматические углеводороды (ксилол, толуол, кумол и т.д.), сжиженное нефтяное топливо (сжиженный природный газ, сжиженный нефтяной газ) и т.п.

Информация о физических свойствах жидкостей и газов учитывается как при выборе вида математической модели, так и при определении коэффициентов (параметров) соответствующих элементов этой модели. Изменяясь, эти параметры могут влиять на характер течения.

Ранее нами было исследовано влияние переменной динамической вязкости, зависящей от малого параметра, на скорость жидкости в трубопроводе [1]. В настоящей работе рассматривается случай, когда плотность жидкости не является постоянной; например углеводороды, вообще говоря, являются слабосжимаемыми жидкостями, чья плотность зависит от давления и температуры [2]. Будем считать, что плотность меняется со временем по известному закону. Также, будем учитывать нестационарные условия на концах трубы (через изменяющееся заданным образом давление).

2. Постановка задачи

Задача состоит в том, чтобы получить уравнение движения вязкой сжимаемой жидкости по цилиндричеbской трубе с нестационарными граничными условиями. За основу возьмём систему уравнений динамики вязкой жидкости. [3]:

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{v} = 0, \\ \rho\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{F} + \dfrac{\partial\vec{\tau}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial\vec{\tau}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial\vec{\tau}_z}{\partial z}, \end{cases} \tag{1}$$

– уравнение неразрывности и уравнение движения. Здесь $\vec{v}$ – скорость, ρ – плотность, $\vec{F}$ – массовые силы, $\vec{\tau}_x$, $\vec{\tau}_y$, $\vec{\tau}_z$ – векторы, соответствующие строкам матрицы тензора напряжений [3].

Будем рассматривать течение вдоль горизонтальной оси трубы (ось z), пренебрегая массовыми силами ($\vec{F} = 0$). Исходя из этих предположений, перепишем систему (1) следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} + \rho\dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \\ \rho\left(\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + v_z\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial\vec{\tau}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial\vec{\tau}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial\vec{\tau}_z}{\partial z}. \end{cases} \tag{1′}$$

Спроецируем второе уравнение системы (1′) на оси соответствующей декартовой системы координат, и, с учетом сделанных выше предположений, получим следующие выражения:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 v_z}{\partial z\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 v_z}{\partial y\partial z} = \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \lambda\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2},$$

где $p = p(t,z)$ – давление, λ – коэффициент объёмной вязкости, μ – коэффициент динамической вязкости. Первые два уравнения дают следующее:

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{\partial v_z}{\partial z} = p + F_1(y,z,t), \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial v_z}{\partial z} = p + F_2(x,z,t). \end{cases}$$

Отсюда следует, что $F_1(y,z,t) = F_2(x,z,t) = F(z,t)$, и, в результате:

$$p=(\lambda+\mu)\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}-F(z,t). \qquad (2)$$

Из уравнения неразрывности можно выразить производную скорости по z:

$$\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}; \qquad (3)$$

тогда

$$\rho\frac{\partial \upsilon_z}{\partial t}-\upsilon_z\frac{d\rho}{dt}=\mu\left(\frac{\partial^2\upsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\upsilon_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\upsilon_z}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial z}+\lambda\frac{\partial^2\upsilon_z}{\partial z^2}. \qquad (4)$$

Поскольку мы в самом начале указали, что плотность жидкости меняется лишь со временем, то $\frac{\partial^2\upsilon_z}{\partial z^2}=0$ (согласно уравнению (3)).

Из (2) получаем для $\frac{\partial p}{\partial z}$:

$$\frac{\partial p}{\partial z}=(\lambda+\mu)\frac{\partial^2\upsilon_z}{\partial z^2}-\frac{\partial F(z,t)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{\partial F(z,t)}{\partial z}.$$

Следовательно, изменение давления по длине трубопровода описывается некоторой функцией $f(t,z)=-\frac{\partial F(z,t)}{\partial z}$.

Переходя к цилиндрической системе координат в уравнении (4) и учитывая последние полученные соотношения, запишем уравнение для определения скорости течения вязкой сжимаемой жидкости в трубопроводе:

$$\frac{\partial \upsilon_z}{\partial t}=\nu(t)\frac{\partial^2\upsilon_z}{\partial r^2}+\frac{\nu(t)}{r}\frac{\partial \upsilon_z}{\partial r}+\frac{1}{\rho(t)}\frac{d\rho(t)}{dt}\upsilon_z+\frac{1}{\rho(t)}f(z,t), \qquad (5)$$

где $t\in[0,T]$, $r\in[0,R]$. Для уравнения (5) ставится начально-краевая задача: найти функцию $\upsilon_z(t,r,z)$, которая являлась бы решение уравнения (5), в начальный момент времени обращалась в заданную функцию $\upsilon_z(0,r,z)=\varphi(r,z)$ (другими словами, начальное распределение), и во все моменты времени удовлетворяла граничному условию $\upsilon_z(t,R,z)=0$. Если нам необходимо обеспечить заданные значения скорости $\upsilon_z(t,r,0)$ и $\upsilon_z(t,r,L)$ на входе и выходе трубопровода соответственно, то функция $f(t,z)$ будет определена уже в процессе решения на основе этих требований. Однако, для простоты, в данной работе будем считать, что функция $f(t,z)$ нам известна.

3. Решение

Уравнение (5) представляет собой неоднородное уравнение теплопроводности с переменными коэффициентами. Если привести все соотношения к безразмерному виду [1,4], то получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} + a(\tau)u + \gamma(\tau,\chi), \qquad (5')$$

где $\tau \in \left[0,\overline{T}\right]$, $\eta \in [0,N]$, $a(\tau) = \dfrac{1}{\rho(\tau)}\dfrac{d\rho}{d\tau}$. Такое уравнение решать удобнее, т.к. присутствует лишь один переменный коэффициент.

Будем считать, что плотность слабо меняется со временем. Разобьём временной отрезок $\left[0,\overline{T}\right]$ на h небольших интервалов, на каждом из которых можно будет считать плотность, а, следовательно, и коэффициент $a(\tau)$ постоянными. Тогда мы получим h уравнений вида (5′), решение каждого из которых имеет вид:

$$u^i(\tau,\eta,\chi) =$$

$$= e^{a_i\tau}\left[\int_0^N G_1(\tau,\xi,\eta)\psi^i(\xi,\chi)\,d\xi + \int_{\tau^i_{min}}^{\tau}\int_0^N G_2(\tau-s,\xi,\eta)\gamma^i(s,\chi)\,d\xi ds\right], \qquad (6)$$

где

$$G_1(\tau,\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\xi}{N^2 J_1^2(\mu_n)} e^{-\frac{\mu_n^2}{N^2}\left(\tau-\tau^i_{min}\right)} J_0\left(\frac{\mu_n}{N}\xi\right) J_0\left(\frac{\mu_n}{N}\eta\right),$$

$$G_2(\tau-s,\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\xi}{N^2 J_1^2(\mu_n)} e^{-\frac{\mu_n^2}{N^2}(\tau-s)} J_0\left(\frac{\mu_n}{N}\xi\right) J_0\left(\frac{\mu_n}{N}\eta\right),$$

$$\psi^i(\xi,\chi) = \frac{d}{\nu} e^{-a_i\tau^i_{min}}\varphi^i(\xi,\chi), \qquad \gamma^i(s,\chi) = \frac{d^3}{\nu^2}\frac{f^i(s,\chi)}{\rho_m}.$$

В качестве примера построим полученное решение для случая, когда скорость не зависит от z. Примем в качестве начального распределения скоростей распределение Пуазейля [3], зададим линейный закон изменения плотности, и линейное изменение давления на конце трубопровода:

$$\rho(t) = \frac{a}{T}t + \rho_0, \qquad (7)$$

$$p(t,z) = \left(-\frac{z}{L}+1\right)p_H + \frac{z}{L}\left(\frac{p_k - p_0}{T}t + p_0\right). \qquad (8)$$

Мы уделяем особое внимание транспортировке нефтепродуктов, а плотность нефти может меняться в пределах $730-940\ \frac{кг}{м^3}$ [5]; в качестве начального значения плотности примем $\rho_0 = 830\ \frac{кг}{м^3}$.

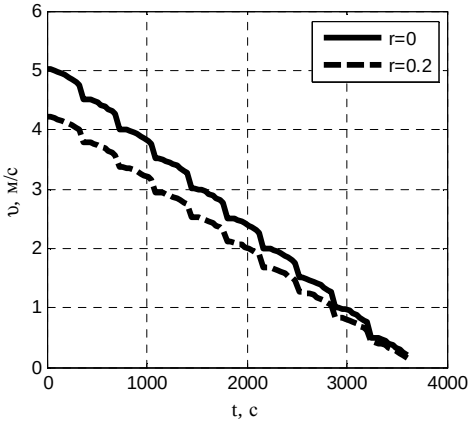

Рис. 8. Зависимость скорости жидкости от времени на разных расстояниях от оси трубы

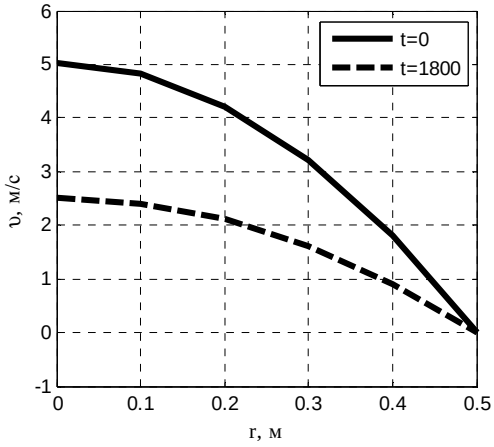

Рис. 9. Зависимость скорости жидкости от радиальной координаты в разные моменты времени

Чтобы оценить, как сильно влияет меняющаяся во времени плотность на скорость и характер течения, построим графики $\upsilon_z(t,0)$: один для $\rho = 830\ \frac{кг}{м^3}$, второй для случая изменения плотности в соответствии с уравнением (7) (рис.3).

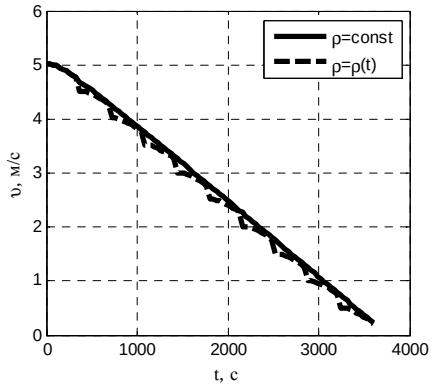

Рис. 10. Зависимость скорости течения на оси трубы от времени

4. Выводы

В работе решена задача о движении вязкой слабосжимаемой жидкости по горизонтальной трубе круглого сечения при нестационарных краевых условиях. Плотность слабо меняется со временем, а нестационарность

диктуется постановкой граничных условий на концах трубы. Было получено численно-аналитическое решение, описываемое уравнением (6). Сравнение полученного решение с решением для случая постоянной плотности (рис.3) позволяет говорить, что если плотность жидкости меняется слабо, то это не оказывает существенного влияния на скорость и характер течения.

Полученные результаты позволят в дальнейшем, решить задачу оптимизации управления потоками вязких слабосжимаемых жидкостей по трубопроводным системам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sorokina N. The solution of the problem of one-parameter perturbation of the viscous incompressible liquid motion through straight round pipe/ Sorokina N// Machines. Technologies. Materials. – 2016. – Issue 4/2016. – P.20-22

2. Давидсон В.Е. Основы гидрогазодинамики в приемрах и задачах: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 320 с.

3. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1973, 296 с.

4. Сорокина Н., Фирсов А. Задача о движении вязкой несжимаемой жидкости по цилиндрической трубе круглого сечения с нестационарными краевыми условиями. В кн. III international scientific and technical conference “Technics. Technologies. Education. Safety”: Proceedings, Vol.2. Велико Тырново, Болгария, 28-29 мая 2015, С.9-10.

5. Физические величины: Справочник / И.С. Григорьев, Е.З. Мейлихов. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.

ОРГАНИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ БЕСПИЛОТНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ: ДВУХУРОВНЕВЫЙ ПРИНЦИП

Н.Р. Суркин (КНИТУ-КАИ, Россия, 420111, Казань, К.Маркса, 10) E-mail: tm@tm.kstu-kai.ru

ORGANIZATION OF CONTROL OF THE MOTION OF UNMANNED TRANSPORTATION MEANS: THE TWO-LEVEL PRINCIPLE

N.R. Surkin (KNRTU-KAI, 420111, Kazan, K.Marx str., 10)

Keywords: control of the motion, unmanned transportation means, basic structure (state).

Рассматриваются вопросы управления группой беспилотных транспортных средств (БТС). Предлагается рассматривать БТС как совокупность двух модулей - управляемой транспортной платформы и полезной нагрузки. Все многообразие пространственного положения БТС предлагается свести к четырем базовым структурам (состояниям).

Развитие элементной базы, средств электронно-вычислительной техники, теории и алгоритмов управления, базового и прикладного программного обеспечения привело к появлению в начале XXI века широкого спектра аппаратов различного прикладного назначения, способных решать поставленные задачи без непосредственного включения человека в контур управления ими. В ряде случаев включение человека в контур управления может быть ограниченным. Аппараты такого типа, способные осуществлять управляемое движение в одной или нескольких средах (космическом пространстве, атмосфере, планетарной поверхности, толще жидкости), в дальнейшем будем именовать беспилотными транспортными средствами (БТС).

БТС целесообразно представить в виде двух модулей – управляемой транспортной платформы (УТП) и полезной нагрузки (ПН).

УТП предназначена для обеспечения передвижения в избранной среде и доставки ПН в заданную в рамках поставленной целевой задачи (ЦЗ) область пространства.

ПН представляет собой комплекс средств, предназначенный для непосредственного решения ЦЗ.

Далее рассмотрим задачи управления УТП, возникающие при движении БТС в атмосфере и по планетарной поверхности.

Общий вид траектории движения УТП формируется в соответствии с ЦЗ и закладывается на ее борт либо в виде программы перед началом выполнения задания, либо в телеоператорном режиме непосредственно в процессе движения. При формировании общего вида траектории движения

УТП не проводится детализация условий ее движения, как то наличие неподвижных и подвижных препятствий, неоднородности и возмущений среды передвижения и т.п. Уточнение конкретных условий движения УТП при выполнении ЦЗ осуществляется ее бортовыми средствами и учитывается при формировании алгоритма управления движением. Таким образом, реальная траектория движения УТП в некоторые моменты времени может значительно отличаться от общего вида траектории. Как следствие задача формирования алгоритма управления движением УТП не является задачей стабилизации в классическом понимании.

Исходя из изложенного, предлагается двухуровневый принцип организации управления движением УТП. Верхний уровень предполагает предварительное формирование программы движения УТП из условия выполнения ЦЗ или телеоператорное управление в реальном масштабе времени из тех же условий. В обоих случаях состояние среды движения предполагается номинальным, а общая характеристика возможных помех – известной. На нижнем уровне система управления УТП самостоятельно формирует алгоритм движения на основе заданной верхним уровнем генеральной траектории и результатов обследования состояния среды движения.

В настоящее время появилась возможность создавать конструкции УТП достаточно малых размеров, которые могут автономно перемещаться в пространстве, выполнять поставленные перед ними задачи и иметь при этом небольшую стоимость. Это позволяет вместо одного большого БТС использовать несколько малоразмерных недорогих БТС, которые, взаимодействуя между собой, способны выполнять ту же ЦЗ, что и большое БТС. При этом применение группы взаимодействующих малоразмерных БТС имеет ряд преимуществ по сравнению с использованием одного большого БТС:

1. Меньшая уязвимость группы малоразмерных БТС как системы по сравнению с одним большим БТС. Возможность распределения ПН одного большого БТС на несколько малых УТП приводит к тому, что группа малоразмерных БТС сохраняет способность выполнения ЦЗ хотя бы частично при потере нескольких БТС, в то время как потеря большого БТС влечет за собой прекращение выполнения ЦЗ.
2. Малая заметность. Малоразмерность отдельного БТС и возможность рассредоточения в пространстве при передвижении группой обуславливают затруднительность обнаружения БТС противником.
3. Новые свойства группы БТС как системы, позволяющие выполнять различные виды задач, невыполнимые для единичного БТС.
4. Повышение надежности решения ЦЗ. Использование нескольких УТП для размещения одинаковой ПН решает проблему резервирования.
5. Гибкость формирования комплексов для решения различных ЦЗ. Использование унифицированных УТП позволяет варьировать состав ПН

и численность группы БТС для решения различных ЦЗ при сохранении общности алгоритмов управления отдельной УТП и группой БТС в целом.

При выполнении ЦЗ группа БТС занимает в пространстве движения некоторую область в общем случае произвольной конфигурации. Для формирования алгоритмов управления отдельными УТП и группой БТС в целом необходимо определенным образом упорядочивать взаимное расположение УТП внутри группы. Представляется целесообразным свести все многообразие пространственного положения УТП к четырем базовым структурам (состояниям) с условными наименованиями "C" (crystal, кристалл), "L" (liquid, жидкость), "G" (gas, газ) и "V" (volume, объем).

Состояние C. В этом состоянии относительное положение УТП в группе строго регламентировано (заданы эшелоны, дистанции, интервалы) и напоминает узлы кристаллической решетки. Задача управления относительным движением УТП сводится при этом к стабилизации относительно узлов "решетки". Самих же конфигураций "решеток" (ордеров) может быть сколь угодно много. Конкретный вид ордера определяется исходя из решаемой ЦЗ.

Состояние L. В этом состоянии относительное положение УТП в группе определяется исходя из условия максимально допустимого количества УТП на единицу объема пространства, т.е. достижения максимальной плотности группы. При этом форма занимаемой группой УТП части пространства переменна при сохранении постоянства потребного для группы объема. Потребный для группы УТП объем пространства определяется условиями безопасности относительного движения УТП, в частности, гарантированного предотвращения соударений УТП. Дополнительным условием при формообразовании объема, занимаемого группой УТП, может выступать требование минимума площади поверхности указанного объема.

Состояние G. В этом состоянии относительное положение УТП в группе определяется исходя из условия равномерной плотности группы в заданном объеме пространства, который, в свою очередь, определяется особенностями решения поставленной ЦЗ.

Состояние V. В этом состоянии также задается некоторый объем пространства, отводимый под группу УТП, но, в отличие от состояния G, не требуется равномерность плотности группы в выделенном объеме пространства.

Каждая из рассмотренных базовых структур имеет в своем составе точку, соответствующую положению центра масс абсолютно твердого тела равномерной плотности, занимающего тот же объем, что и группа УТП в том или ином состоянии. Верхний уровень управления предполагает фактически задание траектории движения этого "центра масс", обеспечивающей возможность решения ЦЗ. Конкретный вид состояния, в котором находится группа БТС в той или иной точке траектории общего вида, определяется либо программно, либо задается командой оператора (при теле-

операторном управлении), либо формируется автономно самой группой БТС исходя из оценки особенностей среды передвижения на основе результатов непосредственного измерения ее состояния.

Алгоритмы нижнего уровня управления определяют взаимное относительное движение УТП, а также их движение относительно "центра масс" занимаемого группой БТС объема пространства. Алгоритмы нижнего уровня управления строятся на основе имитации движение молекул вещества в том или ином агрегатном состоянии под действием внутренних сил. При этом изменение силы притяжения достаточно описывать линейным законом (например, законом Гука), так как силы притяжения необходимы для предотвращения потери связи между УТП. Силы же отталкивания необходимо описывать нелинейными законами, так как необходимо гарантировать отсутствие соударений УТП между собой и элементами среды передвижения при выполнении ЦЗ. Особую значимость это требование приобретает в случае высокоскоростного пространственного движения группы БТС. Результирующая сил и будет определять вектор перемещения УТП. При этом все УТП, входящие в группу БТС, имеют унифицированную конструкцию и являются равноправными в смысле приоритетов управления. Таким образом, управление группой БТС является децентрализованным [1, 2].

Каждое БТС в соответствии с общим ЦЗ и информацией о фактическом положении группы, своего положения внутри группы и состояния среды передвижения реализует так называемое "ситуационное поведение" [3]. На аппаратном уровне связь БТС группы между собой может реализовываться на основе радио или оптического каналов связи. Для связи с центром управления группой БТС предпочтительно использование радиоканала. Так или иначе, для передачи данных предлагается использовать мобильную одноранговую сеть с помехоустойчивым кодированием. При этом возникает возможность добавлять и/или удалять БТС из группы в любой момент времени, а также в случае необходимости объединять и/или перераспределять их ресурсы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарасов В.Б. От многоагентных систем к интеллектуальным организациям. М.: Эдиториал УРСС, 2002, 352 с.

2. Каляев И. А., Капустян С. Г., Гайдук А. Р. Самоорганизующиеся распределенные системы управления группами интеллектуальных роботов, построенные на основе сетевой модели / Управление большими системами. Специальный выпуск 30.1 "Сетевые модели в управлении". М.: ИПУ РАН, 2010, с.605-639.

3. Поспелов Д.А. Ситуационное управление: теория и практика. – М.: Наука.- Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1986.-288 с.

О СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Л.С. Тахтенкова (Ульяновский государственный университет)
lubov.s.alex@yandex.ru

ON STABILIZATION OF SATELLITE MOTION UNDER STOCHASTIC PERTUBATIONS

L.S. Takhtenkova (Ulyanovsk State University)

Keywords: satellite, stabilization, stochastic perturbation, Lyapunov function.

Многие процессы в физике, биологии, механике и т.д. могут быть описаны с помощью стохастических дифференциальных уравнений[1,2]. Так, движение спутника определяется многими факторами, в том числе, имеющими случайную составляющую.

В статье излагаются результаты решения задачи о стабилизации вращательного движения спутника при наличии случайных возмущений. Для исследования поставленной задачи применяется второй метод Ляпунова для дифференциальных уравнений со случайной правой частью [1,3,4].

Рассмотрим осесимметричный спутник, центр масс которого движется по эллиптической орбите. Пусть $O\xi\eta\zeta$ – орбитальная система координат, образованная радиусом-вектором, трансверсалью и бинормалью к орбите [5], $Oxyz$ – система координат, жестко связанная с телом, оси которой направлены по главным центральным осям инерции тела, Oz – ось симметрии. $A = B, C$ - главные центральные моменты инерции спутника. Ориентацию системы $Oxyz$ относительно $O\xi\eta\zeta$, будем определять при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ, вводимых обычным образом [5].

Примем, что уравнения вращательного движения спутника относительно центра масс под действием гравитационных и управляющих моментов, случайных возмущений имеют следующий вид:

$$\ddot{\psi}\sin\theta + 2\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\omega}\cos\psi\cos\theta - 2\omega\dot{\theta}\cos\psi\sin\theta - \frac{C}{A}p\dot{\theta} - \omega^2\sin\psi\cos\psi\sin\theta -$$

$$-\frac{C}{A}p\omega\sin\psi = (\dot{\psi} + \sigma_1\sin\psi)\dot{\mathrm{W}}_1$$

$$\ddot{\theta} + \dot{\omega}\sin\psi + 2\omega\dot{\psi}\cos\psi\sin^2\theta - \dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta - \frac{C}{A}p\omega\cos\psi\cos\theta + \frac{C}{A}p\dot{\psi}\sin\theta + \omega^2\cos^2\psi\sin\theta\cos\theta$$

$$+3\omega^3\left(1-\frac{C}{A}\right)(1+e\cos\nu)\sin\theta\cos\theta = (\dot{\theta} + \sigma_2\cos\theta)\dot{\mathrm{W}}_2$$

$$\dot{\varphi} = p - \dot{\psi}\cos\theta + \omega\cos\psi\sin\theta,$$

$$\frac{dp}{dt} = (p - p_0)\sigma_3 \dot{W}_3 \qquad (2)$$

где $R = \frac{\rho}{1 - e\cos\nu}$ – расстояние от центра масс спутника до центра притяжения, μ – гравитационная постоянная, ν - истинная аномалия, e - эксцентриситет, ρ – фокальный параметр орбиты, p - циклический импульс, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - интенсивности случайных возмущений, W_1, W_2, W_3 - стандартные винеровские процессы.

При отсутствии возмущений имеют место обобщенные стационарные движения [6-8]

$$\dot{\theta} = 0; \quad \dot{\psi} = 0; \quad \theta = \frac{\pi}{2}; \quad \psi = 0, \pi; \quad \dot{\varphi} = p_0 \pm \omega,$$

при которых спутник вращается вокруг своей оси симметрии, коллинеарной нормали к плоскости орбиты. При $\psi = 0$ ось Oz имеет противоположное с $O\eta$ направление, при $\psi = \pi$ направление Oz и нормали $O\eta$ совпадают.

Исследуем задачу о стабилизации нерегулярного вращения перпендикулярного плоскости орбиты $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\psi = \pi$, $\dot{\varphi} = p_0 - \omega$ при помощи моментов пропорциональных абсолютной угловой скорости спутника

$$M_\theta = -k_1\dot{\theta}, \quad M_\psi = -k_2\dot{\psi}, \quad M_\varphi = -k_3(p - p_0). \qquad (3)$$

Согласно (2) имеем следующие уравнения движения в линейном приближении

$$\ddot{\xi} + \dot{\eta}\left(2\omega - \frac{C}{A}p\right) - \omega\xi\left(\omega - \frac{C}{A}p\right) + \dot{\omega}\eta + k_1\dot{\xi} = (\dot{\xi} + \xi\sigma_1)\dot{W}_1$$

$$\ddot{\eta} - \dot{\xi}\left(2\omega - \frac{C}{A}p\right) - \dot{\omega}\xi - \omega\eta\left(\omega - \frac{C}{A}p + 3\omega\left(1 - \frac{C}{A}\right)(1 + e\cos\nu)\right) + k_2\dot{\eta} = (\dot{\eta} + \eta\sigma_2)\dot{W}_2$$

$$\frac{dp}{dt} = (p - p_0)\sigma_3\dot{W}_3 - k_3(p - p_0)$$

Возьмем функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{1}{2}(\dot{\xi} + \alpha\xi)^2 + \frac{1}{2}(\dot{\eta} + \beta\eta)^2 + \frac{1}{2}(a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2) + \frac{1}{2}(p - p_0)^2,$$

где $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$.

Очевидно, что V положительно определена. Из условия $LV \le 0$, где LV - оператор функции Ляпунова [2], и теорем из [3,4] получены следующие условия стабилизируемости:

$$\frac{(\alpha^2 + a_{11} + \omega(\omega - \frac{C}{A}r_0) - k_1\alpha + \sigma_1)^2}{4(\alpha - k_1) + 2} + \omega\alpha(\omega - \frac{C}{A}r_0) + \frac{(a_{12} + \dot{\omega} - \alpha(2\omega - \frac{C}{A}r_0))^2}{4(\beta - k_2) + 2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 \le 0$$

$$\frac{(\beta^2+a_{22}+\omega(\omega-\frac{C}{A}r_0+3\omega(1-\frac{C}{A})(1+ecosv))-\beta k_2)+\sigma_2)^2}{4(\beta-k_2)+2}+(\beta\omega(\omega-\frac{C}{A}r_0+3\omega(1-\frac{C}{A})(1+ecosv)))+$$

$$+\frac{(a_{12}-\dot{\omega}+\beta(2\omega-\frac{C}{A}r_0))^2}{4(\alpha-k_1)+2}+\frac{1}{2}\sigma_2^2\le 0$$

$$\left(\frac{(\alpha^2+a_{11}+\omega(\omega-\frac{C}{A}c_0)-k_1\alpha+\sigma_1)^2}{4(\alpha-k_1)+2}+\omega\alpha(\omega-\frac{C}{A}c_0)+\frac{(a_{12}+\dot{\omega}-\alpha(2\omega-\frac{C}{A}c_0))^2}{4(\beta-k_2)+2}+\frac{1}{2}\sigma_1^2\right)*$$

$$\left(\frac{(\beta^2+a_{22}+\omega(\omega-\frac{C}{A}c_0+3\omega(1-\frac{C}{A})(1+ecosv))-\beta k_2+\sigma_2)^2}{4(\beta-k_2)+2}+\beta\omega(\omega-\frac{C}{A}c_0+3\omega(1-\frac{C}{A})(1+ecosv))\right.$$

$$\left.+\frac{(a_{12}-\dot{\omega}+\beta(2\omega-\frac{C}{A}c_0))^2}{4(\alpha-k_1)+2}+\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)-$$

$$-\left(\frac{(\beta^2+a_{22}+\omega(\omega-\frac{C}{A}c_0+3\omega(1-\frac{C}{A})(1+ecosv))-\beta k_2+\sigma_2)(a_{12}+\dot{\omega}-\alpha(2\omega-\frac{C}{A}c_0))}{4(\beta-k_2)+2}\right.$$

$$\left.+\frac{(\alpha^2+a_{11}+\omega(\omega-\frac{C}{A}c_0)-k_1\alpha+\sigma_1)(a_{12}-\dot{\omega}+\beta(2\omega-\frac{C}{A}c_0))}{4(\alpha-k_1)+2}+\frac{(\beta-\alpha)\dot{\omega}}{2}\right)^2\ge 0$$

$$k_3\ge\frac{\sigma_3^2}{2} \qquad (4)$$

При отсутствии случайных возмущений эти условия совпадают с условиями стабилизации из [8]. Учет случайных возмущений накладывает более жесткие ограничения (4) на параметры спутника и управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях параметров. М.: Наука, 1969, 367 с.

2. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, АСТ, 2003, 408 с.

3. Mao X., Stochastic versions of the LaSalle theorem // J. Differential Equations. 1999. №153. P.175–195

4. Mao X. Stability of Stochastic Differential Equations, 2010

5. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука. 1965. 416 с.

6. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС. 1998. 168 с.

7. Андреев А.С., Зайнетдинов Р.Б. Об устойчивости обобщенного стационарного движения механической системы в зависимости от действующих сил // Тр. 9-й Междунар. Четаевской конф. "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением", посвященной 105-летию Н.Г. Четаева. Иркутск: Институт динамики систем и теории управления, 2007. Т. 1. С. 5-14.

8. Андреев А.С., Зайнетдинов Р.Б. О стабилизации движений механических систем с переменными массами // ПММ. 2009.Т.73.Вып.1.С.3-12

9. Андреев А.С., Тахтенкова Л.С. О стабилизации движения спутника на круговой некеплеровой и на эллиптической орбитах // НТВП. 2016. №6. С.109-112.

УПРАВЛЕНИЕ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕЕ ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

С.А. Терентьев (КНИТУ-КАИ, Россия, 420111, Казань, К.Маркса, 10)
E-mail: kuvalda220@mail.ru

CONTROL, TO ENSURE DYNAMIC SIMILARITY OF THE TECHNICAL SYSTEM.

S.A. Terentyev (KNPTU-KAI, Russia, 420111, Kazan, K. Marx str., 10)

Keywords: control, dynamic similarity, modelling, technical system, aircraft (LA).

Для обучения пилотированию летательными аппаратами (ЛА) используются тренажёры и специальные учебные ЛА. При помощи таких технических систем происходит отработка и закрепление обучающимися методов пилотирования. С точки зрения экономической целесообразности обучение следует проводить на ЛА который имеет минимальную стоимость эксплуатации [1]. Возникает задача пилотирования моделирующим летательным аппаратом, на котором реакция на управляющие воздействия была бы похожей на реакцию базового летательного аппарата.

Математические модели движения ЛА рассматриваются в работах [2,3 и 4].

Задача моделирования в полете на моделирующем ЛА динамики движения базового ЛА сводится к задаче обеспечения подобия движения базового летательного аппарата.

Движение базового и моделирующего ЛА определяется уравнениями

$$\begin{cases} m_б \ddot{x}_б = F_{xб} + u_б \\ m_м \ddot{x}_м = F_{xм} + u_м \end{cases} \quad (1)$$

или

$$\begin{cases} \ddot{x}_б = \frac{1}{m_б} F_{xб} + \frac{1}{m_б} u_б \\ \ddot{x}_м = \frac{1}{m_м} F_{xм} + \frac{1}{m_м} u_м \end{cases} \quad (2)$$

Первое уравнение разделим на $u_б$, а второе на $u_м$, получим

$$\begin{cases} \frac{\ddot{x}_б}{u_б} = \frac{F_{xб}}{u_б * m_б} + \frac{1}{m_б} \\ \frac{\ddot{x}_м}{u_м} = \frac{F_{xм}}{u_м * m_м} + \frac{1}{m_м} \end{cases} \quad (3)$$

Условие пропорционального динамического подобия.

Для обеспечения динамического подобия потребуем выполнения равенства

$$\frac{\ddot{x}_б}{u_б} = \frac{\ddot{x}_м}{u_м}. \quad (4)$$

Уравнение (4) является условием динамического подобия ЛА. Тогда из системы уравнений (4) получим

$$\frac{F_{хб}}{u_б * m_б} + \frac{1}{m_б} = \frac{F_{хм}}{u_м * m_м} + \frac{1}{m_м} \quad (5)$$

Управление моделирующего ЛА будем вычислять по формуле

$$u_м = u_б + \Delta u \quad (6)$$

Составляющая Δu является для обеспечения одинаковых динамических характеристик моделирующего ЛА. Запишем уравнение (5) с учётом (6) и получим

$$\frac{F_{хб}}{u_б * m_б} + \frac{1}{m_б} = \frac{F_{хм}}{(u_б + \Delta u) * m_м} + \frac{1}{m_м}$$

Проведём ряд математических преобразований предыдущей формулы, получим

$$\frac{F_{хб}}{u_б * m_б} - \frac{F_{хм}}{(u_б + \Delta u) * m_м} = \frac{1}{m_б} - \frac{1}{m_м}$$

Приведём левую и правую части уравнения (8) к общему знаменателю

$$\frac{F_{хб} * (u_б + \Delta u) * m_м - F_{хм} * u_б * m_б}{u_б * m_б * (u_б + \Delta u) * m_м} = \frac{m_б - m_м}{m_б * m_м}$$

сократим одинаковые (не нулевые) сомножители слева и справа

$$\frac{F_{хб} * (u_б + \Delta u) * m_м - F_{хм} * u_б * m_б}{u_б * (u_б + \Delta u)} = m_б - m_м$$

Введём обозначения

$$A = m_б - m_м,$$
$$B = F_{хм} * m_б, \quad (7)$$
$$C = F_{хб} * m_м.$$

Запишем с использованием новых обозначений

$$\frac{C * (u_б + \Delta u) - B * u_б}{u_б * (u_б + \Delta u)} = A.$$

После преобразования дроби получим следующую формулу

$$C * u_б + C * \Delta u - B * u_б = A * u_б^2 + A * u_б * \Delta u$$

Сгруппируем слагаемые с Δu слева от знака равенства

$$C * \Delta u - A * u_б * \Delta u = A * u_б^2 - C * \Delta u + B * u_б,$$

выделим общий сомножитель

$$\Delta u * (C - A * u_б) = A * u_б^2 - C * u_б + B * u_б.$$

Получим формулу для корректирующей составляющей управления

$$\Delta u = \frac{A * u_б^2 + (B - C) * u_б}{C - A * u_б}. \quad (8)$$

Таким образом, управление моделирующего ЛА вычисляется по формуле (6) с учётом корректирующей составляющей Δu, которая вычисляется по формуле (8) с учётом выражений (7).

Условие точного динамического подобия. Для обеспечения динамического подобия потребуем выполнения равенства

$$\ddot{x}_м = \ddot{x}_б \quad (9)$$

Управление моделирующего ЛА будем вычислять по формуле

$$u_м = u_б + \Delta u \quad (10)$$

Из второго уравнения в (1) и (10) получим:

$$m_м \ddot{x}_м = F_{хм} + u_б + \Delta u \quad (11)$$

Из первого уравнения (1) получим:

$$\ddot{x}_б = \frac{F_{хб}}{m_б} + \frac{u_б}{m_б} \quad (12)$$

Уравнение (11) преобразуем, используя (9) и (12):

$$m_м * (\frac{F_{хб}}{m_б} + \frac{u_б}{m_б}) = F_{хм} + u_б + \Delta u$$

Раскроем скобки, получим формулу :

$$\Delta u = m_м * \frac{F_{хб}}{m_б} + m_м * \frac{u_б}{m_б} - F_{хм} - u_б$$

вынесем общий множитель, получим:

$$\Delta u = u_б * (\frac{m_м}{m_б} - 1) + \frac{m_м}{m_б} * F_{хб} - F_{хм} \quad (13)$$

В формулу (13) входит соотношение, характеризующее различие в массах летательных аппаратов. Введем обозначение

$$K_m = \frac{m_м}{m_б} \quad (14)$$

Формула (13) примет вид

$$\Delta u = u_б * (K_m - 1) + K_m * F_{хб} - F_{хм} \quad (15)$$

В этом расчётном случае управление моделирующего ЛА вычисляется по формуле (6) с учётом корректирующей составляющей Δu, которая вычисляется по формуле (15) с учётом выражений (14).

Обобщим результаты, полученные выше и результаты, опубликованные в работах [5-7]. В таблице 1 приведены формулы для обеспечения динамического подобия. Для вращательного движения по каналам тангажа **α** и курса **β**, динамическое подобие обеспечивается совокупностью параметров.

Выводы. В статье приводятся результаты исследования управления ЛА. Для базового и моделирующего ЛА получена математическая модель движения. В работе предложен метод определения управления для обеспечения динамического подобия ЛА.. Получены расчётные формулы для определения корректирующей составляющей управления моделирующего ЛА.

В работах [4-7] приведены результаты моделирования управляемого движения базового и моделирующего ЛА в программном комплексе Matlab в системе Simulink. Анализ результатов компьютерного моделирования показывает:

1) схожесть движения моделирующего и базового летательных аппаратов ;

2) близость рассогласования динамических характеристик к нулю показывает эквивалентность динамических характеристик.

Таблица 1

	Динамические уравнения	Условие динамического подобия	Дополнительные параметры						
x			A= , B= , C= ,						
				Δu=					
y					Δu=				
					Δu=				
z						Δu=			
α									
β									
γ									Δu=

Следовательно, показана работоспособность метода определения управления для обеспечения динамического подобия базового ЛА на моделирующем ЛА.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сайт Казанского вертолётного завода: http://kazanhelicopters.ru/

2. *Берестов Л.М.* Моделирование динамики вертолета в полете. М: Машиностроение, 1978

3. *Мхитарян А.М.*, Лазнюк П.С., Максимов В.С. и др. Динамика полета. – М.: Издательство Машиностроение, 1978.

4. *Терентьев С.А.* Алгоритм коррекции системы автоматического управления полётом вертолёта по требуемой траектории. Труды X Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление». Т.3. Секция 3 Управление. Ч.II, стр.397-404. Казань, 2012 г., Изд-во Казан.гос.техн.ун-та

5. *Терентьев С.А.* Алгоритм динамически подобного управления летательным аппаратом. Вестник КГТУ: Т.15, №15, 2012. стр. 252-254.

6. *Терентьев С.А.* Управление летательным аппаратом, обеспечивающее динамическое подобие. Вестник КГТУ: Т.16, №6, 2013. стр. 176-178.

7. *Терентьев С.А.* Управление летательным аппаратом, обеспечивающее динамическое подобие при повороте. Вестник КГТУ: Т.17, №11, 2014. стр.248-250.

УПРАВЛЕНИЕ СИНХРОННЫМ ГЕНЕРАТОРОМ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ПРИ РЕЗКОМ ИЗМЕНЕНИИ НАГРУЗКИ

А.Н. Тукмеев, А.И. Маликов (ИММ КазНЦ РАН, КНИТУ-КАИ, Россия, 420111, Казань, К.Маркса, 10)
E-mail: a_i_malikov@mail.ru, aidar.tu.n@gmail.com

CONTROL OF SYNCHRONOUS GENERATOR IN THE ELECTRIC POWER SYSTEM UNDER ROUGH LOAD CHANGING

A.I. Malikov, A.N. Tukmeev (IME KazSC RAS, KNPTU-KAI, 420111, Kazan, K.Marx str., 10)

Keywords: electric power system, load changing, state estimation, control design.

Введение. При резком изменении нагрузки либо коротком замыкании в синхронных машинах возникают переходные процессы. Динамика синхронной машины при подобных процессах значима практически, поскольку эти процессы могут привести к повреждениям машины, а также убыткам в связи с отключением от электросети потребителей.

Однако ввиду большого разнообразия и неопределенности внешних возмущений достаточно сложно описать их количественно (из-за чрезмерного количества возможных комбинаций). Вследствие чего необходимо качественное исследование для гарантированного оценивания текущего состояния и синтеза управления.

В данной работе для модели одномашинной системы [1] проводится синтез общего для трех режимов регулятора, обеспечивающего устойчивость переходов из одного режима в другой при изменениях нагрузки. Для оценивания состояния и синтеза управления используются методы инвариантных эллипсоидов [2,3] и матричных систем сравнения [4,5].

1. Математическая модель СГ в системе бесконечной мощности. В качестве базовой используется известная в литературе математическая модель синхронной машины, в которой с помощью преобразования Парка выполнен переход от статорных величин в неподвижных осях *a*, *b* и *c* к новым переменным в системе координат *d*-*q*, которая движется вместе с ротором. В качестве переменных состояния выбраны токи, отклонение угла δ и угловой скорости ω ротора машины от синхронно вращающейся оси.

Синхронная машина (без учета демпферных обмоток), работающая на систему неограниченной мощности через линию электропередачи, может быть представлена следующими уравнениями [1]:

$$\frac{d\delta}{d\tau} = \omega - 1, \tag{1}$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = -\frac{L_d}{3\tau_J} i_q i_d - \frac{kM_F}{3\tau_J} i_q i_F + \frac{L_q}{3\tau_J} i_d i_q - \frac{D}{\tau_J}(\omega - 1) + \frac{M_{MX}}{\tau_J}, \tag{2}$$

$$\frac{di_d}{d\tau} = \frac{-(r_s + r_e)}{(L_d + L_e)} i_d - \omega \frac{(L_q + L_e)}{(L_d + L_e)} i_q - \frac{kM_F}{(L_d + L_e)} \frac{di_F}{d\tau} + \frac{U_\infty \sqrt{3}}{(L_d + L_e)} \sin(\delta), \tag{3}$$

$$\frac{di_F}{d\tau} = -\frac{r_F}{L_F} i_F - \frac{kM_F}{L_F} \frac{di_d}{d\tau} + \frac{1}{L_F} u_F, \tag{4}$$

$$\frac{di_q}{d\tau} = \frac{(L_d + L_e)}{(L_q + L_e)} \omega i_d + \frac{kM_F}{(L_q + L_e)} \omega i_F - \frac{(r_s + r_e)}{(L_q + L_e)} i_q - \frac{U_\infty \sqrt{3}}{(L_q + L_e)} \cos(\delta). \tag{5}$$

Здесь: i – токи, δ – угол, ω – угловая скорость, L – индуктивности, $k = \sqrt{3/2}$ – постоянная Парка, M_F - взаимная индуктивность обмоток статора и обмотки возбуждения ротора, M_{MX} - механический момент, D – коэффициент демпфирования, $\tau_J = 2H\omega_б$ - постоянная времени в относительных единицах (где H – постоянная инерции), r – активные сопротивления, u_F - напряжение обмотки возбуждения ротора, U_∞ - напряжение системы бесконечной мощности.

Система уравнений (1)-(5) представляется в матричном виде:

$$\frac{d}{d\tau}\begin{bmatrix} \delta \\ \omega \\ i_d \\ i_f \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{D}{\tau_J} & -\frac{L_d}{3\tau_J} i_q & -\frac{kM_F}{3\tau_J} i_q & \frac{L_q}{3\tau_J} i_d \\ 0 & 0 & -\frac{L_F(r_s + r_e)}{L} & \frac{kM_F r_F}{L} & -\omega \frac{L_F(L_q + L_e)}{L} \\ 0 & 0 & \frac{kM_F(r_s + r_e)}{L_S} & -\frac{(L_d + L_e) r_F}{L_S} & \omega \frac{kM_F(L_q + L_e)}{L_F L_d - kM_F^2} \\ 0 & 0 & \omega_i \frac{(L_d + L_e)}{(L_q + L_e)} & \omega \frac{kM_F}{(L_q + L_e)} & -\frac{(r_s + r_e)}{(L_q + L_e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \omega \\ i_d \\ i_f \\ i_q \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{D}{\tau_J} + \frac{M_{MX}}{\tau_J} \\ \frac{L_F U_\infty \sqrt{3}}{L} \sin(\delta) - \frac{kM_F}{L} u_F \\ -\frac{kM_F U_\infty \sqrt{3}}{L} \sin(\delta) + \frac{(L_d + L_e)}{L} u_F \\ -\frac{U_\infty \sqrt{3}}{(L_q + L_e)} \cos(\delta) \end{bmatrix}, \tag{6}$$

где $L = L_F(L_d + L_e) - kM_F^2$.

Пусть $x_0 = (\delta_0, \omega_0 = 1, i_{d0}, i_{F0}, i_{q0})^T$ - вектор, определяющий установившийся режим, соответствующий заданной нагрузке, $x = (\delta, \omega, i_d, i_F, i_q)^T$ – вектор состояния (в отклонениях от установившегося режима)

Уравнения (6) представляются в виде:

$$\frac{dx}{d\tau} = A(x)x + Bu + Dw, \tag{7}$$

где $x = (\delta, \omega, i_d, i_F, i_q)^T, u = (M_{MX}, u_F)^T, w = (w_1, w_2, w_3, w_4,)^T$, а матрицы $A(x)$, B, D определяются следующим образом:

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D/\tau_J & \frac{(L_q - L_d)}{3\tau_J}(i_{q0} + i_q) & -\frac{kM_F}{3\tau_J}(i_{q0} + i_q) & \frac{(L_q - L_d)i_{d0} - kM_F i_{F0}}{3\tau_J} \\ \frac{L_F U_\infty \sqrt{3}}{L}\frac{[\sin(\delta + \delta_0) - \sin(\delta_0)]}{\delta} & -\frac{L_F L_{qe}}{L} i_{q0} & -\frac{L_F r_{se}}{L} & \frac{kM_F r_F}{L} & -\frac{L_F L_{qe}}{L}(1+\omega) \\ -\frac{kM_F U_\infty \sqrt{3}}{L}\frac{[\sin(\delta + \delta_0) - \sin(\delta_0)]}{\delta} & \frac{kM_F L_{qe}}{L} i_{q0} & \frac{kM_F r_{se}}{L} & -\frac{L_{de} r_F}{L} & \frac{kM_F L_{qe}}{L}(1+\omega) \\ -\frac{U_\infty \sqrt{3}}{L_{qe}}\frac{[\cos(\delta + \delta_0) - \cos(\delta_0)]}{\delta} & \frac{L_{de}}{L_{qe}} i_{d0} + \frac{kM_F}{L_{qe}} i_{F0} & \frac{L_{de}}{L_{qe}}(1+\omega) & \frac{kM_F}{L_{qe}}(1+\omega) & -\frac{r_{se}}{L_{qe}} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\tau_J} & 0 \\ 0 & -\frac{kM_F}{L} \\ 0 & \frac{L_{de}}{L} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\tau_J} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L_F}{L} & \frac{kM_F}{L} & 0 \\ 0 & \frac{kM_F}{L} & -\frac{L_{de}}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_{qe}} \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты матрицы $A(x)$ зависят от фазовых координат, и система является нелинейной. Поэтому для дальнейшего использования модели необходимо провести ее линеаризацию.

Матрица $A_L(x_0)$ линеаризованной относительно заданного установившегося режима системы выглядит следующим образом:

$$A_L(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D/\tau_J & \frac{(L_q - L_d)}{3\tau_J} i_{q0} & -\frac{kM_F}{3\tau_J} i_{q0} & \frac{(L_q - L_d)i_{d0} - kM_F i_{F0}}{3\tau_J} \\ \frac{L_F U_\infty \sqrt{3}}{L}\cos(\delta_0) & -\frac{L_F L_{qe}}{L} i_{q0} & -\frac{L_F r_{se}}{L} & \frac{kM_F r_F}{L} & -\frac{L_F L_{qe}}{L} \\ -\frac{kM_F U_\infty \sqrt{3}}{L}\cos(\delta_0) & \frac{kM_F L_{qe}}{L} i_{q0} & \frac{kM_F r_{se}}{L} & -\frac{L_{de} r_F}{L} & \frac{kM_F L_{qe}}{L} \\ \frac{U_\infty \sqrt{3}}{L_{qe}}\sin(\delta_0) & \frac{L_{de}}{L_{qe}} i_{d0} + \frac{kM_F}{L_{qe}} i_{F0} & \frac{L_{de}}{L_{qe}} & \frac{kM_F}{L_{qe}} & -\frac{r_{se}}{L_{qe}} \end{bmatrix}.$$

Некоторые элементы матрицы $A_L(x_0)$ зависят от установившегося режима, который в свою очередь определяется текущей нагрузкой P, Q и напряжением сети U_∞.

Параметры системы, при которых проводилось моделирование, представлены в таблице 1.

Таблица 1

Параметр	Значение	Параметр	Значение
$U_{ном}$	20 kB	r_s	0.005 *o.e.*
$P_{ном}$	100 Мват	r_e	0.005 *o.e.*
U_∞	1 o.e.	T_{do}	7.766
L_e	0.997 o.e.	τ_J	10
L_d	0.973 o.e.	D	0
L_q	0.55 o.e.	$kM_F = L_d - L_s$	0.923 *o.e.*
L_s	0.05 o.e.	L_F	1.088 *o.e.*
L'_d	*0.190* o.e.	$r_F = L_F / T'_{do}$	0.140 *o.e.*

Рабочий режим определяется в зависимости от нагрузки и задается требуемой мощностью. Рассматривается 3 варианта (представлены в таблице 2).

Таблица 2

а) низкая нагрузка	$P_H = 0.05$ o.e., $Q_H = -0.225$ o.e.	x_0=[0.1214 1.0000 0.3764 1.0609 0.1332]^T u_{F0}=0.1924 M_{X0}=0.0505
б) нормальная нагрузка	$P_H = 1$ o.e., $Q_H = 0.015\,o.e.$	x_0=[0.9819 1.0000 -1.4547 4.1574 0.9404]^T u_{F0}=0.7539 M_{X0}=1.0100
в) высокая нагрузка	$P_H = 1.25$ o.e., $Q_H = 0.3\,o.e$	x_0=[0.9179 1.0 -2.0354 5.4941 0.9025]^T u_{F0}=0.9963 M_{X0}=1.2665

Структурная схема автоматического регулятора возбуждения (АРВ), который обычно используется для стабилизации напряжения [1], представлена на Рис.1.

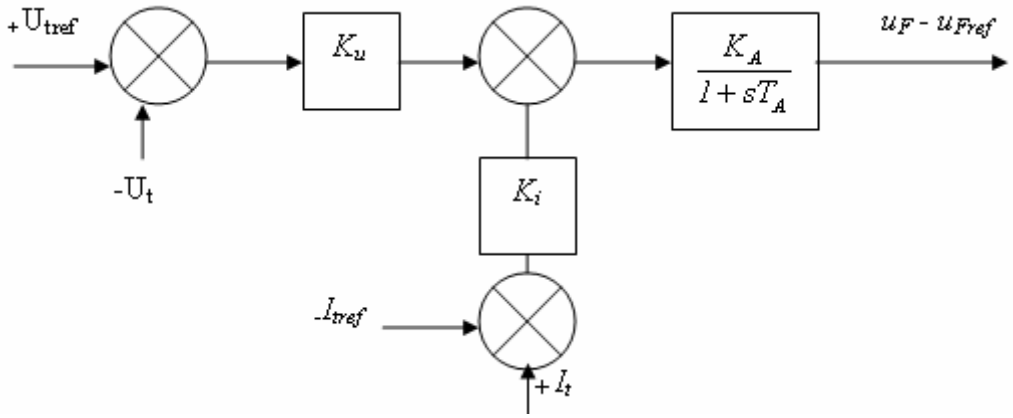

Рис.1

Уравнение для АРВ имеет следующий вид [1]:

$$\frac{du_F}{d\tau} = \frac{K_I}{T_A}(I_t - I_{tref}) + \frac{K_u}{T_A}(U_{tref} - U_t) - \frac{1}{T_A}(u_r - u_{Fref}), \quad (8)$$

где $U_t = \sqrt{U_d{}^2 + U_q{}^2}$, $I_t = \sqrt{I_d{}^2 + I_q{}^2}$, T_A - постоянная времени, K_I, K_U настраиваемые коэффициенты обратной связи, u_r - дополнительный управляющее воздействие.

Уравнение для регулятора скорости турбины имеет вид:

$$T_s \frac{dM_{Mx}}{d\tau} + M_{Mx} = u_s. \quad (9)$$

где T_s – постоянная времени, u_s – управляющее воздействие.

Следует отметить, что стандартный АРВ с коэффициентами K_I=5; K_u=500 и постоянной времени T_A=0.05 не обеспечивает стабилизацию тока и напряжения при высокой нагрузке. Кроме того система с АРВ без регулятора скорости имеет малый запас устойчивости. Для того чтобы увеличить запас устойчивости для каждого из 3-х режимов проводится синтез регулятора возбуждения и регулятора скорости турбины синхронного генератора в виде обратной связи по состоянию $(u_r, u_s)^{\mathrm{T}} = Kx$.

2. Синтез регулятора по состоянию на основе решения линейных матричных неравенств. Математическая модель рассматриваемой системы представляется в виде [2]:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = A(t)x + B_1(t)u + D(t)w + \Phi(t)\varphi(t,x),\ x(t_0) = x_0, \\ &z = C_1(t)x + B_2(t)u, \end{aligned} \quad (10)$$

где $x \in R^n$ - вектор состояния, $w(t) \in W_r \subset R^r$ - входное возмущение, $z \in R^l$ - вектор выхода, по которому будет оцениваться качество процессов; $A(t) \in R^{n\times n}$, $B_1(t) \in R^{n\times m}$, $D(t) \in R^{n\times r}$, $\Phi(t) \in R^{n\times q}$, $C(t) \in R^{q\times n}$, $B_2(t) \in R^{q\times m}$ - известные матрицы с непрерывными и ограниченными элементами при всех $t \in [t_0, T]$, $T > t_0$ заданная константа (при рассмотрении на конечном интервале) или T=∞ (при рассмотрении на бесконечном интервале).

Нелинейная векторная функция $\varphi(t,x)$ удовлетворяет условию:

$$\left\|\varphi(t,x,u)\right\|^2 \le \mu_0 + \mu_1 \left\|C_f(t)x(t) + B_f(t)u(t)\right\|^2,\ \forall t \in [t_0, T), x \in R^n, u \in R^m, \quad (11)$$

где $C_f(t) \in R^{q\times n}, B_f(t) \in R^{q\times m}$ - известные матрицы с непрерывными и ограниченными элементами при всех $t \in [t_0, T]$. Здесь $\|\cdot\|$ означает евклидову норму вектора, $\mu_0, \mu_1 \ge 0$ - заданные параметры.

Предположим, что неопределенные возмущения являются непрерывными функциями, ограниченными в каждый момент времени:

$$\|w(t)\|^2 \le 1,\ \forall t \ge t_0. \tag{12}$$

Состояние системы (10) с нелинейностями из (11) и неопределенными возмущениями из (12) возможно оценить в виде эволюционирующего инвариантного эллипсоида, матрица которого будет определяться исходя из частного решения матричной системы сравнения либо дифференциальных линейных матричных неравенств.

Теорема 1 [4]. Эллипсоид $E(Q(t))$, где $Q(t) = Q(t, t_0, Q_0)$ есть решение матричной системы сравнения

$$dQ(t)/dt = AQ + QA^T + \alpha Q + \frac{1}{\alpha - \frac{\mu_0}{\beta}} DD^T + \beta \Phi\Phi^T + \frac{\mu_1}{\beta} QC_f^T C_f Q \tag{13}$$

или дифференциального линейного матричного неравенства

$$\begin{bmatrix} -dQ(t)/dt + AQ + QA^{\mathrm{T}} + \alpha Q + \beta\Phi\Phi^{\mathrm{T}} & D & QC_f^{\mathrm{T}} & 0 \\ D^{\mathrm{T}} & -\alpha I & 0 & I \\ C_f Q & 0 & -\frac{\beta}{\mu_1} I & 0 \\ 0 & I & 0 & -\frac{\beta}{\mu_0} I \end{bmatrix} \le 0 \tag{7}$$

при всех $t \in [t_0, T]$ и некоторых $\beta > 0,\ \alpha \ge \mu_0 / \beta$, является инвариантным для траекторий системы (10), стартующих из начального эллипсоида $E(Q_0)$.

Для синтеза управления в виде обратной связи по состоянию $u=Kx$ такого что, замкнутая система будет стабилизирована, а начальные отклонения и воздействие внешних возмущений будут подавляться, в [2] предложено решать задачу оптимизации критерия при ограничениях в виде дифференциальных линейных матричных неравенств. В качестве критерия выбирается след матрицы, определяющей размер инвариантного или ограничивающего выход эллипсоида. Доказана следующая теорема.

Теорема 2 [4]. Решение $Q^*(t) = Q^*(t, t_0, Q_0), Y^*(t), Z^*(t)$ задачи $\mathrm{trace}\left[C_2 Q C_2^T + C_2 Y^T B_2^T + B_2 Y C_2^T + B_2 Z B_2^T\right] \to \min$ при ограничениях

$$\begin{bmatrix} AQ+QA^T+B_1Y+Y^TB_1^T+\alpha Q+\beta\Phi\Phi^T & D & QC_f^T+Y^TB_f^T & 0 \\ D^T & -\alpha I & 0 & I \\ C_fQ+B_fY & 0 & -\dfrac{\beta}{\mu_1}I & 0 \\ 0 & I & 0 & -\dfrac{\beta}{\mu_0}I \end{bmatrix} \le 0 \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} Z & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \ge 0, \quad (15)$$

где минимизация проводится по матричным переменным $Q(t)=Q^T(t)\in R^{n\times n}$, $Y(t)\in R^{n\times m}$, $Z(t)\in R^{l\times l}$, скалярной переменной $\beta>0$ и скалярному параметру $\alpha \ge \mu_0/\beta$, определяет при каждом $t\in[t_0,T]$ матрицу $Q^*(t)$ ограничивающего эллипсоида для вектора состояния $x(t)$, матрицу $C_2Q^*C_2^T+C_2Y^{*T}B_2^T+B_2Y^*C_2^T+B_2Z^*B_2^T$ ограничивающего эллипсоида для вектора выхода $z(t)$ системы (14) и зависимую от времени матрицу коэффициентов соответствующего регулятора по состоянию $K^*(t)=Y^*(t)Q^{*-1}(t)$. Если, кроме того, матрица $Q^*(t)$ удовлетворяет дополнительно ограничениям $Q_0\ge R$ и $Q(t)\le S(t)$ для всех $t\in[t_0,T]$, где R и $S(t)$ – заданные положительно определенные симметрические матрицы, то искомый регулятор обеспечивает ограниченность замкнутой системы относительно множеств $[E(R), E(S(t))]$ при всех нелинейностях из (11).

Если синтезировать управление для каждого из трех режимов рассматриваемой системы, то при изменении нагрузки потребуется переключать управление. Кроме того регуляторы синтезированные для каждого из рассматриваемых режимов не обеспечивают устойчивость переходов из одного режима в другой при изменении нагрузки. Возникает вопрос, возможно ли найти такое управление, которое сможет обеспечить стабилизацию каждого из трех режимов. В данной работе синтез управления производится из условия обеспечения минимального предельного инвариантного эллипсоида одновременно для всех трех режимов. При этом задача оптимизации из теоремы 2 решается при ограничениях вида (14), записанных для каждого из 3-х режимов.

С использование программного обеспечения CVX в пакете MatLab был произведен синтез общего для трех режимов регулятора в виде обратной связи по состоянию $(u_r,u_s)^{\mathrm{T}}=Kx$ с матрицей коэффициентов усиления

$$K=\begin{bmatrix} 12.99 & 49.71 & -14.23 & -9.31 & -3.42 & 1.18 \\ -26.17 & -71.94 & -13.85 & -5.78 & 4.06 & -3.46 \end{bmatrix}.$$

Получена также матрица предельного инвариантного эллипсоида для состояний:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.001 & -0.0006 & -0.0009 & 0.0006 & 0.0005 & 0.007 \\ -0.0006 & 0.0008 & -0.0025 & 0.006 & -0.0006 & -0.013 \\ -0.0009 & -0.0025 & 0.15 & -0.304 & 0.004 & -0.04 \\ 0.0006 & 0.006 & -0.304 & 0.63 & -0.0096 & 0.067 \\ 0.0005 & -0.0006 & 0.004 & -0.0096 & 0.003 & 0.0027 \\ 0.007 & -0.013 & -0.04 & 0.067 & 0.0027 & 0.54 \end{bmatrix}$$

При этом матрицы замкнутой системы для каждого из трех режимов имеют все собственные значения с отрицательными реальными частями.

Например, матрица:

$$A + B_1 K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.01 & -0.03 & -0.11 & 0.03 \\ -8.48 & -36.75 & 10.16 & 6.79 & 1.14 & -0.85 \\ 19.14 & 76.86 & -21.69 & -14.48 & -4.11 & 1.81 \\ 0.93 & 0.63 & 1.27 & 0.59 & -0.006 & 0 \\ -5.23 & -14.39 & -2.77 & -1.16 & 0.81 & -0.89 \end{bmatrix}.$$

для режима с низкой нагрузкой имеет собственные значения -3.9403, -0.0094 ± 1.0033i, -0.4715, -0.3934 ± 0.6114i.

Переходные процессы с полученными регуляторами возбуждения и скорости в виде обратной связи по состоянию представлены на рис. 2-4. На рис. 2, 3 показано изменение координат состояния при переходе из режима с высокой нагрузкой в режим с низкой нагрузкой. На рис. 4 показано изменение тока и напряжения при переходе из режима с высокой нагрузкой в режим с низкой нагрузкой.

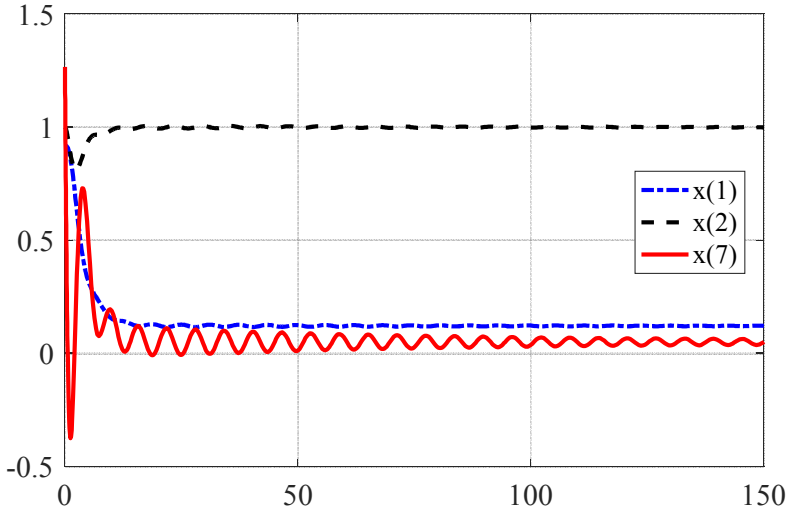

Рис.2

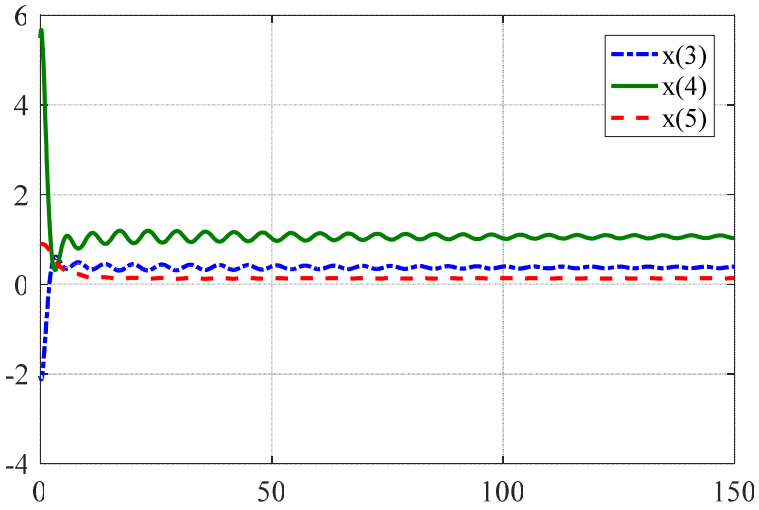

Рис.3

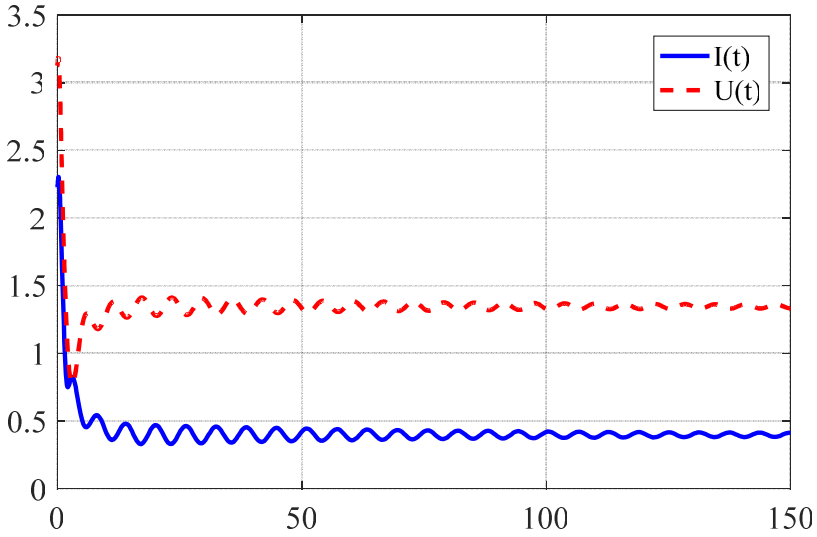

Рис.4

Как видно из представленных графиков полученный регулятор обеспечивает устойчивый переход из режима с высокой нагрузкой в режим с низкой нагрузкой. Аналогичные результаты получены при моделировании системы по полной нелинейной модели с полученным регулятором для 2-х других вариантов переходов из одного режима в другой при изменениях нагрузки.

Заключение. Для синхронного генератора, работающего на систему бесконечной мощности через линию электропередачи, на основе метода инвариантных эллипсоидов предложен способ синтеза управления общего для трех режимов, задаваемых нагрузкой. Коэффициенты регулятора вычисляются в результате решения задачи оптимизации следа матрицы ограничивающего выход эллипсоида. При оптимизации используются три ограничения соответствующих каждому режиму нагрузки. Полученный ре-

гулятор обеспечивает устойчивые переходы из одного режима в другой при однократном или не слишком частом изменении нагрузки. Для реализации управления в виде обратной связи по состоянию при неполной информации о состоянии могут использоваться наблюдатели, способы синтеза которых даны в [6,7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андерсон П., Фуад А. Управление энергосистемами и устойчивость. М.: Энергия, 1980.
2. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Нелинейные системы с ограниченными или мультипликативными возмущениями / Проблемы устойчивости и управления. Сб. научн. ст., посв. 80-летию акад. В.М.Матросова. М.: Физматлит, 2013. С. 270–299.
3. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях. М.:ЛЕНАНД, 2014.
4. Маликов А. И. Метод матричных систем сравнения в анализе и синтезе систем управления с неопределенностями //Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды X Международной Четаевской конференции. Т. 2. С. 360–370.
5. Маликов А. И. Оценивание состояния и стабилизация непрерывных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями // Автоматика и телемеханика, 2016, № 5, 19–36.
6. Маликов А.И. Синтез наблюдателей состояния для нелинейных Липшицевых систем с неопределенными ограниченными по L_∞ норме возмущениями // Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева. 2016. №3. С. 128-140.
7. Маликов А.И. Синтез наблюдателей состояния по результатам измерений для нелинейных Липшицевых систем с неопределенными возмущениями // Автоматика и телемеханика. 2017. №5. С. 16–35.

ВОПРОСЫ РАЗРАБОТКИ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ ПО БРОНИРОВАНИЮ И ПРОДАЖЕ АВИАБИЛЕТОВ

П.И. Тутубалин, Е.М. Комиссарова
(КНИТУ-КАИ, Россия, 420111, Казань, К. Маркса, 10)
E-mail: pitutubalin@kai.ru

ISSUES THE DEVELOPMENT OF AUTOMATED SYSTEMS FOR BOOKING AND TICKET SALES

P.I. Tutubalin, E.M. Komissarova
(KNRTU-KAI, 420111, Kazan, K.Marx str., 10)

Keywords: information security, automated system, ticket booking.

В современном мире авиаперелеты являются самым быстрым и надежным способом перемещения. В связи с этим на сегодняшний день получили широкое распространение системы онлайн бронирования и продажи авиабилетов.

Основными пользователями таких систем (онлайн сервисов) являются ответственные операторы авиакомпаний и их возможные клиенты. Операторы обеспечивают наполнение и поддержание баз данных таких сервисов в актуальном состоянии, а клиенты осуществляют поиск интересующих их рейсов, бронирование авиабилетов и их покупку. Таким образом, подобные системы можно классифицировать как сложные и территориально - распределенные [1-4].

На сегодняшний день обозначается проблема, состоящая в том, что расширяется круг лиц, которые относятся к безопасности авиаперелётов с растущей степенью недоверия, что, вообще говоря, небезосновательно. Поэтому, как никогда ранее, становится актуальной задача повышения доверия к авиакомпаниям и осуществляемым ими авиаперелётам.

Решение данной задачи является достаточно разноплановым. Особо отметим одно из направлений её решения – предоставление возможным клиентам авиакомпаний расширенной информации об авиаперелётах, техническом состоянии воздушных судов и составе их экипажей. Такая информация может предоставляться клиентам онлайн сервисов по бронированию авиабилетов. Считаем, что подобного рода информация должна позволять снижать уровень стресса у возможных клиентов авиакомпаний.

Базой для доказательства надежности и безопасности какого-либо авиаперелета должна служить справка, в которой предлагается отражать следующую информацию, предоставляемую авиакомпанией:

дата выпуска воздушного судна;

график проверок технического состояния воздушного судна;

частота проверок технического состояния воздушного судна;

показатели опытности каждого из членов экипажа;

прочие показатели, составляющие конкурентное преимущество авиакомпании перед другими авиакомпаниями.

При этом данные об экипаже могут предоставляться как в обезличенном виде, так и с частичным отображением персональных данных. Способ предоставления данных во втором случае должен регламентироваться нормативными и правовыми актами той авиакомпании, которая предоставляет информацию подобного рода.

Процесс внесения и учёта данных, входящих в отмеченные категории указанной справки, должен быть автоматизирован.

Предлагается разработать отдельный модуль в виде веб – сервиса, который может быть интегрирован в произвольный онлайн сервис по бронированию авиабилетов, при этом требуется, чтобы разрабатываемый веб – сервис включал в свою функциональность возможность получения описанной выше справки.

Такой подход определяется тем, что на сегодняшний день существует достаточно большое количество онлайн сервисов по бронированию авиабилетов, но все они предоставляют достаточно однообразную и механистическую информацию. Возможность получения справки подобной той, что упомянута, должна обеспечивать привлечение дополнительного внимания к тому онлайн сервису, который будет позволять её получать.

Как следует из выше сказанного, разрабатываемый веб – сервис должен предоставлять два основных интерфейса: для оператора авиакомпании и для возможного клиента авиакомпании. При этом доступ к веб – сервису со стороны, как клиента, так и оператора авиакомпании должен обеспечиваться автоматически после регистрации в соответствующем онлайн сервисе по бронированию авиабилетов.

Но по сравнению с функциональностью предоставляемой клиенту, функциональность предоставляемая оператору должна быть несколько расширенной. Перечислим основные функции, которые должны быть доступны оператору авиакомпании в разрабатываемом веб – сервисе:

внесение, модификация и удаление данных о воздушных судах авиакомпании;

внесение, модификация и удаление данных о графиках проверок технического состояния воздушных судов авиакомпаний;

внесение, модификация и удаление данных о кадровом составе экипажей авиакомпании;

внесение, модификация и удаление данных, составляющих конкурентное преимущество авиакомпании перед другими авиакомпаниями;

построение сводных отчётов о техническом состоянии воздушных судов;

построение сводных отчётов о кадровом обеспечении экипажей воздушных судов;

разработка собственных отчётов по интересующим оператора категориям информации.

Для обеспечения быстрого внедрения разрабатываемого веб – сервиса в той или иной авиакомпании могут применяться дистанционные формы обучения работе с ним операторов авиакомпаний, не требующие отрыва обучаемого от его рабочего места.

Замена бумажного документооборота электронным наблюдается во многих сферах деятельности человека. Особенно актуальным становится вопрос перехода на электронный документооборот в тех информационных системах, в которых нужно своевременно принимать оперативные, аналитические и организационные решения, руководствуясь информацией, получаемой из территориально удаленных и разрозненных информационных источников (к таким системам, в частности, относится и автоматизированная система бронирования и продажи авиабилетов).

Нужно отметить, что сказанное в большей мере отражает деятельность операторов авиакомпаний. Их деятельность, так или иначе, включает в себя работу, как с электронными, так и с бумажными копиями документов, что требует расширения перечня автоматизируемых разрабатываемым веб – сервисом задач, среди числа которых нужно отметить следующие:

регистрация документов в электронном виде;

предоставление программных интерфейсов для использование высокоскоростных поточных сканеров, обеспечивающих высокую скорости ввода в систему электронного документооборота поступающей бумажной корреспонденции;

ввод резолюций к документам;

ввод резолюций, как в текстовом виде с клавиатуры либо сенсорных панелей, так и надиктовывание их в звуковой либо видеофайл;

выполнение быстрого многокритериального поиска документов за счет построения полнотекстовых индексов баз данных;

осуществление контроля исполнения документов, поступающих в организацию;

распределенное хранение и обработка документов в сети;

распределение прав доступа к различным документам и функциям системы ЭД;

одновременное заведение нескольких картотек документов;

работа с проектами документов;

распределение находящихся на исполнении документов по «папкам» в зависимости от стадии исполнения документа: «поступившие», «на исполнении», «на контроле», «на согласовании» и др.

формирование необходимых отчетов;

обмен документами по электронной почте, а также с помощью корпоративным мессенджеров;

списание документов в дело и архив;

отслеживание перемещений бумажных оригиналов и копий документов, ведение реестров внутренней передачи документов;

ведение служебных пользовательских списков должностных лиц, организаций, тематических рубрик, групп документов и т.п.;

оперативное редактирование шаблонов входных и выходных печатных форм;

использование электронно-цифровой подписи для подписания документов в электронном виде;

шифрование электронных документов и баз данных в целом.

Однако следует отметить, что на этапах оптимального анализа, синтеза и внедрения средств сопряжения разрабатываемого веб – сервиса с корпоративными системами электронного документооборота авиакомпаний необходимо учитывать специфику работы этих компаний, которая вносит свои коррективы в организацию и цели, преследуемые при внедрении:

обмен информацией с другими специализированными службами, подразделениями и учреждениями, которая в ряде случаев может носить конфиденциальный, секретный характер, а также являться государственной тайной;

территориальная распределенность и высокая мобильность конечных пользователей системы;

сложность размещения и использования стандартных стационарных средств обеспечения информационной безопасности.

Далее приводится структура специализированной системы электронного документооборота, предусматривающая возможность сопряжения множества территориально распределённых информационных систем. Каждая из которых может представлять собой корпоративную сеть некоторой авиакомпании.

В свете сказанного сложно переоценить то, что базой для реализации автоматизированной системы бронирования и продажи авиабилетов выбрана технология веб – сервисов.

Вариант отмеченной структуры приведен на рисунке 1, на нем приняты следующие условные обозначения:

ЛБД – локальная база данных некоторой авиакомпании;

ЗШ – защищенный шлюз, позволяющий обмениваться конфиденциальными, а также секретной информацией как по открытым каналам, так и по выделенным линиям связи с базами данных отдельных авиакомпаний и сторонних структур;

ТС – техническое средство, на котором могут базироваться элементы доступа в систему по бронированию и продаже авиабилетов;

Ш – либо ЗШ, либо шлюз, не поддерживающий возможность организации защищенного соединения;

АРМ – автоматизированное рабочее место;

ОУ – объект управления.

ЗКПК – смартфон.

СЗИ – средства защиты информации.

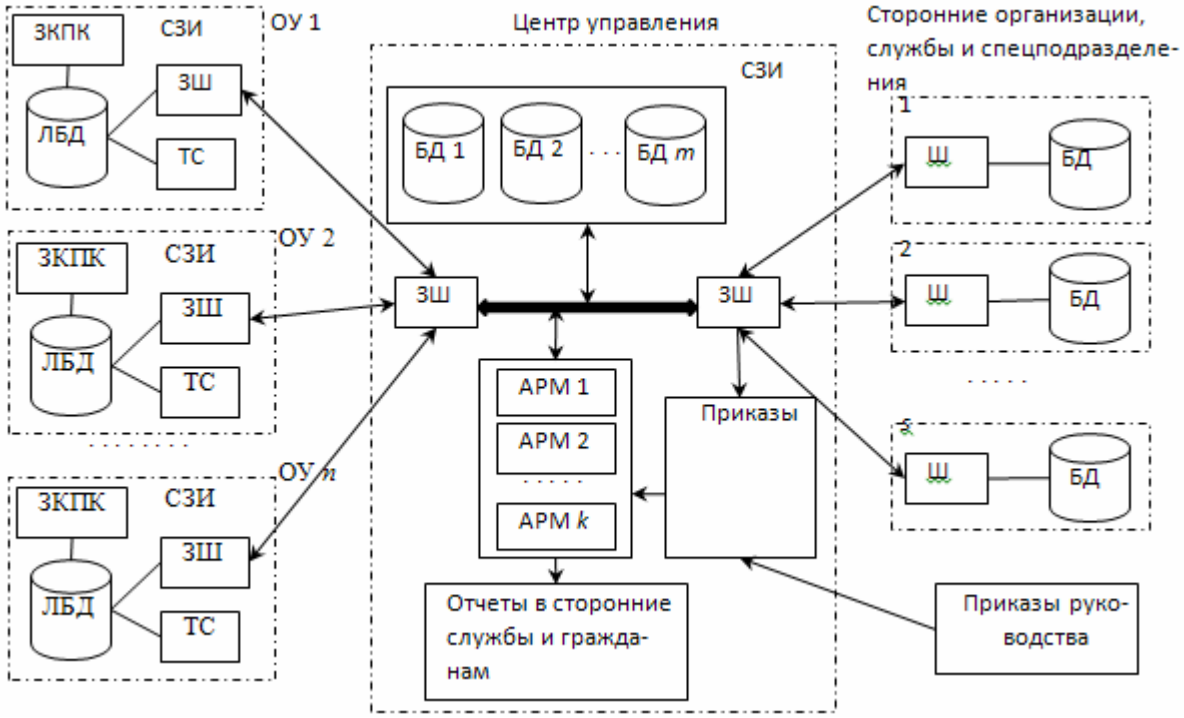

Рис. 1

Как уже это отмечалось, отнюдь не последнюю роль в обеспечении успешной работы онлайн сервиса по бронированию авиабилетов играет правильно выстроенная система обеспечения его информационной безопасности (ИБ).

Заслуживающие внимания подходы к построению систем обеспечения ИБ различных автоматизированных систем приводятся в следующих работах [5-8]. Эти подходы также следует применить и при разработке означенного веб – сервиса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зайдуллин С.С., Куревин В.В. Моделирование динамики функционирования распределенной системы хранения специального назначения // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева. 2010. № 1. С. 109-114.

2. Зайдуллин С.С. Информационная технология управления распределенной системой обслуживания // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева. 2003. № 3. С. 50-58.

3. Моисеев В.С., Зайдуллин С.С. Задачи анализа и синтеза сложных территориально распределенных систем // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева. 2000. № 2. С. 39-44.

4. Моисеев В.С., Зайдуллин С.С. Моделирование динамики конечных дискретных множеств // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева. 2003. № 4. С. 31-36.

5. Моисеев, В.С. К задаче маскировки конфиденциальных данных автоматизированных систем / В.С. Моисеев, В.В. Дятчин, П.И. Тутубалин // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева. - 2007. - № 2. - С. 55-58.

6. Тутубалин, П.И. Применение компьютерных технологий в профессиональном обучении / П.И. Тутубалин, А.И. Шевченко // Образовательные технологии и общество. - 2012. - Т. 15. - № 2. - С. 433-448.

7. Тутубалин, П.И. Оптимизация выборочного контроля целостности информационных систем / П.И. Тутубалин // Информация и безопасность. - 2012. - Т. 15. - № 2. - С. 257-260.

8. Тутубалин, П.И. Основные задачи прикладной теории информационной безопасности АСУ / П.И. Тутубалин // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. - 2007. - № 39. - С. 63-72.

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНИИ ВИЗИРОВАНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ПРИБОРА

Р.Н. Файзутдинов, И.О. Спиридонов, А.А. Маханько
(КНИТУ-КАИ, Россия, 420111, К.Маркса, 10)
E-mail: rstfm@rambler.ru

MULTICRITERIA SYNTHESIS OF OPTICAL DEVICE LINE OF SIGHT STABILIZATION SISTEM

R.N. Faizutdinov, I.O. Spiridonov, A.A. Makhanko
(KNPTU-KAI, 420111, Kazan, K.Marx str., 10)

Keywords: multicriteria synthesis, line of sight, stabilization system

Введение. В настоящее время при поиске и сопровождении различных целей с борта подвижных объектов широкое применение получили системы стабилизации и наведения линии визирования оптико-электронных систем (ОЭС) [1]. Для наблюдения и слежения за объектами в условиях возмущений от носителя (подвижного объекта) ОЭС устанавливают на стабилизированные платформы. Стабилизируемая платформа кинематически связана с движущимся объектом системой колец и осей (карданом подвесом).

Для синтеза регуляторов системы стабилизации и наведения линии визирования ОЭС было использовано множество подходов. Однако большинство предложенных регуляторов сложны и трудно реализуемы на практике. Одним из наиболее часто используемых регуляторов в промышленности являются ПИД-регуляторы [2]. Их преимуществами являются простота реализации и достаточно хорошее качество процессов управления.

Большинство систем управления, используемых на практике, должно одновременно удовлетворять нескольким противоречивым критериям качества. Существует множество требований к системе управления, однако можно выделить следующие базовые группы требований [3]:

- подавление возмущений;
- подавление/ослабление шумов измерений;
- отработка командного сигнала;
- робастность к неопределенностям модели.

Стандартные способы настройки коэффициентов ПИД-регуляторов, как правило, не позволяют обеспечить корректный компромисс между множеством конфликтующих показателей качества. Поэтому при многокритериальном синтезе для настройки параметров регулятора необходимо использовать методы многокритериальной оптимизации [4]. Такая задача рассмотрена в данной работе.

Модель объекта управления. Двухосная стабилизируемая платформа состоит из основания, жестко прикрепленного к несущему телу, внешнего курсового подвеса (тело 2), внутреннего тангажного подвеса (тело 3) и полезной оптико-электронной нагрузки (ПОЭН), установленной в тангажной рамке внутреннего подвеса. С несущим телом (подвижным объектом) связана система координат $x_1y_1z_1$. С курсовым карданом связана система координат $x_2y_2z_2$, с тангажным карданом – система координат $x_3y_3z_3$. Угловые положения рам карданова подвеса 2, 3 (рис.1) по отношению к предыдущим рамам определяется соответственно углами ψ_2. θ_3. Все рамки карданова подвеса управляются электродвигателями. К ПОЭН прикреплены скоростные гироскопы, измеряющие компоненты угловой скорости ПОЭН в инерциальном пространстве.

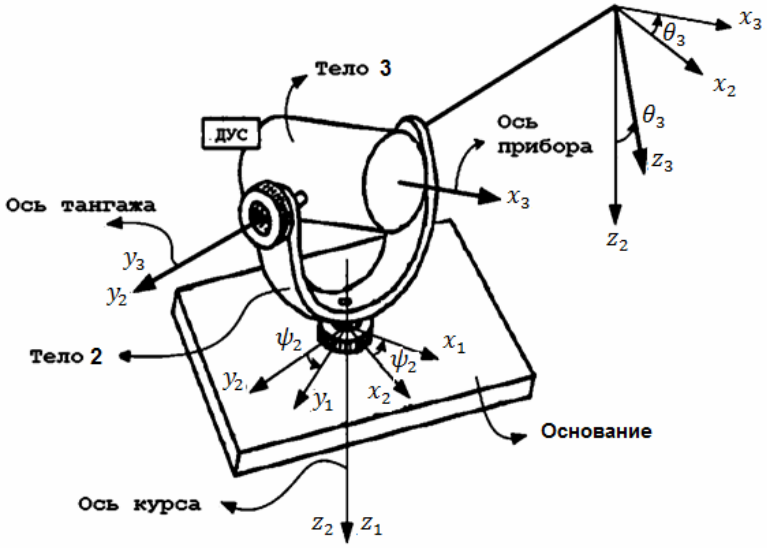

Рис.1. Двухосная стабилизируемая платформа

Вектора абсолютной угловой скорости систем координат $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$ и $x_3y_3z_3$ в этих же системах координат обозначим, соответственно,

$$\bar{\omega}_1 = \begin{bmatrix} \omega_{x1} \\ \omega_{y1} \\ \omega_{z1} \end{bmatrix}, \quad \bar{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \omega_{x2} \\ \omega_{y2} \\ \omega_{z2} \end{bmatrix}, \quad \bar{\omega}_3 = \begin{bmatrix} \omega_{x3} \\ \omega_{y3} \\ \omega_{z3} \end{bmatrix}.$$

Уравнения движения системы в форме уравнений Лагранжа второго рода имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \ (i = \overline{2,3}), \qquad (1)$$

где T – кинетическая энергия системы, П – потенциальная энергия системы, Q_i – обобщенные силы, представляющие собой моменты, развиваемые управляющими двигателями, приложенные к соответствующим рамкам, q_i и $\dot{q}_i$ – обобщенные координаты и обобщенные скорости соответственно. В качестве вектора обобщенных координат используется $q = [\psi_2, \theta_3]$

Кинетическая энергия системы T равна сумме кинетических энергий всех тел, входящих в систему. Кинетическая энергия тела i равна

$$T_i = \frac{1}{2} m_i (\bar{V}_{ci} \cdot \bar{V}_{ci}) + \frac{1}{2} (\bar{\Omega}_i \cdot J_i \cdot \bar{\Omega}_i), (i = \overline{2,3}), \quad (2)$$

где m_i – масса i-го тела; $\bar{V}_{ci}$ – вектор скорости центра масс тела i; $\bar{\Omega}_i$ – вектор абсолютной угловой скорости тела i; J_i – тензор инерции i-го тела.

Потенциальная энергия системы П равна сумме потенциальных энергий всех тел, входящих в систему. Так как все тела предполагаются абсолютно жесткими, потенциальная энергия тел определяется только силой тяжести.

Потенциальная энергия тела i равна

$$\Pi_i = g^T r_{ci} m_i, (i = \overline{2,3}), \quad (3)$$

где r_{ci} – вектор положение центра масс тела i; g – вектор гравитационного ускорения.

Уравнения (1) с учетом выражений (2) и (3) представим в матричном виде:

$$A(q)\ddot{q} + B(q,\dot{q})\dot{q} + C(q) = M(t) \quad (4)$$

где

$A(q)$ – nxn матрица, содержащая инерционные члены,

$B(q,\dot{q})\dot{q}$ – $nx1$ вектор кориолиосовых и центростремительных сил,

$C(q)$ – $nx1$ вектор гравитационных моментов,

$M(t)$ – $nx1$ вектор внешних моментов, приложенных исполнительными устройствами к соответствующим осям карданова подвеса.

Синтез системы стабилизации. Для обеспечения стабилизации линии визирования необходимо обеспечить равенство нулю двух угловых скоростей ω_{y3} и ω_{z3}, определяющих движение линии визирования в инерциальном пространстве.

Структурная схема системы стабилизации платформы с ПОЭН показана на рисунке 2.

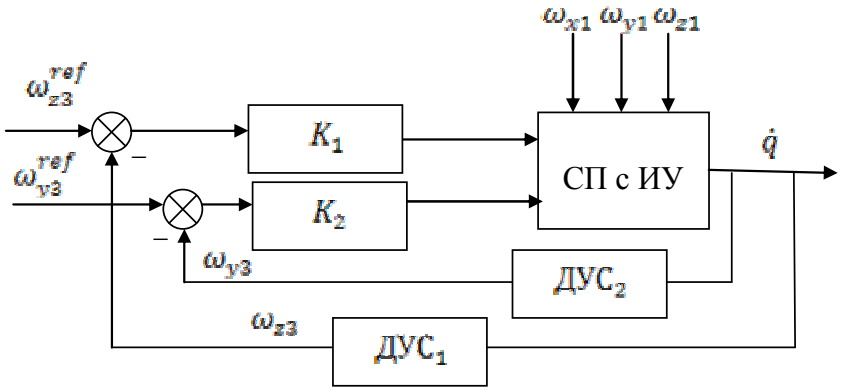

Рис. 2. Структурная схема системы стабилизации

На динамику платформы с исполнительным устройством (СП с ИУ) оказывают влияние инерциальные угловые скорости подвижного объекта ω_{x1}, ω_{y1}, ω_{z1} в проекциях на оси связанной системы координат. Датчики угловой скорости ДУС_1 и ДУС_2 измеряют инерциальные угловые скорости по каналам курса ω_{z3} и тангажа ω_{y3} в системе координат, связанной с тангажным карданом. Задающие воздействия ω_{z3}^{ref} и ω_{y3}^{ref} при решении задачи стабилизации равны нулю. Управление по каналам курса и тангажа осуществляется ПИ-регуляторами K_1 и K_2, соответственно.

Ставится следующая задача: необходимо выбрать параметры ПИ-регуляторов K_1 и K_2, обеспечивающих минимизацию следующих критериев качества:

- время переходного процесса;
- максимальное перерегулирования;
- ошибка регулирования.

Как известно [4], в общем случае решение задачи многокритериальной оптимизации не единственно. В результате решения получается множество равноценных не улучшаемых решений – множество Парето. Известно несколько методов построения множества Парето, основанных на классической теории нелинейного программирования [4].

В данной работе для построения множества Парето использован метод нормализованных ограничений [5], позволяющий получить набор равномерно распределенных точек, хорошо аппроксимирующих множество Парето, даже в случае достаточно сложной формы его границы.

После построения множества Парето необходимо произвести выбор на множестве Парето-оптимальных решений одного решения на основе предпочтений проектировщика. Имеется несколько способов задания предпочтений [4]. В работе предпочтения задаются в виде неравенств, ограничивающих желаемые для проектировщика значения критериев [6]. В результате выбор предпочтительного решения осуществляется с помощью решения оптимизационной задачи.

Предложенная процедура многокритериального синтеза системы стабилизации линии визирования ОЭС реализована в системе Matlab. Синтезированная система промоделирована в системе Matlab/Simulink. Проведенные расчеты показали хорошее качество процессов регулирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабаев А.А. Амортизация, демпфирование и стабилизация бортовых оптических приборов. – Л.:Машиностроение. Ленингр. отделение, 1984. – 232 с.

2. Денисенко В. ПИД – регуляторы: принципы построения и модификации. Ч. 2. // Современные технологии автоматизации. – 2007 .- №1. – с. 78-88.

3. Åström K, Hägglund T (2001) The future of PID control. Control Eng Pract 9(11):1163–1175.

4. Miettinen K.M. (1998) Nonlinear multiobjective optimization. Kluwer Academic Publishers.

5. Messac A., Ismail-Yahaya A., Mattson C. (2003) The normalized normal constraint method for generating the pareto frontier. Struct Multidisciplinary Optim 25:86–98.

6. Файзутдинов Р.Н. К задаче многокритериального проектирования технических систем// Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева, 2009, № 4, с. 120-125.

К ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ДВИЖЕНИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ И ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Т.Ф. Филиппова (Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского, УрО РАН, Россия, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16)
E-mail: ftf@imm.uran.ru

О.Г. Матвийчук (Институт математики и механики им.Н.Н.Красовского, УрО РАН, Россия, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16)
E-mail: vog@imm.uran.ru

ON ESTIMATION PROBLEM FOR SET-VALUED MOTIONS OF CONTROL SYSTEM WITH UNCERTAINTY AND STATE CONSTRAINTS

T.F. Filippova (Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, UB RAS, Russia, 620990, Ekaterinburg, S. Kovalevskaya str., 16)
E-mail: ftf@imm.uran.ru

O.G. Matviychuk (Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, UB RAS, Russia, 620990, Ekaterinburg, S. Kovalevskaya str., 16)
E-mail: vog@imm.uran.ru

Keywords: bilinear control systems, impulsive control, ellipsoidal calculus, trajectory tubes, estimation.

Введение. Рассматриваются задачи оценивания множеств достижимости нелинейной импульсной управляемой динамической системы с неопределенностью по начальным данным. Неопределенность по начальным данным здесь состоит в том, что начальное состояние точно не известно, но принадлежит заданному эллипсоиду соответствующего фазового пространства [1,2]. Предполагается также, что матрица коэффициентов, входящая в фазовые скорости системы неизвестна, но известны границы возможного изменения для ее элементов. Таким образом, предполагается, что динамика системы осложнена наличием билинейных составляющих в правых частях дифференциальных уравнений управляемой системы. Кроме того, динамика фазовых состояний стеснена фазовым ограничением, определяемым соответствующим эллипсоидом. Управление в динамической системе является обобщенным (импульсным) и выбирается в классе мер, порождаемых скалярными функциями ограниченной вариации на заданном временном отрезке.

Основная цель работы состоит в построении внешних эллипсоидальных трубок, оценивающих по включению сверху исследуемую траектор-

ную трубку импульсной системы [2–5]. Рассматривается модификация изложенных в [4, 6] схем построения эллипсоидальных оценок трубок траекторий и соответствующих множеств достижимости на случай рассматриваемой здесь импульсной системы с неопределенностью и фазовыми ограничениями. Указанная модификация основана на идее [5] перехода от задачи с фазовыми ограничениями к задачам без ограничений на координаты путем введения в динамическую систему специальных матричных параметров. Далее, при помощи специальной разрывной замены времени, рассматриваемая импульсная система преобразуется в обыкновенное дифференциальное включение, уже не содержащее импульсных составляющих. Для оценивания множеств достижимости полученного дифференциального включения используются результаты теории эллипсоидального оценивания и теории эволюционных уравнений для многозначных состояний динамических систем в условиях неопределенности и при наличии фазовых ограничений [7–11]. Получены алгоритмы построения внешних эллипсоидальных оценок множеств достижимости для управляемых систем указанного выше вида. Отметим, что решение задач оценивания динамики для рассматриваемого класса систем может представлять не только теоретический интерес, но важно и для приложений, в том числе, в механике и робототехнике (например, для изучения систем с сухим трением), биологии (при исследовании популяционных моделей), экономике (в оптимизации портфельных инвестиций) и других разделах.

Постановка задачи. Введем предварительно следующие обозначения. Пусть R^n обозначает n-мерное евклидово пространство, $\operatorname{comp} R^n$ – множество всех компактных подмножеств из R^n, $\operatorname{conv} R^n$ – множество всех компактных выпуклых подмножеств из R^n, $R^{n\times n}$ – множество всех действительных матриц размерности $n\times n$. Символ $x'y=(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ обозначает скалярное произведение векторов $x, y\in R^n$, $'$ – знак транспонирования, $\|x\|=(x'x)^{1/2}$ – евклидова норма вектора $x\in R^n$, $I\in R^{n\times n}$ единичная $n\times n$-матрица, $\operatorname{Tr}(A)$ – след матрицы A (сумма диагональных элементов), $\operatorname{diag} b=\operatorname{diag}\{b_i\}$ обозначает диагональную матрицу A с элементами $a_{ii}=b_i$, где b_i – это компоненты вектора b. Пусть $B(a,r)=\{x\in R^n:\ \|x-a\|\le r\}$ – шар в R^n с центром в $a\in R^n$ и радиусом $r>0$ и $E(a,Q)=\{x\in R^n:(Q^{-1}(x-a),(x-a))\le 1\}$ – эллипсоид в R^n с центром в $a\in R^n$ и симметрической положительно определенной $n\times n$-матрицей Q.

Рассмотрим управляемую систему следующего вида

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + B(t)dv(t), \quad x \in R^n, \quad t_0 \le t \le T. \qquad (1)$$

Здесь мы предполагаем, что начальное состояние системы точно не известно, но ограничено

$$x(t_0 - 0) = x_0, \quad x_0 \in \mathcal{X}_0 = E(a_0, Q_0), \quad a_0 \in R^n, \quad Q_0 \in R^{n\times n}. \qquad (2)$$

Заметим, что неопределенность по начальным данным порождает трубку траекторий, объединяющую все возможные траектории, полученные при одном и том же управлении и различных начальных данных $x_0 \in \mathcal{X}_0$. В системе (1) векторная функция $B(t) \in R^n$ является непрерывной при $t \in [t_0, T]$. Импульсное управление v – скалярная функция ограниченной вариации, возрастающая, непрерывная справа на отрезке $[t_0, T]$ и удовлетворяющая ограничению (параметр $\mu > 0$ задан):

$$\operatorname{Var}_{t\in[t_0,T]} v(t) = \sup_{\{t_i\}} \sum_{i=1}^{k} |v(t_i) - v(t_{i-1})| \le \mu, \quad t_i : t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_k = T. \qquad (3)$$

Обозначим символом $\mathcal{V}$ класс всех допустимых управлений-мер $v(\cdot)$. Предположим, что неопределенная $n\times n$-матрица $A(t)$ в системе (1) имеет вид $A(t) = A^0(t) + A^1(t)$, где матричная функция $A^0(t) \in R^{n\times n}$ задана ($t \in [t_0, T]$), а измеримая $n\times n$-матрица $A^1(t)$ с элементами $\{a_{ij}^{(1)}(t)\}$ ($i, j = 1, \ldots, n$, $t \in [t_0, T]$) точно не известна, но дано ограничение на неизвестные элементы $\{a_{ij}^{(1)}(t)\}$

$$A^1(t) \in \mathcal{A}^1 = \left\{A = \{a_{ij}\} \in R^{n\times n} : |\, a_{ij} \,| \le c_{ij}, i, j = 1, \ldots n\right\}, \quad t \in [t_0, T],$$
$$A(t) \in \mathcal{A} = A^0(t) + \mathcal{A}^1, \qquad (4)$$

где числа $c_{ij} \ge 0$ ($i, j = 1, \ldots, n$) заданы.

Обозначим символом $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, A(\cdot), v(\cdot))$ *решение* системы (1)–(4) на промежутке $[t_0, T]$ для допустимых $x_0 \in \mathcal{X}_0$, $A(\cdot) \in \mathcal{A}$ и управления $v(t) \in \mathcal{V}$. Будем предполагать, что все решения $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, A(\cdot), v(\cdot))$ существуют и определены на всем промежутке $[t_0, T]$ при любых допустимых $x_0 \in \mathcal{X}_0$, $A(\cdot) \in \mathcal{A}$ и $v(t) \in \mathcal{V}$ (условия, при которых данное требование выполняется, приведены в [3]).

Трубку траекторий системы (1)–(4) из начального состояния $\{t_0, \mathcal{X}_0\}$ обозначим

$$\mathcal{X}(\cdot)=\bigcup\{x(\cdot;t_0,x_0,A(\cdot),v(\cdot)):x_0\in\mathcal{X}_0,\ A(\cdot)\in\mathcal{A},\ v(\cdot)\in\mathcal{V}\}.$$

Отметим, что сечение $\mathcal{X}(t)$ трубки траекторий $\mathcal{X}(\cdot)$ в момент времени $t\in[t_0,T]$ совпадает с *множеством достижимости* системы (1)–(4) в момент t из начального состояния $\{t_0,\mathcal{X}_0\}$.

Предположим дополнительно, что текущее фазовое состояние $x(t)$ системы (1) стеснено ограничением

$$0\in G(t,x(t)),\quad t_0\le t\le T, \qquad (5)$$

где $G(t,x)$ – непрерывная многозначная функция $G:[t_0,T]\times R^n\to\operatorname{conv}R^n$. В частности, если положить $G(t,x)=E(y_0,D)-x$, ($E(y_0,D)$ – эллипсоид в $G(t,x)=E(y_0,D)$ с центром $y_0\in R^n$ и симметрической положительно определенной матрицей $D\in R^{n\times n}$), то включение (5) становится эллипсоидальным фазовым ограничением:

$$x(t)\in E(y_0,D),\quad t_0\le t\le T. \qquad (6)$$

Цель работы состоит в построении алгоритмов внешнего оценивания траекторных трубок $\mathcal{X}(\cdot)$ и соответствующих множеств достижимости $\mathcal{X}(t)$ для рассматриваемой нелинейной управляемой системы (1)–(4) указанного выше класса при наличии фазовых ограничений (6).

1. Вспомогательные результаты.

1.1. Билинейная система без фазовых ограничений. Рассмотрим следующую вспомогательную билинейную систему без фазовых ограничений:

$$\dot{x}=A(t)x,\quad t_0\le t\le T,\quad x_0\in\mathcal{X}_0=E(a_0,Q_0),\quad x,a_0\in R^n,\quad Q_0\in R^{n\times n}. \qquad (7)$$

Будем предполагать, как и ранее, что матричная функция $A(\cdot)\in\mathcal{A}$ вида (4). Тогда внешнюю эллипсоидальную оценку множества достижимости $\mathcal{X}(t)$ билинейной системы (7) при ограничении (4) можно найти, применив следующий результат.

Теорема 1 [8]. *Пусть функции* $a^*(t)$ и $Q^*(t)$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\dot{a}^*=A^0(t)a^*,\quad a^*(t_0)=a_0,$$

$$\dot{Q}^*=A^0Q^*+Q^*A^{0\prime}+qQ^*+q^{-1}G,\quad Q^*(t_0)=Q_0,\quad t_0\le t\le T,$$

$$q=\left(n^{-1}\operatorname{Tr}((Q^*)^{-1}G)\right)^{1/2},$$

$$G = \operatorname{diag}\{(n-\nu)[\sum_{i=1}^{n} c_{ji}\,|\,a_i^*\,| + (\max_{\sigma=\{\sigma_{ij}\}} \sum_{p,q=1}^{n} Q_{pq}^* c_{jp} c_{jq} \sigma_{jp} \sigma_{jq})^{1/2}]^2\},$$

максимум в последнем выражении вычисляется по всем $\sigma_{ij} = \pm 1$, $i, j = 1,\ldots,n$, *таким, что* $c_{ij} \neq 0$, *и* ν *равно числу индексов* i, *для которых* $c_{ij} = 0$ *для всех* $j = 1,\ldots,n$. *Тогда верна оценка для множества достижимости* $\mathcal{X}(t)$ *билинейной системы* (7)

$$\mathcal{X}(t) \subseteq E(a^*(t), Q^*(t)), \quad t_0 \le t \le T.$$

Следствие. *Имеет место следующее включение:*

$$\mathcal{X}(t_0+\sigma) \subseteq (I+\sigma\mathcal{A})\mathcal{X}_0 + o_1(\sigma)B(0,1) \subseteq E(a^*(t_0+\sigma), Q^*(t_0+\sigma)) + o_2(\sigma)B(0,1),$$

где $\sigma^{-1} o_i(\sigma) \to 0$ *при* $\sigma \to +0$ $(i = 1,2)$ *и*

$$(I+\sigma\mathcal{A})\mathcal{X}_0 = \bigcup\{x + \sigma A x : x \in \mathcal{X}_0, A \in \mathcal{A}\}.$$

1.2. Трубки траекторий импульсной системы с неопределенностью по начальным данным и фазовым ограничениям. Рассмотрим систему с импульсным управлением и эллипсоидальным фазовым ограничением (6):

$$dx = A(t)x\,dt + B(t)dv, \quad x(t_0 - 0) = x_0 \in \mathcal{X}_0 = E(a_0, Q_0), \quad t \in [t_0, T], \qquad (8)$$

$$x(t) \in E(y_0, D), \quad t_0 \le t \le T, \quad v \in \mathcal{V}.$$

Здесь $A(t) \in R^{n\times n}$ – непрерывная матричная функция, $B(t) \in R^n$ – непрерывная векторная функция, множества $\mathcal{X}_0$ и $E(y_0, D)$ определены в (2) и (6) соответственно, $v(t)$ – импульсное управление $(\mathrm{Var}_{t\in[t_0,T]} v(t) \le \mu)$.

Тогда справедлива следующая оценка множества достижимости импульсной системы (8) с эллипсоидальным фазовым ограничением (6).

Теорема 2 [4]. *Для множества достижимости* $\mathcal{X}(T) = \mathcal{X}(T; t_0, \mathcal{X}_0)$ *системы* (8) *верна оценка*

$$\mathcal{X}(T) = \mathcal{X}(T; t_0, \mathcal{X}_0) \subseteq \bigcap \{\mathcal{Z}(T; t_0, \mathcal{X}_0, L) \,|\, L \in R^{n\times n}\},$$

где $\mathcal{Z}(T; t_0, \mathcal{X}_0, L)$ – *множество достижимости линейной импульсной дифференциальной системы вида*

$$dz = \big((A(t) - L)z + u(t)\big)dt + B(t)dv(t), \quad t_0 \le t \le T, \qquad (9)$$

$$z(t_0 - 0) \in \mathcal{X}_0 = E(a_0, Q_0), \quad \mathrm{Var}_{t\in[t_0,T]} v(t) \le \mu, \quad u(t) \in LE(y_0, D).$$

Замечание 1. Отметим, что каждая оценка для $\mathcal{Z}(T;t_0,\mathcal{X}_0,L)$ дает внешнюю эллипсоидальную аппроксимацию множества достижимости $\mathcal{X}(T)=\mathcal{X}(T;t_0,\mathcal{X}_0)$ импульсной системы (8) с эллипсоидальным фазовым ограничением (6), а более точная оценка получается в результате пересечения эллипсоидов, порожденных указанными алгоритмами при различных значениях матричного параметра L.

2. Основные результаты. Для исходной системы (1)–(4) указанного выше класса при наличии фазовых ограничений (6) в соответствии с Теоремой 2 перейдем к билинейной импульсной дифференциальной системе

$$dz=\big((A(t)-L)z+u(t)\big)dt+B(t)dv(t),\quad t_0\le t\le T, \qquad (10)$$

$$z(t_0-0)=z_0\in\mathcal{X}_0=E(a_0,Q_0),\quad x(t)\in E(y_0,D),$$

$$A(\cdot)\in\mathcal{A},\ u(t)\in LE(y_0,D),\ v\in\mathcal{V},$$

где $L(t,z)$ – произвольная непрерывная $n\times n$-матричная функция (класс таких функций обозначим символом $C^{n\times n}$).

Обозначим через $z_L(\cdot)=z(\cdot;t_0,z_0,A(\cdot),v,L)$ решение системы (10) на промежутке $[t_0,T]$ с начальным условием $z(t_0-0)=z_0\in\mathcal{X}_0$ при заданных допустимых функциях $v\in\mathcal{V}$ и $L(t,z)$; $\mathcal{Z}(T;t_0,\mathcal{X}_0,L)$ – множество достижимости системы (10)

$$\mathcal{Z}(T;t_0,\mathcal{X}_0,L)=\bigcup\{z(\cdot;t_0,z_0,A(\cdot),v,L)\,|\,z_0\in\mathcal{X}_0,\ A(\cdot)\in\mathcal{A},\ v=v(\cdot)\in\mathcal{V}\}.$$

Для множества достижимости $\mathcal{X}(T)$ системы (1) верна оценка

$$\mathcal{X}(T)=\mathcal{X}(T;t_0,\mathcal{X}_0)\subseteq\bigcap\{\mathcal{Z}(T;t_0,\mathcal{X}_0,L)\,|\,L\in R^{n\times n}\}.$$

Заметим, что задача (10) уже не имеет фазовых ограничений.

С помощью специальной разрывной замены времени [10] $\eta=\eta(t)$ и новой фазовой координаты $\tau=\tau(\eta)$:

$$\eta(t)=t+\int_{t_0}^{t}dv(t),\quad \tau(\eta)=\inf\{t\,|\,\eta(t)\ge\eta\}.$$

получаем дифференциальное включение, которое уже не содержит импульсных составляющих:

$$\frac{d}{d\eta}\begin{pmatrix}z\\ \tau\end{pmatrix}\in H_L(\tau,z),\quad z(t_0)=z_0,\quad \tau(t_0)=t_0,\quad t_0\le\eta\le T+\mu, \qquad (11)$$

$$H_L(\tau,z)=\bigcup_{0\le\nu\le1}\left\{(1-\nu)\begin{pmatrix}(A(\tau)-L)z+LE(y_0,D)\\ 1\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}B(\tau)\\ 0\end{pmatrix}\right\}.$$

Обозначим через $w=\{z,\tau\}$ расширенный фазовый вектор системы (11) и рассмотрим траекторную трубку включения (11) в расширенном фазовом пространстве:

$$\mathcal{W}_L(\eta)=\mathcal{W}(\eta;t_0,\mathcal{X}_0\times\{t_0\},L)=\bigcup\{w(\eta;t_0,w_0,L)\,|\,w_0\in\mathcal{X}_0\times\{t_0\}\},$$

$$t_0\le\eta\le T+\mu.$$

Лемма 1. [3] Множество достижимости $\mathcal{Z}(T;t_0,\mathcal{X}_0,L)$ управляемой системы (10) совпадает с проекцией множества достижимости $\mathcal{W}_L(T+\mu)$ дифференциального включения (11) на подпространство переменных z: $\mathcal{Z}(T;t_0,\mathcal{X}_0,L)=\pi_z\mathcal{W}_L(T+\mu)$.

Теорема 3. Для множества достижимости $\mathcal{X}(T)$ системы (1)–(4) при наличии фазовых ограничений (6) справедлива следующая внешняя оценка

$$\mathcal{X}(T)=\mathcal{X}(T;t_0,\mathcal{X}_0)\subseteq\bigcap\{\mathcal{Z}(T;t_0,\mathcal{X}_0,L)\,|\,L\in R^{n\times n}\}.$$

Теорема 4. *Для всех* $\sigma>0$ *справедлива следующая внешняя оценка множества достижимости* $\mathcal{W}_L(t_0+\sigma)=\mathcal{W}_L(t_0+\sigma;t_0,\mathcal{X}_0\times\{t_0\})$ *включения* (11):

$$\mathcal{W}_L(t_0+\sigma)\subseteq\mathcal{W}_L(t_0,\sigma)+o(\sigma)B^{n+1}(0,1),\quad\lim_{\sigma\to+0}\sigma^{-1}o(\sigma)=0,$$

где

$$\mathcal{W}_L(t_0,\sigma)=\bigcup_{0\le\nu\le1}\mathcal{W}_L(t_0,\sigma,\nu),\quad\mathcal{W}_L(t_0,\sigma,\nu)=\begin{pmatrix}E(a_L^+(\sigma,\nu),Q_L^+(\sigma,\nu))\\ t_0+\sigma(1-\nu)\end{pmatrix},$$

$$a_L^+(\sigma,\nu)=a_L(\sigma,\nu)+\sigma(1-\nu)Ly_0+\sigma\nu B,$$

$$Q_L^+(\sigma,\nu)=(p^{-1}+1)Q_L(\sigma,\nu)+(p+1)\sigma^2(1-\nu)^2LDL',$$

здесь $p=p(\sigma,\nu)$ – единственное положительное решение уравнения

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p+\lambda_i}=\frac{n}{p(p+1)},$$

а $\lambda_i=\lambda_i(\sigma,\nu)\ge0$ – корни уравнения $|Q_L(\sigma,\nu)-\lambda\sigma^2(1-\nu)^2LDL'|=0$, и параметры оценивающего эллипсоида $a_L(\sigma,\nu)$ и $Q_L(\sigma,\nu)$ вычислены как $a^*(t)$ и $Q^*(t)$ в Теореме 1, но вместо матрицы $A^0(t)$ должна быть взята матрица $\tilde{A}_L^0=(1-\nu)(A^0(t)-L)$.

Замечание 2. Для того чтобы получить оценки множеств $\mathcal{W}_L(t_0+\sigma)$ зафиксируем произвольное $\epsilon>0$ и «погрузим» множество $\mathcal{W}_L(t_0,\sigma,\nu)$ в расширенном пространстве R^{n+1} в невырожденный эллипсоид $E(w_{L,\epsilon}(\sigma,\nu),O_{L,\epsilon}(\sigma,\nu))$ так, чтобы выполнялось включение $\mathcal{W}_L(t_0,\sigma,\nu)\subseteq E(w_{L,\epsilon}(\sigma,\nu),O_{L,\epsilon}(\sigma,\nu))$, где

$$w_{L,\epsilon}(\sigma,\nu)=\begin{pmatrix} a_L^+(\sigma,\nu) \\ t_0+\sigma(1-\nu)\end{pmatrix},\quad O_{L,\epsilon}(\sigma,\nu)=\begin{pmatrix} Q_L^+(\sigma,\nu) & 0 \\ 0 & \epsilon^2\end{pmatrix}.$$

Следовательно, для любого $\epsilon>0$ имеем

$$\mathcal{W}_L(t_0,\sigma)=\bigcup_{0\le\nu\le1}\mathcal{W}_L(t_0,\sigma,\nu)\subseteq\mathcal{W}_{L,\epsilon}(t_0,\sigma)=\bigcup_{0\le\nu\le1}E(w_{L,\epsilon}(\sigma,\nu),O_{L,\epsilon}(\sigma,\nu)),$$

причем $h(\mathcal{W}_L(t_0,\sigma),\mathcal{W}_{L,\epsilon}(t_0,\sigma))\to0$ при $\epsilon\to0$. Таким образом, при малых $\epsilon>0$ ошибка перехода от вырожденного эллипсоида к невырожденному мала. Переход к семейству невырожденных эллипсоидов позволяет применить алгоритмы [11] и построить внешнюю эллипсоидальную оценку объединения эллипсоидов $\mathcal{W}_{L,\epsilon}(t_0,\sigma)$ – эллипсоид $E(w_{L,\epsilon}^+(\sigma,\nu),O_{L,\epsilon}^+(\sigma,\nu))$, такой, что

$$\mathcal{W}_L(t_0,\sigma)\subseteq\mathcal{W}_{L,\epsilon}(t_0,\sigma)\subseteq E(w_{L,\epsilon}^+(\sigma,\nu),O_{L,\epsilon}^+(\sigma,\nu)).$$

2.1. Алгоритм построения внешней эллипсоидальной оценки множества достижимости билинейной импульсной системы с фазовыми ограничениями. Зафиксируем произвольное $\epsilon>0$, разобьем отрезок $[t_0,T+\mu]$ на сегменты $[t_i,t_{i+1}]$ заданного отрезка, где $t_i=t_0+ih$ $(i=1,\ldots,m)$, $h=(T+\mu-t_0)/m$, $t_m=T+\mu$. Также разобьем отрезок$[0,1]$ на сегменты $[\nu_i,\nu_{i+1}]$ отрезка, где $\nu_i=ih_*$ $(i=1,\ldots,m)$, $h_*=1/m$, $\nu_0=0$, $\nu_m=1$.

1. Зафиксируем параметр L, положим $\sigma=h$. Для заданного начального эллипсоида $\mathcal{X}_0=E(a_0,Q_0)$ в соответствии с Теоремой 4 определяем множества $\mathcal{W}_L(t_0,\sigma,\nu_i)$, $i=1,\ldots,m$.

2. Находим эллипсоид $E(w_{L,\epsilon}^+(\sigma,\nu),O_{L,\epsilon}^+(\sigma,\nu))$ в расширенном пространстве R^{n+1} такой, что для фиксированного малого параметра $\epsilon>0$ $\mathcal{W}_{L,\epsilon}(t_0,\sigma)=\bigcup_{i=1}^m\mathcal{W}_{L,\epsilon}(t_0,\sigma,\nu_i)\subseteq E(w_{L,\epsilon}^+(\sigma,\nu),O_{L,\epsilon}^+(\sigma,\nu))$. На этом этапе используем алгоритм внешнего эллипсоидального оценивания объединения конечного семейства эллипсоидов [11].

3. По Лемме 1 находим эллипсоид $E(a_L^1, Q_L^1)$ – проекцию эллипсоида $E(w_{L,\epsilon}^+(\sigma,\nu), O_{L,\epsilon}^+(\sigma,\nu))$ на подпространство первых n переменных: $E(a_L^1, Q_L^1) = \pi_z\, E(w_{L,\epsilon}^+(\sigma,\nu), O_{L,\epsilon}^+(\sigma,\nu))$.

4. Рассмотрим динамическую систему на следующем промежутке $[t_1, t_2]$ с эллипсоидом $E(a_L^1, Q_L^1)$, взятым в качестве начального множества в момент t_1.

5. Следующие шаги повторяют предыдущие итерации.

В итоге, проделав все шаги итерационной процедуры, построим внешние эллипсоидальные оценки $E(a_L^+, Q_L^+)$ для множества достижимости $\mathcal{Z}(T; t_0, \mathcal{X}_0, L)$: $\mathcal{Z}(T; t_0, \mathcal{X}_0, L) \subseteq E(a_L^+, Q_L^+)$. Каждая такая оценка $\mathcal{Z}(T; t_0, \mathcal{X}_0, L)$ дает внешнюю эллипсоидальную аппроксимацию множества достижимости $\mathcal{X}(T)$ системы (1)–(4) при наличии фазовых ограничений (6). Более точная оценка получается в результате пересечения эллипсоидов, порожденных алгоритмом при различных значениях матричного параметра L.

Заключение. В данной работе исследованы проблемы оценивания состояний неопределенной динамической управляемой системы с импульсным управлением и с неточно известными начальным состоянием и матрицей, входящей в дифференциальные уравнения динамики системы, также предполагается наличие фазовых ограничений. Указанные неизвестные параметры и неизвестные функции являются элементами заданных (известных) множеств. В работе предложен алгоритм внешнего оценивания множеств достижимости нелинейной управляемой системы рассматриваемого класса. Результаты иллюстрируются модельными примерами.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект РНФ № 16-11-10146).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

2. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.

3. Филиппова Т.Ф. Построение многозначных оценок множеств достижимости некоторых нелинейных динамических систем с импульсным управлением // Тр. Ин-та мат. и механики УрО РАН. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2009. № 4. Т. 15. С. 262–269.

4. Филиппова Т.Ф., Матвийчук О.Г. Алгоритмы оценивания множеств достижимости импульсных управляемых систем с эллипсоидальными фазовыми ограничениями // Автомат. и телемех., 2011. Вып. 9, С. 127–141.

5. Kurzhanski A.B., Filippova T.F. On the theory of trajectory tubes – a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control // Advan. Nonlinear Dynam. Control: a Report from Russia (ed. A.B. Kurzhanski), Progress in Systems and Control Theory. Birkhäuser-Boston. 1993. No. 17. P. 122–188.

6. Filippova T.F. and Matviychuk O.G. Estimates of reachable sets of control systems with bilinear–quadratic nonlinearities // Ural Mathematical Journal, Vol. 1, no. 1, 2015. P. 45–54. DOI: http://dx.doi.org/10.15826/umj.2015.1.004

7. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем: метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.

8. Черноусько Ф.Л. Эллипсоидальная аппроксимация множеств достижимости линейной системы с неопределенной матрицей // Прикладная математика и механика. Т. 60. Вып. 6, 1996. С. 940–950.

9. Chernousko F.L. and Rokityanskii D.Ya. Ellipsoidal bounds on reachable sets of dynamical systems with matrices subjected to uncertain perturbations. // J. of Optimiz. Theory and Appl., Vol. 104, no. 1, 2000. P. 1–19.

10. Rishel R. An extended Pontryagin principle for control system whose control laws contain measures // SIAM J. Control., 1965. Vol. 3. P. 191–205.

11. Вздорнова О.Г., Филиппова Т.Ф. Внешние эллипсоидальные оценки множеств достижимости дифференциальных импульсных систем // Изв. РАН: Теория и сист. управления. 2006. № 1. С. 38–47.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СИСТЕМ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ, ОСНОВАННЫХ НА МЕТОДЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ

Г.А. Французова
Новосибирский государственный технический университет,
г. Новосибирск
frants@ac.cs.nstu.ru

Введение

Организация технологических процессов нередко предполагает текущую оптимизацию работы отдельных агрегатов, т.е. настройку на экстремум их показателя качества. При этом возникает необходимость проектирования специальных автоматических систем, так называемых систем экстремального регулирования (Extremum Seeking Control) [1-5], характерной особенностью которых является наличие двух составляющих: динамической части и статической функции качества с явно выраженным минимумом или максимумом.

Примерами подобных объектов являются различные процессы горения (для двигателей внутреннего сгорания, паровых генерирующих установок и газовых печей), шлифовальные процессы, регулировка антенны радиотелескопа для максимизации принимаемого сигнала и др. [6-8].

Задача экстремального регулирования была сформулирована в середине XX в. [1-3], она предполагает, что поиск экстремума осуществляется в режиме «реального времени» на действующем объекте, который подвержен влиянию внешних неконтролируемых возмущений. Автоматическое управление осуществляется с помощью регулятора, тип которого зависит от модели объекта. Так в случае линейной динамической части могут использоваться типовые регуляторы [9].

Однако технологические процессы чаще всего являются объектами со сложными нелинейными взаимосвязями между регулируемыми параметрами, поэтому для них необходимо применять адекватные методы расчета регуляторов. Наиболее подходящими в этой ситуации являются регуляторы, основанные на методе локализации [9-11] причем возможны варианты одноконтурной [9, 12] и двухконтурной [13-16] реализации замкнутых систем. Подобные системы обладают рядом отличительных особенностей, которые представлены в данной работе.

1. Постановка задачи

Будем рассматривать объект с моделью в виде последовательного соединения динамической части (ДЧ) и экстремальной характеристики (ЭХ), которую без потери общности можно представить в форме параболы

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, \ldots, y^{(n-1)}) + b(t, y, \ldots, y^{(n-1)})u, \\ Y = Y_0 + q\left(y - y_0\right)^2, \end{cases} \tag{1}$$

где $u \in R^1$ – управление, $|u| \le u_m$; $y \in R^1$ – выход ДЧ; $Y \in R^1$ – ЭХ, которая имеет экстремум Y_0 при $y = y_0$. Зависимость от t отражает нестационарность параметров и действие внешних возмущений. Функции $f(\cdot)$ и $b(\cdot)$ непрерывны, дифференцируемы и ограничены: $|f(\cdot)| \le f_{\max}$, $0 < b_{\min} \le |b(\cdot)| \le b_{\max}$.

Цель функционирования системы – автоматическое определение точки экстремума $\{y_0; Y_0\}$ и стабилизация в ней с помощью u, что эквивалентно выполнению свойства $\lim\limits_{t\to\infty}\left[y(t) - y_0 \right] \le \Delta^0$ с заданными показателями качества.

2. Одноконтурные системы на основе метода локализации

Ранее было показано [16], что одноконтурные системы целесообразно синтезировать для экстремальных объектов с ДЧ первого порядка ($n = 1$). При этом специфика проектирования экстремальной системы отражается в форме требований к качеству процесса и предполагает наличие информация о градиенте выходной характеристики $G = \partial Y / \partial y$. Метод локализации предполагает использование старшей производной в законе управления, который в данном случае имеет вид [9, 16]:

$$u = k[F_1(G) - \dot{y}], \tag{2}$$

где k – коэффициент регулятора; функция $F_1(G)$ задается на основе требований к процессу выхода на экстремум в форме желаемого дифференциального уравнения

$$\dot{y} = F_1(G) = -\alpha G, \tag{3}$$

где α выбирается с использованием корневых оценок качества процесса.
В результате подстановки (2) в (1) при $n = 1$ получим описание для выходной переменной динамической части системы,

$$\dot{y} = \frac{f(t, y)}{1 + b(t, y)k} + \frac{b(t, y)k}{1 + b(t, y)k} F_1(G). \tag{4}$$

Отсюда следует, что в асимптотике при $k \to \infty$ процессы замкнутой системы соответствуют желаемой динамике (3). Условие статики ($\dot{y} = 0$) эквивалентно $G = 0$, т.е. равновесный режим системы с регулятором (2) соответствует положению экстремума y_0.

3. Двухконтурные системы, основанные на методе локализации

Для объектов (1) произвольного порядка рекомендуется проектировать двухконтурные системы [14-16] с организацией разнотемповых движений,

в которых внутренний контур включает в себя ДЧ, а внешний – ЭХ объекта. Во внутреннем контуре применяется регулятор на основе метода локализации в виде:

$$u = k\left[F_2(y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}, v) - y^{(n)}\right], \tag{5}$$

где $F_2(\cdot)$ формируется в виде желаемого линейного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = -c_1 y - c_2 \dot{y} - \ldots - c_n y^{(n-1)} + c_1 v, \tag{6}$$

v – управляющее воздействие для внешнего контура.

Подставляя (5) в (1), получим уравнение внутреннего контура

$$y^{(n)} = \frac{f(\cdot)}{1 + b(\cdot)k} + \frac{b(\cdot)k}{1 + b(\cdot)k} F_2(y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}, v),$$

оно в асимптотике вырождается в следующее:

$$\lim_{k \to \infty} y^{(n)} = F_2(y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}, v).$$

Как и в случае одноконтурных систем, соответствующим выбором k можно обеспечить с требуемой точностью динамические свойства согласно уравнению (6), которое в дальнейшем можно рассматривать в качестве модели внутреннего контура [14-15].

Дополнительно потребуем, чтобы процессы во внутреннем контуре протекали существенно быстрее, чем во внешнем [16], т.е. свяжем их соотношением

$$t_1 \approx D t_2, \tag{7}$$

где D – степень «разнесения» процессов. Это позволяет, согласно методу разделения движений [17], при расчете внешнего контура не учитывать динамику внутреннего, а рассматривать только его равновесный режим, т.е. $y = v$.

В этом случае с целью организации движения к экстремуму во внешнем контуре достаточно использовать интегральный регулятор

$$v(t) = -\alpha \int_0^t G(\tau) d\tau, \tag{8}$$

где параметр α выбирается на основе времени выхода на экстремум t_2. Запишем дифференциальное уравнение регулятора (8) с учетом квадратичной аппроксимации ЭХ

$$\dot{v} = -2\alpha q (y - y_0).$$

Процессы во внешнем контуре системы соответствуют модели

$$\dot{y} + 2\alpha q y = 2\alpha q y_0, \tag{9}$$

откуда в статике $y = y_0$. Таким образом, и в случае двухконтурного управления положение равновесия внешнего контура соответствует точке экстремума. Причем процесс движения к экстремуму описывается линейным уравнением (9) и не зависит от модели ДЧ, а также влияния на нее неконтролируемых возмущений.

4. Особенности реализации систем

Практическая реализация алгоритмов управления (2) и (5) предполагает оценку производных выходной переменной динамической части. В обоих случаях для этой цели можно использовать специальный дифференцирующий фильтр [9, 16],

$$\mu_1^n y_1^{(n)} + d_n \mu_1^{n-1} y_1^{(n-1)} + \ldots + d_1 \mu_1 \dot{y}_1 + y_1 = y, \tag{10}$$

который при наличии малой постоянной времени μ_1 приводит к возникновению быстрых составляющих процесса. Для оценки градиента применяется специальная динамическая подсистема [16]

$$\begin{cases} \mu_2 \dot{Y}_1 = (Y - Y_1)\left|\dot{y}_1\right|, \\ G_1 = \mu_2^{-1}(Y - Y_1) sign(\dot{y}_1), \end{cases} \tag{11}$$

где μ_1 много меньше μ_2; y_1 и $y_1^{(n)}$ - оценки выходной переменной динамической части системы и ее производных; Y_1 и $\dot{Y}_1$ - оценки функции качества и ее полной производной соответственно; G_1 - оценка градиента. Наличие двух малых инерционностей дифференцирующих устройств приводит к возникновению в одноконтурной системе трех типов разнотемповых процессов [16]. С учетом условия (7) в двухконтурной системе число разнотемповых процессов может возрасти до четырех [15].

5. Анализ устойчивости

Поскольку в системах на основе метода локализации возникают разнотемповые процессы, то анализ устойчивости осуществляется с использованием метода разделения движений [17]. При этом выделяются отдельные составляющие процесса и исследуются их свойства, что существенно проще проверки устойчивости всей системы в целом.

Рассмотрим разнотемповые процессы в одноконтурной системе. Процедура их выделения подробно описана в работе [19], она предполагает предварительное преобразование системы (1), (2), (10) и (11) к стандартному для метода разделения движений виду путем введения новой переменной $z = \mu_1^{-1}(y - y_1)$:

$$\begin{cases} \dot{y} = f + bk\left[F_1(G_1) - \mathrm{z}\right], \\ \mu_1 \dot{z} = f + bk\left[F_1(G_1) - \mathrm{z}\right] - z, \\ \mu_2 \dot{G}_1 = [Gf + Gbk\left[F_1(G_1) - \mathrm{z}\right] - G_1 z] sign(z). \end{cases} \quad (12)$$

Отсюда предварительно выделяем сверхбыстрые движения, которые обусловлены наличием малой постоянной времени μ_1,

$$\mu_1 \dot{z} = f + bk\left[F_1(G_1) - \mathrm{z}\right] - z, \qquad y = const,\ G_1 = const. \quad (13)$$

Как видно из (13), процесс описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка, он будет всегда устойчив при положительном значении bk.

Следующий по темпу процесс условно назван «быстрым», его модель имеет вид

$$\mu_2 \dot{G}_1 = \left(G - G_1\right) \left| \frac{f + bkF_1(G_1)}{1 + bk} \right|, \qquad y = const. \quad (14)$$

Он также описывается уравнением первого порядка для G_1 и всегда будет устойчив, т.к. $\left| \frac{f + bkF_1(G_1)}{1 + bk} \right| > 0$. Причем по окончании «быстрых» процессов оценка G_1 будет равна точному значению градиента G.

Выделенная из (12) подсистема медленных движений имеет вид

$$\dot{y} = \frac{f(\cdot) + b(\cdot)kF_1(G)}{1 + b(\cdot)k},$$

что соответствует системе с точным дифференцированием (4) и при $k \to \infty$ вырождается в желаемое уравнение (3), которое априори устойчиво.

Таким образом, согласно теоремам метода разделения движений вся одноконтурная система (1), (2), (10) и (11) является асимптотически устойчивой.

При разделении движений в двухконтурной системе (1), (5), (8), (10) и (11) необходимо учитывать требование (7), что приводит к появлению дополнительного темпа процессов, соответствующего движению к экстремуму (9). Поскольку он описывается линейным уравнением первого порядка и всегда устойчив, то вывод относительно асимптотической устойчивости всей двухконтурной системы также будет справедлив.

Подводя итог, следует заметить, что при расчете экстремальной системы, основанной на методе локализации, необходимо обеспечить достаточную степень разделения по темпу отдельных составляющих процесса поиска экстремума. Это гарантирует ее асимптотическую устойчивость, а значит и работоспособность системы в целом. Отдельные рекомендации по расчету параметров представлены в работе [20].

Заключение

Применение метода локализации для организации систем автоматического поиска экстремума позволяет обеспечить движение к экстремуму с заданной точностью и требуемым динамическим качеством при наличии внешних возмущающих факторов, а также при произвольном изменении параметров объекта.

Характерной особенностью таких систем является наличие в них разнотемповых процессов, что обусловлено использованием реальных дифференцирующих устройств. Параметры этих устройств должны рассчитываться с учетом достаточной степени разделения движений, что позволяет существенно упростить анализ устойчивости и гарантирует работоспособность системы.

В зависимости от порядка модели динамической части объекта возможны два варианта реализации системы. В случае динамической части первого порядка целесообразно синтезировать одноконтурную систему (с одним регулятором), которая проще в реализации и не требует большого ресурса управления.

Для объектов произвольного порядка рекомендуется организовывать двухконтурное управление, что обеспечивает наилучшее качество поиска экстремума, но требует большего ресурса управления и дифференцирующих устройств с меньшими постоянными времени, чем в одноконтурной системе. Окончательный выбор способа управления должен соответствовать конкретной технической ситуации

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моросанов И.С. Метод экстремального управления //Автоматика и телемеханика. 1957. № 18. - С. 1077-1092.

2. Казакевич В.В. Системы экстремального регулирования и некоторые способы улучшения их качества и устойчивости. //Автоматическое управление и вычислительная техника. М.: Машгиз. 1958.

3. Blackman P.F. Extremum-seeking regulators // An exposition of adaptive control / Ed. J.H. Westcott. – NY: The Macmillan Company. 1962.

4. Sternby J. Extremum control system: An area for adaptive control? // Preprints Joint Amer. Contr. Conf. – San Francisco, CA, USA, 1980. Vol. WA2-A.

5. Ariyur K.B., Krstic M. Real-time optimization by extremum-seeking control. – New-Jersey: Wiley Interscience Publication. 2003.

6. Frey A.L., Deem W.B., Altpeter R.J. Stability and optimal gain in extremum-seeking adaptive control of a gas furnace // Proc. of the 3th IFAC World Congress. – London. 1966. 48A.

7. Галкин Л.М., Карманов В.И., Стрюков С.М. Автоматическая оптимизация рабочего режима термоэмиссионных преобразователей по давлению паров цезия // Автоматика и телемеханика. 1984. № 11. С. 151 – 158.

8. Tunay I. Antickid control for aircraft via extremum-seeking // Proc. of the American Control Conf. – Arlington, VA, USA. 2001. P. 665 – 670.

9. Востриков А.С., Французова Г.А. Теория автоматического регулирования – М.: Высшая школа, 2006.

10. Востриков А.С., Уткин В.И., Французова Г.А. Системы с производной вектора состояния в управлении // Автоматика и телемеханика. 1982. № 3. С. 22-25.

11. Востриков А.С. Синтез систем регулирования методом локализации. Новосибирск: НГТУ, 2007.

12. Frantsuzova G.A. Localization Principle in the Synthesis Problem of Extremal Control System. // Proc. of the IASTED Intern. Conf. «Automation, Control and Information Technology (ACIT-2002)». – Novosibirsk. 2002. P. 322 - 326.

13. Frantsuzova G.A. Design of Two-Loops Extremum Seeking System by means of Localization Method //Proc. of the IASTED intern. conf. «Automation, Control and Information Technology (ACIT-2005)». 2005. P. 415 – 419.

14. Французова Г.А. Двухконтурные системы экстремального регулирования с предварительной стабилизацией динамической части // Автометрия. - 2006. - № 2. - С. 29 – 37.

15. Французова Г.А. Двухконтурные системы экстремального регулирования с формированием заданной динамики // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2008. – № 5. – С. 7–11.

16. Французова Г.А. Свойства различных типов систем автоматического поиска экстремума, основанных на методе локализации / Автометрия. – 2012. – Т. 48, № 5. – С. 438–446.

17. Геращенко Е.И., Геращенко С.М. Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем. – М.: Наука. 1975.

18. Французова Г.А. Условия разделимости движений для автоматических систем поиска экстремума с вектором скорости в управлении // Научный вестник НГТУ. 2003. № 1 (14). С. 3 – 16.

19. Французова Г.А. Об условиях разрешимости задачи синтеза автоматической системы экстремального управления // Научный вестник НГТУ. – 2001. – № 2. – С. 3 – 9.

20. Французова Г.А., Шилкова Н.Ю. О влиянии начальных условий на свойства одноконтурной системы экстремального регулирования, основанной на методе локализации // Автоматика и программная инженерия - 2016. - № 4. - С. 10-18.

УПРАВЛЕНИЕ С КОМПЕНСАЦИЕЙ ВОЗМУЩЕНИЙ И ПОМЕХ ИЗМЕРЕНИЯ*

И.Б. Фуртат (ИПМаш РАН, Университет ИТМО, Россия, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр-т В.О., 61)
E-mail: cainenash@mail.ru

CONTROL WITH COMPENSATION OF DISTURBANCES AND MEASUREMENT NOISES

I.B. Furtat (IPME RAS, ITMO University, 199178, St. Petersburg, Bolshoj pr. V.O., 61)

Keywords: nonlinear system, compensation, disturbance, noise, parametric uncertainties, S-procedure, LMI.

Введение. В теории и практике автоматического управления отдельное внимание уделяется задаче компенсации параметрических и внешних возмущений. Это связано с тем, что большинство технических и технологических процессов подвержены изменению параметров в процессе функционирования, а также отрицательно сказывается влияние внешних воздействий на сам процесс. Принцип компенсации возмущений основан на поиске закона управления, значение которого противоположно значению возмущений. Такой подход позволяет управлять объектами без значительного увеличения амплитуды управляющего воздействия, что важно при решении прикладных задач.

В настоящее время для компенсации возмущений широко используется метод инвариантных эллипсоидов [1], методы с использованием внутренней модели возмущений [2], методы идентификации параметров синусоидальных возмущений [3], метод вложения систем [4], метод синтеза универсальных регуляторов [5], метод вспомогательного контура [6] и т.д.

Проблема компенсации возмущений значительно усложняется, если в канале измерения присутствуют помехи, так как для одновременной компенсации и возмущений и помех требуется найти между ними компромисс с учетом особенности математической модели объекта. Помехи измерения обусловлены как влиянием внешней среды на средства измерения, так и особенностью самих измерительных устройств (абсолютная и относительная погрешности, класс точности, тип устройства и т.п.).

Примером управления в условиях действия возмущений и помех измерения является управление электрическим генератором в общей энергетической сети [7-9]. Возмущения связаны с изменением сопротивления линий электропередач (короткое замыкание, суточные изменение нагрузки, обледенение и т.п.), колебанием параметров сети, отклонением меха-

нической мощности, подаваемой на генератор, от номинального значения и т.д. [9]. Помехи обусловлены погрешностью в измерениях угла поворота ротора относительно синхронной оси вращения, угловой скорости ротора и переходной ЭДС, особенно в аварийных режимах [7, 8].

Для построения алгоритмов управления при наличии помех в канале измерения эффективно используются метод H_∞-оптимизации [10], метод вспомогательного контура [6], методы анализа влияния помех измерения на качество работы замкнутой системы [11-13] и т.д. Отметим, что алгоритм [6] работоспособен при более общих условиях на структуры матриц модели объекта, по сравнению с [10]. Также в [6] рассматриваются произвольные ограниченные возмущения, тогда как в [3] только синусоидальные. Несмотря на эффективность работы алгоритмов [6, 10-13], они имеют следующие особенности:

1) в [6, 10-13] размерность помех измерения меньше размерности вектора состояния объекта;

2) в [6, 11-13] параметрические и внешние возмущения могут присутствовать только в определенных уравнениях модели объекта;

3) в [6, 13] используется наблюдатель с большим коэффициентом усиления (high-gain observer), поэтому из-за наличия высокочастотного сигнала в помехах измерения существенно возрастает погрешность оценки производных;

4) в [6, 11-13] отсутствуют условия расчет параметров алгоритма управления. Параметры подбираются на этапе моделирования замкнутой системы.

Решению данных проблем для нелинейных систем посвящена настоящая статья. Для синтеза алгоритма компенсации помех измерения будет развит подход [6] с использованием результата [14]. Рассмотрены помехи измерения, размерности которых равны размерности вектора состояния объекта. Параметрические и внешние возмущения могут присутствовать в любом уравнении модели объекта. Применение подхода [14] также позволит исключить использование наблюдателя в системе управления и получить аналитические условия расчета параметров алгоритма.

Постановка задачи. Рассмотрим объект управления, модель которого описывается уравнениями

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Bf(x, u, t), \tag{1}$$

$$z(t) = x(t) + \xi(t), \tag{2}$$

где $x(t) = [x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)]^{\mathrm{T}}$ – вектор состояния, $u(t) \in R$ – сигнал управления, $f(x, u, t) \in R$ – функция, зависящая от параметрических и внешних возмущений, $z(t) \in R^n$ – сигнал, доступный измерению, $\xi(t) =$

= $[\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)]^{\mathrm{T}}$ – ограниченная помеха вместе с ее первой производной, A – известная гурвицева матрица соответствующей размерности, $B = [b_1, \ldots, b_n]^{\mathrm{T}}$, $b_i \neq 0$.

Наложим дополнительные *предположения* на объект управления.

Предположение 1. Функция возмущения $f(t) = f(x, u, t)$ представлена в виде $f(t) = \psi(x) + c_0 u(t) + \varphi(t)$, где $c_0 > -1$ и $c_0 \in [c_{\min}, c_{\max}]$, $c_{\min}$ и $c_{\max}$ известны, $\left|\frac{\partial \psi(\theta)}{\partial \theta}\right| \leq L$ для любых $\theta \in R^n$, $L > 0$, φ – ограниченная функция вместе с ее первой производной. Здесь и далее $|\cdot|$ – евклидова норма соответствующего вектора.

Предположение 2. В объекте управления доступен измерению только сигнал $z(t)$.

Необходимо разработать систему управления, которая обеспечит выполнение целевого условия

$$\limsup_{t \to \infty} |x(t)| \leq \delta, \tag{3}$$

где $\delta > 0$ – точность регулирования, значение которой будет определено в теореме.

Алгоритм компенсации помех измерения. Перепишем уравнение (2) в виде

$$z(t) = x(t) + \sum_{j=1}^{n} E_j \xi_j(t), \tag{4}$$

где $E_j = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]^{\mathrm{T}}$ – вектор соответствующей размерности, у которого j-я компонента равна 1, а остальные нулю.

Выберем в системе (1) i-ю строку, в которой $b_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$. Обозначим

$$\tilde{\xi}(t) = [\xi_1(t), \ldots, \xi_{i-1}(t), \xi_{i+1}(t), \ldots, \xi_n(t)]^{\mathrm{T}}, \quad \tilde{E} = [E_1, \ldots, E_{i-1}, E_{i+1}, \ldots, E_n]^{\mathrm{T}},$$

и перепишем (4) как

$$z(t) = x(t) + \tilde{E}\tilde{\xi}(t) + E_i \xi_i(t). \tag{5}$$

Исключим i-е уравнение в (5). Для этого умножим (5) слева на $\tilde{I}$, где $\tilde{I}$ – матрица размерности $(n-1) \times n$, полученная из единичной матрицы порядка n путем вычеркивания i-й строки. В результате получим

$$\tilde{z}(t) = \tilde{I}x(t) + \tilde{\xi}(t), \tag{6}$$

где $\tilde{z}(t) = \tilde{I}z(t)$.

Продифференцировав уравнение (7) по времени вдоль траекторий системы (1), имеем

$$\dot{\tilde{z}}(t) = \tilde{I}Ax(t) + \tilde{I}Bu(t) + \tilde{I}Bf(t) + \dot{\tilde{\xi}}(t). \tag{8}$$

Выразив в (5) переменную $x(t)$ и подставив ее в (8), получим

$$\dot{\tilde{z}}(t) = \tilde{I}Az(t) - \tilde{I}A\tilde{E}\tilde{\xi}(t) - \tilde{I}A\tilde{E}_i\xi_i(t) + \tilde{I}Bu(t) + \tilde{I}Bf(t) + \dot{\tilde{\xi}}(t). \tag{9}$$

Введем обозначения

$$\tilde{A} = \tilde{I}A\tilde{E},\ \tilde{A}_1 = \tilde{I}A,\ \tilde{A}_2 = \tilde{I}AE_i,\ \tilde{B} = \tilde{I}B$$

и перепишем (9) в виде

$$\dot{\tilde{\xi}}(t) = \tilde{A}\tilde{\xi}(t) + \dot{\tilde{z}}(t) - \tilde{A}_1 z(t) - \tilde{B}u(t) - \tilde{B}f(t) + \tilde{A}_2\xi_i(t). \tag{10}$$

Введем в рассмотрение вектор $\bar{\xi}(t)$, который является оценкой вектора $\tilde{\xi}(t)$ и определяется выражением

$$\dot{\bar{\xi}}(t) = \tilde{A}\bar{\xi}(t) + \dot{\tilde{z}}(t) - \tilde{A}_1 z(t). \tag{11}$$

Для реализации алгоритма (11) требуется информация о производной $\dot{\tilde{z}}(t)$, которую можно получить используя наблюдатель производных. Воспользуемся следующей процедурой для исключения наблюдателя. Найдем решение дифференциального уравнения (11) в виде

$$\bar{\xi}(t) = \int_0^t \left[\tilde{A}\bar{\xi}(s) - \tilde{A}_1 z(s)\right]ds + \tilde{z}(t) + \bar{\xi}(0) - \tilde{z}(0). \tag{12}$$

Для реализации (12) требуется точная информация о начальном условии $\tilde{z}(0)$. Покажем, что этого можно избежать. Сформируем новый алгоритм оценки помехи в виде

$$\hat{\xi}(t) = \int_0^t \left[\tilde{A}\hat{\xi}(s) - \tilde{A}_1 z(s)\right]ds + \tilde{z}(t) + \gamma, \tag{13}$$

где $\hat{\xi}(t)$ – новый вектор оценки сигнала $\tilde{\xi}(t)$, $\gamma = \hat{\xi}(0) - \hat{z}$ $\hat{z}$ – оценка значения $\tilde{z}(0)$. Отметим, что если матрица $\tilde{A}$ гурвицева, то разность между векторами $\bar{\xi}(t)$ и $\hat{\xi}(t)$ экспоненциально стремится к нулю, так как вычитая из (13) выражение (12) и дифференцируя их по времени, получим $\dot{\hat{\xi}}(t) - \dot{\bar{\xi}}(t) = \tilde{A}\left(\hat{\xi}(t) - \bar{\xi}(t)\right)$.

Рассмотрим ошибку

$$e(t) = \tilde{\xi}(t) - \hat{\xi}(t), \tag{14}$$

которая характеризует качество оценивания вектора $\tilde{\xi}(t)$ с использованием алгоритма (13). Учитывая (10) и (13), продифференцируем (14) по времени:

$$\dot{e}(t) = \tilde{A}e(t) - \tilde{B}\big(u(t) + f(t)\big) + \tilde{A}_2\xi_i(t). \qquad (15)$$

Из уравнения (15) следует, что на величину ошибки $e(t)$ влияют значения функций $\xi_i(t)$, $f(t)$, $u(t)$ и качество оценки вектора $x(t)$. Причем, соответствующим выбором сигнала управления $u(t)$ можно уменьшить влияние возмущения $f(t)$ на качество оценивания вектора $\tilde{\xi}(t)$. Решению проблем построения оценки $x(t)$ и компенсации возмущения $f(t)$ посвящен следующий раздел.

Алгоритм компенсации возмущений. Выпишем в системе (1) i-е уравнение. Для этого умножим слева (1) на матрицу E_i:

$$\dot{x}_i(t) = E_i^{\mathrm{T}}Ax(t) + E_i^{\mathrm{T}}Bu(t) + E_i^{\mathrm{T}}Bf(t), \qquad (16)$$

где $x_i(t) = E_i^T x(t)$. Выразим из (16) сигнал возмущения

$$f(t) = \left(E_i^{\mathrm{T}}B\right)^{-1}\left[\dot{x}_i(t) - E_i^T Ax(t) - E_i^T Bu(t)\right]. \qquad (17)$$

Из (17) следует, что для получения информации о функции $f(t)$ необходима информация о сигналах $x(t)$ и $\dot{x}_i(t)$. Однако данная информация напрямую не доступна из постановки задачи. Поэтому дальнейшие действия необходимы для получения оценок сигналов $x(t)$ и $\dot{x}_i(t)$.

В предыдущем разделе был синтезирован алгоритм (13), который позволяет оценить часть сигнала помехи $\xi(t)$ в (2) в виде $\hat{\xi}(t)$. Воспользуемся функцией $\hat{\xi}(t)$ для уточнения оценки вектора состояния. Пусть $\hat{x}(t)$ – оценка $x(t)$. Принимая во внимание (5) и (13), запишем выражение для $\hat{x}(t)$ как

$$\hat{x}(t) = z(t) - \tilde{E}\hat{\xi}(t) = x(t) + \tilde{E}e(t) + E_i\xi_i(t). \qquad (18)$$

Согласно [14], введем оценку $\hat{f}(t)$ возмущения $f(t)$ в виде

$$\hat{f}(t) = \left(E_i^{\mathrm{T}}B\right)^{-1}\left[\dot{\hat{x}}_i(t) - E_i^{\mathrm{T}}A\hat{x}(t) - \alpha(p)E_i^{\mathrm{T}}Bv(t)\right], \qquad (19)$$

где $\alpha(p)$ – линейный дифференциальный оператор, $p = d / dt$, $v(t)$ – вспомогательное управляющее воздействие.

Для компенсации возмущения введем вспомогательное управляющее воздействие в виде

$$v(t) = -\hat{f}(t). \qquad (20)$$

Подставив (19) в (20), получим следующее выражение

$$(1-\alpha(p))v(t) = -\left(E_i^{\mathrm{T}}B\right)^{-1}\left[\dot{\hat{x}}_i(t) - E_i^{\mathrm{T}}A\hat{x}(t)\right]. \qquad (21)$$

Зададим $\alpha(p) = 1 - \mu p$, где $\mu > 0$ – достаточно малое число. Сформируем закон управления $u(t)$ в виде $u(t) = v(t)$, где $v(t)$ определяется как решение дифференциального уравнения (21). Таким образом

$$u(t) = -\frac{1}{\mu}\left(E_i^{\mathrm{T}}B\right)^{-1}\left[\hat{x}_i(t) - E_i^{\mathrm{T}}A\int_0^t \hat{x}(s)ds - \hat{x}_i(0) + \mu E_i^{\mathrm{T}}Bu(0)\right]. \qquad (22)$$

Для реализации (22) требуется информация о векторе $\hat{x}_i(0)$. На самом деле для компенсации возмущений не обязательно знать точное значение $\hat{x}_i(0)$, то есть закон управления $u(t)$ можно сформировать как

$$u(t) = -\frac{1}{\mu}\left(E_i^{\mathrm{T}}B\right)^{-1}\left[\hat{x}_i(t) - E_i^{\mathrm{T}}A\int_0^t \hat{x}(s)ds - \theta\right], \qquad (23)$$

где $\theta = s(0) + \mu E_i^{\mathrm{T}}Bu(0)$, $s(0)$ – оценка величины $\hat{x}_i(0)$.

Перед формулировкой утверждения введем следующие обозначения:

$$A_{21} = \frac{1}{\mu}(1+c_0)A,\ \ A_{22} = \frac{1}{\mu}(-I_n - I_n c_0 + \mu A),\ \ A_{23} = \frac{1}{\mu}B(1+c_0)\left(E_i^{\mathrm{T}}B\right)^{-1}E_i^{\mathrm{T}}A\tilde{E},$$

$$A_{43} = \frac{1+c_0}{\mu}\left[\tilde{A} - \tilde{B}\left(E_i^{\mathrm{T}}B\right)^{-1}E_i^{T}A\tilde{E}\right],\ \ A_{44} = \frac{1}{\mu}\left(-(1+c_0)I_{n-1} + \mu\tilde{A}\right),$$

$$F = \begin{bmatrix} \mathrm{O}_{n\times 1} \\ B \\ \mathrm{O}_{(n-1)\times 1} \\ -\tilde{B} \end{bmatrix},\ \ B_{21} = B,\ \ B_{22} = -\frac{1}{\mu}B(1+c_0)\left(E_i^{\mathrm{T}}B\right)^{-1}E_i^{\mathrm{T}}AE_i,$$

$$B_{23} = -\frac{1}{\mu}B(1+c_0)\left(E_i^{\mathrm{T}}B\right)^{-1},\ \ B_{41} = -\tilde{B},\ \ B_{42} = -\frac{1}{\mu}\tilde{B}(1+c_0)\left(E_i^{\mathrm{T}}B\right)^{-1}E_i^{\mathrm{T}}AE_i + \frac{1}{\mu}\tilde{A}_2,$$

$$B_{43} = \frac{1}{\mu}\tilde{B}(1+c_0)\left(E_i^{\mathrm{T}}B\right)^{-1},$$

$$A_e = \begin{bmatrix} \mathrm{O}_{n\times n} & I_n & \mathrm{O}_{n\times(n-1)} & \mathrm{O}_{n\times(n-1)} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \mathrm{O}_{n\times(n-1)} \\ \mathrm{O}_{(n-1)\times n} & \mathrm{O}_{(n-1)\times n} & \mathrm{O}_{(n-1)\times(n-1)} & I_{n-1} \\ \mathrm{O}_{(n-1)\times n} & \mathrm{O}_{(n-1)\times n} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix},\ \ B_e = \begin{bmatrix} \mathrm{O}_{n\times 1} & \mathrm{O}_{n\times 1} & \mathrm{O}_{n\times 1} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ \mathrm{O}_{(n-1)\times 1} & \mathrm{O}_{(n-1)\times 1} & \mathrm{O}_{(n-1)\times 1} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} \end{bmatrix},$$

$$C = \left[\mathrm{O}_{n\times n}\ \ I_n\ \ \mathrm{O}_{n\times(n-1)}\ \ \mathrm{O}_{n\times(n-1)}\right],$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} A_e^T P + PA_e + 2\beta P + \tau LC^T C & PF & PB_e \\ * & -\tau & \mathrm{O}_{1\times 3} \\ * & * & -\rho I_3 \end{bmatrix}. \qquad (24)$$

Здесь $\mathrm{O}_{n\times l}$ – нулевая матрица размерности $n \times l$, I_n – единичная матрица порядка n, $\beta > 0$, $\rho > 0$, $\tau > 0$, $P > 0$ – положительно определенная матрица, "*" обозначает симметричный блок симметричной матрицы.

Теорема. Пусть выполнены условия предположений 1, 2 и матрица $\tilde{A}$ – гурвицева. Если для заданных чисел $\beta > 0$ и $\mu > 0$ существуют коэффициенты $\tau > 0$, $\rho > 0$ и матрица $P > 0$ такие, что выполнено линейное матричное неравенство (ЛМН) $\Psi < 0$, то система управления, состоящая из алгоритма оценки помехи (13) и закона управления (23) обеспечит выполнение целевого условия (3) с точностью $\delta = \sqrt{\dfrac{\rho}{2\beta\lambda_{\min}(P)}}\,\bar{d}$, где $\bar{d} = \sup\limits_{t\ge 0}|d(t)|$, $d(t) = \left[\dot{\varphi}(t), \xi_i(t), \dot{\xi}_i(t)\right]^{\mathrm{T}}$.

Замечание. Из (15) следует, что существенное влияние на точность регулирования δ в (3) оказывает i-я компонента вектора $\xi(t)$. Поэтому для синтеза алгоритма управления можно воспользоваться следующей рекомендацией. Предположим, что в (1) вектор B содержит несколько ненулевых компонент. Тогда для синтеза алгоритма компенсации возмущений рекомендуется, чтобы i-е уравнение соответствовало наименьшей по значению компоненте вектора $\xi(t)$.

Пример. Рассмотрим объект управления (1), (2) в виде

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} f(x,u,t), \qquad (25)$$

$$z(t) = x(t) + \xi(t).$$

Пусть $c_0 \in [-0{,}5;\ 5]$. Неизвестная функция $\psi(x)$ задана в виде $\psi(x) = \sum\limits_{i=1}^{3} x_i(t) + 0{,}5\cos x_i(t)$. Очевидно, что $L = 4{,}5$ в предположении 1.

Сформируем систему управления. В качестве i-го уравнения выберем третье уравнение в (25). Тогда $\tilde{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Следовательно, $\tilde{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ и $\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Примем $\gamma = 0$ и сформируем алгоритм оценки помехи (13) в виде

$$\hat{\xi}(t)=\int_0^t\left(\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\hat{\xi}(s)-\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{bmatrix}z(s)\right)ds+\tilde{z}(t),$$

где $\tilde{z}(t)=[z_1(t),\, z_2(t)]^{\mathrm{T}}$.

Так как $E_i=[0\,0\,1]^{\mathrm{T}}$, то $E_i^{\mathrm{T}}B=3$ и $E_i^{\mathrm{T}}A=[-1\,0\,0]$. Зададим $\theta=0$ и определим сигнал управления (23) в виде

$$u(t)=-\frac{1}{3\mu}\left(\hat{x}_i(t)-\int_0^t\left([-1\,0\,0]\hat{x}(s)\right)ds\right), \qquad (26)$$

где, согласно (18), $\hat{x}(t)=z(t)-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\hat{\xi}(t)$.

Для объекта (25) ЛМН $\Psi<0$ (см. Теорему) при $\mu\le 0{,}08$. Выберем $\mu=0{,}01$ в (26). Пусть в (25) $x(0)=[1\;1\;1]^{\mathrm{T}}$, $c_0=1$ и

$$\varphi(t)=5\sin 0{,}7t+\frac{1}{0{,}01p+1}d_1(t),\;\; \xi_1(t)=1+10\sin 3t+\frac{1}{0{,}001p+1}d_2(t),$$

$$\xi_2(t)=-2+7\cos 3t+\frac{1}{0{,}001p+1}d_3(t),\;\; \xi_3(t)=0{,}01\sin 0{,}8t+\frac{2}{p+1}d_4(t),$$

где $d_1(t)$, $d_2(t)$, $d_3(t)$ и $d_4(t)$ – случайные нормально распределенные кусочно-постоянные функции с нулевыми математическими ожиданиями, единичными дисперсиями и длительностями 0,07 (с), 0,01 (с), 0,03 (с) и 0,1 (с) соответственно. Дополнительно, $|d_1(t)|\le 5$, $|d_2(t)|\le 10$, $|d_3(t)|\le 12$ и $|d_4(t)|\le 0{,}05$. На рисунке приведены результаты переходных процессов по $x(t)$.

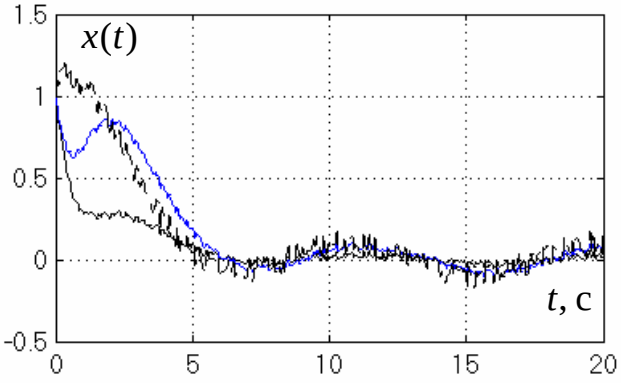

Рис. Переходные процессы по x(t)

Заключение. Получен алгоритм компенсации возмущений и помех измерения, действующих на нелинейные динамические объекты с неизвестными параметрами. В отличие от существующих результатов, предложенный алгоритм компенсирует помехи измерения, размерности которых равны размерности вектора состояния, не используется наблюдатель про-

изводных, а возмущения могут присутствовать в любом уравнении модели объекта. Получены условия, позволяющие рассчитать параметры алгоритма управления для обеспечения устойчивости замкнутой системы. Отметим, что качество регулирования в установившемся режиме существенно зависит от величины компоненты вектора помехи, которая присутствует при синтезе системы компенсации возмущений. Результаты моделирования подтвердили результаты аналитических расчетов и эффективность предложенной системы управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // Автоматика и телемеханика. 2008. № 5. С. 72–90.

2. Никифоров В.О. Нелинейная система управления с компенсацией внешних детерминированных возмущений // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 4. С. 69–73.

3. Fedele G., Ferrise A. Biased Sinusoidal Disturbance Compensation With Unknown Frequency // IEEE Trans. on Automat. Control. 2013. V. 58. № 12. P. 3207–3212.

4. Буков В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во научной лит-ры. Н.Ф. Бочкаревой, 2006.

5. Проскурников А.В., Якубович В.А. Универсальные регуляторы в задачах оптимального управления с эталонной моделью при неизвестных внешних сигналах // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2012. № 2. С. 49.

6. Цыкунов А.М. Робастное управление с компенсацией возмущений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012.

7. Guo G., Hill D.J., Wang Y. Nonlinear output stabilization control for multimachine power systems // IEEE Trans. on Circuits and Systems, part 1. 2000. V. 47.№ 1. P. 46–53.

8. Chen Y., Liu F., Mei S., Ma J. Toward adaptive robust state estimation based on MCC by using the generalized Gaussian density as kernel functions // Electrical Power and Energy Systems. 2015. V. 71. P. 297–304.

9. Беляев А.Н., Смоловик С.В., Фрадков А.Л., Фуртат И.Б. Робастное управление электрическим генератором при нестационарной механической мощности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2013. № 5. С. 78-86.

10. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления. М.: Изд-во МТТУ им. Н.Э. Баумана, под ред. Егупова Н.Д. 2002.

11. Baillieul J. Feedback Coding for Information-Based Control: Operating Near the Data Rate Limit // Proc. 41st IEEE Conf. Decision Control, ThP02-6, Las Vegas, Nevada, USA, 2002. P. 3229–3236.

12. Delchamps D.F. Extracting State Information from a Quantized Output Record // System Control Letters. 1989. V. 13. P. 365–372.

13. Furtat I.B., Fradkov A.L., Liberzon D. Compensation of disturbances for MIMO systems with quantized output // Automatica. 2015. V. 60. P. 239–244.

14. Фуртат И.Б. Алгоритм робастного управления линейными объектами с векторными входами-выходами в условии насыщения сигнала управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. №9. Т. 17. С. 579–587.

СЛАБАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА

М.М. Хрусталев (Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Россия, 117997, Москва**,** ул. Профсоюзная, д. 65)
E-mail: mmkhrustalev@mail.ru

WEAK INVARIANCE OF DIFFUSION STOCHASTIC SYSTEMS

M.M. Khrustalev (V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences 65 Profsoyuznaya street, Moscow 117997, Russia)

Keywords: stochastic system, weak invariance, diffusion system, control.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ: грант № 16-08-00472.

Введение. Важной задачей теории управления динамическими системами является задача синтеза стратегии управления, обеспечивающей постоянное значение терминального критерия (в общем случае векторного) независимо от действующих на систему детерминированных, но заранее неизвестных, возмущений. Примером такой задачи является посадка космического летательного аппарата в заданную точку поверхности Земли в условиях действия возмущений плотности атмосферы.

Эту задачу Л.И. Розоноэр назвал задачей слабой инвариантности и получил для нее локальные необходимые условия [1], аналогичные принципу максимума Л.С. Понтрягина для задачи оптимального управления.

В моей работе [2] были получены глобальные необходимые и одновременно достаточные условия слабой инвариантности.

В данной работе рассматривается аналог задачи слабой инвариантности для стохастических систем диффузионного типа.

Достаточные условия слабой инвариантности. Будем предполагать, что управляемая динамическая система описывается векторным дифференциальным уравнением Ито

$$dx(t) = f(t, x(t), u(t, x(t), v(t)), v(t))dt + \\ + g(t, x(t), u(t, x(t), v(t)), v(t))dw(t) \quad (1)$$

с заданным начальным условием $x(t_0) = x_0$. Здесь $t \in [t_0, t_1]$ – время, $x := (x_1,...,x_n)^T \in R^n$ – состояние системы, $w(t) := (w_1(t),...,w_r(t))^T \in R^r$ – стандартный винеровский процесс, $(\cdot)^T$ – операция транспонирования, $u(t,x,v) := (u_1(t,x,v),...,w_m(t,x,v))^T \in R^m$ – стратегия управления. Как и $x(t)$, функция $v(t)$ – не управляемый диффузионный процесс ("цветной

шум" по отношению к уравнению (1)), описываемый уравнением Ито, не зависящим от $x(t)$ с произвольным, но заданным, распределением начального состояния $v(t_0)$.

Решения уравнений Ито будем понимать в слабом смысле.

Компоненты $f_i, g_{ik}, u_j, i=\overline{1,n}, k=\overline{1,r}, j=\overline{1,m}$ функций $f(t,x,u,v)$, $g(t,x,u,v)$, $u(t,x,v)$ предполагаются измеримыми по Борелю.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что система (1), замкнутая стратегией управления $u(t,x,v)$ слабо инвариантна относительно терминального критерия

$$J = F(x(t_1)), \qquad (2)$$

если критерий (2) принимает постоянное значение с вероятностью 1.

Функция $x \to F(x): R^n \to R^1$ в (2) предполагается дважды непрерывно дифференцируемой.

О п р е д е л е н и е 2. Введем в рассмотрение множество Φ функций $(t,x) \to \varphi(t,x): [t_0,t_1] \times R^n \to R^1$, имеющих непрерывные производные

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \ \frac{\partial \varphi}{\partial x} := \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right)^T \in R^n, \ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} := \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{i,j=\overline{1,n}}.$$

О п р е д е л е н и е 3. Стратегию $u(t,x,v)$ будем называть допустимой, если уравнение Ито (1) имеет слабое решение на интервале $[t_0,t_1]$.

Для краткости введем обозначения

$$\sigma(t,x,u,v) := g(t,x,u,v)\, g(t,x,u,v)^T, \qquad (3)$$

$$K(t,x,u,v) := \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x}^T f(t,x,u,v) + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\sigma(t,x,u,v) \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x^2} \right), \qquad (4)$$

$$S(t,x,u,v) := \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x}^T g(t,x,u,v). \qquad (5)$$

Т е о р е м а . Для того чтобы система (1), замкнутая допустимой стратегией $u(t,x,v)$, была слабо инвариантна относительно критерия (2) достаточно существования функции $\varphi(t,x) \in \Phi$ и борелевской функции $t \to \mu(t): [t_0,t_1] \to R^1$, таких что

1) $\varphi(t_1, x) = F(x), \quad x \in R^n$,

для всех $t \in [t_0, t_1], \ x \in R^n, \ v \in R^r$ выполнены условия

2) $K(t, x, u(t,x,v), v) = \mu(t)$,

3) $S(t, x, u(t,x,v), v) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . При сделанных предположениях относительно стратегии $u(t,x,v)$ (определение 3) на интервале $[t_0, t_1]$ справедлива формула что

$$d\varphi(t, x(t)) = K(t, x(t), u(t, x(t), v(t)), v(t)) + \\ + S(t, x(t), u(t, x(t), v(t)), v(t))dw(t)\ ,$$

из которой в силу предположений 2), 3) теоремы следует, что $d\varphi(t, x(t)) = \mu(t)dt, \quad t \in [t_0, t_1]$, откуда с вероятностью 1

$$\varphi(t_1, x(t_1)) = \varphi(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t_1} \mu(t)\, dt = \bar{J} = \text{const}. \qquad (6)$$

Приняв во внимание условие 1) теоремы получим равенство

$$F(x(t_1) = \bar{J} = \text{const}, \qquad (7)$$

справедливое при любых реализовавшихся значениях $x(t_1)$, то есть с вероятностью 1. Это и означает слабую инвариантность системы (1).

З а м е ч а н и е 1 . Если терминальных условий несколько, можно считать, что критерий (2) векторный и записать условия теоремы для каждой компоненты критерия.

З а м е ч а н и е 2 . Из теоремы и ее доказательства видно, что условия теоремы гарантируют слабую инвариантность системы при одной и той же стратегии $u(t, x, v)$ и фиксированных функциях $\varphi(t, x)$, $\mu(t)$ для любого начального состояния $x(t_0) = x_0 \in R^n$. Более того, если задано ограниченное множество $B_0 \subset R^n$ и $x_0 \in B_0$, то в силу непрерывности функции $\varphi(t, x)$ существуют постоянные a, b, такие что справедливо неравенство $a \le \varphi(t_0, x_0) \le b$ при $x_0 \in B_0$. А тогда из равенств (6), (7) следует, что терминальное значение критерия $F(x(t_1)$ будет лежать в диапазоне

$$a \le F(x(t_1) \le b\ .$$

Синтез слабо инвариантных систем. Рассмотрим сначала частный случай, когда $g(t, x, u, v) \equiv 0$. В этом случае в уравнение системы (1) входит лишь "цветной шум" $v(t)$.

В такой ситуации условие 3) теоремы выполняется тривиально, а условие 2) приобретает вид

$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x}^{T} f(t, x, u(t,x,v), v) = \mu(t) \ . \qquad (8)$$

Нетрудно видеть, что условия 1), (8), рассматриваемые в совокупности, совпадают с достаточными условиями слабой инвариантности детерминированной системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u(t,x,v), v)$$

относительно критерия (2), полученными в [2].

Итак, в случае, когда винеровский процесс $w(t)$ в уравнении (1) отсутствует, можно забыть о стохастической природе возмущения $v(t)$ и рассматривать $v(t)$ как детерминированное, но неизвестное заранее возмущение. Следует заметить, что интересен сам факт такой возможности.

В этой ситуации технологические приемы синтеза инвариантных систем в прикладных задачах подробно описаны в [3]. Там же и в [4] приведено аналитическое решение достаточно сложной нелинейной задачи управления посадкой космического летательного аппарата в заданную точку поверхности Земли при наличии атмосферных возмущений (плотность атмосферы на больших высотах может отличаться от стандартной в несколько раз). Полученный алгоритм имеет нулевую методическую ошибку.

В случае, когда в уравнении системы (1) присутствует винеровский процесс $w(t)$ $(g \neq 0)$, ситуация значительно усложняется, так как нужно выполнить дополнительное условие 3) теоремы.

Оно, как и условие 2), может быть выполнено как за счет выбора функции $\varphi(t,x)$, так и за счет выбора стратегии $u(t,x,v)$.

Если стратегия $u(t,x,v)$ имеет более одной компоненты, возможности выполнения условий 2), 3) теоремы расширяются.

В случае же когда равенство 3) не содержит управления, то оно представляет собой систему r линейных уравнений в частных производных первого порядка для функции $\varphi(t,x)$. Условие 1) теоремы это граничное условие для системы уравнений 3). Методология решения таких уравнений широко известна. В этом случае условие 2) можно попытаться выполнить за счет выбора стратегии $u(t,x,v)$ при заданной функции $\varphi(t,x)$.

Если обратиться к работам [5, 6], то нетрудно видеть, что равенства 2), 3) в теореме это условия того, что функция $\varphi(t,x)$ является первым интегралом системы (1). Правда в этих работах условие 2) записано в другой форме.

Дифференцируя уравнения 3) по переменным x_i в предположении, что функция $g(t, x, u(t,x,v), v)$ непрерывно дифференцируема по x , можно получить равенство

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}g_{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\ .$$

И тогда в выражении (4) для функции K можно избавиться от частных производных функции φ второго порядка. Именно эта форма равенства (4) и, соответственно, условия 2) теоремы используется в работах [5, 6].

Такая замена представляется не целесообразной по двум причинам.

Во-первых добавляется лишнее условие дифференцируемости функции g по x и, соответственно, стратегии $u(t,x,v)$. Во-вторых, если мы ставим цель выполнить условие 2) теоремы за счет выбора стратегии $u(t,x,v)$, то вместо алгебраического уравнения мы имеем уравнение в частных производных.

П р и м е р 1 . Система (1) имеет вид

$$dx_1=(x_2-x_3)dt+x_2dw\ ,\qquad dx_2=(2x_1-x_3)dt-x_1dw\,,\qquad (9)$$

$$dx_3=-x_2\ dt+u\ dw\ .$$

Необходимо обеспечить инвариантность критерия $J=x_3(0),\quad t\in[t_0,0]$. Начальное состояние системы $x(t_0)=x_0$ задано.

Функцию $\varphi(t,x)$ будем искать в виде

$$\varphi(t,x)=\psi_1(t)x_1+\psi_2(t)x_2+\psi_3(t)x_3\ ,$$

а $\mu(t)\equiv 0$.

Условия инвариантности 1) – 3) примут вид

$$1)\ \psi_1(0)=0,\ \psi_2(0)=0,\ \psi_3(0)=1,$$

$$2)\ \psi_1(t)(x_2-x_3)+\psi_2(t)(2x_1-x_3)+\psi_3(t)(-x_2)+$$

$$+\frac{d\psi_1(t)}{dt}x_1+\frac{d\psi_2(t)}{dt}x_2+\frac{d\psi_3(t)}{dt}x_3=0,\ x\in R^3,$$

$$3)\ \psi_1(t)x_2-\psi_2(t)x_1+\psi_3(t)\,u(t,x_1,x_2,x_3)=0,\ x\in R^3.$$

Этим условиям удовлетворяют функции

$$\psi_1=-\frac{2}{9}e^{-2t}+\left(\frac{2}{9}-\frac{2}{3}t\right)e^t\ ,$$

$$\psi_2=-\frac{2}{9}e^{-2t}+\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{3}t\right)e^t\ ,$$

$$\psi_3=\frac{2}{9}e^{-2t}+\left(\frac{7}{9}-\frac{1}{3}t\right)e^t\ ,$$

$$u=\frac{\psi_2(t)}{\psi_3(t)}x_1-\frac{\psi_1(t)}{\psi_3(t)}x_2=\frac{\left(1+\frac{3}{2}t\right)e^{3t}-1}{\frac{1}{2}(7-3t)\,e^{3t}+1}x_1-\frac{(1-3t)\,e^{3t}-1}{\frac{1}{2}(7-3t)\,e^{3t}+1}x_2 \qquad (10)$$

Стратегия (10) обеспечивает инвариантность системы (9) по критерию $J=x_3(0)$.

П р и м е р 2 . Система (1) имеет вид [3, стр. 33]

$$dx_1=\left(\frac{1}{2}x_2+u_1v\right)dt\,,\qquad dx_2=\left(-\frac{1}{2}x_1+u_2v\right)dt\,, \qquad (11)$$

где $(u_1,u_2)^T$ – управление, $v(t)$ – возмущение ("цветной шум").

Необходимо обеспечить инвариантность критерия $J=x_1(0)\,x_2(0)$.

Тривиальное решение имеет вид $u_1(t)=u_2(t)\equiv 0$. Однако имеется и другое решение с управлениями не равными нулю.

Функцию $\varphi(t,x)$ будем искать в виде

$$\varphi(t,x)=\frac{1}{2}\psi_{11}(t)x_1^2+\psi_{12}(t)x_1x_2+\frac{1}{2}\psi_{22}(t)x_2^2\ , \qquad (12)$$

а $\mu(t)\equiv 0$.

Условия инвариантности 1), 2) примут вид

1) $\psi_{11}(0)=0,\ \psi_{22}(0)=0,\ \psi_{12}(0)=1,$

$$2)\ \frac{1}{2}\left(\frac{d\psi_{11}}{dt}-\psi_{12}\right)x_1^2+\left(\frac{d\psi_{12}}{dt}+\frac{1}{2}\psi_{11}-\frac{1}{2}\psi_{22}\right)x_1x_2+\frac{1}{2}\left(\frac{d\psi_{22}}{dt}+\psi_{12}\right)x_2^2+ \qquad (13)$$

$$+[(\psi_{11}x_1+\psi_{12}x_2)u_1+(\psi_{12}x_1+\psi_{22}x_2)u_2]\,v=0\ ,$$

а условие 3) отсутствует, так как система (11) не содержит винеровского процесса.

Этим условиям удовлетворяют функции $\psi_{12}=\cos(t),\ \psi_{11}=\sin(t),$ $\psi_{22}=-\sin(t),\ \ u_1=x_1\cos(t)-x_2\sin(t),\ u_2=-x_1\sin(t)-x_2\cos(t)$.

В то же время, если возмущение $v(t)dt$ заменить на дифференциал винеровского процесса $dw(t)$, несмотря на то, что условие 3) теоремы будет выполнено, система (11) не будет инвариантна. Это объясняется тем, что условие 1) теоремы для нелинейной по состоянию функции φ вида (12) для винеровского процесса будет отличаться от (13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розоноэр Л.И. Вариационный подход к проблеме инвариантности // Автоматика и телемеханика.1963, № 6. С.744-756; № 7. С.17-22.

2. Хрусталев М.М. Необходимые и достаточные условия слабой инвариантности // Автоматика и телемеханика. 1968, № 4. С. 17-22.

3. Хрусталев М.М. Методы теории инвариантности в задачах синтеза законов терминального управления летательными аппаратами. Учебное пособие.– М: МАИ, 1987.

4. Хрусталев М.М., Плотников Ю.П., Белов В.А. The invariant control of vehicle descent into the atmosphere // Acta Astronautica. 1976, № 5 – 6.

5. Дубко В.А. Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений.– Владивосток: ДВО АН СССР, 1989.

6. Карачанская Е.В. Построение множества дифференциальных уравнений с заданным набором первых интегралов // Вестник ТОГУ. 2011, № 3(22). С. 47-56.

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЧЕЛОВЕКОПОДОБНОГО РОБОТА НА ОСНОВЕ ОПЕРАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ROS

Р.Р. Хусаинов, А.С. Климчик (Университет Иннополис, Россия, 420500, Иннополис, ул. Университетская 1)
E-mail: r.khusainov@innopolis.ru

Е.А. Магид, А.Г. Сагитов (Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Казань, ул. Кремлевская 18)

HUMANOID MOTION CONTROL BASED ON ROS OPERATING SYSTEM

R. Khusainov, A. Klimchik (Innopolis university, 420500, Innopolis, Universitetskaya str., 1)

E. Magid, A. Sagitov (Kazan Federal University, 420008, Kazan, Kremlevskaya str. 18)

Keywords: humanoid, locomotion, ROS.

Введение. В следующие десятилетия двуногие шагающие роботы (ДШР) станут значительной частью нашей повседневной жизни. В настоящее время, некоторые модели роботов уже демонстрируют впечатляющие способности к быстрому передвижению, избеганию столкновений и адаптации к выполнению определенных операций в созданной под человека окружающей среде. Например, открывание дверей, подъем и спуск по лестницам, захват манипуляторами предметов со стола, открывание бутылок, наливание воды в стакан и многое другое – уже доступно современным продвинутым роботам. Хотя осуществление быстрой ходьбы такими роботами и значительно улучшилось в последние годы благодаря разработке различных методов движения, походка ДШР все еще остается недостаточно стабильной и энергетически эффективной по сравнению с походкой человека [1], [2], [3]. Причины этого кроются в кинематических и динамических различиях между человеком и антропоморфным роботом: прежде всего, это разные типы скелетов, с разными количествами степеней свободы. Кроме того, роботы имеют различные ограничения на относительные положения, а также скорости и ускорения суставов. Вдобавок, роботы имеют отличные от человека кинематические характеристики, например, распределение веса по частям тела и положение центра масс. Таким образом, преодоление этих ограничений при создании ДШР с динамически и статически стабильной, энергоэффективной и человекоподобной походкой остается одной из важнейших мировых задач в исследованиях антропоморфных роботов [4]. Дополнительной сложностью при решении данной задачи является необходимость переработки существующих алго-

ритмов под каждую конкретную модель ДШР с учетом имеющихся у ДШР степеней свободы, механических ограничений конструкторских решений и используемых приводов, количества, свойств и расположения датчиков, и других особенностей каждого ДШР.

Одной из насущных робототехнических задач для ДШР является разработка решений для динамически стабильной ходьбы ДШР. Целью данной работы являются исследование и разработка программного комплекса системы управления (ПКСУ) для человекоподобной ходьбы нового российского полноразмерного двуногого шагающего робота (ДШР) серии AR-600 на основе контроля статического и динамического равновесия с использованием операционной системы для роботов ROS [5].

На первом этапе алгоритмы управления были отработаны на виртуальной модели. С этой целью CAD модель робота AR-601M была интегрирована в виртуальную среду симулятора Gazebo, в которых производилось исследование и тестирование движений робота. Была осуществлена программная реализация ПКСУ с двумя алгоритмами управления ходьбой: (1) с применением модели перевернутого маятника VHIPM (virtual height inverted pendulum model – модель виртуального маятника с инвертированной высотой); и (2) управления движением робота с помощью контроллера опережающего регулирования (Preview Control). После тестирования в виртуальной среде программный комплекс был применен для управления движением реального робота. Разработанный ПКСУ, контролирующей робота посредством робототехнической среды ROS, использует модули приема и передачи данных по каналам связи робота от сенсоров к устройствам обработки и управления, с последующей выдачей команд сервоприводам ДШР. Точная калибровка моделей ДШР позволила улучшить совпадение желаемой и получаемой траекторий ходьбы робота при работе ПКСУ с разработанными алгоритмами контроля движения ДШР.

Дальнейшая структура статьи организована следующим образом: в следующем разделе дается описание робота AR-601M, далее описывается виртуальная модель робота. Затем рассматриваются алгоритмы управления ходьбой ДШР с помощью: (1) модели перевернутого маятника VHIPM; и (2) управления движением робота с помощью контроллера опережающего регулирования (Preview Control). В последнем разделе приведены выводы.

Описание робота.

Полномасштабный антропоморфный AR-601M (рис. 1) производится российской компанией ПАО «Андроидная робототехника» [6] и является одной из моделей популярной в России линейки ДШР AR-600 [7],[8],[9]. Робот AR-601M построен на базе силового каркаса из легких сплавов с элементами силового электропривода и по многим своим техническим характеристикам превосходит зарубежные аналоги: например, по количеству степеней свободы и оснащенности манипуляторов. При росте 145 см, AR-

601M весит 65 кг, и имеет 41 степень свободы, из которых по 6 приходятся на каждую ногу. Каждая степень свободы AR-601M приводится в движение с помощью электродвигателя. Манипуляторы робота позволяют оперировать с предметами бытового обихода, основываясь на внутренних системах навигации и технического зрения. Антропоморфный робот включает в себя широкий набор сенсорных устройств (бортовых датчиков) для восприятия окружающей среды и датчиков внутреннего состояния робота (эффекторов и актуаторов), связанных с исполнительными механизмами. Набор датчиков робота включает: систему зрения робота (передняя цветная стереопара камер и монохромная камера заднего вида); два сканирующих ИК-дальномера (Hokuyo UTM-30LX); 16 ИК-датчиков расстояния на запястьях и стопах; 1 гироскоп-акселерометр с цифровым масштабированием и фильтром Калмана; 4 двухосевых акселерометра; 12 резистивных датчиков положения; 4 тензометрических силомоментных датчика стоп и запястий (по 1 на каждые стопу и запястье); 30 магнитных энкодеров для контроля состояния приводов робота; микрофон и динамик. Непрерывная работа AR-601M без подзарядки составляет до 2-х часов и напрямую коррелирует с интенсивностью выполняемых задач и их сложностью.

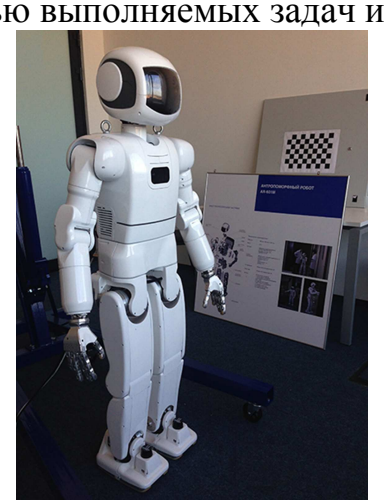

Рис. 1. Робот AR-601M

Модель робота AR-601M в Gazebo

Основной задачей при создании модели робота в среде ROS/Gazebo является создание URDF (Universal Robot Description File) и STL (stereolithography) файлов, представляющих из себя точное описание трехмерных моделей частей робота. Используя инструмент «SolidWorks to URDF Exporter», мы сгенерировали URDF и STL файлы на основе модели в SolidWorks. При этом нулевым углам в Gazebo соответствуют положения в суставах, которые были заданы при создании модели в SolidWorks. Поэтому, перед экспортом модели из SolidWorks, мы откалибровали углы в ногах, сделав их полностью выгнутыми, параллельными фронтальной и сагиттальной плоскостям, и со стопами, параллельными горизонтальной плос-

кости. Руки играют существенно меньшую роль в моделировании походки, и они строго зафиксированы (неподвижны) в текущих алгоритмах ходьбы. Поэтому начальное положение рук произвольно. На рис. 2 показана созданная нами модель робота в Gazebo.

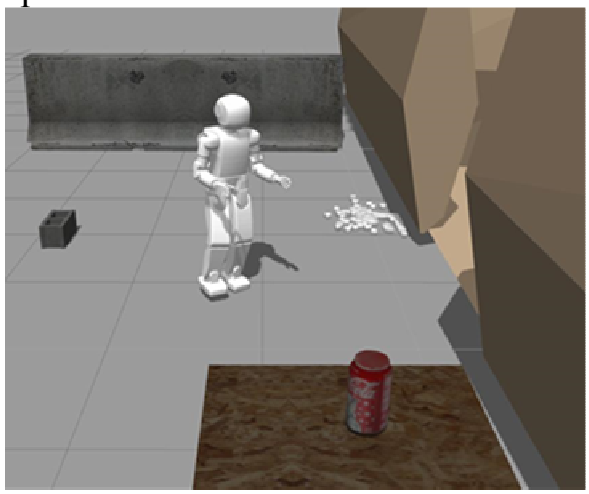

Рис. 2. Модель робота AR-601M в Gazebo

URDF является файлом формата XML. Расположение тела (<origin>), а также mesh-файл, являются результатом работы инструмента «SolidWorks to URDF Exporter». Параметры типа <inertial> (инерционные) - такие как масса (mass value) и инерция (inertia) были взяты для каждой части робота из таблицы инерционных параметров робота от производителя. Положение сустава и направление оси вращения формируется из CAD модели. Также заметим, что для сустава определены ограничения по углу (от -0.3 рад до 0.3 рад), моменту сил (80 Н*м) и угловой скорости (1 рад/сек), что соответствует параметрам из технической документации робота.

Управление виртуальной моделью в симуляторе Gazebo происходит с помощью пакета ROS Control и плагина для Gazebo. На рис. 3 показана схема взаимодействия между симулятором и модулем управления в ROS. На текущий момент управление приводами модели робота осуществлялось по углу: также, как и в реальном роботе. То есть на вход контроллера подается желаемый угол поворота, и контроллер рассчитывает согласно ПИД-коэффициентам необходимый момент сил, который передается в Gazebo. Происходит это с частотой 250 Hz, что также соответствует реальному роботу.

Для анализа движения робота в виртуальной среде использовалась информация по углам в суставах (joint state), положению частей робота относительно лабораторной системы отчета и системы отчета робота (link state), а также были дописаны плагины для получения информации по силе взаимодействия стопы робота с поверхностью.

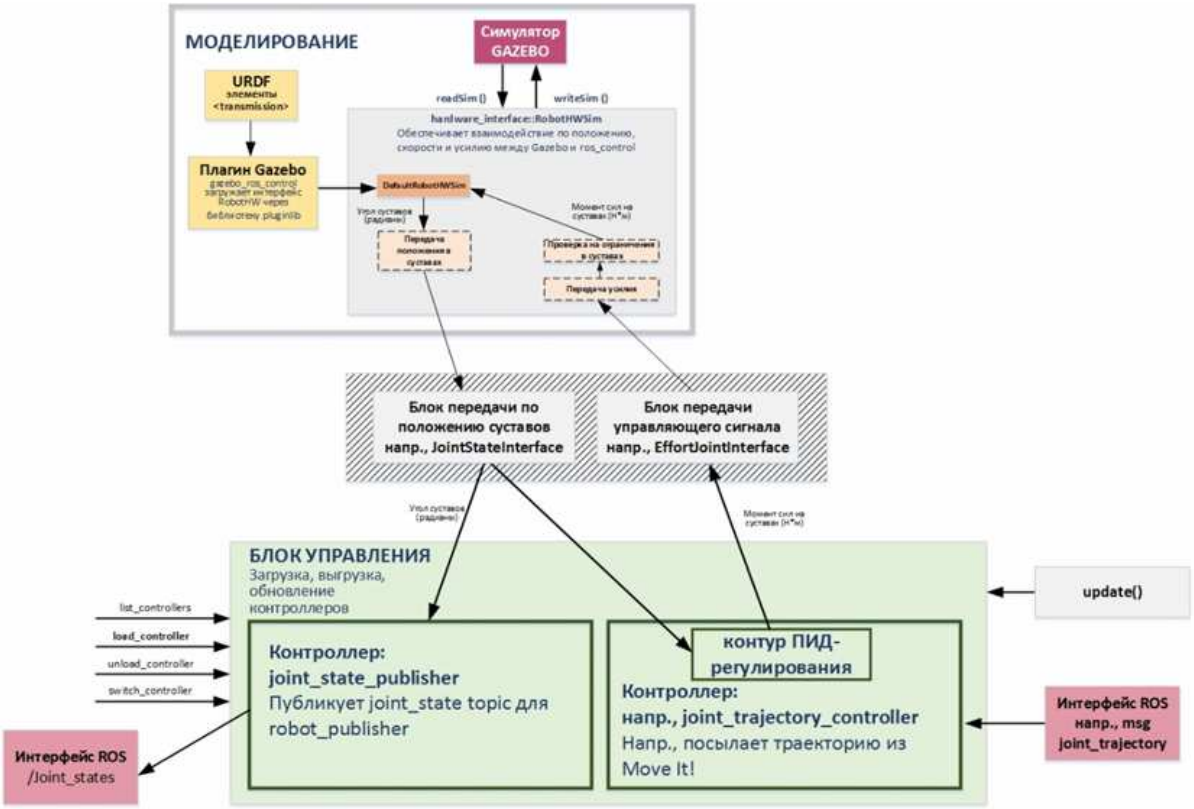

Рис. 3. Схема взаимодействия симулятора и модуля управления в ROS

Алгоритмы управления.

На первом этапе для анализа устойчивости походки модели робота был использован аналитический подход через расчет точки нулевого момента (ТНМ). Зная требуемые значения координат ТНМ для каждого момента времени, решалась система дифференциальных уравнений для координат центра масс модели робота. Таким образом мы получили аналитические оптимальные траектории движения робота [10]. Алгоритм управления строился на обеспечении движения робота по заранее рассчитанным оптимальным траекториям. Так как основную часть времени походки занимает фаза опоры на одну ногу, то сначала решалась задача расчета ТНМ модели робота и расчета оптимального движения при шаге, где одна (опорная) нога находится в неподвижном состоянии, а другая нога переносится сзади вперед. Если положить желаемые координаты ТНМ нулевыми, то мы добьемся максимальной устойчивости шага, так как ТНМ в этом случае будет лежать в центре опорной ноги. В работе [11] авторы показали, что уравнения движения центра масс могут записаны в виде

$$\ddot{x} - \frac{g}{\alpha z_{CoM}} x_{CoM} = 0 \ , \ddot{y} - \frac{g}{\beta z_{CoM}} y_{CoM} = 0 \qquad (1)$$

где коэффициенты α, β находятся экспериментальным путем для снижения ошибки ТНМ. Тогда функции координат центра торса от времени, яв-

ляющиеся решением дифференциальных уравнений второго порядка, запишутся как

$$x(t) = C_1 e^{-w_1 t} + C_2 e,\ y(t) = C_3 e^{-w_2 t} + C_4 e^{w_2 t} \quad (2)$$

где $w_1 = \sqrt{\frac{g}{\alpha z}}$, $w_2 = \sqrt{\frac{g}{\beta z}}$. Коэффициенты C1, C2, C3, C4 находятся из начальных и конечных условий для координат.

Другим способом нахождения траектории движения торса, отличным от аналитических функций, является использование контроллера. Использование контроллера означает использование обратной связи. В нашей модели для виртуального робота в качестве сигнала обратной связи брались значения координат ТНМ. В случае реального робота это могут быть показания с силомоментных датчиков на стопах, которые по сути являются аналогом значений ТНМ. Использование контроллера с обратной связью позволяет роботу адаптироваться к текущей ситуации и рассчитывать необходимую траекторию движения.

В работе [12] приведен подход, использующий будущие значения желаемой координаты ТНМ (Preview Control). Траекторию робота во фронтальной плоскости получаем, используя этот подход.

Уравнение для координаты ТНМ в случае модели IPM (inverted pendulum model – модель инвертированного маятника) представлено ниже:

$$P = x - \frac{z_c}{g}\ddot{x} \quad (3)$$

где z_c – высота центра масс, g – ускорение свободного падения и X – координата центра масс.

Запишем уравнения для контроллера в дискретном временном пространстве в виде:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ p(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (4)$$

где k – дискретное время, x(k) – значение вектора состояния (координата, скорость, ускорение центра масс), u(k) – управляющий вектор, p(k) – значение координаты ТНМ. A, B, C, D – коэффициенты, полученные из уравнения (4) и разложения вектора состояния x в ряд Тейлора для нахождения его значения в следующий момент времени [13]. В роли управляющего вектора u(k) используется третья производная координаты x.

Согласно работе [13] управляющий сигнал u при использовании будущие значения желаемой координаты ТНМ выглядит следующим образом:

$$u(k) = -G_I \sum_{i=0}^{k} e(i) - G_x x(k) - \sum_{l=1}^{N_l} G_d(l)\, p_d(k+l) \quad (5)$$

где e(i) – ошибка между рассчитанной и желаемой координатой ТНМ, p_d – желаемая координата ТНМ. G_I, G_X, $G_d(l)$– коэффициенты пропорциональности. Первый член выражает интегральную ошибку между рассчитанной и желаемой координатой ТНМ. Второй член пропорционален текущему состоянию вектора x. Третий член учитывает будущие значения желаемой координаты ТНМ, в котором суммирование ведется по N_l будущим значениям. Преимуществом такого подхода по сравнению с использованием траекторий, рассчитанных заранее перед каждым шагом, является учет отклонений робота от заданной траектории и автоматическая корректировка движения.

Заключение.

В работе представлены разработанные нами математические модели системы управления движением робота в среде Gazebo с учетом физических характеристик робота AR-601M. Проведено моделирование системы управления робота в среде Gazebo. Разработаны алгоритмы получения и обработки информации с датчиков робота. Разработаны алгоритмы расчета управляющих воздействий и управления исполнительными механизмами робота. Все вышеуказанные разработки проведены для полноразмерной робототехнической платформы AR-601M. Результаты экспериментов показывают, что робот успешно отрабатывает команды высокого уровня по перемещению. Также показаны результаты стабилизации робота при внешнем воздействии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Katić D, Vukobratović M. Survey of Intelligent Control Techniques for Humanoid Robots. Journal of Intelligent and Robotic Systems. 2003;37(2):117-41.

2. Vukobratović M, Borovac B. Zero-moment point — thirty five years of its life. International Journal of Humanoid Robotics. 2004;01(01):157-73.

3. Wright J, Jordanov I. Intelligent Approaches in Locomotion - A Review. J Intell Robot Syst. 2014;80(2):255-77.

4. Яцун С Ф, Савин С И, Яцун А С, Карлов А Е. Оптимизация времени вертикализации экзоскелета по критерию энергоэффективности. Вибрационные технологии, мехатроника и управляемые машины: сборник научных статей по материалам XII международной научно-технической конференции, 2016.

5. Robot Operating System, http://www.ros.org/

6. Андроидная Техника, http://npo-at.com/

7. Ложкин П В, Толстель О В. Создание программно-аппаратного комплекса, обеспечивающего динамическое равновесие и движение РТК AR-600. Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта, серия: физико-математические и технические науки, т.4, 2013.

8. Горобцов А С, Андреев А Е, Тарасов П С, Скориков А В. Автономная система управления шаганем двуногого робота. XII Всероссийская научно-практическая конференция "Перспективные системы и задачи управления": Труды конференции, 2017.

9. Сиразетдинов Р Т, Деваев В М, Камалов А Р, Кацевман Е М. Программный комплекс моделирования и виртуализации антропоморфного робота AR-601 на основе систем ROS и Gazebo. Седьмая всероссийская научно-практическая конференция "Имитационное моделирование, теория и практика": Труды конференции, т. 2, 2015.

10. Khusainov R, Klimchik A, Magid E, editors. Swing leg trajectory optimization for a humanoid robot locomotion. Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO), 2016 13th International Conference on; 2016.

11. Ha T, Choi C-H. An effective trajectory generation method for bipedal walking. Robotics and Autonomous Systems. 2007;55(10):795-810.

12. Khusainov R, Shimchik I, Afanasyev I, Magid E, editors. Toward a human-like locomotion: Modelling dynamically stable locomotion of an anthropomorphic robot in Simulink environment. Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO), 2015 12th International Conference on; 2015 21-23 July 2015.

13. Kajita S, Kanehiro F, Kaneko K, Fujiwara K, Harada K, Yokoi K, et al., editors. Biped walking pattern generation by using preview control of zero-moment point. Robotics and Automation, 2003 Proceedings ICRA '03 IEEE International Conference on; 2003 14-19 Sept. 2003.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НА ОСНОВЕ ЭНТРОПИИ ЦАЛЛИСА

К.Р. Чернышев
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия)
E-mail: myau@ipu.ru

STATISTICAL LINEARIZATION BASED ON THE TSALLIS ENTROPY

K.R. Chernyshov (V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia)
E-mail: myau@ipu.ru

Keywords: consistent measures of dependence, Jensen-Tsallis divergence, input/output model, statistical linearization, system identification, Tsallis entropy.

Теоретико-информационные меры зависимости как математическая основа идентификации стохастических систем. Решение задачи идентификации систем в рамках стохастической постановки всегда основано на применении мер зависимости случайных величин, как при представлении исследуемых систем на основе входо-выходного описания, так и при подходах, основанных на методах пространства состояний. Наиболее часто в рамках идентификационных подходов используются традиционные корреляционные/ковариационные меры зависимости. Их применение непосредственно вытекает из самой постановки задачи идентификации, когда она основана на традиционном среднеквадратическом критерии. Главное преимущество таких мер зависимости состоит в удобстве их использования, включая как возможность построения явных аналитических выражений для определения искомых характеристик системы.

Однако главный недостаток мер зависимости, основанных на линейной корреляции, состоит в возможности их обращения в ноль даже в условиях наличия детерминированной связи между исследуемыми переменными [1, 2]. Именно на преодоление этого недостатка было направлено использование более сложных, состоятельных , мер зависимости в задачах идентификации (в соответствии с терминологией А.Н. Колмогорова, мера зависимости между двумя случайными величинами называется состоятельной, если она обращается в ноль тогда и только тогда, когда данные случайные величины стохастически независимы).

В 1959 г. А. Реньи сформулировал аксиомы [1], которые в конечном итоге были общепризнанны как наиболее естественные условия для характеризации меры зависимости $\mu(X,Y)$ между двумя случайными величинами X и Y:

A) $\mu(X,Y)$ определена для любой пары случайных величин *X* и *Y*, если ни одна из них не является с вероятностью 1 константой.

B) $\mu(X,Y)=\mu(Y,X)$.

C) $0\le\mu(X,Y)\le 1$.

D) $\mu(X,Y)=0$ тогда и только тогда, когда *X* и *Y* стохастически независимы.

E) $\mu(X,Y)=1$ если существует строгая зависимость между *X* и *Y*, то есть или $Y=\varphi(X)$, или $X=\psi(Y)$, где φ и ψ – некоторые борелевские функции.

F) Если φ и ψ – некоторые борелевские взаимно-однозначные функции, то $\mu(\varphi(X),\psi(Y))=\mu(X,Y)$.

G) Если совестное распределение вероятностей *X* и *Y* нормально, то $\mu(X,Y)=|r(X,Y)|$, где $r(X,Y)$ – обычный коэффициент корреляции между *X* и *Y*.

Класс состоятельных по Колмогорову мер зависимости (то есть удовлетворяющих хотя бы аксиоме Реньи D) достаточно широк, в то время как класс мер зависимости, удовлетворяющих всем аксиомам Реньи – класс мер зависимости, состоятельных по Реньи, – весьма узок.

Широкий класс состоятельных по Колмогорову мер зависимости может быть построен на основе соответствующих мер сравнения плотностей (непрерывных) многомерных вероятностных распределений, например, $g_1(z)$ и $g_2(z)$, $z\in R^{\nu}$, известных как меры дивергенции, среди которых, по-видимому, наиболее известной является дивергенция Кульбака-Лайблера

$$D_{KL}(g_1\|g_2)=\int_{R^{\nu}} g_1(z)\ln\left(\frac{g_1(z)}{g_2(z)}\right)dz.$$

Меры дивергенции можно рассматривать как критерий качества в рамках различных теоретических и прикладных задач. В частности, дивергенция Кульбака-Лайблера приводит к выражению для взаимной информации Шеннона $I\{X_1,X_2\}$, при $\nu=2$, двух случайных величин X_1 и X_2, когда одна из плотностей распределения в $D_{KL}(g_1\|g_2)$, а именно, $g_1(z)$, представляет собой совместную плотность распределения этих случайных величин, $p_{12}(x_1,x_2)$, а вторая, $g_2(z)$, представляет собой произведение маргинальных плотностей X_1: $p_1(x_1)$, и X_2: $p_2(x_2)$. Соответственно, дивергенция Кульбака-Лайблера $D_{KL}(p_{12}\|(p_1p_2))$ приводит к теоретико-информационной мере зависимости – взаимной информации Шеннона:

$$D_{KL}\left(p_{12}\|(p_1 p_2)\right) = I\{X_1, X_2\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{12}(x_1, x_2)\ln\frac{p_{12}(x_1, x_2)}{p_1(x_1)p_2(x_2)}dx_1 dx_2 = \mathbf{E}\left(\ln\frac{p_{12}(x_1, x_2)}{p_1(x_1)p_2(x_2)}\right), \quad (1)$$

где $\mathbf{E}(\cdot)$ – символ математического ожидания.

Взаимная информация Шеннона (1), также часто именуемая как относительная энтропия Шеннона, основана на соответствующих энтропиях Шеннона. В то же время, наряду с определением энтропии по Шеннону известен целый ряд других определений энтропии (многомерной) случайной величины. Так для некоторой v-мерной случайной величины Z с многомерной плотностью распределения $g(z)$ энтропия Цаллиса порядка α определяется следующим образом [3]:

$$T_\alpha(Z) = \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \int_{R^v}\left(g(z)\right)^\alpha dz\right),\ \alpha > 0, \alpha \neq 1. \quad (2)$$

При этом по мере того, как α стремится к 1, $T_\alpha(Z)$ стремится к энтропии Шеннона, и, таким образом, энтропия Шеннона может рассматриваться как энтропия Цаллиса «порядка 1».

Также как и энтропия Шеннона, энтропия Цаллиса $T_\alpha(Z)$ v-мерной случайной величины Z с многомерной плотностью распределения $g(z)$ может рассматриваться и непосредственно относительно этой плотности распределения $g(z)$, и в этом случае она будет обозначаться как $T_\alpha(g)$. Таким образом, $T_\alpha(Z)$ и $T_\alpha(g)$ следует рассматривать как математически эквивалентные обозначения, оба определяемые формулой (2). Необходимость такого замечания будет объяснена исходя из нижеприводимого рассмотрения, связанного с соответствующей мерой дивергенции вероятностных распределений, которая основана на энтропии Цаллиса (2).

А именно, используя свойство выпуклости энтропии Цаллиса, в литературе, например [3], известна дивергенция Йенсена-Цаллиса $D_\alpha^{JT}\left(g_1\|g_2\right)$ порядка α двух плотностей распределения вероятностей $g_1(z)$ и $g_2(z)$ следующим образом:

$$D_\alpha^{JT}\left(g_1\|g_2\right) = T_\alpha\left(\frac{g_1 + g_2}{2}\right) - \frac{T_\alpha(g_1) + T_\alpha(g_2)}{2}, \quad (3)$$
$$\alpha > 0, \alpha \neq 1.$$

При этом $D_\alpha^{JT}\left(g_1\|g_2\right)$ неотрицательна и обращается в ноль тогда и только тогда, когда $g_1(z) = g_2(z)$. Соответственно, при $v = 2$ и Z, образованной двумя случайными величинами X_1 и X_2, когда одна из плотностей

распределения в $D_\alpha^{JT}\left(g_1 \| g_2\right)$ в (3), а именно $g_1(z)$, представляет собой совместную плотность распределения этих случайных величин $p_{12}(x_1, x_2)$, а вторая плотность, $g_2(z)$, является произведением маргинальных плотностей распределения X_1: $p_1(x_1)$, и X_2: $p_2(x_2)$, соответствующая дивергенция $D_\alpha^{JT}\left(p_{12} \| p_1 p_2\right)$ Йенсена-Цаллиса порядка α приводит к состоятельной в смысле Колмогорова теоретико-информационной мере зависимости $I_\alpha^{JT}\{X_1, X_2\}$ двух случайных величин X_1 и X_2:

$$D_\alpha^{JT}\left(p_{12} \| p_1 p_2\right) = I_\alpha^{JT}\{X_1, X_2\} =$$
$$= \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{p_{12}(x_1, x_2) + p_1(x_1)p_2(x_2)}{2}\right)^{\alpha} dx_1 dx_2\right) - \qquad (4)$$
$$- \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(p_{12}(x_1, x_2)\right)^{\alpha} dx_1 dx_2 + \int_{-\infty}^{\infty}\left(p_1(x_1)\right)^{\alpha} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty}\left(p_2(x_2)\right)^{\alpha} dx_2}{2}\right).$$

Выражение (4) определяет одновременно и теоретико-информационный критерий, который может рассматриваться как основа для построения теоретико-информационных методов идентификации систем.

С вычислительной точки зрения, особенно при необходимости построения оценок на основе выборочных данных, энтропию Цаллиса следует рассматривать как существенно более удобную для применения, чем энтропию Шеннона, поскольку энтропия Шеннона включает «интеграл от логарифма», а энтропия Цаллиса вообще не содержит логарифма, что в вычислительном плане существенно проще.

При этом выбор конкретного значения порядка α важен, поскольку, чем больше значение порядка, тем более сложной становится вычислительная процедура. Такого рода рассмотрения вычислительных и аналитических аспектов величины порядка α энтропии Цаллиса приводят к своего рода «компромиссу», в рамках которого значение порядка $\alpha = 2$ выглядит наиболее приемлемым. Значение $\alpha = 2$ в формулах (3) и (4) соответствует квадратической дивергенции и квадратической взаимной информации Йенсена-Цаллиса соответственно. Так, при $\alpha = 2$ из формул (3) и (4) непосредственно следует

$$I_2^{JT}\{X_1, X_2\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(p_{12}(x_1, x_2) - p_1(x_1)p_2(x_2)\right)^2 dx_1 dx_2. \qquad (5)$$

В случае стационарных и взаимно-стационарный в узком смысле случайных процессов $y(t)$ и $x(s)$, $I_2^{JT}\{y(t),x(s)\}$, $\tau = t - s$ становится соответствующей функцией времени:

$$I_2^{JT}\{y(t),x(s)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(p_{yx}(y,x,\tau) - p_y(y)p_x(x)\right)^2 dydx, \quad \tau = t - s. \qquad (6)$$

В (6), $p_{yx}(y,x,\tau)$, $p_y(y)$, $p_x(x)$ – совместная и маргинальные плотности распределения случайных процессов $y(t)$ и $x(s)$, $\tau = t - s$ соответственно.

Задачи идентификации, решение которых существенно определяется характеристиками зависимости входного и выходного процессов исследуемой системы, включают статистическую линеаризацию входо/выходного отображения. При этом известные подходы к статистической линеаризации основаны на применении либо традиционных корреляционных функций, либо дисперсионных функций [2] (другими словами, основанных на корреляционном отношении), что, по причинам, отмеченным выше, может приводить к построению моделей, чей выход будет тождественным нулем. Подход, предложенный в настоящей работе, ориентирован на исключение отмеченных недостатков, связанных с применением корреляционных и дисперсионных мер зависимости при идентификации систем на основе линеаризованных представлений их входо/выходных моделей.

В этих рамках именно функция $I_2^{JT}\{y(t),x(s)\}$ (6) будет использоваться в конечном итоге для построения критерия статистической линеаризации.

Статистическая линеаризация: постановка задачи и решение. Пусть в некоторой нелинейной динамической системе $y(t)$ – выходной процесс, рассматриваемый как стационарный в узком смысле эргодический случайный процесс; $x(s)$ – входной процесс, рассматриваемый как белошумный гауссовский случайный процесс. При этом зависимость входного и выходного процессов системы характеризуется плотностью распределения вероятностей (конечно, не известной исследователю)

$$p_{yx}(y,x,\tau),\ t - s = \tau = 1, 2, \ldots. \qquad (7)$$

Ради простоты, но без ограничения общности, процессы $y(t)$ и $x(s)$ предполагаются имеющими нулевое среднее и единичную дисперсию, то есть

$$\mathbf{E}\{y(t)\} = \mathbf{E}\{x(s)\} = 0,\ \mathbf{var}\{y(t)\} = \mathbf{var}\{x(s)\} = 1, \qquad (8)$$

где $\mathbf{var}\{\cdot\}$ – символ дисперсии.

Процессы $y(t)$ и $x(s)$ также предполагаются взаимно-стационарными в узком смысле (формула (7)).

Модель системы, описываемой плотностями распределения (7) при условии (8), ищется в виде

$$\hat{y}(t;W)=\sum_{\tau=1}^{\infty} w(\tau)x(t-\tau),\ t=1,2,\ldots, \tag{9}$$

где $\hat{y}(t;W)$ – выходной процесс модели, $W=\{w(\tau),\tau\in[1,\infty)\}$, $w(\tau),\tau=1,2,\ldots$ – коэффициенты весовой функции линеаризованной модели, подлежащие идентификации в соответствии с критерием статистической линеаризации. Такой критерий представляет собой условие совпадения математических ожиданий выходного процесса системы, описываемой плотностями (7), и выходного процесса модели (9), и условие совпадения квадратической взаимной информации Йенсена-Цаллиса (6) выходного и входного процессов системы, описываемой плотностями (7), и выходного и входного процессов модели (9), или, математически,

$$\mathbf{E}\{y(t)\}=\mathbf{E}\{\hat{y}(t;W)\}=0, \tag{10}$$

$$I_2^{JT}\{y(t),x(s)\}=I_2^{JT}\{\hat{y}(t;W),x(s)\},\ t-s=\tau=1,2,\ldots. \tag{11}$$

В дальнейшем, в дополнении к (7), будут использованы следующие обозначения: $p_{\hat{y}(W)x}(\hat{y}(W),x,\tau)$ – совместная плотность распределения выходного процесса модели (9) и входного процесса системы, $p_y(y)$, $p_{\hat{y}(W)}(\hat{y}(W))$, и $p_x(x)$ – соответственно маргинальные плотности распределения выходного процесса системы $y(t)$, выходного процесса модели $\hat{y}(t;W)$ и входного процесса системы (равно как и модели) $x(s)$, $\tau=t-s$.

Далее, в соответствии с условием нормализации (8), модель (9) ограничена условием

$$\mathbf{var}\{\hat{y}(t;G)\}=1,$$

и, соответственно, весовые коэффициенты модели (9) удовлетворяют условию

$$\sum_{\tau=1}^{\infty} w^2(\tau)=1. \tag{12}$$

Таким образом, выражения (10) и (11) представляют собой критерий статистической линеаризации системы, описываемой плотностями распределения (7).

Пусть

$$\upsilon_t\langle-\tau\rangle=\sum_{j=1}^{\tau-1} w(j)x(t-j)+\sum_{j=\tau+1}^{\infty} w(j)x(t-j),\ \tau=1,2,\ldots$$

– последовательность случайных величин, которые очевидно являются гауссовскими с нулевым средним и дисперсией

$$\mathbf{var}\{\upsilon_t\langle-\tau\rangle\}=\sum_{j=1}^{\tau-1}w^2(j)+\sum_{j=\tau+1}^{\infty}w^2(j)=1-w^2(\tau),\tau=1,2,\ldots.$$

Тогда в рамках введенных обозначений и с учетом описания модели (9) можно записать следующие матричные равенства

$$\begin{pmatrix}\hat{y}(t;W)\\ x(t-\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & w(\tau)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\upsilon_t\langle-\tau\rangle\\ x(t-\tau)\end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix}\upsilon_t\langle-\tau\rangle\\ x(t-\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -w(\tau)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{y}(t;W)\\ x(t-\tau)\end{pmatrix}. \tag{14}$$

Как хорошо известно, если два n-мерных случайных вектора $\mathbf{z}$ и $\mathbf{x}$, имеющие маргинальные плотности распределения $p_z(\mathbf{z})$ и $p_x(\mathbf{x})$ соответственно, функционально связаны взаимнооднозначным соотношением, $\mathbf{z}=\varphi(\mathbf{x})$, то

$$p_z(\mathbf{z})=p_x\left(\varphi^{-1}(\mathbf{z})\right)\left|\frac{D\left(\varphi^{-1}(\mathbf{z})\right)}{D(\mathbf{z})}\right|,$$

где $\dfrac{D\left(\varphi^{-1}(\mathbf{z})\right)}{D(\mathbf{z})}$ – якобиан обратного преобразования $\mathbf{x}=\varphi^{-1}(\mathbf{z})$.

В соответствии с этим соотношением совместная плотность распределения $p_{\hat{y}(W)x}(\hat{y}(W),x,\tau)$ случайных величин $\hat{y}(t;W)$ и $x(t-\tau)$ может быть выражена через совместную плотность распределения $p_{\upsilon_t\langle-\tau\rangle x}\left(\upsilon_t\langle-\tau\rangle,x,\tau\right)$ случайных величин $\upsilon_t\langle-\tau\rangle$ и $x(t-\tau)$. В свою очередь, $p_{\upsilon_t\langle-\tau\rangle x}\left(\upsilon_t\langle-\tau\rangle,x,\tau\right)$ очевидно имеет вид

$$p_{\upsilon_t\langle-\tau\rangle x}\left(\upsilon_t\langle-\tau\rangle,x,\tau\right)=p_{\upsilon_t\langle-\tau\rangle}\left(\upsilon_t\langle-\tau\rangle\right)p_x(x),$$

где $p_{\upsilon_t\langle-\tau\rangle}\left(\upsilon_t\langle-\tau\rangle\right)$, $p_x(x)$ – маргинальные плотности распределения случайных величин $\upsilon_t\langle-\tau\rangle$ и $x(t-\tau)$ соответственно. Следовательно, с учетом соотношений (13) и (14), и с применением соотношения (12), для плотности $p_{\hat{y}(W)x}(\hat{y}(W),x,\tau)$ можно записать:

$$p_{\hat{y}(G)x}(\hat{y}(W),x,\tau)=p_{\upsilon_t\langle-\tau\rangle}(\hat{y}(W)-w(\tau)x)\,p_x(x)=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-w^2(\tau)}}e^{-\frac{\begin{bmatrix}\hat{y}(W)\\ x\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1 & -w(\tau)\\ -w(\tau) & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{y}(W)\\ x\end{bmatrix}}{2}}, \tag{15}$$

то есть эта плотность является гауссовской.

Таким образом, с учетом (6), (11), (15) можно в конечном итоге получить следующее уравнение, опуская соответствующие промежуточные выкладки, чье решение определяет весовые коэффициенты $w(\tau)$, $\tau = 1,2,\ldots$:

$$\frac{1}{4\pi\sqrt{1-\left(w(\tau)\right)^2}} - \frac{1}{\pi\sqrt{4-\left(w(\tau)\right)^2}} + \frac{1}{4\pi} = I_2^{JT}\left\{y(t), x(s)\right\},\ t-s=\tau=1,2,\ldots.. \quad (16)$$

Уравнение (16) может быть легко решено численно, и его (положительное) решение определяет значение модуля весовых коэффициентов $w(\tau)$, $\tau = 1,2,\ldots$ модели (9) через соответствующее значение квадратической взаимной информации Йенсена-Цаллиса $I_2^{JT}\left\{y(t), x(s)\right\}$, $t-s=\tau=1,2,\ldots$ (6). Для «раскрытия» модуля решения уравнения (16) следует использовать знак регрессии выходного процесса системы на ее выходной процесс, то есть

$$\operatorname{sign}\left[reg_{yx}(\tau)\right] = \begin{cases} 1, & reg_{yx}(\tau) \geq 0 \\ -1, & reg_{yx}(\tau) < 0 \end{cases},$$

где

$$reg_{yx}(\tau) = \mathbf{E}\left\{ y(t) \middle/ x(t-\tau) \right\},$$

и $\mathbf{E}\left\{ \cdot \middle/ \cdot \right\}$ – символ условного математического ожидания. Таким образом, окончательно:

$$w(\tau) = \operatorname{sign}\left[reg_{yx}(\tau)\right]\phi\left(I_2^{JT}\left\{y(t), x(s)\right\}\right),\ \tau = 1,2,\ldots, \quad (17)$$

где функция $\phi\left(I_2^{JT}\left\{y(t), x(s)\right\}\right)$ определяет обратное выражение (от $I_2^{JT}\left\{y(t), x(s)\right\}$ к $w(\tau)$) к уравнению (16). Таким образом, выражение (17) определяет коэффициенты весовой функции линеаризованной модели (9).

Таким образом, мера зависимости $\phi\left(I_2^{JT}\left\{y(t), x(s)\right\}\right)$, определяемая соотношением (6) и формулой (16), удовлетворяет всем аксиомам Реньи [1] для мер зависимости случайных величин за исключением только аксиомы F, однако ее вычисление существенно проще по сравнению с вычислением максимального коэффициента корреляции [1, 5, 6]. Поведение функции $\phi\left(I_2^{JT}\left\{y(t), x(s)\right\}\right)$ представлено на рис. 1.

Соответственно, меры зависимости, которые удовлетворяют аксиомам Реньи, за исключением, возможно, аксиомы F, естественно называть мерами зависимости, состоятельными по Реньи. Класс таких мер существенно уже, чем класс мер зависимости, состоятельных по Колмогорову.

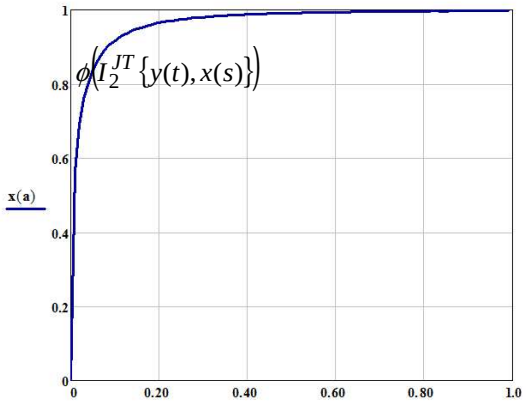

Рис. 1

$I_2^{JT}\{y(t),x(s)\}$

Заключение. Рассмотрен подход к статистической линеаризации входо/выходных отображений нелинейн дискретновременных стохастических динамических систем с белошумным входным процессом. Такой подход основан на применении квадратической взаимной информации Йенсена-Цаллиса (6) при построении критерия статистической линеаризации. В рамках данного подхода критерий статистической линеаризации представляет собой условие совпадения математических ожиданий выходного процесса системы и выходного процесса модели, и условие совпадения квадратической взаимной информации Йенсена-Цаллиса выходного и входного процессов системы и квадратической взаимной информации Йенсена-Цаллиса выходного и входного процессов модели. Получены соотношения для определения коэффициентов весовой функции линеаризованной модели. При этом полученные выражения основаны на квадратической взаимной информации Йенсена-Цаллиса и определяют меру стохастической зависимости случайных величин, являющейся состоятельной в смысле Реньи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rényi A. On measures of dependence // Acta Math. Hung. 1959. Vol. 10, No. 3-4. P. 441-451.

2. Дисперсионная идентификация / Под ред. Н.С. Райбмана. М.: Наука, 1981. 320 с.

3. Tsallis C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics // Journal of Statistical Physics. 1988. Vol. 52, No. 1. P. 479-487.

4. Anguloa J.C., Antolín J., López-Rosa S., Esquivel R.O. Jensen-Tsallis divergence and atomic dissimilarity for ionized systems in conjugated spaces // Physica A. 2011. Vol. 390. P. 769-780.

5. Сарманов О.В. Максимальный коэффициент корреляции (симметричный случай) // Доклады АН СССР. 1958. Т. 120, № 4. С. 715-718.

6. Сарманов О.В. Максимальный коэффициент корреляции (несимметричный случай) // Доклады АН СССР. 1958. Т. 121, № 1. С. 52-55.

РОБАСТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

В.Н. Шашихин (СПбПУ Петра Великого, Россия, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая, 29) E-mail: Postbox@stu.neva.ru

ROBUST STABILIZATION

OF PARAMETRICALLY DISTURBEED SYSTEM

V.N. Shashihin (Peter the Great St. Petersburg, Polytechnicheskay, 29)

Keyword: robust control, parametrically disturbed, scalar optimal function.

Введение. Современные технические объекты, как правило, функционируют в условиях воздействия внешней среды, что приводит к значительным изменениям их параметров и, как следствие, ухудшению характеристик. В этих условиях особое значение приобретает задача обеспечения грубости (робастности) основных показателей качества функционирования систем по отношению к параметрическим возмущениям.

Проблема обеспечения робастных свойств имеет три аспекта: модели систем при действии внутренних (параметрических, структурных) и внешних возмущений; методы анализа (критерии устойчивости и качества) систем при действии возмущений; методы синтеза робастных систем управления.

В докладе рассматривается синтез управления, обеспечивающего робастную устойчивость динамических систем по отношению к неопределенности в задании параметров. Решение задачи робастной стабилизации получено в рамках централизованных структур управления на основе применения скалярно-оптимизационных функций.

Постановка задачи. Пусть математическая модель объекта управления имеет вид системы векторных дифференциальных уравнений с параметрами, которые могут принимать значения из некоторых интервалов,

$$\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}u, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in R^m$ - векторы фазовых координат и управляющих воздействий соответственно; $\tilde{A} \in \mathbf{IR}^{n\times n}$ - интервальная матрица размера $(n \times n)$, определяющая динамические свойства системы, $\tilde{A} = \left(\tilde{a}_{ij}\right)_{i,j=1}^{n} = \left[\underline{A}; \overline{A}\right] \in \mathbf{IR}^{n\times n}$, $\tilde{a}_{ij} = \left[\underline{a}_{ij}; \overline{a}_{ij}\right]$; $\tilde{B} \in \mathbf{IR}^{n\times m}$ - интервальная матрица размера $(n \times m)$, характеризующая влияние управляющих воздействий на объект, $\tilde{B} = \left(\tilde{b}_{ij}\right)_{i,j=1}^{n,m} = \left[\underline{B}; \overline{B}\right] \in \mathbf{IR}^{n\times m}$, $\tilde{b}_{ij} = \left[\underline{b}_{ij}; \overline{b}_{ij}\right]$; $\mathbf{IR}$ - множество вещественных интервалов.

Наряду с интервальным объектом (1) рассмотрим «точечный» объект, отвечающий номинальным значениям параметров

$$\dot{x} = A_0 x + B_0 u, \quad x(0) = x_0, \tag{2}$$

где $A_0 \in \mathbf{R}^{n\times n}$ - матрица номинальных параметров объекта (1), равная матрице $A_0 = \operatorname{med} \tilde{A} = \left(\operatorname{med} \tilde{a}_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$, которая является медианой интервальной матрицы; $B_0 \in \mathbf{R}^{n\times m}$ - номинальная входная матрица $B_0 = \operatorname{med} \tilde{B} = \left(\operatorname{med} \tilde{b}_{ij}\right)_{i,j=1}^{n,m}$.

Требования к динамическим параметрам системы определим через заданную степень устойчивости, которая характеризует, с одной стороны, расположение собственных значений матрицы замкнутой системы в левой полуплоскости, а с другой стороны – затухание некоторой функции, характеризующей обобщенное расстояние от интегральных кривых системы до начала координат фазового пространства. При этом необходимо обеспечить требуемую степень устойчивости в условиях наличия параметрических возмущений.

Будем считать, что система с параметрическим возмущениями робастно стабилизируема, если для любого наперед заданного интервального числа $\tilde{\alpha}$ существует управление, при котором её решения $x(t,t_0,x_0,A,B)$ удовлетворяют неравенству

$$\|x(t,t_0,x_0,A,B)\| \le \tilde{M}\|x_0\|\exp[-\tilde{\alpha}(t-t_0)], \ \forall (t,x)\in\Lambda, \ \forall A\in\tilde{A}, \ \forall B\in\tilde{B}, \tag{3}$$

где $\exp[-\tilde{\alpha}(t-t_0)]$ - интервальная функция, являющаяся естественным интервальным расширением вещественной функции $\exp[-\alpha(t-t_0)]$:

$$\exp[-\tilde{\alpha}(t-t_0)] = \left[\exp[-\bar{\alpha}(t-t_0)]; \exp[-\underline{\alpha}(t-t_0)]\right],$$

а $\Lambda = \left\{(t,x) \,\middle|\, t\ge 0, \|x\| \le h\right\}$.

Цель робастной стабилизации динамической системы может быть формализована следующим образом: в классе централизованных структур управления

$$u = -\tilde{K}x, \ \tilde{K} \in \mathbf{IR}^{m\times n}$$

синтезировать управление, при котором процессы в интервальной системе (1) удовлетворяют неравенству (3) при всех параметрических возмущениях из ограниченного множества: $\forall A\in\tilde{A}, \ \forall B\in\tilde{B}$.

Методика синтеза. Сущность проблемы синтеза робастного управления состоит в не единственности отображения, задаваемого оператором дифференцирования в силу системы дифференциальных уравнений с неопределенно заданной правой частью. Каждой фиксированной точке (x,θ) Лагранжева расширения фазового пространства и числу, равному значению положительно определенной функции $V(x,\theta)$ в этой точке, соответствует множество значений функционала $\dot{V}(x_t)$ на семействе траекторий x_t, приходящих в эту точку.

Условием эффективного применения прямого метода Ляпунова к задачам робастной устойчивости систем с интервальными коэффициентами является либо знание воронок $\{x_t\}$ отрезков решений системы дифференциальных уравнений, которые приходят в эту точку и отвечают эквивалентным начальным условиям, удовлетворяющим соотношению $\|x_t(t_0, x_0, A, B)\| \le \varepsilon$, либо возможность построения оценок на основе использования скалярно-оптимизационных функций множеств указанных воронок [1].

Воспользовавшись центрированным представлением интервальных матриц $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ [2], преобразуем систему (1) к следующему виду:

$$\dot{x} = (A_0 + \delta\tilde{A})x + (B_0 + \delta\tilde{B})u, \quad x(0) = x_0, \tag{4}$$

где $A_0 = \operatorname{med}\tilde{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $B_0 = \operatorname{med}\tilde{B} \in \mathbf{R}^{n\times m}$ - матрицы медианных (номинальных) значений параметров исследуемой системы; $\delta\tilde{A} = [-\operatorname{rad}\tilde{A}; +\operatorname{rad}\tilde{A}] = [-1; +1]\operatorname{rad}\tilde{A} \in \mathbf{IR}^{n\times n}$, $\delta\tilde{B} = [-\operatorname{rad}\tilde{B}; +\operatorname{rad}\tilde{B}] = [-1; +1]\operatorname{rad}\tilde{B} \in \mathbf{IR}^{n\times m}$ - интервальные матрицы, характеризующие вариации параметров.

Обозначим через $\mu(x(\theta))$ воронку интегральных линий с вершиной в точке (x,θ), являющуюся множеством отрезков интегральных линий системы дифференциальных уравнений возмущенного движения (4), отвечающих условию:

$$\mu(x(\theta)) = \{x_t \,|\, V(x(\theta)) \le r(L), \theta \ge T\}.$$

Введем скалярно-оптимизационную функцию $R(x)$ множества $\mu(x(\theta))$, устанавливающую соответствие между множеством $\mu(x(\theta))$ и точками числовой оси $\mathbf{R}^1_+$

$$R(x) = \sup\left\{\dot{V}(x) \,|\, x(t) \in \mu(x(\theta))\right\}. \tag{5}$$

Таким образом, скалярно-оптимизационная функция $R(x)$ определяется наибольшим значением функционала $\dot{V}(x_t)$ на ограниченном множестве интегральных кривых, вдоль которых функция $V(x)$ убывает.

Условие экспоненциальной устойчивости системы с параметрическими возмущениями (4) при скалярно-оптимизационной функции $R(x)$ (5) имеет вид

$$R(x) \le -\tilde{\alpha}V(x) \tag{6}$$

в области $\Theta = \left\{(t,x) \,\middle|\, t \ge T \ge t_0 + l, \;\; 0 \le V(x) \le r(L) = \sup\left\{V(x) \,\middle|\, \|x\| \le L\right\}\right\}$ с множеством интегральных воронок $\mu(x(\theta))$.

Класс стабилизирующих робастных регуляторов выделим на основе решения неравенства (6). В качестве кандидата на функцию Ляпунова возьмем интервальную функцию

$$\tilde{V}(x) = x^T \tilde{P} x,$$

которая является естественным интервальным расширением [2] вещественной квадратичной формы

$$\tilde{V}(x) = [\underline{V}; \overline{V}] = [x^T \underline{P} x; x^T \overline{P} x].$$

Здесь $\tilde{P} = [\underline{P}; \overline{P}] \in \mathbf{IR}^{n \times n}$ - симметричная положительно определенная интервальная матрица (всякая $P \in \tilde{P}$ - симметричная положительно определенная матрица).

Построим для функции $\tilde{V}(x)$ центрированную форму, отвечающую принятой математической модели системы с параметрическими возмущениями

$$\tilde{V}(x) = V_0 + \delta\tilde{V} = x^T P_0 x + x^T \delta\tilde{P} x = x^T (P_0 + \delta\tilde{P}) x, \qquad (7)$$

где $P_0 = \operatorname{med} \tilde{P} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ - матрица медианных значений квадратичной формы; $\delta\tilde{P} = [-\operatorname{rad} \tilde{P}; +\operatorname{rad} \tilde{P}] = [-1; +1] \operatorname{rad} \tilde{P} \in \mathbf{IR}^{n \times n}$, - интервальная матрица, характеризующая вариации параметров.

Используя понятие производной интервальной функции $\dot{\tilde{V}}(x) = \lim[(\tilde{V}(x + l) - \tilde{V}(x))/l], l \to 0$, вычислим полную производную функции Ляпунова (7) в силу системы с параметрическими возмущениями (4)

$$\dot{\tilde{V}}(x) = (\partial \tilde{V}(x)/\partial x)^T (dx/dt) = \dot{x}^T (P_0 + \delta\tilde{P}) x + x^T (P_0 + \delta\tilde{P}) \dot{x} =$$
$$= x^T \left[(A_0 + \delta\tilde{A})^T (P_0 + \delta\tilde{P}) + (P_0 + \delta\tilde{P})(A_0 + \delta\tilde{A}) \right] x + 2 x^T (P_0 + \delta\tilde{P})(B_0 + \delta\tilde{B}) u.$$

Тогда условие экспоненциальной устойчивости (6) для системы (4) определится неравенством

$$R(x) = \sup\{ \; x^T \left[(A_0 + \delta\tilde{A})^T (P_0 + \delta\tilde{P}) + (P_0 + \delta\tilde{P})(A_0 + \delta\tilde{A}) \right] x + 2 x^T (P_0 + \delta\tilde{P})(B_0 + \delta B) u \mid$$
$$\mid x \in \mu(x(\theta)) \; \} \le -(\alpha_0 + \delta\tilde{\alpha}) x^T (P_0 + \delta\tilde{P}) x, \qquad (8)$$

где $\alpha_0 = \operatorname{med} \tilde{\alpha} \in \mathbf{R}^1$, $\delta\tilde{\alpha} = [-1; +1] \operatorname{rad} \tilde{\alpha}$.

Множество всех стабилизирующих управлений, которые удовлетворяют неравенству (8), описывается соотношением

$$u = \left\{ -\frac{(B_0 + \delta\tilde{B})^T (P_0 + \delta\tilde{P}) x}{2 \left\| x^t (P_0 + \delta\tilde{P})(B_0 + \delta\tilde{B}) \right\|^2} \left[x^T \left[2(A_0 + \delta\tilde{A})(P_0 + \delta\tilde{P}) + (\alpha_0 + \delta\tilde{\alpha})(P_0 + \delta\tilde{P}) \right] x \right] \right\} \mid x \in \mu(x(\theta)). \qquad (9)$$

В соотношении (9) матрица P_0 удовлетворяет матричному уравнению Риккати, которое отвечает номинальной системе (2),

$$P_0 \mid A_{0\alpha}^T P_0 + P_0 A_{0\alpha} - P_0 F_0 P_o + Q_0 = 0, \qquad (10)$$

где $A_{0\alpha} = A_0 + 0{,}5\alpha_0 I_n$, $F_0 = 10 B_0 B_0^T + 2 I_n$, $Q_0 = 2 A_0^T A_0$.

Интервальная матрица $\delta\tilde{P}$, задаваемая множеством

$$\delta\tilde{P} = \left\{ \delta P \in \mathbf{R}^{n \times n} \mid (\exists \delta A_\alpha \in \delta\tilde{A}_\alpha)(\exists D \in \tilde{D})(\exists G \in \tilde{G}) \left(\delta A_\alpha^T \delta P + \delta P \delta A_\alpha - \delta P D \delta P + G = 0 \right) \right\},$$

определяет объединенное множество решений интервального матричного уравнения Риккати

$$\delta\tilde{A}_\alpha^T\delta\tilde{P}+\delta\tilde{P}\delta\tilde{A}_\alpha-\delta\tilde{P}\tilde{D}\delta\tilde{P}+\tilde{G}=0, \qquad (11)$$

Уравнение (11) порождается вариациями параметров системы (1). Здесь

$$\delta\tilde{A}_\alpha=\delta\tilde{A}+0{,}5\tilde{\alpha}I_n=[-1;+1]\left(\operatorname{rad}\tilde{A}+0{,}5\operatorname{rad}\tilde{\alpha}I_n\right)\in\mathbf{IR}^{n\times n},$$

$$\tilde{D}=(10B_0B_0^T+4\delta\tilde{B}\delta\tilde{B}^T-2I_n)\in\mathbf{IR}^{n\times n},\quad \tilde{G}=(\delta\tilde{A}^T\delta\tilde{A}-4P_0\delta\tilde{B}\delta\tilde{B}^TP_0)\in\mathbf{IR}^{n\times n}.$$

Множество регуляторов, обеспечивающих робастную устойчивость системы (4) с заданным показателем, определяется следующим выражением

$$u(x)=-B_0^T\left(P_0+\delta\tilde{P}\right)x=-\left(K_0+\delta\tilde{K}\right)x, \qquad (12)$$

где $K_0=B_0^TP_0\in\mathbf{R}^{m\times n}$, $\delta\tilde{K}=B_0^T\delta\tilde{P}\in\mathbf{IR}^{m\times n}$.

Свойства замкнутой системы. С учетом синтезированного управления динамика системы с параметрическими возмущениями описывается уравнением

$$\dot{x}=\left[\left(A_0+\delta\tilde{A}\right)-\left(B_0+\delta\tilde{B}\right)B_0^T\left(P_0+\delta\tilde{P}\right)\right]x,\quad x(0)=x_0. \qquad (13)$$

Решения уравнения (13) при всех параметрических возмущениях ограниченных множествами $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ удовлетворяют неравенству (3). Справедливость высказанного утверждения доказывается в следующей теореме.

Теорема. Пусть:

1) пара вещественных матриц $\left([\operatorname{med}\tilde{A}+0{,}5\operatorname{med}\tilde{\alpha}I_n],\operatorname{med}\tilde{B}\right)$ управляема, а пара $\left(\sqrt{2}\operatorname{med}\tilde{A},[\operatorname{med}\tilde{A}+0{,}5\operatorname{med}\tilde{\alpha}I_n]\right)$ наблюдаема;

2) ранг матрицы $M=\left(\operatorname{rad}\tilde{B}\middle|\operatorname{rad}\tilde{A}_\alpha\operatorname{rad}\tilde{B}\middle|\ldots\middle|\left(\operatorname{rad}\tilde{A}_\alpha\right)^{n-1}\operatorname{rad}\tilde{B}\right)$ равен n: $\operatorname{rank}M=n$, $\tilde{A}_\alpha=\tilde{A}+0{,}5\tilde{\alpha}I_n$;

3) тестовая матрица $\tilde{W}=I_n\otimes\delta\tilde{A}_\alpha^T+\delta\tilde{A}_\alpha^T\otimes I_n$ обратима, $I_n\otimes\delta\tilde{A}_\alpha^T$ - кронекерово или прямое произведение матриц I_n и $\delta\tilde{A}_\alpha=[-1;+1]\left(\operatorname{rad}\tilde{A}+0{,}5\operatorname{rad}\tilde{\alpha}I_n\right)$.

Тогда централизованное управление (12), где матрицы P_0 и $\delta\tilde{P}$ - решения матричных уравнений Риккати (10) и (11), обеспечивает робастную стабилизацию системы с параметрическими возмущениями (4), при этом замкнутая система имеет заданную степень устойчивости $\tilde{\alpha}=\alpha_0+[-1;+1]\operatorname{rad}\tilde{\alpha}$.

Доказательство теоремы. Условие 1 теоремы гарантирует существование единственного положительно определенного решения P_0 уравнения (10). Уравнение (11), используя метод Ньютона, можно свести к итерационному процессу, на каждом шаге которого решается уравнение Ляпунова:

$$\left(\delta\tilde{A}_\alpha^T\right)_k\delta\tilde{P}_{k+1}+\delta\tilde{P}_{k+1}\left(\delta\tilde{A}_\alpha\right)_k=-\tilde{N}_k$$

с матрицами $\left(\delta\tilde{A}_\alpha\right)_k=\delta\tilde{A}_\alpha-\tilde{D}\delta\tilde{P}_k$, $\tilde{N}_k=\delta\tilde{P}_k\tilde{D}\delta\tilde{P}_k+\tilde{G}$.

Выполнение условия 2 теоремы обеспечивает сходимость итерационного процесса решения уравнения Ляпунова к решению уравнения Риккати (11), т.е. $\delta\tilde{P}_k\to\delta\tilde{P},\ k\to\infty$.

Решение интервальных уравнений Ляпунова на каждом шаге итерационного процесса с использованием техники кронекерова произведения матриц может быть сведено к системе n^2 линейных уравнений [3]

$$\tilde{W}_k \mathrm{col}\delta\tilde{P}_k = \mathrm{col}\tilde{N}_k,$$

где $\mathrm{col}\delta\tilde{P}_k$, $\mathrm{col}\tilde{N}_k$ - вектора, состоящие из столбцов матриц $\delta\tilde{P}_k$ и $\tilde{N}_k$ соответственно. Данная система интервальных линейных алгебраических уравнений разрешима при выполнении условия 3 теоремы.

Таким образом, у системы (13) существует интервальная функция (7), удовлетворяющая всем требованиям, которые предъявляются к функциям Ляпунова. Вычислим, учитывая вид выбранной функции Ляпунова и синтезированного робастного управления, скалярно-оптимизационную функцию (5)

$$R(x) = \sup\{\ 2x^T[\ P_0A_0 - P_0B_0B_0^TP_0 + \delta\tilde{P}\delta\tilde{A} - \delta\tilde{P}B_0B_0^T\delta\tilde{P} + \delta\tilde{P}A_0 + P_0\delta\tilde{A} - P_0\delta\tilde{B}B_0^TP_0 -$$
$$- P_0B_0B_0^T\delta\tilde{P} - P_0\delta\tilde{B}B_0^T\delta\tilde{P} - \delta\tilde{P}B_0B_0^TP_0 - \delta\tilde{P}\delta\tilde{B}B_0^TP_0 - \delta\tilde{P}\delta\tilde{B}B_0^T\delta\tilde{P}\ ]x|\ x\in\mu(x(\theta))\ \}.$$

С использованием оценок вида $x^TC^TDx \le x^TC^TCx + x^TD^TDx$ скалярно-оптимизационная функция принимает вид

$$R(x) \le 2x^T[\ 2P_0A_0 - 10P_0B_0B_0^TP_0 + 2P_0P_0 + 2A_0^TA_0 + 2\delta\tilde{P}\delta\tilde{A} - 10\delta\tilde{P}B_0B_0^T\delta\tilde{P} +$$
$$+ 2\delta\tilde{P}\delta\tilde{P} + 4P_0\delta\tilde{B}\delta\tilde{B}^TP_0 - 2\delta\tilde{P}\delta\tilde{B}\delta\tilde{B}^T\delta\tilde{P}\ ]x.$$

Так как матрица P_0 - решение уравнения (10), а матрица $\delta\tilde{P}$ - решение уравнения (11), то скалярно-оптимизационная функция равна

$$R(x) \le -x^T(\alpha_0 + \delta\tilde{\alpha})(P_0 + \delta\tilde{P})x = -\tilde{\alpha}x^T(P_0 + \delta\tilde{P})x = -\tilde{\alpha}\tilde{V}(x). \qquad (14)$$

Из выше сказанного следует, что у системы с параметрическими возмущениями (4), замкнутой управлением (12), существует определенно положительная функция Ляпунова (7), допускающая бесконечно малый высший предел, такая, что скалярно-оптимизационная функция (5) определенно отрицательная. Для функции $\tilde{V}(x)$, допускающей бесконечно малый высший предел, существуют определенно положительные функции, явно не зависящие от времени, такие, что справедливы неравенства

$$c_1^2\|x\|^2 \le \tilde{V}(x) \le c_2^2\|x\|^2. \qquad (15)$$

Вид коэффициентов c_i^2, $i = 1,2$, может быть получен на основе двухсторонних оценок решения спектральной задачи для симметричных интервальных матриц [4]

$$c_1^2 = \tilde{\lambda}_{\min}(\tilde{P}) = [\lambda_{\min}\{\mathrm{med}\,\tilde{P}\} - \varepsilon_{\min};\ \lambda_{\min}\{\mathrm{med}\,\tilde{P}\} + \varepsilon_{\min}], \qquad (16)$$

$$c_2^2 = \tilde{\lambda}_{\max}(\tilde{P}) = [\lambda_{\max}\{\mathrm{med}\,\tilde{P}\} - \varepsilon_{\max};\ \lambda_{\max}\{\mathrm{med}\,\tilde{P}\} + \varepsilon_{\max}]. \qquad (17)$$

Здесь $\lambda_{\min}\{\mathrm{med}\,\tilde{P}\}$, $\lambda_{\max}\{\mathrm{med}\,\tilde{P}\}$ - минимальное и максимальное собственные числа матрицы $\tilde{P}$, а вектор невязки ε вычисляется по формулам:

$$\varepsilon_{\min} = \|\ |\xi_{\min}|\ \|_2,\ \varepsilon_{\max} = \|\ |\xi_{\max}|\ \|_2,\ \|\ |\xi|\ \|_2 = \left(\sum_1^n |\xi_i|^2\right)^{1/2},\ |\xi| = \mathrm{col}|\xi_i|,\ |\tilde{\xi}_i| = \max\{|\underline{\xi}_i|, |\overline{\xi}_i|\}.$$

Из неравенства (14) и определения скалярно-оптимизационной функции следует дифференциальное неравенство

$$\dot{\tilde{V}}(x) \le -\tilde{\alpha}\tilde{V}(x), \qquad (18)$$

которому соответствует линейное уравнение сравнения

$$\dot{y} = -\tilde{\alpha} y \qquad (19)$$

с решением $y(t,t_0,y_0) = y_0 \exp[-\tilde{\alpha}(t-t_0)]$. Если $\tilde{V}(x_0) = y_0$, то в силу уравнения сравнения (19) и неравенства (18) функция Ляпунова удовлетворяет соотношению

$$\tilde{V}(x) \le \tilde{V}(x_0)\exp[-\tilde{\alpha}(t-t_0)],$$

а в силу неравенств (15) – (17) – соотношениям

$$\tilde{\lambda}_{\min}(\tilde{P})\|x\|^2 \le \tilde{V}(x), \quad \tilde{V}(x_0) \le \tilde{\lambda}_{\max}(\tilde{P})\|x_0\|^2.$$

Из последних трех неравенств вытекает соотношение (3) с постоянной $\tilde{M} = \tilde{\lambda}_{\max}^{1/2}(\tilde{P}) / \tilde{\lambda}_{\min}^{1/2}(\tilde{P})$, что свидетельствует об экспоненциальной устойчивости решений системы с параметрическими возмущениями и заданным показателем робастной устойчивости. Последнее и завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Разумихин Б.С. Устойчивость эредитарных систем. М.: Наука, 1988. 108 с.

2. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1981. 224 с.

3. Шашихин В.Н. Интервальная стабилизация объектов с параметрической неопределенностью // Вычислительные, измерительные и управляющие системы. Труды СПбГТУ, 2000. С. 65-69.

4. Добронец А.С., Шайдуров В.В. Двухсторонние численные методы. Новосибирск: Наука, 1990. 208 с.

ФОРМАЛИЗАЦИЯ И ОБЩАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ

А.Ф. Шориков (Уральский федеральный университет,
Россия, 620002, Екатеринбург, Мира, 19)
E-mail: afshorikov@mail.ru

В.В. Булаев (АО «НПО Автоматики»
Россия, 620075, Екатеринбург, Мамина-Сибиряка, 145)
E-mail: bulaev1991@mail.ru

А.Ю. Горанов (АО «НПО Автоматики»,
Россия, 620075, Екатеринбург, Мамина-Сибиряка, 145)
E-mail: goranovayu@mail.ru

THE FORMALIZATION AND PATTERN FOR OPTIMAL PROGRAM CONTROL PROBLEM OF LAUNCH VEHICLE STABILIZATION

A.F. Shorikov (Ural Federal University, 620002, Yekaterinburg, Mira str., 19)

V.V. Bulaev (JSC «Scientific and Production Association of Automatics»,
620075, Yekaterinburg, Mamina-Sibiryaka str., 145)

A.Y. Goranov (JSC «Scientific and Production Association of Automatics»,
620075, Yekaterinburg, Mamin-Sibiryak str., 145)

Keywords: reachable set, optimal control, stabilization, discrete-time dynamical system.

Введение. Для того чтобы построить систему управления движением летательного аппарата (ЛА) нужно решить три основные проблемы [11]. Первая проблема – это задача навигации. Система навигации обеспечивает систему управления необходимой информацией о параметрах движения ЛА. Вторая проблема – это задача наведения. Система наведения формирует программную траекторию, необходимую для выполнения полетной миссии, будь то взлет или посадка, перехват, вывод полезной нагрузки ракетой-носителем и др. Связующим звеном между этими двумя задачами является третья проблема – задача стабилизации движения. Система стабилизации летательного аппарата является основным потребителем информации, поставляемой навигационной системой, и главным исполнителем требований, диктуемых системой наведения. Задача стабилизации движения ЛА является предметом исследований данного доклада.

Задача стабилизации движения ЛА состоит в том, чтобы компенсировать рассогласования между текущими и программными (опорными) па-

раметрами движения ЛА на протяжении всего полета. Отсюда следует, что качество системы стабилизации напрямую определяет качество управления движением ЛА.

В рамках данного доклада ограничимся рассмотрением задачи стабилизации для конкретного класса ЛА, а именно для ракет-носителей (РН). При этом рассмотрим только атмосферный участок полета, так как он является наиболее сложным с точки зрения обеспечения стабилизации движения РН [1, 14].

Отметим, что современный подход к решению подобных задач был сформулирован еще в конце 50-х годов прошлого столетия. В СССР были созданы несколько научных школ, направленных на решение инженерных задач космонавтики и авиации с помощью инструментов теории автоматического управления, руководителями которых были М.В. Келдыш, Д.Е. Охоцимский, Т.М. Энеев, Б.Н. Петров [13], С.С Лавров., Р.Ф. Аппазов, К.С. Колесников [7], В.Н. Сухов [8], Б.И. Рабинович [14], В.А. Боднер [2] и др. В 60-х годах задача стабилизации ракеты-носителя Saturn V для программы Apollo (США) уже рассматривалась с позиций оптимального управления и оптимальной фильтрации [20, 23]. Эти работы нашли отражение в отечественной и зарубежной литературе того времени. Решение некоторых упрощенных постановок задачи стабилизации можно найти в литературе по математической теории оптимального управления [3, 10, 17].

В современной литературе задача стабилизации РН остается актуальной проблемой, для решения которой используют как классические частотные и корневые методы [1, 6, 22], так и методы оптимального управления, основанные на принципе максимума [10] и методе динамического программирования [9].

Необходимо отметить, что большинство существующих подходов к решению задач оптимальной стабилизации РН в условиях неопределенности базируются на аппарате стохастического моделирования, при применении которого требуется информация о вероятностных характеристиках основных параметров модели управляемого объекта и выполнение специальных условий для реализации рассматриваемого процесса [18]. Также отметим, что для использования аппарата стохастического моделирования, как правило, необходимо выполнение очень жестких требований, которые на практике зачастую оказываются невыполнимыми.

В данном докладе описывается применение детерминированного подхода к решению задачи стабилизации движения РН [10, 15, 17, 19, 21]. В работе представлены основные этапы формирования дискретной динамической модели упругой РН, соответствующей исходной нелинейной дифференциальной системе; формулируется постановка задачи оптимального управления стабилизацией движения РН, где в качества критерия качества выступает терминальный функционал с жесткими ограничениями на фазовые координаты объекта.

Описание динамической системы. При решении задачи стабилизации РН, одним из ключевых этапов является формирование модели объекта управления. Известно, что движение любого летательного аппарата в пространстве можно описать с помощью динамических и кинематических уравнений движений, а также вспомогательных соотношений (уравнений связи между различными системами координат, соотношений между углами, явных выражений для проекций сил, моментов и т.п.) [1, 12, 14]. Совместно эти группы уравнений составляют систему дифференциальных динамических уравнений пространственного движения РН.

Запишем первые две группы уравнений векторной форме

$$m\frac{d\mathbf{V}}{dt}+m\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}\right)=\mathbf{G}+\mathbf{P}+\mathbf{R}_{\text{а}}+\mathbf{F}_{\text{к}}+\mathbf{F}_{r}+\mathbf{F}_{\text{упр}},$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{L}=\mathbf{M}_{P}+\mathbf{M}_{a}+\mathbf{M}_{\text{к}}+\mathbf{M}_{\text{упр}},$$

где m – масса РН; $\mathbf{V}$ – вектор линейной скорости центра масс ракеты; $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения ракеты вокруг центра масс; $\mathbf{L}$ – вектор кинетического момента ракеты как твердого тела; $\mathbf{G}$ – сила тяжести; $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}_P$ –вектор полной тяги и момент тяги двигателей относительно центра масс ракеты; $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{M}_A$ – векторы полной аэродинамической силы и полного аэродинамического момента; $\mathbf{F}_{\text{к}}$ и $\mathbf{M}_{\text{к}}$ – главный вектор и главный момент кориолисовых сил, возникающих при вращении ракеты вокруг центра масс и движения топлива и газов относительно корпуса; $\mathbf{F}_{\text{г}}$– сила, обусловленная перемещением центра масс ракеты относительно ее корпуса; $\mathbf{F}_{\text{упр}}$ и $\mathbf{M}_{\text{упр}}$ – главный вектор и главный момент управляющих сил.

Данное описание движения РН, будучи нелинейным, является довольно сложным при решении задачи стабилизации движения, поэтому обычно эти уравнения подвергают процедуре линеаризации относительно заданной опорной траектории [1, 12, 14]. Сама процедура линеаризации заключается в том, чтобы разбить движение объекта на две составляющие: невозмущенное движение (движение при номинальных значениях параметров РН и стандартных значениях параметров атмосферы) и возмущенное движение (движение при фактических значениях параметров РН). Полученная таким образом линейная дифференциальная модель называется моделью возмущенного движения РН вдоль опорной траектории [1, 7, 8, 14].

Представление модели РН в виде системы линейных дифференциальных уравнений во многом определяется тем, что изначально при баллистических расчетах (т.е. на этапе формирования опорной траектории) РН рассматривается как жесткое твердое тело переменной массы. В возмущенном движении, носящем характер короткопериодических колебаний, появляется необходимость учитывать подвижность жидкости в баках и упругость конструкции РН, что порождает целый комплекс специфических проблем, связанных с математическим описанием РН как объекта управления.

Линеаризованную модель возмущенного движения ракеты-носителя можно представить в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме Коши:

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + G(t)\omega(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + \nu(t),\ t \in [t_0, t_f], \end{gathered} \tag{6}$$

где $x(t)$ – вектор состояния системы (фазовый вектор), $x(t) \in \mathbb{R}^n$ (здесь и далее $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство векторов-столбцов); $u(t)$ – вектор управляющих воздействий (вектор управления), $u(t) \in \mathbb{R}^p$; $\omega(t)$ – вектор возмущающих воздействий (вектор возмущений), $\omega(t) \in \mathbb{R}^r$; $y(t)$ – информационный вектор, $y(t) \in \mathbb{R}^m$; $\nu(t)$ – вектор погрешности измерений, $\nu(t) \in \mathbb{R}^m$; $A(t)$ – матрица состояния системы, $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $B(t)$ – матрица управления, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times p}$; $G(t)$ – матрица возмущений, $G(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$; $C(t)$ – матрица информационного сигнала, $C(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

В этом виде, в качестве параметров состояния системы выступают отклонения кинематических параметров движения исходной динамической модели от значений опорной траектории объекта. Сам процесс формирования математической модели возмущенного движения РН в виде (6) достаточно полно раскрыт в работе [5].

Поскольку все современные системы управления ЛА являются цифровыми, то целесообразно в качестве допустимых управлений рассматривать класс кусочно-постоянных функций. В связи с этим, предлагается преобразовать непрерывную дифференциальную модель возмущенного движения РН вида (6) к линейной дискретной многошаговой модели. Процесс дискретизации линейной дифференциальной системы вида (6) изложен в работе [4].

Тогда, рассмотрим на целочисленном промежутке времени $t \in \overline{0, T-1} = \{0, 1, ..., T\}$ систему, динамика которой описывается системой дискретных рекуррентных уравнений в векторно-матричной форме Коши:

$$\begin{gathered} x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + G(t)\omega(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + \nu(t),\ t \in \overline{0, T-1}. \end{gathered} \tag{7}$$

Для постановки задачи стабилизации примем ряд предположений:

1) будем полагать, что все компоненты фазового вектора $x(t)$ рассматриваемой динамической системы измеряются с заданной точностью и известны субъекту управления;

2) для рассматриваемой в работе задачи оптимального управления не будем учитывать оказываемые на систему возмущения $\omega(t)$.

Тогда для описания рассматриваемого процесса стабилизации движения РН будем рассматривать упрощенную модель (7), учитывающую только динамику фазового вектора объекта при отсутствии возмущений, а именно:

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ t \in \overline{0,T-1}. \quad (8)$$

Пусть начальное состояние системы (8) и управление удовлетворяют следующим геометрическим ограничениям:

$$x(0) = x_0 \in \mathbf{X}(0) \subset \mathbb{R}^n, \quad (9)$$

$$u(t) \in \mathbf{P}(t) \subset \mathbb{R}^p,\ \forall t \in \overline{0,T-1}, \quad (10)$$

где $\mathbf{X}(0)$ и $\mathbf{P}(t)$ – выпуклые, замкнутые и ограниченные многогранники с конечным числом вершин соответственно в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^p$.

Учитывая, что в процессе движения РН проходит характерные участки полета вдоль опорной траектории, зададим жесткие геометрические ограничения на реализации фазового вектора вида:

$$x(t) \in \mathbf{M}(t) \subset \mathbb{R}^n\ \forall t \in \overline{1,T}, \quad (11)$$

где $\mathbf{M}(t)$ – выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник с конечным числом вершин в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Таким образом, в процессе управления движением РН, по мере прохождения вдоль опорных участков траектории значения фазового вектора не должны выходить за границы области фазового пространства, описываемой (11).

Таким образом, в результате выполненных преобразований и упрощений, задачу стабилизации РН можно рассматривать как задачу управления процессом стабилизации линейной дискретной динамической системы, для которой ограничения на вектор состояния и вектор управления имеют вид выпуклых, замкнутых и ограниченных многогранников (с конечным числом вершин) в соответствующих конечномерных векторных пространствах.

Критерий качества системы стабилизации движения. Учитывая, что качество системы стабилизации движения РН напрямую характеризуется значениями рассогласований между опорными и текущими параметрами движения РН. Тогда для оценки качества процесса стабилизации РН рассмотрим функционал $J : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p\times(T-1)} \to \mathbb{R}^1$, значения которого для каждой допустимой пары

$$\left(x_0, u(\cdot)\right) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p\times(T-1)},\ x_0 \in \mathbf{X}(0),$$

$$u(\cdot) = \left\{u(t)\right\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \mathbb{R}^{p\times(T-1)},\ u(t) \in \mathbf{P}(t)\ \forall t \in \overline{0,T-1},$$

определяются по формуле:

$$J\left(x_0, u(\cdot)\right) = \left\|Qx(T)\right\|_n = \tilde{J}\left(x(T)\right), \quad (12)$$

где $x(T)=\overline{x}\left(T;\overline{0,T},x_0,u(\cdot)\right)\in\mathbb{R}^n$ – есть фазовый вектор системы (8), соответствующий сечению траектории движения РН в финальный момент времени T; Q – неотрицательно определенная матрица весовых коэффициентов размера $(n\times n)$; $\|\cdot\|_n$ – евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^n$; $J:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$ – выпуклый функционал, значения которого определяются согласно (12).

Выбор функционала такого вида оправдан тем, что:

• на сегодняшний день, для решения задач оптимального управления с терминальным функционалом можно разрабатывать достаточно эффективные численные методы их решения;

• необходимо обеспечить наиболее подходящие условия для реализации разделения первой и второй ступеней РН.

Постановка задачи оптимальной стабилизации движения. На основании сделанных преобразований и предположений, задачу стабилизации движения РН можно формализовать как задачу оптимизации программного терминального управления дискретной динамической системой (8) при наличии фазовых ограничений вида (9) и (11), которая формулируется следующим образом.

Для дискретной динамической управляемой системы вида (8) – (11) требуется найти такое допустимое программное управление

$$u^{(e)}(\cdot)=\left\{u^{(e)}(t)\right\}_{t\in\overline{0,T-1}}\in\mathbb{R}^{p\times(T-1)},\ \forall t\in\overline{0,T-1}:\ u^{(e)}(t)\in\mathbf{P}(t), \qquad (13)$$

чтобы для соответствующей траектории

$$x^{(e)}(\cdot)=\left\{x^{(e)}(t)\right\}_{t\in\overline{0,T}}=\left\{\overline{x}\left(t;\overline{0,T},x_0,u^{(e)}(\cdot)\right)\right\}_{t\in\overline{0,T}},\ \forall t\in\overline{0,T}:\ x^{(e)}(t)\in\mathbf{M}(t),$$

функционал (12) принимал наименьшее возможное значение, т.е. выполнялось следующее условие оптимальности:

$$J\left(x^{(e)}(0),u^{(e)}(\cdot)\right)=\min_{\substack{x(0)\in\mathbf{X}(0)\\ u(\cdot)\in\mathbf{P}(\cdot)}}J\left(x(0),u(\cdot)\right)=\min_{\substack{x(0)\in\mathbf{X}(0)\\ u(\cdot)\in\mathbf{P}(\cdot)}}J\left(\overline{x}\left(T;\overline{0,T},x(0),u(\cdot)\right)\right)=$$

$$=\left\|Q\overline{x}\left(T;\overline{0,T},x^{(e)}(0),u^{(e)}(\cdot)\right)\right\|_n=\min_{x(T)\in\mathbf{G}_M^{(+)}(0,\mathbf{X}(0),T)}\left\|Qx(T)\right\|_n.$$

Здесь $x(T)=\overline{x}\left(T;\overline{0,T},x(0),u(\cdot)\right)$ – сечение движения системы (8) в финальный момент времени T, соответствующее допустимой паре $\left(x(0),u(\cdot)\right)\in\mathbf{X}(0)\times\mathbf{P}(\cdot)$; $\mathbf{P}(\cdot)$ – множество всех допустимых программных управлений $u(\cdot)$ на промежутке времени $\overline{0,T-1}$; $\mathbf{G}_M^{(+)}\left(0,\mathbf{X}(0),T\right)$ – обобщенная область достижимости финальных фазовых состояний $x(T)$ системы (8), которая определяется соотношением [10, 15]:

$$\mathbf{G}_M^{(+)}\left(0,\mathbf{X}(0),T\right)=\Big\{x(T)\mid x(t)\in\mathbb{R}^n,$$
$$x(t+1)=A(t)x(t)+B(t)u(t), \qquad (14)$$
$$t\in\overline{0,T-1},\ x(0)\in\mathbf{X}(0),\ u(t)\in\mathbf{P}(t),\ x(t)\in\mathbf{M}(t)\Big\},$$

где пара $\left(0,\mathbf{X}(0)\right)$ является множеством всех допустимых начальных позиций системы.

Область достижимости, определяемую в виде (14), можно рассматривать, как естественное обобщение понятия решения дискретных рекуррентных уравнений (8), являющееся фундаментальной характеристикой рассматриваемой управляемой системы [17].

Учитывая линейность дискретной динамической системы (8) и сделанные предположения относительно множеств $\mathbf{X}(0)$, $\mathbf{M}(t)$ и $\mathbf{P}(t)$, можно показать, что справедливы следующие свойства [19]:

1) область достижимости $\mathbf{G}_M^{(+)}\left(0,\mathbf{X}(0),t\right)$ является выпуклым, замкнутым и ограниченным многогранником с конечным числом вершин в пространстве $\mathbb{R}^n$ для каждого момента времени $t\in\overline{0,T}$;

2) рекуррентное (полугрупповое) свойство областей достижимости:

$$\mathbf{G}_M^{(+)}\left(0,\mathbf{X}(0),T\right)=\mathbf{G}_M^{(+)}\left(t,\mathbf{G}_M^{(+)}\left(0,\mathbf{X}(0),t\right),T\right),$$

где $\mathbf{G}_M^{(+)}\left(0,\mathbf{X}(0),t\right)$ – область достижимости на момент времени $t\in\overline{1,T-1}$, соответствующая паре $\left(0,\mathbf{X}(0)\right)$.

На основе полугруппового свойства областей достижимости и алгебраических свойств дискретной динамической системы (8) – (11), в работах [15, 19] разработан общий алгебраический рекуррентный метод построения областей достижимости для таких систем. Согласно этому методу, построение области достижимости $\mathbf{G}_M^{(+)}(0,\mathbf{X}(0),T)$ сводится к реализации построения последовательности одношаговых областей достижимости:

$$\mathbf{G}_M^{(+)}\left(t,\mathbf{G}^{(+)}(t),t+1\right),\ t\in\overline{1,T-1}, \qquad (15)$$

где $\mathbf{G}_M^{(+)}(t)=\mathbf{G}_M^{(+)}\left(0,\mathbf{X}(0),t\right)$ – область достижимости на момент времени t, соответствующая паре $\left(0,\mathbf{X}(0)\right)$, которая является выпуклым, замкнутым и ограниченным многогранником с конечным числом вершин в пространстве $\mathbb{R}^n$.

В работах [15, 19] для построения последовательности (15) за основу взято как описание множества всех вершин каждой из одношаговых областей достижимости (15), так и их опорных гиперплоскостей [16]. Приведен-

ный в этих работах общий рекуррентный алгебраический метод сводит решение задачи нахождения всех вершин области достижимости (14) к алгебраическим операциям и решению конечного числа задач линейного математического программирования.

Таким образом, согласно [10, 15, 19] общую схему решения рассматриваемой задачи нахождения оптимального программного управления, стабилизирующего движение РН на рассматриваемом участке полета, можно представить в виде решения следующих подзадач:

1) построения области достижимости $\mathbf{G}_M^{(+)}\left(0,\mathbf{X}(0),T\right)$ финальных фазовых состояний динамической системы (8) – (11) (решается с помощью реализации прямой конструкции);

2) минимизации выпуклого функционала $J\left(x(T)\right)$ на множестве $\mathbf{G}_M^{(+)}\left(0,\mathbf{X}(0),T\right)$(сводится к решению задачи выпуклого математического программирования);

3) нахождения множества всех пар $\left(x^{(e)}(0),u^{(e)}(\cdot)\right)\in\mathbf{X}(0)\times\mathbf{P}(\cdot)$, удовлетворяющих условию оптимальности (12), т.е. являющихся решением рассматриваемой задачи оптимальной стабилизации движения (решается с помощью реализации обратной конструкции).

Заключение. В данной работе рассмотрено преобразование исходной дифференциальной системы, описывающей движение РН на атмосферном участке полета, к соответствующей ей линейной дискретной динамической системе. В рамках сформированной многошаговой модели, принятых ограничений и предположений, формулируется соответствующая исходной задаче стабилизации движения РН, задача оптимального программного терминального управления при наличии фазовых ограничений. Для данной задачи описывается общая схема ее решения, на основе которой разработаны численный алгоритм и компьютерная программная система моделирования решений. В докладе приведены результаты и анализ численных расчетов для модельных примеров.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-02368).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абгарян К.А., Калязин Э.Л., Мишин В.П., Рапопорт И.М. Динамика ракет: учебник для студентов вузов. – Москва: Машиностроение, 1990. – 464 с.

2. Боднер В.А. Теория автоматического управления полетом / В.А. Боднер. – Москва : Наука, 1964. – 700 с.

3. Болтянский, В.Г. Оптимальное управление дискретными системами / В.Г. Болтянский. – Москва : Наука, 1973. – 448 с.

4. Булаев, В.В. Методика дискретизации линейных динамических систем / В.В. Булаев, А.Ф. Шориков // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2016. – № 2. – С. 67–73.

5. Булаев, В.В. Формулировка задачи оптимального управления и моделирование динамики упругого механического объекта в фазовом пространстве / В.В. Булаев, А.Ю. Горанов // Вестник ЮУрГУ. – 2015. – Т. 15, № 4. – С. 90–100.

6. Игдалов, И.М. Ракета как объект управления / И.М. Игдалов, Л.Д. Кучма, Н.В. Поляков [и др.] ; под ред. акад. С.Н. Конюхова. – Днепропетровск : АРТ-ПРЕСС, 2004. – 544 с.

7. Колесников, К.С. Жидкостная ракета как объект регулирования / Колесников К.С. – Москва : Машиностроение, 1969. – 300 с.

8. Колесников, К.С. Упругий летательный аппарат как объект автоматического управления / К.С. Колесников, В.Н. Сухов. – Москва : Машиностроение, 1974. – 268 с.

9. Колобашкина, Л.В. Синтез оптимальных законов коррекции цифровых высокоразмерных слабодемпфированных систем / Л.В. Колобашкина, М.В. Алюшин, В.М. Алюшин // Мехатроника. Автоматизация. Управление. – 2011. – № 3. – С. 7–14.

10. Красовский, Н.Н. Теория управления движением (линейные системы) / Н.Н. Красовский. – Москва : Наука, 1968. – 476 с.

11. Лазарев, Ю.Н. Управление траекториями аэрокосмических аппаратов / Ю.Н. Лазарев. – Самара : Самарский научный центр РАН. – 2007. – 274 с.

12. Лебедев, А.А. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов / А.А. Лебедев, Л.С. Чернобровкин. – Москва : Машиностроение, 1973. – 616 с.

13. Петров Б.Н. Бортовые терминальные системы управления (принципы построения и элементы теории) / Б.Н. Петров, Ю.П. Портнов-Соколов, А.Я. Андриенко, В.П. Иванов. – Москва : Машиностроение, 1983. – 200 с.

14. Рабинович Б.И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. – Москва: Машиностроение, 1975 – 416 с.

15. Тюлюкин, В.А. Алгоритм решения задачи терминального управления для линейной дискретной динамической системы / В.А. Тюлюкин, А.Ф. Шориков // Автоматика и телемеханика. – 1993. – № 4. – С. 115–127.

16. Черников, С.Н. Линейные неравенства / С.Н. Черников. – Москва : Наука, 1968. – 488 с.

17. Черноусько, Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов / Ф.Л. Черноусько. – Москва : Наука, 1988. – 320 с.

18. Школьный, Е.П. Атмосфера и управление движением летательных аппаратов / Е.П. Школьный, Л.А. Майборода ; под ред. В.М. Пономарева. – Ленинград : Гидрометеоиздат, 1973. – 308 с.

19. Шориков, А.Ф. Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах / А.Ф. Шориков. – Екатеринбург : Издательство Уральского государственного университета, 1997. – 242 с.

20. Blackburn T.R. Application of Linear Optimal Control and Filtering Theory / Thomas R. Blacburn, David R. Vaughan // IEEE Transaction on automatic control. – vol. 16, no. 6 – 1971 – 799–806 pp.

21. Kurzhanskiy, A.A. Reach set computation and control synthesis for discrete-time dynamical systems with disturbances / Alex A. Kurzhanskiy, Pravin Varaiya // Automatica. – 2011. – № 47. – pp. 1414–1426.

22. Marcon A., Simulation model for Vega control system design / Anna Marcon // Proceeding of the 6th International ESA Conference of Guidance, Navigation and Control Systems. – Loutraki, Greece – 2005.

23. G.F., Stability problems in the control of Saturn launch vehicles / G.F. McDonough // Dynamic stability of structures. Proceeding of an International conference held at Northwestern University – 1965. –113 –127 pp.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОГРАММНОГО ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РАСХОДОМ ТОПЛИВА ЖИДКОСТНОЙ РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ

А.Ф. Шориков (УрФУ, 620002, Екатеринбург, Мира, 19)
E-mail: afshorikov@mail.ru

В.И. Калёв (АО «НПО Автоматики им. акад. Н.А. Семихатова», 620075, Екатеринбург, Мамина-Сибиряка, 145)
E-mail: butahlecoq@gmail.com

FUEL CONSUMPTION OPEN-LOOP TERMINAL CONTROL OPTIMIZATION OF LIQUID-PROPELLANT LAUNCH VEHICLE

A.F. Shorikov (Ural Federal University, 620002, Yekaterinburg, Mira str., 19)

V.I. Kalev (JSC Scientific and Production Association of automatics, 620075, Yekaterinburg, Mamina-Sibiryaka str., 145)

Keywords: optimal control, terminal control, reachable set, polytopes, linear system, discrete-time system, dynamical system, launch vehicle, liquid-propellant engine, fuel consumption control.

Введение. На большинстве современных объектов ракетно-космической техники, оснащенных жидкостными реактивными двигателями, решаются четыре основные задачи управления: наведения, навигации, стабилизации и управления расходом топлива.

Задача управления расходом топлива жидкостной ракеты-носителя (РН) заключается в синхронном и полном опорожнении топливных баков окислителя и горючего к заданному моменту времени. Таким образом, задачу управления расходом топлива РН можно отнести к классу задач терминального управления. Критерием качества в терминальной постановке задачи будет отклонение основных координат состояния (массовый расход топлива и масса топлива в баке) от желаемых значений в конечный момент времени.

За последние 40 лет решению задачи терминального управления расходом топлива посвящено большое количество литературы. Основополагающей в этом направлении является работа Б.Н. Петрова [2], в которой намечены пути решения задачи терминального управления расходом топлива РН. Результаты продолжительного исследования данной проблемы резюмируются в достаточно недавней работе [1].

В настоящее время достаточно хорошо изучены задачи оптимизации терминального управления динамическими системами, в которых считаются известными вероятностные характеристики априори неопределенных

параметров. Однако в реальных условиях, для сложных объектов ракетно-космической техники, часто оказывается невозможным провести большое количество испытаний. В связи с этим информация о вероятностных характеристиках априори неопределенных параметров может отсутствовать или быть недостоверной [5, 6]. Это обстоятельство мотивирует разработчика алгоритмов управления рассматривать неопределенность параметров в качестве ограниченного множества их возможных значений.

В работе [8] для решения задачи терминального управления расходом топлива РН описывается формирование линейной дискретной модели объекта управления, причем [3] ограничения на неопределенное начальное состояние и управляющее воздействие имеют вид выпуклых, замкнутых и ограниченных многогранников (с конечным числом вершин) в соответствующих конечномерных векторных пространствах.

Данная работа посвящена решению задачи оптимизации программного терминального управления расходом топлива РН. Для решения этой задачи требуется знание областей достижимости рассматриваемой динамической системы, поэтому мы используем изложенный в работах [5, 7] общий рекуррентный алгебраический алгоритм построения областей достижимости линейных дискретных динамических систем.

Математическая модель объекта управления. Рассматривается линейная дискретная модель совокупности двигательной установки первой ступени РН и топливных баков. Управление расходом топлива осуществляется при помощи исполнительных органов – дросселей, регулирующих массовый расход топлива в баках. Движение рассматривается на заданном целочисленном промежутке времени $\overline{0,T}=\{0,1,\dots,T\}$, $(T>0)$, где T – количество измерительных точек датчиков уровней окислителя и горючего.

Массовые расходы окислителя и горючего представлены в виде рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} \dot m_o(t+1) &= \dot m_o(t)+\alpha u(t), \quad \dot m_o(0)=\dot m_o^{nom}+\alpha\Delta K_m, \\ \dot m_f(t+1) &= \dot m_f(t)+\beta u(t), \quad \dot m_f(0)=\dot m_f^{nom}+\beta\Delta K_m, \end{aligned} \tag{16}$$

где $t\in\overline{0,T-1}$; α,β – некоторые коэффициенты эффективности работы дросселя; $u(t)$ – управляющее воздействие; $\dot m_o^{nom}$, $\dot m_f^{nom}$ – номинальные (расчетные) значения массовых расходов окислителя и горючего; ΔK_m – погрешность начальной выставки дросселей на номинальное значение.

Дискретные уравнения, позволяющие определить значения текущей массы компонентов топлива в топливных баках, имеют вид:

$$\begin{aligned} M_o(t+1) &= M_o(t)-\Delta T\,\dot m_o(t), \quad M_o(0)=M_o^{fill}+\Delta M_o, \\ M_f(t+1) &= M_f(t)-\Delta T\,\dot m_f(t), \quad M_f(0)=M_f^{fill}+\Delta M_f, \end{aligned} \tag{17}$$

где $t \in \overline{0,T-1}$; ΔT – расчетное значение времени между двумя соседними измерениями уровней топлива в баках; M_o^{fill}, M_f^{fill} – номинальные массы рабочего запаса окислителя и горючего; ΔM_o, ΔM_f – погрешность заправки топливных баков.

Уравнения движения объекта (16), (17) могут быть записаны в виде рекуррентного векторно-матричного уравнения:

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ x(0) = x_0, \tag{18}$$

где $x(t)$ – фазовый вектор системы, $x(t) \in \mathbb{R}^4$ (здесь и далее, $\mathbb{R}^n$ – n-мерное векторное пространство векторов-столбцов); $x(0) = x_0$ – заданное начальное значение фазового вектора; $u(t)$ – управляющее воздействие, $u(t) \in \mathbb{R}^1$; $A(t)$ – матрица состояния системы, $A(t) \in \mathbb{R}^{4\times4}$; предполагается, что для всех $t \in \overline{0,T-1}$ для матрицы $A(t) \in \mathbb{R}^{4\times4}$ существует обратная ей матрица $A^{-1}(t) \in \mathbb{R}^{4\times4}$; $B(t)$ – матрица управления, $B(t) \in \mathbb{R}^{4\times1}$; t – дискретный момент времени, $t \in \overline{0,T-1}$.

Предполагается, что начальное фазовое состояние системы $x(0) = x_0$ фиксировано и в силу (16), (17) стеснено заданным геометрическим ограничением:

$$x(0) \in \mathbf{X}(0) \subset \mathbb{R}^4. \tag{19}$$

а управляющее воздействие стеснено следующим геометрическим ограничением:

$$u(t) \in \mathbf{U}(t) = \left\{u(t) : u(t) \in \mathbb{R}^1,\ \left|u(t) - u_*(t)\right| \le \Delta u_*\right\}, \tag{19}$$

где $u_*(\cdot) = u_*(t), t \in \overline{0,T-1}$ – заданная опорная функция целочисленного аргумента (заданное опорное программное управление); $\Delta u_* = const$.

Рассматриваемый процесс управления оценивается значением функционала $\Phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^{1\times(T-1)} \to \mathbb{R}^1$, определенного на возможных реализациях фазового вектора $x(T) \in \mathbb{R}^4$ объекта (18) в финальный (терминальный) момент времени T, имеющего вид:

$$\mathbf{\Phi}(x(T)) = \left\|x(T) - x_d\right\|_4, \tag{20}$$

где $x(T) = \overline{x}\left(T; \overline{0,T}, x_0, \{u(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}}\right) \in \mathbb{R}^4$ – финальное фазовое состояние системы (18), соответствующее паре $(x_0, \{u(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}}) = (x_0, u(\cdot))$; x_d – вектор, определяющий желаемое финальное фазовое состояние системы (18), $x_d \in \mathbb{R}^4$; $\|\cdot\|_4$ – евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^4$.

Постановка задачи оптимального программного терминального управления. Пусть динамика двигательной установки первой ступени РН описывается дискретной линейной рекуррентной управляемой системой вида (18). Предполагается, что начальное значение фазового вектора сис-

темы фиксировано, т.е. $x(0)=x_0$ – задано и удовлетворяет ограничению (4), а управляющее воздействие стеснено геометрическим ограничением вида (19). Качество рассматриваемого процесса управления оценивается терминальным функционалом вида (20). Тогда требуется найти такое допустимое программное управление:

$$u^{(e)}(\cdot)=\left\{u^{(e)}(t)\right\}_{t\in\overline{1,T-1}}\in\square^{1\times T-1},\ \forall t\in\overline{1,T-1}:u^{(e)}(t)\in\mathbf{U}(t), \qquad (21)$$

которое переведет систему (18) за время T из начального фазового состояния $x(0)=x_0$ в такое финальное состояние $x^{(e)}(T)=\overline{x}\left(T;\overline{0,T},x_0,\left\{u^{(e)}(t)\right\}_{t\in\overline{1,T-1}}\right)\in\square^4$, на котором функционал (20) будет принимать наименьшее значение.

Решение поставленной задачи предполагает использование областей достижимости приведенной линейной дискретной динамической системы вида (3) – (5).

Общий алгебраический рекуррентный метод построения областей достижимости. В данной работе для построения областей достижимости линейной дискретной динамической системы вида (3) – (5) будем использовать общий алгебраический рекуррентный метод [5,7]. В работе [5] было показано, что точная область достижимости $\mathbf{G}^{(+)}\left(0,x(0),t\right)\subset\square^4$, т.е. множество всех допустимых фазовых состояний $x(t)$, линейной дискретной динамической системы (3) – (5), для всех $t\in\overline{1,T}$ представляет собой выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник с конечным числом вершин в пространстве $\square^4$. Также для такой области достижимости справедливо эволюционное (полугрупповое) свойство:

$$\mathbf{G}^{(+)}\left(0,x(0),t+1\right)=\mathbf{G}^{(+)}\left(t,\mathbf{X}(t),t+1\right),\forall t\in\overline{1,T-1},$$

где $\mathbf{X}(t)=\mathbf{G}^{(+)}\left(0,x(0),t\right)$ – область достижимости на момент времени *t*, соответствующая паре $\left(0,x(0)\right)$ и являющаяся выпуклым, замкнутым и ограниченным многогранником с конечным числом вершин в $\square^4$.

Таким образом, задача отыскания множества $\mathbf{G}^{(+)}\left(0,x(0),T\right)$ сводится к реализации построения рекуррентной последовательности одношаговых областей достижимости:

$$\mathbf{X}(t+1)=\mathbf{G}^{(+)}\left(t,\mathbf{X}(t),t+1\right),\ t\in\overline{0,T-1}$$

Известно [5, 9], что область достижимости линейной дискретной динамической системы, являющаяся выпуклым, замкнутым и ограниченным многогранником с конечным числом вершин, может быть описана через множество всех его вершин или с помощью соответствующей конечной системы линейных алгебраических неравенств и уравнений.

Далее изложим подход к решению задачи построения одношаговых областей достижимости, опираясь на общий алгебраический рекуррентный алгоритм [5,7].

Множество допустимых фазовых состояний $x(t+1)$ рассматриваемой управляемой системы (18), содержащее все вершины области достижимости $\mathbf{G}^{(+)}\left(t,\mathbf{X}(t),t+1\right)$ на момент времени $(t+1), t\in\overline{0,T-1}$ соответствующей паре $\left(t,\mathbf{X}(t)\right)\in\overline{0,T-1}\times 2^{\square^4}$, где $\mathbf{X}(t)=\mathbf{G}^{(+)}\left(0,x(0),t\right)$ – выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник с конечным числом вершин в $\square^4$, определим согласно следующему алгоритму.

Шаг 1. Формируем множество $\mathbf{\Gamma}_n\left(\mathbf{X}(t)\right)$ всех вершин многогранника $\mathbf{X}(t)$.

Шаг 2. Формируем множество $\mathbf{\Gamma}_u\left(\mathbf{U}(t)\right)$ всех вершин многогранника $\mathbf{U}(t)$.

Шаг 3. Определяем множества:

$$\hat{\mathbf{X}}(t+1)=\left\{\hat{x}(t+1)\in\square^n \mid \hat{x}(t+1)=A(t)x(t),\ x(t)\in\mathbf{\Gamma}_n\left(\mathbf{X}(t)\right)\right\},$$

$$\hat{\mathbf{Y}}(t+1)=\left\{\hat{y}(t+1)\in\square^n \mid \hat{y}(t+1)=B(t)u(t),\ u(t)\in\mathbf{\Gamma}_u\left(\mathbf{U}(t)\right)\right\},$$

$$\hat{\mathbf{G}}^{(+)}(t+1)=\left\{\hat{v}(t+1)\in\square^n \mid \hat{v}(t+1)=\hat{x}(t+1)+\hat{y}(t+1),\right.$$

$$\left.\hat{x}(t+1)\in\hat{\mathbf{X}}(t+1),\ \hat{y}(t+1)\in\hat{\mathbf{Y}}(t+1)\right\},$$

здесь $\hat{\mathbf{G}}^{(+)}(t+1)$ – сумма Минковского множеств $\hat{\mathbf{X}}(t+1)$ и $\hat{\mathbf{Y}}(t+1)$, являющаяся множеством точек области достижимости, содержащим также внутренние (избыточные) точки.

Шаг 4. Для сформированного множества точек

$$\hat{\mathbf{G}}^{(+)}(t+1)=\left\{\hat{v}^{(i)}(t+1)\right\}_{i\in\overline{1,m}}\subset\mathbf{G}^{(+)}\left(t,\mathbf{X}(t),t+1\right),\ m\in\square,$$

определяем все его вершины $\mathbf{\Gamma}_n\left(\mathbf{G}^{(+)}(t+1)\right)=\left\{v^{(i)}(t+1)\right\}_{i\in\overline{1,k}},\ k\leqslant m,\ k\in\square$.

Поскольку, согласно [5], справедливо соотношение:

$$\operatorname{conv}\left(\hat{\mathbf{G}}^{(+)}(t+1)\right)=\mathbf{G}^{(+)}\left(t,\mathbf{X}(t),t+1\right)=\mathbf{X}(t+1),$$

то вершины множества $\hat{\mathbf{G}}^{(+)}(t+1)$ будут описывать множество достижимости линейной дискретной динамической системы в момент времени $(t+1)$, являющейся выпуклым, замкнутым и ограниченным многогранником в $\square^4$.

В работе [5] было показано, что задача поиска всех вершин множества $\hat{\mathbf{G}}^{(+)}(t+1)$ сводится к решению m задач линейного математического программирования (ЛМП). Учитывая это, формулируется следующая оптимизационная задача.

Для фиксированного $i\in\overline{1,m}$ и набора переменных $\lambda_j,\ j\in\overline{1,m},\ j\neq i,\ \lambda_i\in\square$ требуется решить следующую задачу ЛМП:

$$f = \sum_j \lambda_j \to \min(\max);$$

$$\textit{при ограничениях}: \sum_j \lambda_j \hat{v}^{(j)}(t+1) = \hat{v}^{(i)}(t+1),$$

$$\sum_j \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geqslant 0.$$

Целевая функция, вообще говоря, может иметь любой вид, поскольку при решении задачи ЛМП нас интересует только наличие или отсутствие базисного допустимого решения. Из свойств системы ограничений задачи ЛМП следует, что, если она совместна, то есть базисное допустимое решение существует, то точка, соответствующая вектору $\hat{v}^{(i)}(t+1)$ не является вершиной многогранника $\mathrm{conv}\left(\hat{\mathbf{G}}^{(+)}(t+1)\right)$, поскольку ее можно представить как выпуклую комбинацию других точек. В противном случае, рассматриваемая точка является вершиной области достижимости.

В результате, решив m задач ЛМП, найдем весь набор вершин $\mathbf{\Gamma}_n(\mathbf{X}(t))$, который и будет являться множеством всех вершин области достижимости $\mathbf{X}(t+1) = \mathbf{G}^{(+)}(t, \mathbf{X}(t), t+1)$ линейной дискретной динамической системы (18) – (19) на момент времени $(t+1)$.

Когда область достижимости построена, можно рассмотреть решение сформулированной задачи оптимизации программного терминального управления системой (18) – (19), описывающей динамику расхода топлива РН.

Оптимизация программного управления. В этом разделе, на основании работ [5, 7], приведем общую схему решения сформулированной задачи оптимального программного терминального управления для дискретной динамической системы (18) – (19).

Зафиксируем промежуток времени $\overline{0,T}$ и для любого фиксированного набора $(T, \mathbf{X}(T)) \in \{T\} \times 2^{\square^4}$ (здесь и далее для любого множества X символом 2^X будем обозначать множество всех подмножеств множества X) определим в силу (18) – (19) следующие множества:

$$\mathbf{G}^{(-)}(T, \mathbf{X}(T), t) = \Big\{ x(t):\ x(t) \in \square^4,\ \forall t \in \{T, T-1, \cdots, 1, 0\},$$
$$x(t-1) = A^{-1}(t-1)\big[x(t) - B(t-1)u(t-1)\big],\ x(T) \in \mathbf{X}(T),\ u(t-1) \in \mathbf{U}(t-1)\Big\}; \tag{8}$$

$$\mathbf{X}^{(e)}(0, \mathbf{X}(\tau), t) = \mathbf{G}^{(+)}(0, x(0), t) \cap \mathbf{G}^{(-)}(T, \mathbf{X}(T), t),\ t \in \overline{1, T-1}. \tag{9}$$

Здесь множество $\mathbf{G}^{(+)}(0, x(0), t)$ есть прямая область достижимости возможных состояний фазового вектора системы (18) – (19) на момент времени t, отвечающая набору $(0, x(0)) = (0, x_0)$, а $\mathbf{G}^{(-)}(T, \mathbf{X}(T), t)$ есть обратная область достижимости возможных состояний фазового вектора рассматриваемой системы на момент времени t, отвечающая набору $(T, \mathbf{X}(T))$ [5, 7].

На основании сделанных построений и результатов работ [5, 7], можно показать, что решение сформулированной задачи оптимального программного терминального управления можно свести к решению следующей последовательности подзадач:

1) построения прямой области достижимости $\mathbf{G}^{(+)}\left(0, x(0), T\right) \in 2^{\square^4}$ (решается с помощью общего алгебраического рекуррентного метода (прямая рекуррентная конструкция);

2) оптимизации выпуклого функционала $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}\left(x(T)\right) = \left\| c, \left(x(T) - x_d\right)\right\|_4$ на множестве $\mathbf{X}(T)=\mathbf{G}^{(+)}\left(0, x(0), T\right) \in 2^{\square^4}$, а именно, определения множества $\mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}(T) \subset \square^4$ финальных фазовых состояний рассматриваемой системы из решения следующей задачи выпуклого математического программирования (ВМП):

$$\mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}(T) = \mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}\left(0, x(0), T\right) = \left\{x^{(e)}(T):\right.$$
$$x^{(e)}(T) \in \mathbf{G}^{(+)}\left(\tau, x(0), T\right),\ \mathbf{\Phi}^{(e)} = \mathbf{\Phi}\left(x^{(e)}(T)\right) = \left\|x^{(e)}(T) - x_d\right\|_4 = \tag{10}$$
$$\left. = \min_{x(T) \in \mathbf{G}^{(+)}(0, x(0), T)} \left\|x(T) - x_d\right\|_4 \right\}$$

(сводится к решению задачи ВМП, например, с помощью метода Зойтендейка (см., например, в [7]));

3) построения последовательности обратных областей достижимости $\mathbf{G}^{(-)}\left(T, \mathbf{X}(T), t\right) \in 2^{\square^4}$, $t \in \left\{T-1, T-2, \ldots, 1, 0\right\}$, где $\mathbf{X}(T)=\mathbf{G}^{(+)}\left(0, x(0), T\right) \in 2^{\square^4}$ (решается с помощью общего алгебраического рекуррентного метода (обратная рекуррентная конструкция);

4) построения следующей последовательности множеств:

$$\widehat{\mathbf{X}}^{(e)}\left(0, \mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}(T), t\right) = \mathbf{G}^{(+)}\left(0, x(0), t\right) \cap \mathbf{G}^{(-)}\left(T, \mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}(T), t\right),\ t \in \overline{1, T-1}$$

$$\widehat{\mathbf{X}}^{(e)}\left(0, \mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}(T), 0\right) = \{x(0)\};\ \widehat{\mathbf{X}}^{(e)}\left(0, \mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}(T), T\right) = \mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}(T); \tag{11}$$

(решается с помощью модификации общего алгебраического рекуррентного метода, т.е. сведения к реализации решения конечной последовательности задач ЛМП [7]);

5) решения на промежутке $\overline{0, T}$ двухточечных краевых задач для динамической рекуррентной системы (18) – (19) при краевых условиях $x(0) = x_0$ и $x(T) = x^{(e)}(T) \in \mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}(T)$, т.е. нахождения следующего множества оптимальных программных управлений:

$$\mathbf{U}^{(e)}\left(\overline{0, \mathrm{T}}, x_0, \mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}(T)\right) = \left\{u^{(e)}(\cdot):\ \forall t \in \overline{0, T-1},\ u^{(e)}(t) \in \mathbf{U}(t)\right.$$
$$\left. x^{(e)}(t+1) = A(t)x^{(e)}(t) + B(t)u^{(e)}(t) \in \widehat{\mathbf{X}}^{(e)}\left(0, \mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}(T), t\right),\ x^{(e)}(0) = x_0 \in \mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}(T)\right\} \tag{12}$$

(решается с помощью сочетания обратной и прямой рекуррентных конструкций).

Из результатов работ [5, 7] следует, что сформированное множество допустимых программных управлений $\mathbf{U}^{(e)}\left(\overline{0,\mathrm{T}}, x_0, \mathbf{X}_{\mathbf{\Phi}}^{(e)}(T)\right)$ есть множество всех допустимых программных управлений, являющихся решением рассматриваемой задачи оптимального терминального управления.

Заключение. В работе приведено описание линейной дискретной динамической системы, отражающей динамику расхода топлива первых ступеней жидкостных РН. Задача терминального управления расходом топлива сформулирована как задача оптимального терминального управления линейной дискретной динамической системой. Основной вклад данной работы заключается в описании общей схемы решения задачи оптимизации программного терминального управления расходом топлива РН. Решение исходной многошаговой оптимизационной задачи находится путем реализации конечной последовательности только одношаговых задач ЛМП, ВМП и конечной дискретной оптимизации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-02368).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андриенко А.Я., Иванов В.П. Вопросы теории и практики создания бортовых терминальных систем жидкостных ракет-носителей // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 3. – С. 401–412.

2. Бортовые терминальные системы управления (принципы построения и элементы теории) / Б.Н. Петров, Ю.П. Портнов-Соколов, А.Я. Андриенко, В.П. Иванов. – Москва : Машиностроение, 1983. – 200 с.

3. Калёв В.И, Шориков А.Ф. Моделирование задачи терминального управления расходом топлива жидкостных ракет // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2016. – Т. 59, № 8-2. – С. 45–48.

4. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Москва: Наука, 1968. – 476 с.

5. Тюлюкин В.А., Шориков А.Ф. Алгоритм решения задачи терминального управления для линейной дискретной системы // Автоматика и телемеханика. – 1993. – № 4. – С. 115–127.

6. Ширяев В.И., Подивилова Е.О. Об аппроксимации информационных множеств в задаче гарантированного оценивания состояния линейных динамических систем // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014: сборник трудов конференции. – Москва: Изд-во ИПУ РАН, 2014. – С. 2132–2140.

7. Шориков А.Ф. Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997. – 242 с.

8. Шориков А.Ф., Калёв В.И. Формирование линейной дискретной динамической модели для решения задачи оптимального терминального управления расходом топлива ракеты-носителя // Информационные технологии и системы: труды 5-ой Международной научной конференции. – Челябинск: Изд-во ЧелГУ, 2016. – С. 61–66.

9. Ziegler G.M. Lectures on Polytopes / New York : Springer Verlag, 1998. – 384 p.

АЛГОРИТМ АНАЛИЗА КРИТЕРИЕВ ДАННЫХ СНС ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ АВТОМАТИЧЕСКОЙ НАЧАЛЬНОЙ ВЫСТАВКИ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ ДЛЯ БЛА

Е.А. Шулюмов , А.А. Бусыгин , А.Г. Абзалов (КНИТУ-КАИ, Казань),
e-mail: eshulyumov@gmail.com

ALGORITHM FOR ANALYSIS OF THE SNS DATA CRITERIA FOR PROVIDING AN AUTOMATIC INITIAL EXHIBITION OF AN INERTIAL NAVIGATION SYSTEM WITH A SPECIFIED ACCURACY FOR UFV

E.A. Shulumov , A.A. Busygin , A.G. Abzalov

Авиация в последние годы становится все в большей степени беспилотной. Беспилотные летательные аппараты (БПЛА) постепенно становятся главной продукцией многих авиационных фирм. Появляется большое количество разработчиков и производителей БПЛА, занимающихся исключительно беспилотными аппаратами и системами. Это происходит по ряду причин. Сами БПЛА, как правило, гораздо дешевле пилотируемых самолетов и вертолетов. Дешевле, чем подготовка летчика, обходится и подготовка оператора беспилотной системы. Отсутствие пилота позволяет исключить бортовые системы жизнеобеспечения, уменьшить массу и габариты БПЛА, а также увеличить диапазон допустимых перегрузок и влияющих факторов. Большое значение имеет и фактор безопасности – потери беспилотных аппаратов не ведут к потере пилотов.

Диапазон существующих и разрабатываемых аппаратов очень широк: от микро- и мини-БПЛА до тяжелых многотонных аппаратов, а также БПЛА, способных выполнять сверхдальние и сверхвысотные полеты. Назначение современных БПЛА не ограничивается только военной областью. Стремительно расширяется и сфера их гражданского применения (в таких отраслях, как: нефтегазовая промышленность, транспорт, строительство, сельское хозяйство, связь и др.), что придает дополнительные импульсы развитию беспилотной авиационной техники.

Взрывной рост количества разработок БПЛА именно в последнее десятилетие не случаен. Этому способствовали определенные объективные предпосылки, которые созрели именно к этому времени. Они связаны с серьезными технологическими успехами в различных областях. Например, этому способствовало:

– появление новых легких и прочных материалов, особенно композитных;

– быстрое развитие микроэлектронной компонентной базы: микроконтроллеров, микросистемных навигационных датчиков, приемопередатчиков радиосигналов, различных СВЧ-устройств, микроэлектронных драйверов сильноточных потребителей, миниатюрных видеокамер и т.д.;

– появление и быстрое развитие высокоэффективных возобновляемых источников питания (на основе литий-полимерных аккумуляторов, топливных элементов и др.);

– разработки в области высокоресурсных бесколлекторных электродвигателей, а также реактивных и поршневых двигателей;

– развитие спутниковых систем глобального позиционирования;

– общее развитие вычислительной техники, включая появление специальных операционных систем, интерфейсов, математического и алгоритмического обеспечения.

1. Инерциальные навигационные системы и их применение в качестве источника пилотажно-навигационной информации

Задача управления пространственным движением объекта предполагает определение параметров его углового и поступательного движения. В качестве систем, позволяющих получить эту информацию, в настоящее время все большее распространение имеют инерциальные навигационные системы (ИНС). Эти системы при условии введения в них некоторого объема начальной информации о системах координат и начального местоположения позволяют автономно определять требуемые для управления навигационные параметры с нужной точностью во время движения объекта. Первичная информация ИНС измеряется с помощью датчиков параметров поступательного движения (акселерометров или гироинтеграторов линейных ускорений) и датчиков параметров углового движения объекта, обычно гироскопических. Эта информация (как правило, измеренные вектор кажущегося ускорения и вектор абсолютной угловой скорости) обрабатывается в бортовом вычислителе с целью получения интересующей навигационной информации об ориентации, скоростях движения и местоположения объекта.

Преимущества инерциальных навигационных систем – такие как автономность, помехозащищенность, достаточная точность, приемлемые габаритно-весовые характеристики и т.п. – предопределяют повышенное внимание к дальнейшему техническому совершенствованию этих систем и на перспективу. Это связано с возможностью использования при их разработке современных чувствительных элементов (динамически настраиваемых, лазерных, волоконнооптических, роторных вибрационных гироскопов, микромеханических гироскопов, волновых твердотельных гироскопов и т.п.) и достижений в области создания бортовых вычислительных машин.

Основными источниками погрешностей ИНС являются: ошибки начальной выставки, погрешности акселерометров, дрейф гироскопов, нестабильность параметров элементов системы и др. В данной статье рассмот-

рены алгоритмы, задача которых свести к минимуму ошибки начальной выставки ИНС.

2. Методы получения текущих координат на Земле для выполнения начальной выставки ИНС

Необходимые начальные данные для обеспечения выставки ИНС методом аналитического гирокомпасирования являются географические координаты местоположения объекта (широта, долгота, а также высота).

Для получения начальных данных можно использовать различные методы. В авиационной отрасли нашли широкое применение методы определения начального местоположения с помощью спутниковой системы навигации, метод сохранения координат ИНС в энергонезависимой памяти с дальнейшем использованием в качестве начальных данных, привязка ЛА к месту на аэродроме с заранее известными координатами.

Рассмотрим каждый метод более подробно.

Привязка ЛА к месту на аэродроме с заранее известными координатами является на данный момент наиболее точным т.к. координаты вычисляются при помощи геодезических измерений. Основным недостатком данного метода является необходимость перебазирования ЛА к «эталонному» месту что может привести к увеличению времени подготовки ЛА. Данный метод устарел в виду стремительного развития спутниковой навигации.

Метод на основе сохранения координат ИНС в энергонезависимой памяти БЦВМ является наиболее распространенном среди крупногабаритных самолетов. При выполнении коррекции ИНС по данным спутниковой навигационной системы (СНС) точность координат соответствует точности определения СНС. Однако данный метод неприемлем к малогабаритным ЛА, ввиду возможного перемещения после снятия электропитания с бортового оборудования.

Метод на основе СНС является предпочтительным для всех типов БЛА, в том числе и для тяжелых БЛА большой продолжительности полета. Для улучшения характеристик точности все большее применяют метод дифференциальных поправок (ABAS, GBAS, SBAS, GRAS).

В качестве исследуемого варианта был выбран метод на основе получения начальных данных о местоположении объекта с помощью СНС с применением метода наземной дифференциальной коррекции (GBAS).

Разработан алгоритм начальной выставки для БЛА в автоматическом режиме.

Алгоритм анализа критериев данных СНС для обеспечения автоматической начальной выставки ИНС с заданной точностью для БЛА позволяет гарантировать выполнение выставки ИНС с точностью, необходимой для использования навигационной системы в качестве опорного датчика первичной информации для выполнения полета по маршруту БЛА.

СИСТЕМА АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОДВЕСКОЙ АВТОМОБИЛЯ[1]

А.Ю. Юмашев (КГТУ им. А.Н.Туполева, Россия, 420111, Казань, К.Маркса, 10)
E-mail: yumashev_art@mail.ru

AUTOMOTIC CONTROL SYSTEM OF VEHICLE SUSPENSION

A.Iu. Iumashev (KNRTU-KAI named after A.N.Tupolev, 420111, Kazan, K.Marx str., 10)

Keywords: vehicle suspension, synthesis, control, observer.

Введение. Подвеска автомобиля выполняет сразу несколько важных функций: ее работа определяет плавность хода, управляемость, комфорт, безопасность, устойчивость. От кинематических характеристик элементов зависит не только ее жесткость, но соответственно и степень передачи колебаний от неровностей дороги на кузов автомобиля, определяя физиологическое и эмоциональное состояние водителя и пассажиров. Основная проблема конструирования подвесок в том, что требования управляемости, устойчивости и комфорта противоречивы. С одной стороны, она должна быть достаточно жесткой, чтобы обеспечить устойчивость и управляемость автомобиля, подавляя опасные крены на поворотах и при разгоне/торможении. С другой стороны, подвеска должна быть по возможности более мягкой, чтобы исключить отрыв колес от дорожного полотна при больших неровностях, а также обеспечить максимальный комфорт для тех, кто находится в автомобиле.

В данной статье рассматривается математическая модель в пространстве состояний подвески одного колеса. Произведен синтез управления и наблюдателя состояния исходя из условий ограниченности. Представлены результаты моделирования системы без регулятора и с синтезированным регулятором и наблюдателем в виде графиков переходных процессов.

Математическая модель динамики автомобильной подвески. При описании подвески одного колеса (рис.1), для системы активного управления, наиболее популярной считается модель с двумя степенями свободы. В данном случае регулятор может изменять динамику системы путем управления исполняющим механизмом. Элементами данной модели являются: автомобильное шасси массой m_b, колесный узел m_w, коэффициенты упругости пружины k_s и амортизатора b_s. Пружина k_t является сжимаемой

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительством Республики Татарстан (проект 17-41-160814 р_а).

пневматической шиной. Переменные x_b, x_w и r – это перемещение кузова автомобиля, колес, а также неровности дороги, соответственно. Сила f_s, которая создается между кузовом и колесом, управляется посредством обратной связи. Она представляет собой активный компонент системы.

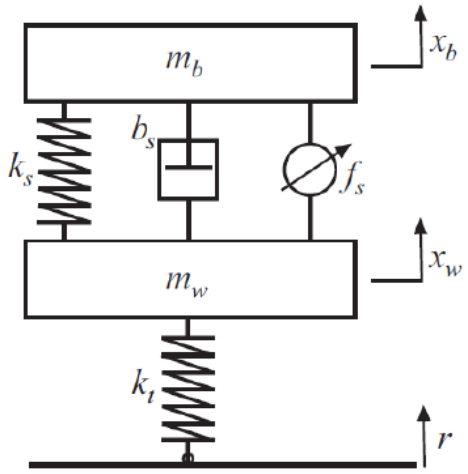

Рис. 1. Система активного управления подвески для одного колеса.

Следующие уравнения в пространства состояний описывают динамику одного из 4-х колес автомобиля [1]:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{m_b}\left[k_s(x_1 - x_3) + \varphi(x_1 - x_3) + b_s(x_2 - x_4) - f_s\right] - w_1,$$

$$\dot{x}_3 = x_4,$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{m_w}\left[k_s(x_1 - x_3) + \varphi(x_1 - x_3) + b_s(x_2 - x_4) - k_t(x_3 - r) - f_s\right] - w_2$$

Численные значения параметров [1]:

$$m_b = 300kg, m_w = 60kg,$$

$$b_s = 1000N/m/s, k_s = 16000N/m, k_t = 190000N/m.$$

Модель рассматриваемой системы представляется в виде:

$$\dot{x} = A(t)x + B_1(t)u(t) + D_1(t)w + \Phi(t)\varphi(t,x),$$

$$y = C_y(t)x + B_2u(t) + D_2(t)w,$$

где переменные состояния системы определяются как:

$$x = (x_1 = x_b \quad x_2 = \dot{x}_b \quad x_3 = x_w \quad x_4 = \dot{x}_w)^T, \text{ и}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m_b} & -\frac{b_s}{m_b} & \frac{k_s}{m_b} & \frac{b_s}{m_b} \\ 0 & 0 & 0 & \\ \frac{k_s}{m_w} & \frac{b_s}{m_w} & -\frac{k_s + k_t}{m_w} & -\frac{b_s}{m_w} \end{bmatrix}, \; B_1^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m_b} & 0 & -\frac{1}{m_w} \end{bmatrix} * 1000,$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ D_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{k_t}{m_w} \end{bmatrix} / 40,\ D_2 = \begin{bmatrix} 0{,}02 & 0 \\ 0 & 0{,}02 \end{bmatrix},\ \Phi^T = [0\ \ -1\ \ 0\ \ 1],$$

$$C_f = [1\ \ 0\ \ -1\ \ 0].$$

Постановка задачи. Требуется синтезировать регулятор, который будет обеспечивать подавление влияния возмущений на колебания кузова. Для реализации управления в виде обратной связи по состоянию требуется также синтезировать наблюдатель. Далее необходимо проверить работоспособность полученного регулятора на основе с использованием полученных математических решений, получить переходные процессы системы при использовании регуляторов.

Синтез управления из условия ограниченности. Модель рассматриваемой системы представляется в виде:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = A(t)x + B_1(t)u(t) + D_1(t)w + \Phi(t)\varphi(t,x),\ x(t_0) = x_0, \\ &y = C_y(t)x + B_2u(t) + D_2(t)w, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния, $w(t) \in R^r$ – неопределенные внешние возмущения, $u \in R^m$ – управление, $y \in R^l$ – вектор измеряемого выхода, $A(t) \in \mathrm{R}^{n\times n}, B_1(t) \in \mathrm{R}^{n\times m}$, $D_1(t) \in \mathrm{R}^{n\times r}$, $D_2(t) \in \mathrm{R}^{l\times r}, \Phi(t) \in \mathrm{R}^{n\times q}, C(t) \in \mathrm{R}^{l\times n}$, $B_2(t) \in \mathrm{R}^{l\times m}$ – заданные матрицы с непрерывными и ограниченными элементами при всех $t \in [t_0, T]$, где $T > t_0$ – заданная константа. Предполагается, что пара $(A(t), B_1(t))$ – управляема (стабилизируема), пара (A, C) – наблюдаема (детектируема) и матрица $D_2(t)$ является матрицей полного ранга строк, так что неравенство $D_2^{\mathrm{T}}(t)D_2(t) > 0$ выполняется для всех $t \geq t_0$.

Предполагается, что начальное состояние рассматриваемой системы принадлежит заданному эллипсоиду $E(Q_0)$, т.е.

$$x(t_0) = x_0 \in E(Q_0) = \{x \in R^n : x^{\mathrm{T}} Q_0^{-1} x \leq 1\}, \tag{2}$$

где Q_0 – заданная положительно определенная симметрическая матрица.

Нелинейная вектор-функция $\varphi(t,x) \in R^q$ удовлетворяет ограничению (условию Липшица):

$$\left\|\varphi(t,x') - \varphi(t,x'')\right\|^2 \leq \mu \left\|C_f(t)(x'(t) - x''(t))\right\|^2 \ \ \forall t \in [t_0, T],\ x', x'' \in \mathrm{R}^n, \tag{3}$$

где $C_f(t) \in R^{q\times n}$ – известная матрица с непрерывными и ограниченными элементами при $t \in [t_0, T]$, μ – известная константа (константа Липшица).

Предположим, что пара $(A(t), B(t))$ управляемая, а пара $(A(t), C(t))$ – наблюдаемая. Неопределенные возмущения являются непрерывными ограниченными по L_2-норме функциями времени:

$$W=\left\{\int_0^t \|w(t)\|^2 dt < d(t) \le \bar{d} = \int_0^\infty \|w(t)\|^2 dt\right\}, \quad (4)$$

где $\bar{d}$ и $d(t)$ – известные константа и функция времени соответственно.

Пусть заданы в виде эллипсоидов $E(R_0)=\{x\in R^n : x^{\mathrm{T}}R_0^{-1}x\le 1\}$, $E(R(t))=\{x\in R^n : x^{\mathrm{T}}R^{-1}(t)x\le 1\}$, ($R_0, R(t)$ – известные симметрические положительно-определенные матрицы) соответственно множества начальных состояний, допустимых состояний в моменты времени $t\in[t_0,T]$, а также допустимых внешних возмущений W.

Задача ограниченности для такого класса систем рассматривалась в [2, 3], где предложены способы синтеза регулятора в виде обратной связи по состоянию, при учете неопределенных возмущений, ограниченных по L_∞ или L_2-норме. В [3, 4] предложены способы синтеза наблюдателей из условия ограниченности ошибки оценивания на конечном интервале. Здесь эти способы применяются для синтеза регулятора в виде обратной связи по состоянию наблюдателя для автомобильной подвески.

Определение 1. Система (1) обладает на $[t_0,T]$ свойством ограниченности относительно заданных множеств $\{E(R_0), E(R(t))\}$, если для всех $x_0\in E(R_0)$ существуют на $[t_0,T]$ решения $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ системы (1) с начальными данными $x(t_0)=x_0$, для которых имеет место $x(t,t_0,x_0)\in E(R(t))$ при всех $t\in[t_0,T]$, $w(t)\in W$ и всех нелинейностях из (3).

Как показано в [3] задача синтеза регулятора, обеспечивающего ограниченность относительно заданных множеств $\{E(R_0), E(R(t))\}$, сводится к задаче оптимизации при ограничениях в виде ДЛМН.

Теорема 1 [3]. Решение $Q^*(t)=Q^*(t,t_0,Q_0), Y^*(t), P^*(t)$ задачи

$$\text{Trace}\ Q(t) \to \min \quad (5)$$

при ограничениях

$$\begin{bmatrix} -\dot{Q}(t)+QA^{\mathrm{T}}+AQ+B_1Y+Y^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}+\beta\Phi\Phi^{\mathrm{T}}+\alpha Q & D_1P & QC_f^{\mathrm{T}}+Y^{\mathrm{T}}B_f^{\mathrm{T}} \\ PD_1^{\mathrm{T}} & -\gamma P & 0 \\ C_fQ+B_fY & 0 & -\dfrac{\beta}{\mu} \end{bmatrix} < 0, \quad (6)$$

$$\left(e^{-\alpha(t-t_0)}+\gamma d(t)/\lambda_{\min}(P(t))\right)\le 1, \qquad Q(t_0)=Q_0\ge R_0,$$

$$Q(t,t_0,Q_0)\le R(t), \forall t\in[t_0,T], \quad (7)$$

где минимизация проводится по матричным переменным $Q(t)=Q^{\mathrm{T}}(t)\in R^{n\times n}$, $Y(t)\in R^{n\times m}$, $P(t)\in R^{r\times r}$ и скалярному параметру $\beta > 0$, определяет при заданных $\alpha>0, \gamma>0$ и каждом $t\in[t_0,T]$ матрицу $Q^*(t)$ и зависимую от времени матрицу коэффициентов регулятора по состоянию $K^*(t)=Y^*(t)Q^{*-1}(t)$, обеспечивающего ограниченность относительно заданных множеств $\{E(R_0),E(R(t))\}$ при всех нелинейностях из (3).

Синтез наблюдателя из условия ограниченности. Во многих случаях доступными для измерения являются не все координаты состояния, а только часть из них или их комбинаций. Чтобы реализовать законы управления, синтезированные в виде обратной связи по состоянию, часто строится наблюдатель, который будет давать оценку $\hat{x}(t)$ вектора состояния x(t) в каждый момент времени t. Тогда это управление берется в виде обратной связи по состоянию наблюдателя, т.е. $u(t)=K(t)\hat{x}(t)$.

Для рассматриваемой системы (1) с неопределенными возмущениями нет полной информации о векторе состояния, т.е. измеряются только компоненты вектора выхода *y*. Требуется синтезировать наблюдатель вектора состояния по результатам измерений вектора выхода, который будет давать оценку $\hat{x}(t)$ вектора состояния $x(t)$.

Нелинейный наблюдатель полного порядка строится в виде [5]

$$\begin{aligned}&\dot{\hat{x}}=A(t)\hat{x}+B_1u(t)+\Phi(t)\varphi(t,\hat{x})+L(t)(y-\hat{y}),\ \hat{x}(t_0)=0,\\&\hat{y}=C_y(t)\hat{x}+B_2u(t),\end{aligned} \tag{8}$$

где матрица $L(t)$ коэффициентов усиления наблюдателя будет выбираться из условия подавления начальных отклонений и неопределенных внешних возмущений или из условия получения требуемого эволюционирующего во времени эллипсоида $E(R(t))$, ограничивающего ошибку оценивания

$$\varepsilon = x-\hat{x}$$

на рассматриваемом интервале $[t_0,T]$.

Выпишем уравнение для ошибки оценивания

$$\dot{\varepsilon}=\dot{x}-\dot{\hat{x}}=[A(t)-L(t)C(t)]\varepsilon+[D_1(t)-L(t)D_2(t)]w+\Phi(t)[\varphi(t,x)-\varphi(t,\hat{x})] \tag{9}$$

Определение 2 [5]. *Наблюдатель* (8) *обеспечивает на заданном интервале* $[t_0,T]$ *ограниченность ошибки оценивания* (9) *относительно заданных множеств* $\{E(R_0),E(R(t))\}$, *если для всех* $\varepsilon_0\in E(R_0)$ *существуют на* $[t_0,T]$ *решения* $\varepsilon(t)=\varepsilon(t,t_0,x_0)$ *системы* (9) *с начальными данными* $\varepsilon(t_0)=\varepsilon_0$ *и для них имеет место* $\varepsilon(t,t_0,x_0)\in E(R(t))$ *при всех* $t\in[t_0,T]$, $w(t)\in W$ *и всех нелинейностях из* (3).

Теорема 2 [5]. *Чтобы наблюдатель* (8) *обеспечил на заданном интервале* $[t_0,T]$ *ограниченность ошибки оценивания относительно заданных множеств* $\{E(R_0),E(R(t))\}$, *достаточно, чтобы при некотором* $\beta > 0$ *существовали при всех* $t \in [t_0,T]$ *симметрическая матрица* $P(t)$ *и матрица* $Y(t)$ *такие, что выполняются неравенства:*

$$\begin{bmatrix} dP/dt + A^{\mathrm{T}}P + PA - C_y{}^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} - YC_y + \beta\mu C_F^{\mathrm{T}}C_F & P\Phi & PD_1 - YD_2 \\ \Phi^T P & -\beta I & 0 \\ D_1^{\mathrm{T}}P - D_2^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & 0 & -\dfrac{1}{1+d}I \end{bmatrix} < 0 \tag{10}$$

$$P(t) \geq R^{-1}(t),\ P(t_0) \leq \frac{1}{1+d}R_0^{-1}. \tag{11}$$

На основе теоремы 2 задача синтеза наблюдателя состояния на конечном интервале $[t_0,T]$ со свойством ограниченности ошибки оценивания относительно заданных множеств $\{E(R_0),E(R(t))\}$ сводится к следующей задаче оптимизации с ДЛМН.

Минимизировать $\mathrm{tr}\,(Q(t))$ при ограничениях (10) и

$$Q(t) \leq R(t),\ Q(t_0) \geq (1+d)R_0,\ \begin{pmatrix} Q(t) & I \\ I & P(t) \end{pmatrix} \geq 0. \tag{12}$$

Здесь оптимизация проводится по матричным переменным $Q(t), P(t), Y(t)$ и скалярной переменной $\beta(t)$. По найденному решению матрица L определится как $L(t) = P^{-1}(t)Y(t)$.

В автономном случае при задании постоянной матрицы R и решении данной задачи оптимизации с постоянными матрицами P, Q, Y можно получить наблюдатель с постоянными коэффициентами $L = QY$, который будет обеспечивать ограниченность ошибки оценивания (ошибка оценивания будет гарантированно заключена в инвариантный эллипсоид) для всех моментов времени $t \in [t_0,+\infty)$.

В [4] также предложен способ нахождения матрицы $L(t)$ коэффициентов наблюдателя, гарантирующего свойство ограниченности на конечном интервале, из условия минимума следа матрицы правой части матричной системы сравнения для уравнения ошибки оценивания:

$$dQ/dt = Q(A - LC_y)^{\mathrm{T}} + (A - LC_y)Q + \alpha Q + \frac{1}{\beta}\Phi\Phi^{\mathrm{T}} + \beta\mu QC_F^{\mathrm{T}}C_F Q +$$

$$+ (1+d)(D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^{\mathrm{T}}, \tag{13}$$

где $\alpha > 0$ - заданная малая константа.

Матрица L вычисляется как

$$L = \left[\frac{1}{(1+d)} QC_y^{\mathrm{T}} + D_1 D_2^{\mathrm{T}}\right](D_2 D_2^{\mathrm{T}})^{-1}. \quad (14)$$

Аналогичным образом определяется параметр β, доставляющий в каждый момент времени t минимальное значение следу матрицы правой части МСС (13):

$$\beta(t) = \frac{\sqrt{\mathrm{tr}(\Phi\Phi^{\mathrm{T}})}}{\sqrt{\mathrm{tr}(\mu Q C_F^{\mathrm{T}} C_F Q)}}. \quad (15)$$

Результаты моделирования. На рис. 2 показан переходный процесс в системе без регулятора.

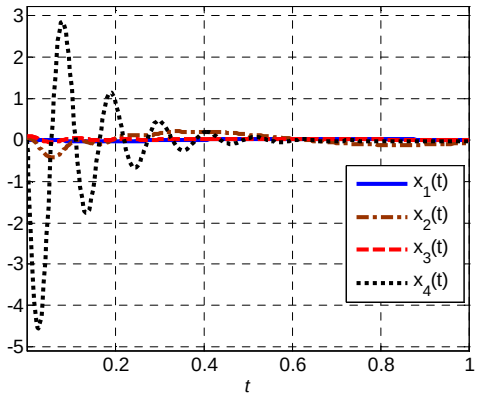

Рис. 2. Переходный процесс в системе без регулятора

На основе теоремы 1 с помощью разработанной программы в пакете MatLab был получен регулятор в виде обратной связи по состоянию $u = Kx$ с матрицей

$$K = [-56.9947 \quad -7.6888 \quad 171.9057 \quad 2.0850].$$

Регулятор обеспечивает минимум следу матрицы эллипсоида, ограничивающего состояние. Переходный процесс в системе с полученным регулятором изображен на рисунке 3. Время переходного процесса в 2 раза меньше, чем без регулятора.

Также был получен регулятор с матрицей $K = [-0.5025 \; -0.0620 \; 8.6830 \; 0.06]$ из условия максимума следа матрицы эллипсоида, принадлежащего области притяжения. Переходный процесс в системе с этим регулятором показан на рис. 4.

На основе теоремы 2, путем решения задачи минимизации TrQ при ограничениях (10), (12) был получен наблюдатель состояния с матрицей

$$L = \begin{bmatrix} 3.2586 & 2.8500 \\ 3.7352 & -19.1004 \\ 0.4085 & -5.4147 \\ -37.1297 & -38.8087 \end{bmatrix}.$$

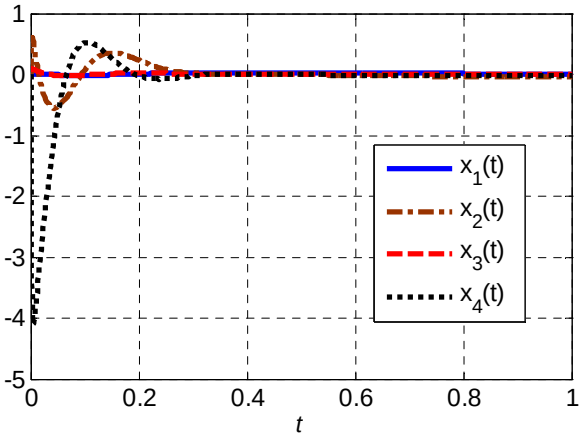

Рис. 3. Переходный процесс в системе с регулятором из условия минимума следа матрицы эллипсоида, ограничивающего состояние

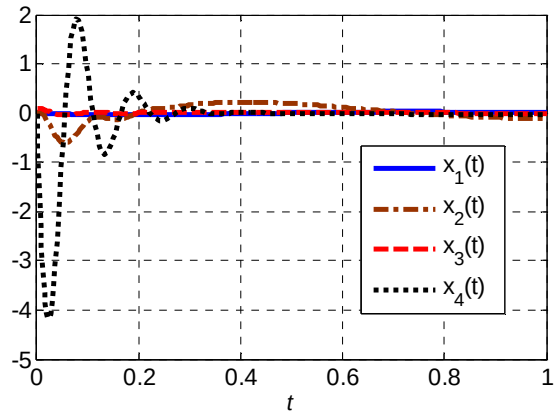

Рис. 4. Переходный процесс в системе с регулятором обеспечивающим максимальную оценку области притяжения

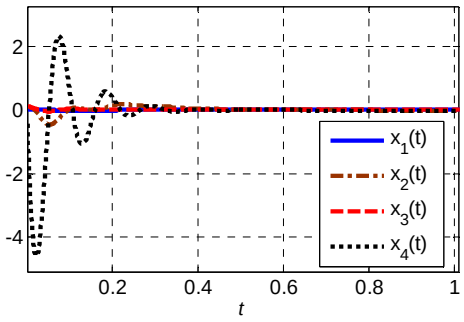

Рис. 5. Переходный процесс в системе с регулятором по состоянию наблюдателя

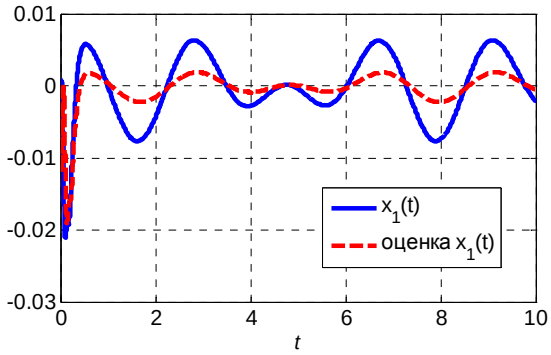

Рис. 6. Перемещения кузова в системе с регулятором в виде обратной связи по состоянию наблюдателя

Наблюдатель производит оценку вектора состояния $x(t)$ в каждый момент времени t. Управление берется в виде обратной связи по состоянию наблюдателя. На рис. 5 представлен переходный процесс в системе с регулятором по состоянию наблюдателя из условия минимума следа матрицы эллипсоида, ограничивающего состояние.

Переходный процесс по координате x_1 в системе с регулятором по состоянию наблюдателя при действии возмущения $w(t)=0.2(\sin(3t)+\cos(2t))$ представлен на рис. 6.

Из рис. 6 можно видеть, что перемещения кузова составляют менее 0.01 м. Таким образом, регулятор по состоянию наблюдателя обеспечивает регулирование с требуемой точностью при действии возмущения.

Заключение. В данной статье была рассмотрена модель автомобильной подвески для одного колеса. Для этой системы был произведен синтез

регулятора и наблюдателя и представлены результаты моделирования. Данный способ оценки состояния системы и ее регулирования обеспечивает стабилизацию кузова автомобиля при действии возмущений время с точностью до 0.01 м с временем переходного процесса около 0.3 сек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Guido P. A. Koch. Adaptive Control of Mechatronic Vehicle Suspension Systems // die Fakultät für Maschinenwesen, 2011, С. 10-13.

2. Маликов А.И. Оценивание состояния и стабилизация непрерывных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями //Автоматика и телемеханика, 2016, №5. С. 19–36.

3. Маликов А.И. Управление на конечном интервале нелинейных систем одного класса с H_∞ -критерием качества // Известия ран. Теория и системы управления. 2017. № 3. С. 12–33.

4. Маликов А.И. Синтез наблюдателей состояния для нелинейных Липшицевых систем с неопределенными ограниченными по L∞ норме возмущениями // Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева. 2016. №3. С. 128-140.

5. Маликов А.И. Синтез наблюдателей состояния по результатам измерений и неизвестных входов для нелинейных Липшицевых систем с неопределенными возмущениями // Автоматика и телемеханика. 2017. №5. С. 16–35.

ОБ УПРАВЛЕНИИ МАНИПУЛЯЦИОННЫМИ РОБОТАМИ С УПРУГИМИ СОЧЛЕНЕНИЯМИ И С НЕПОЛНЫМ ИЗМЕРЕНИЕМ

О.А. Перегудова (УлГУ, Россия, 432017, Ульяновск, Л.Толстого,42)
E-mail: peregudovaoa@gmail.com

ON CONTROL OF ROBOT MANIPULATORS WITH VISCOUS-ELASTIC JOINTS AND INCOMPLETE MEASUREMENT

O.A. Peregudova (ULSU, 432017, Ulyanovsk, L.Tolstoi str., 42)

Keywords: exponential stability, nonlinear control, robot manipulator, viscous-elastic joint.

Введение. Как известно, динамические модели роботов манипуляторов с гибкими сочленениями имеют удвоенное число независимых переменных по отношению к роботам с жесткими шарнирами. Задача управления движением для таких моделей манипуляторов сложна из-за ее нелинейности и многосвязности.Значительное количество работ (см. напр. [1-12]) посвящено исследованию проблемы управления роботов манипуляторов с гибкими сочленениями.Результаты работ [1] - [11] предполагают наличие измерений угловых положений звеньев, их скоростей, ускорений, производных по времени от ускорений, а также скоростей роторов двигателей.

Целью работы является разработка закона управления, который обеспечит асимптотическую стабильность программного движения манипулятора с гибкими соединениями на основе неполной обратной связи, используя только датчики положения роторов двигателей и акселерометры для звеньев.

Постановказадачи. Рассмотрим модель многозвенного манипулятора связко-упругими шарнирами, описываемую уравнениями вида [12]

$$\begin{aligned} A(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) + D(\dot{q}-\dot{Q}) + K(q-Q) + d(q,\dot{q}) = 0 \\ J\ddot{Q} + D(\dot{Q}-\dot{q}) + K(Q-q) = u \end{aligned} \qquad (1)$$

где $q \in \mathbb{R}^n$ и $Q \in \mathbb{R}^n$ – угловые координаты звеньев и роторов двигателей соответственно, $A(q) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матрица инерции звеньев манипулятора, $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – диагональная матрица инерции двигателей, установленных в осях шарниров, $J = diag\{j_1, j_2, \ldots, j_n\} > 0$, $C(q,\dot{q})\dot{q}$ – вектор кориолисовых и центробежных моментов, $g(q)$ – вектор гравитационных сил, $D = diag\{d_1, d_2, \ldots, d_n\} > 0$ – матрица коэффициентов вязкого трения в шарнирах, $d(q,\dot{q})$ – вектор моментов сил вязкого трения, действующих на

звенья манипулятора, $K = diag\{k_1, k_2, \ldots, k_n\} > 0$ – матрица коэффициентов жесткости сил упругости в шарнирах и $u \in \mathbb{R}^n$ – вектор управляющих моментов.

Для модели робота (1) определим множество программных движений

$$X = \{q^{(0)}(t) : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^n : \ \| q^{(0)}(t) \| < g_0, \ \| \dot{q}^{(0)}(t) \| < g_1, \| \ddot{q}^{(0)}(t) \| < g_2\}$$

гдефункции $q^{(0)}(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы по t, постоянные g_i $(i = 0,1,2)$ положительные, $t_0 = const \geq 0$, символ $\| \cdot \|$ означает евклидову векторную норму.

Предположим, что Q и $\ddot{q}$ доступны измерению. Определим измеряемый выходной сигнал $z \in \mathbb{R}^{2n}$ следующим образом

$$z = (z_1, z_2)' = (Q, \ddot{q})' \tag{2}$$

Задача о стабилизации программного движения системы (1) состоит в построении закона управления по обратной связи $u = u(t, Q, \ddot{q})$, который обеспечивает асимптотическую устойчивость заданного программного движения $q^0(t) \in X$ робота манипулятора (1).

Определим для динамической модели(1) новый вектор состояния $(q, \dot{q}, S)'$ и новый вектор управления v в виде

$$S = D\dot{Q} + K(Q - q), \quad v = DJ^{-1}u + (DJ^{-1}D - K)\dot{q} + KD^{-1}Kq - K$$

Тогда уравнения состояния запишутся в виде

$$\begin{aligned} A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + D\dot{q} + d(q, \dot{q}) &= S \\ \dot{S} &= (-DJ^{-1} + KD^{-1})S + v \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть $q^{(0)}(t) \in X$ некоторое заданное программное движение. Определим функцию $S = S^{(0)}(t)$ в следующем виде

$$S^{(0)}(t) = A(q^{(0)}(t))\ddot{q}^{(0)}(t) + C(q^{(0)}(t), \dot{q}^{(0)}(t))\dot{q}^{(0)}(t) + g(q^{(0)}(t)) + D\dot{q}^{(0)}(t) + d(q^{(0)}(t), \dot{q}^{(0)}(t))$$

Введем отклонения

$$x = q - q^0(t), \quad \dot{x} = \dot{q} - \dot{q}^0(t), \quad y = S - S^{(0)}(t)$$

Тогда уравнения в отклонениях примут вид

$$\begin{aligned} A^{(1)}(t, x)\ddot{x} + C^{(1)}(t, x, 2\dot{q}^{(0)}(t) + \dot{x})\dot{x} + R_1(t, x) + R_2(t, x, \dot{x}) &= y \\ \dot{y} &= (-DJ^{-1} + KD^{-1})y + v^{(1)} \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$A^{(1)}(t, x) = A(q^{(0)}(t) + x), \ C^{(1)}(t, x, \dot{x}) = C(q^{(0)}(t) + x, \dot{x}),$$

$$R_1(t, x) = (A(q^{(0)}(t) + x) - A(q^{(0)}(t)))\ddot{q}^{(0)}(t) + (C^{(1)}(t, x, \dot{q}^{(0)}(t)) - C^{(1)}(t, 0, \dot{q}^{(0)}(t)))\dot{q}^{(0)}(t) +$$

$$+ g(q^{(0)}(t) + x) - g(q^{(0)}(t)) + d(x + q^{(0)}(t), \dot{q}^{(0)}(t)) - d(q^{(0)}(t), \dot{q}^{(0)}(t))$$

$$R_2(t, x, \dot{x})) = D\dot{x} + d(x + q^{(0)}(t), \dot{x} + \dot{q}^{(0)}(t)) - d(x + q^{(0)}(t), \dot{q}^{(0)}(t))$$

$$v^{(1)} = v + \dot{S}^{(0)}(t) + (DJ^{-1} - KD^{-1})S^{(0)}(t)$$

Предположим, что функции $R_1(t,x)$ и $R_2(t,x,\dot{x})$ таковы, что имеют место следующие соотношения

$$R_1(t,x) = F(t,x)p(x) \tag{6}$$

$$R_2(t,x,\dot{x}) = D^{(1)}(t,x,\dot{x})\dot{x} \tag{7}$$

где $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, вектор-функция $p(x)$, $p \in C^1$, $p(0) = 0$, $\| p(x) \| \geq p_0(x)$; $p_0(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$, $D^{(1)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ есть некоторая положительно определенная матрица.

Для решения задачи о стабилизации программного движения воспользуемся методом бэкстеппинга.

Сначала рассмотрим первую подсистему из (5). Вектор y будем рассматривать как фиктивное управление для этой подсистемы. С использованием результатов работы [13] получена следующая теорема.

Теорема 1.Ошибка! Источник ссылки не найден.Предположим, что найдется число $k > 0$ такое, что функции, входящие в (5), ограничены в области

$$\mathbb{R}^+ \times G_\varepsilon = \{(t,x,\dot{x}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2n} : t \geq 0, \| p(x) \|^2 + (\dot{x} + p(x))' A^{(1)}(t,x)(\dot{x} + p(x)) < \varepsilon = const > 0\}$$

исуществуютположительныечисла λ_i, μ_i, m_i $(i = 1,2)$ такие, что выполнены следующие неравенства

$$\lambda_1^2 \| \dot{x} \|^2 \leq \dot{x}' A^{(1)} \dot{x} \leq \lambda_2^2 \| \dot{x} \|^2, \quad p'\left(\frac{\partial p}{\partial x} p\right) \geq \mu_1 \| p \|^2, \quad \left\| \frac{\partial p}{\partial x} \right\| \leq m_1, \quad 4\mu_1\mu_2 > (m_1/k + m_2 k)^2$$

$$\left\| -F + D^{(1)} - C^{(1)}(t,x,p - 2\dot{q}^{(0)}(t)) - A^{(1)} \frac{\partial p}{\partial x} \right\| \leq m_2$$

$$\lambda_{max}\left(B + B' - C^{(1)}(t,x,\dot{q}^{(0)}(t) - p) - D^{(1)} - D^{(1)\prime} - (C^{(1)}(t,x,\dot{q}^{(0)}(t) - p))' + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) A^{(1)} + A^{(1)} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \leq -2\mu_2$$

Тогда закон управления

$$y = \varphi(x,\dot{x}), \quad \varphi(x,\dot{x}) = B(\dot{x} + p(x)) \tag{8}$$

обеспечиваетравномернуюасимптотическуюустойчивостьнулевогорешения первойподсистемы(5) с постоянной матрицей $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Рассмотримтеперьвсюсистему (5).Будем использовать линейный динамический наблюдатель[12]

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \xi_3 + L_1(z_1 - \xi_1) \\
\dot{\xi}_2 &= \xi_4 + L_2(z_1 - \xi_1) \\
\dot{\xi}_3 &= -J^{-1}K\xi_1 + J^{-1}K\xi_2 - J^{-1}D\xi_3 + \\
&+ J^{-1}D\xi_4 + J^{-1}u + L_3(z_1 - \xi_1) \\
\dot{\xi}_4 &= L_4(z_1 - \xi_1) + z_2
\end{aligned} \tag{9}$$

где матрицы $L_j = diag\{l_{j1}, l_{j2}, \ldots, l_{jn}\}$, $j = 1,2,3,4$ имеют следующие элементы[12]

$$\begin{aligned} l_{1i} &= a_{3i} - d_i / j_i, \quad l_{2i} = j_i a_{1i} / k_i - j_i d_i a_{0i} / k_i^2 \\ l_{3i} &= a_{2i} - d_i a_{3i} / j_i + (d_i^2 - k_i j_i) / j_i^2 \\ l_{4i} &= j_i a_{0i} / k_i \end{aligned} \tag{10}$$

a_{ji} ($j = 1,\ldots,4$, $i = 1,\ldots,n$) –коэффициентыхарактеристическогополинома

$$p_i^*(\lambda) = \lambda^4 + a_{3i}\lambda^3 + a_{2i}\lambda^2 + a_{1i}\lambda + a_{0i}$$

с заданным множеством корней λ_{ji}, $j = 1,2,3,4$.

Ошибкинаблюдения $e_j = x_j - \xi_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1,\ldots,4$, удовлетворяютуравнениям

$$\dot{e}_j = diag\{\lambda_{j1}, \ldots, \lambda_{jn}\} e_j, \qquad j = 1,2,3,4 \tag{11}$$

Теорема 2.Ошибка! Источник ссылки не найден.Пусть выполнены условия Теоремы 1 и следующие неравенства

$$d_i^2 - k_i j_i > \delta = const > 0 \qquad \forall i = 1,2,...,n \tag{12}$$

Тогданулевоерешениесистемы(5) равномерно асимптотически устойчиво, если

$$v^{(1)} = (DJ^{-1} - KD^{-1})B(\xi_4 - \dot{q}^{(0)}(t) + p(\xi_2 - q^{(0)}(t))) + B(\ddot{x} + \frac{\partial p(x)}{\partial x}(\xi_4 - \dot{q}^{(0)}(t)) \tag{13}$$

где ξ_2 и ξ_4 являются решением системы линейных уравнений динамического наблюдателя (9).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-08482).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ghorbel, F., Hung J.Y. and Spong M.W. Adaptive control of flexible-joint manipulators // *IEEE Control Systems Magazine.* 1989. pp.9—13.

2. Lozano R. and Brogliato B. Adaptive control of robot manipulators with flexible joints // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1992. Vol. 37, No. 2, pp.174—181.

3. Sira-Ramirez H., Ahmad S., Zribi M. Dynamical feedback control of robotic manipulators with joint flexibility // *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics.* 1992. Vol. 22, No. 4, pp.736—747.

4. GhorbelFathi, Spong Mark W. Adaptive Integral Manifold Control of Flexible Joint Robot Manipulators // *Proceedings of the 1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation.* 1992 . pp.707—714.

5. SpongM., Seth H. and Vidyasagar M. Robot Dynamics and Control. *New York –Wiley,* 2004.

6. BrogliatoB., OrtegaR., Lozano R. Global tracking controllers for flexible-joint manipulators: a comparative study // *Automatica.* 1995. Vol. 31, No. 7, pp.941—956.

7. De Luca A. Dynamic control of robots with joint elasticity // *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics & Automation.* 1988, pp.152—158.

8. De Luca A. Feedforward/Feedback laws for the control of flexible robots // *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation. (San Francisco, CA, 2000).*2000. pp.233—240.

9. De LucaA., SicilianoB., ZolloL. PD control with on-line gravity compensation for robots with elastic joints: Theory and experiments // *Automatica*. 2005. Vol. 41, pp.1809—1819.

10. Moberg S. On modeling and control of flexible manipulators. *Linkoping University, Linkoping,* 2007.

11. PalliG., MelchiorriC., De Luca A. On the feedback linearization of robots with variable joint stiffness // *IEEE International Conference on Robotics and Automation.* 2008. pp.1753--1759

12. De LucaA., SchroderD., ThummelM. An acceleration-based state observer for robot manipulators with elastic joints // *2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation.* 2007. pp.3817—3823.

13. Andreev A. S. and Peregudova O. A. On stabilization of program motions of holonomic mechanical systems // *Automation and Remote Control*. 2016. Vol. 77, No. 3, pp.416—427.

ОПТИМАЛЬНЫЙ ДИСКРЕТНЫЙ ЛОГИКО-ДИНАМИЧЕСКИЙ ФИЛЬТР-ПРЕДИКТОР С КОНЕЧНОЙ ПАМЯТЬЮ

Е.А. Руденко (МАИ им. С.Орджоникидзе, Россия, 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4)
E-mail: rudenkoevg@yandex.ru

AN OPTIMAL DISCRETE LOGICAL–DYNAMICAL FINITE MEMORY FILTER-PREDICTOR

E.A. Rudenko (Moscow Aviation Institute, Volokolamsk highway, 4, Moscow, 125993, Russia)

Keywords: random Markov sequence, optimal nonlinear filtering, Stratonovich, Kalman and Pugachev filters.

Введение. При оптимальном управлении логико-динамическими (многорежимными, переключательными) стохастическими системами по доступным наблюдениям их выходам возникает задача оперативного распознавания режима работы и оценивания внутрирежимного состояния этих систем [1]. Однако применение для этого *абсолютно-оптимального фильтра* (АОФ) [1, 2, 3] сопряжено с существенными вычислительными трудностями, условно-минимаксный фильтр [4] оптимален лишь параметрически, тогда как *фильтры оптимальной структуры* (ФОС) [5, 6, 7] не позволяют достичь значительной точности из-за ограниченности их порядка (размерности вектора состояния) порядком объекта наблюдения.

В настоящей работе предлагается способ преодоления этой ограниченности логико-динамических ФОС путём построения рекуррентного *фильтра-предиктора с конечной памятью* (ФПКП), порядок которого определяется желаемым числом запоминаемых измерений. Получены соотношения для нахождения его оптимальных структурных функций. Последние могут быть получены до начала процесса оценивания с помощью интегральных операций с плотностями вероятности, вместо которых можно использовать метод Монте-Карло с построением гистограмм искомых функций. Из-за громоздкости этой численной процедуры также рассмотрено гауссовское приближение к ФПКП. Его структурные функции находятся аналитически, а параметры вычисляются методом Монте-Карло по выборочным значениям вероятностей целочисленных случайных величин и двух первых моментов континуальных, что гораздо проще.

Модель системы наблюдения и критерии оптимальности. Рассмотрим функционирующий в условиях неопределённости многорежим-

ный объект, случайное поведение которого в каждый момент времени $k = \overline{0,\mathrm{K}}$ с конечным горизонтом K определяется номером его структуры $I_k \in \{\overline{1,L}\}$ и вектором континуальных переменных его состояния $X_k \in \mathbb{R}^n$. Пусть изменение расширенного вектора состояния объекта $\bar{X}_k = [I_k \; X_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ описывается марковской системой уравнений

$$I_{k+1} = \phi_k^{(I_k)}(X_k, V_k^{\square}), \quad X_{k+1} = a_k^{(I_k)}(X_k, V_k), \;\; I_0, X_0 \square\; p_0(i,x), \qquad (1.1)$$

а мгновенные наблюдения $\bar{Y}_k = [J_k \; Y_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ за ним определяются по формулам

$$J_k = \mathrm{o}_k^{(I_k)}(X_k, W_k^{\square}), \quad Y_k = b_k^{(I_k)}(X_k, W_k) \qquad (1.2)$$

Здесь $J_k \in \{\overline{1,M}\}$ – переменная индикации режима, $Y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ – вектор измерений, $\bar{V}_k = (V_k^{\square}, V_k)$, $\bar{W}_k = (W_k^{\square}, W_k)$ – векторы дискретных белых шумов с общим законом распределения вероятности. Эти шумы не зависят от начального состояния объекта (I_0, X_0), который определяется своим совместным распределением $p_0(i,x) = P_0^{(i)} p_0^{(i)}(x)$, где $P_0^{(i)} = \Pr[I_0 = i]$ – вероятность I_0, $p_0^{(i)}(x) = p_0(x \mid I_0 = i)$ – условная плотность вероятности X_0.

Для уменьшения априорной неопределённости состояния объекта необходимо по доступной к этому моменту выборке последних наблюдений $\bar{Y}_h^k = [\bar{Y}_k^{\mathrm{T}} \ldots \bar{Y}_h^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $h \in \overline{0,k}$, получать оценки $\hat{I}_k$, $\hat{X}_k$ и прогнозы $\tilde{I}_{k+1}$, $\tilde{X}_{k+1}$:

$$\hat{I}_k = \iota_k(\bar{Y}_h^k), \quad \hat{X}_k = g_k(\bar{Y}_h^k), \quad \tilde{I}_{k+1} = \upsilon_k(\bar{Y}_h^k), \quad \tilde{X}_{k+1} = \psi_k(\bar{Y}_h^k). \qquad (1.3)$$

Требованиями их точности являются минимумы средних рисков

$$\mathrm{M}\left[c_k^{(I_k, \hat{I}_k)}(X_k, \hat{X}_k) \right] \to \min, \quad \mathrm{M}\left[c_{k+1}^{(I_{k+1}, \tilde{I}_{k+1})}(X_{k+1}, \tilde{X}_{k+1}) \right] \to \min, \qquad (1.4)$$

где M – оператор математического ожидания, $c_k^{(\cdot)}(\cdot)$ – функция совместных потерь от неточного распознавания и оценивания

$$c_k^{(i,\hat{i})}(x, \hat{x}) = (x - \hat{x})^{\mathrm{T}} C_k (x - \hat{x}) + (1 - \delta_{i,\hat{i}}), \; C_k = C_k^{\mathrm{T}} > 0. \qquad (1.5)$$

Здесь $\delta_{i,l}$ – символ Кронекера, $\delta(x)$ – функция Дирака.

Априорное вероятностное поведение системы наблюдения (1.1), (1.2) полностью описывается определяемым по её уравнениям и законам распределения шумов $\bar{V}_k$, $\bar{W}_k$ условным распределением $\gamma_k(l, \chi, j, y \mid i, x)$ перехода от старого состояния $\bar{X}_k$ к новому $\bar{X}_{k+1}$ и к текущему наблюдению

$\overline{Y}_k$ [5–7]. Частным относительно него является распределение $\beta_k(j,y\,|\,i,x)$ наблюдения $\overline{Y}_k$. Уточнённое же ещё и последним наблюдением $\overline{Y}_k$ условное распределение состояния $\overline{X}_{k+1}$ находится как отношение

$$\zeta_k(l,\chi\,|\,i,x,j,y)=\gamma_k(l,\chi,j,y\,|\,i,x)\,/\,\beta_k(j,y\,|\,i,x). \qquad (1.6)$$

Уравнения синтезируемого фильтра-предиктора. С целью увеличения точности легко реализуемого в реальном времени ФОС малого порядка [5–7], оптимальные оценки (1.3) можно искать, по аналогии с однорежимным случаем [8], в более широком классе выходов фильтра произвольного порядка. Этот фильтр описывается разностным уравнением состояния и формулой выхода для оценки. Однако нахождение функции его уравнения состояния одновременно с функцией оценивания из первого условия минимума (1.4) является сложной даже в однорежимном случае [8].

В настоящей работе формулы для оценок будем искать в виде

$$\hat{I}_k=\iota_k(\overline{Y}_k,\overline{Z}_{k-1}),\ \hat{X}_k=g_k(\overline{Y}_k,\overline{Z}_{k-1}),\ \ \hat{I}_0=\iota_0(\overline{Y}_0),\ \hat{X}_0=g_k(\overline{Y}_0), \qquad (2.1)$$

где $\overline{Z}_k=[U_k^{\mathrm{T}}\ Z_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ – вектор состояния фильтра, состоящий из целочисленной U_k и континуальной Z_k частей. Ограничимся простым сохранением в нём результатов последних $l\in\mathbb{N}$ индикаций и измерений соответственно

$$U_k=J_{k-l+1}^k\in\mathbb{I}^l,\ Z_k=Y_{k-l+1}^k\in\mathbb{R}^{ln_y},\ k\ge l, \qquad (2.2)$$

с предварительным накоплением этих наблюдений на первых l тактах

$$U_k=[J_0^{k\mathrm{T}}\quad 0_{l-k-1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\ Z_k=[Y_0^{k\mathrm{T}}\quad o_{l-k-1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\ k=\overline{0,l-1}. \qquad (2.3)$$

Здесь $0_i\in\mathbb{I}^i$, $o_i\in\mathbb{R}^{in_y}$ – нулевые векторы. Для этого порядок фильтра должен быть l-кратен размерности n_y+1 вектора наблюдений $\overline{Y}_k$.

Операциям (2.2), (2.3) придадим вид уравнений состояния фильтра

$$U_k=\varphi_k(J_k,U_{k-1}),\quad Z_k=f_k(Y_k,Z_{k-1}), \qquad (2.4)$$

где $\varphi_k(\cdot)$, $f_k(\cdot)$ – функции обновления состава наблюдений [8]

$$\varphi_k(j_k,u_{k-1})=[j_k\quad(C_u\,u_{k-1})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\ f_k(y_k,z_{k-1})=[y_k^{\mathrm{T}}\quad(C_z\,z_{k-1})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}. \qquad (2.5)$$

Здесь $C_u=[E_{l-1}\ O_{(l-1)\times 1}]$, $C_z=[E_{(l-1)\overline{n}_y}\ O_{(l-1)\overline{n}_y\times\overline{n}_y}]$ – матрицы удаления из u_{k-1} и z_{k-1} последних блоков, E, O – единичная и нулевая матрицы.

Для получения же прогнозов уравнения фильтра (2.1), (2.4) дополним вторыми формулами выходов

$$\tilde{I}_{k+1}=\upsilon_k(\overline{Z}_k),\ \tilde{X}_{k+1}=\psi_k(\overline{Z}_k),\quad \tilde{I}_1=\upsilon_0(\overline{Y}_0),\ \tilde{X}_1=\psi_0(\overline{Y}_0). \qquad (2.6)$$

Определение. *Оптимальным ФПКП назовём алгоритм (2.1), (2.4),*

(2.6) получения оценок (1.3) по последним наблюдениям (2.2), (2.3), в котором функции оценивания $\iota_k(\cdot)$, $g_k(\cdot)$ *и прогнозирования* $\upsilon_k(\cdot)$, $\psi_k(\cdot)$ *найдём из критериев (1.4), тогда как функции* $\varphi_k(\cdot)$, $f_k(\cdot)$ *его уравнения состояния будем считать заданными в виде (2.5).*

Оптимизация функций оценивания и прогнозирования. Подставляя (2.1) в первый из критериев (1.4), получаем задачу минимизации по разнородным параметрам ι, g функции условного риска

$$\Re_k^{(\iota)}(g \mid \overline{z}_k^*) = \sum\nolimits_i \int c_k^{(i,\iota)}(x,g)\rho_k(i,x \mid \overline{z}_k^*)\,dx \to \min_{\iota \in \overline{1,L},\, g \in \square^n}, \qquad (3.1)$$

где $\overline{z}_k^* = (\overline{y}_k, \overline{z}_{k-1})$, $\rho_k(\cdot)$ – оценивающее распределение вектора $\overline{X}_k$.

Подставим в (3.1) представление $\rho_k(\cdot)$ в виде произведения

$$\rho_k(i_k, x_k \mid \overline{z}_k^*) = \mathrm{P}_k^{(i_k)}(\overline{z}_k^*)\rho_k^{(i_k)}(x_k \mid \overline{z}_k^*), \qquad (3.2)$$

условной вероятности *i*-го режима $\mathrm{P}_k^{(i)}(\overline{z}_k^*) = \int \rho_k(i, x_k \mid \overline{z}_k^*)\,dx_k$ и условной плотности вероятности состояния X_k при истинности *i*-го режима

$$\rho_k^{(i)}(x_k \mid \overline{z}_k^*) = \rho_k(i, x_k \mid \overline{z}_k^*) \big/ \mathrm{P}_k^{(i)}(\overline{z}_k^*).$$

Используя в (3.1) принцип сечений и учитывая (1.5), получим следующее.

Лемма 1 [7]. О*птимальные функции оценивания имеют вид*

$$\iota_k(\overline{z}_k^*) \in \operatorname{Arg}\max_{i=\overline{1,L}} \mathrm{P}_k^{(i)}(\overline{z}_k^*), \quad g_k(\overline{z}_k^*) = \sum\nolimits_i \mathrm{P}_k^{(i)}(\overline{z}_k^*) \int x \rho_k^{(i)}(x \mid \overline{z}_k^*)\,dx. \qquad (3.3)$$

Замечание. *На первых l тактах в (2.1) учитываются все измерения (2.3), поэтому соответствующие оценки ФПКП и АОФ совпадают.*

Функции прогнозирования находятся так же, отличаясь лишь заменой $\rho_k(\cdot)$ на прогнозирующее распределения $\pi_{k+1}(\cdot)$. Используя разложение

$$\pi_{k+1}(i_{k+1}, x_{k+1} \mid \overline{z}_k) = \Pi_{k+1}^{(i_{k+1})}(\overline{z}_k)\, \pi_{k+1}^{(i_{k+1})}(x_{k+1} \mid \overline{z}_k), \qquad (3.4)$$

аналогично (3.3) имеем

$$\upsilon_k(\overline{z}_k) \in \operatorname{Arg}\max_{i=\overline{1,L}} \Pi_{k+1}^{(i)}(\overline{z}_k), \quad \psi_k(\overline{z}_k) = \sum\nolimits_i \Pi_{k+1}^{(i)}(\overline{z}_k) \int x \pi_{k+1}^{(i)}(x \mid \overline{z}_k)\,dx. \qquad (3.5)$$

Нахождение оценивающего и предикторного распределений. Учитывая, что $\overline{y} = [j \;\; y^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, представим распределение (3.2) по формуле Байеса

$$\rho_k(i, x \mid j_k, y_k, \overline{z}_{k-1}) = \omega_k(i, x, j_k, y_k \mid \overline{z}_{k-1}) \Big/ \sum\nolimits_i \int numerator\; dx. \qquad (4.1)$$

Здесь из-за условной марковости измерителя (1.2) имеем произведение

$$\omega_k(i, x, j, y \mid \overline{z}_{k-1}) = \beta_k(j, y \mid i, x)\pi_k(i, x \mid \overline{z}_{k-1}) \qquad (4.2)$$

априорного распределения индикации-измерения $\beta_k(\cdot)$ и прогнозирующего распределения $\pi_k(\cdot)$, которое по отношению к $\omega_k(\cdot)$ является частным

$$\pi_k(i,x\,|\,\overline{z}_{k-1}) = \sum\nolimits_j \int \omega_k(i,x,j,y\,|\,\overline{z}_{k-1})\,dy\,. \tag{4.3}$$

Найдём распределение $\pi_{k+1}(i_{k+1},x_{k+1}\,|\,\overline{z}_k)$ для следующего такта $k+1$. Заметим, что его условия $\overline{z}_k$ содержат текущие переменные j_k, y_k и более старые. Поэтому с учётом марковости (1.1), (1.2) имеем

$$\pi_{k+1}(l,\chi\,|\,\overline{z}_k) = \sum\nolimits_i \int \zeta_k(l,\chi\,|\,i,x,j_k,y_k)\,\xi_k(i,x\,|\,\overline{z}_k)\,dx\,. \tag{4.4}$$

Здесь $\zeta_k(\cdot)$ – распределение (1.6), $\xi_k(\cdot)$ – распределение $\overline{X}_k$ при $\overline{Z}_k = \overline{z}_k$. Последнее выразим через безусловное распределение $q_k(\cdot)$ как отношение

$$\xi_k(i_k,x_k\,|\,\overline{z}_k) = q_k(i_k,x_k,\overline{z}_k) \Big/ \sum\nolimits_{i_k} \int numerator\; dx_k\,. \tag{4.5}$$

Для получения $q_k(\cdot)$ заметим, что пара $(\overline{X}_k, \overline{Z}_k)$ образует марковский вектор, так как определяется замкнутой системой разностных уравнений состояния объекта и фильтра, возмущаемых независимыми шумами $\overline{V}_{k-1}$, $\overline{W}_k$. Поэтому для $q_k(\cdot)$ существует рекуррентная формула.

На этапе сохранении части наблюдений, когда $k \ge l$ и справедливы зависимости (2.2), аналогично (4.2), (4.4) имеем следующую связь:

$$q_k(\overline{x}_k, j_{k-l+1}^k, y_{k-l+1}^k) = \beta_k(j_k,y_k\,|\,\overline{x}_k) \sum\nolimits_{j_{k-l}} \int p_k(\overline{x}_k, j_{k-l}^{k-1}, y_{k-l}^{k-1})\,dy_{k-l}\,. \tag{4.6}$$

Здесь распределение $p_k(\cdot)$ пары $(\overline{X}_k, \overline{Z}_{k-1})$, используя (1.6), можно представить через предыдущее распределение $q_{k-1}(\cdot)$ как

$$p_k(\overline{x}_k, \overline{y}_{k-l}^{k-1}) = \sum\nolimits_i \int \zeta_{k-1}(\overline{x}_k\,|\,i,x,\overline{y}_{k-1})\,q_{k-1}(i,x,\overline{y}_{k-l}^{k-1})\,dx\,. \tag{4.7}$$

На этапе накопления наблюдений, когда $k = \overline{1, l-1}$, учитывая только ненулевые элементы вектора $\overline{Z}_k$, подобным образом получаем

$$\begin{aligned} q_k(i_k,x_k,j_0^k,y_0^k) &= \beta_k(j_k,y_k\,|\,i_k,x_k)\,p_k(i_k,x_k,j_0^{k-1},y_0^{k-1}), \\ p_k(\overline{x}_k,\overline{y}_0^{k-1}) &= \sum\nolimits_i \int \zeta_{k-1}(\overline{x}_k\,|\,i,x,\overline{y}_{k-1})\,q_{k-1}(i,x,\overline{y}_0^{k-1})\,dx. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Начальным условием для (4.8) является $q_0(i,x,j,y) = \beta_0(j,y\,|\,i,x)\,p_0(i,x)$.

Теорема 1. *Если в векторе состояния фильтра-предиктора (2.1), (2.4), (2.6) сохраняется только часть наблюдений (2.2), то распределения* $\rho_k(\cdot)$ *и* $\pi_{k+1}(\cdot)$ *формулами (4.1), (4.2), (4.4), (4.5) выражаются через совместное распределение* $q_k(\cdot)$, *тогда как последнее находится независимо от них и от функций оценивания (3.3) и прогнозирования (3.5) по рекуррентным соотношениям – сначала по (4.8), затем по (4.6), (4.7).*

Способы построения фильтра-предиктора. Полученные интегральные соотношения можно реализовать численно методом Монте-Карло, когда последовательное нахождение вероятностных распределений заменяется потактовым статистическим моделированием уравнений объекта (1.1), измерителя (1.2) и фильтра (2.4). Его целью является получения больших пакетов реализаций случайных величин $\{\overline{X}_k\}$, $\{\overline{Y}_k\}$, $\{\overline{Z}_{k-1}\}$, позволяющих строить гистограммы функций оценивания. Одновременно с этим находятся и пакеты оценок, что позволяет анализировать точность.

Однако такая процедура довольно громоздка. Поэтому рассмотрим приближение к ФПКП, позволяющее находить вид субоптимальных функций оценивания и прогнозирования аналитически, а их параметры – тоже методом Монте-Карло, но уже с вычислением только вероятностей целочисленных величин и двух первых условных моментов континуальных.

Гауссовское приближение. С целью упрощения приведенной выше процедуры точного синтеза ФПКП до алгебраических соотношений воспользуемся известным методом нормальной аппроксимации.

Переход к вероятностям и плотностям вероятности. Подобно [6, 7] конкретизируем соотношения (4.1)-(4.5), заменив в них смешанные вероятностные распределения целочисленных и континуальных величин произведениями соответствующих вероятностей и условных плотностей вероятности, аналогичными (3.2), (3.4). Например, представим

$$\omega_k(i_k, x_k, j_k, y_k \mid \overline{z}_{k-1}) = \Omega_k^{(i_k j_k)}(\overline{z}_{k-1})\, \omega_k^{(i_k j_k)}(x_k, y_k \mid \overline{z}_{k-1}), \tag{6.1}$$

$$\Omega_k^{(i_k j_k)}(\overline{z}_{k-1}) = \int\int \omega_k(i_k, x_k, j_k, y_k \mid \overline{z}_{k-1})\, dx_k\, dy_k . \tag{6.2}$$

Тогда вместо (4.1) легко получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_k^{(i|j)}(y, \overline{z}_{k-1}) &= \Omega_k^{(ij)}(\overline{z}_{k-1}) \int \omega_k^{(ij)}(x, y \mid \overline{z}_{k-1})\, dx \Big/ \sum\nolimits_i numerator, \\ \rho_k^{(i|j)}(x \mid y, \overline{z}_{k-1}) &= \omega_k^{(ij)}(x, y \mid \overline{z}_{k-1}) \Big/ \int numerator\ dx, \end{aligned} \tag{6.3}$$

а из произведения (4.2) находим представления через $\pi_k(\cdot)$ как совместной вероятности $\Omega_k^{(ij)}(\overline{z}) = \int \mathrm{B}_k^{(j|i)}(x)\, \pi_k(i, x \mid \overline{z})\, dx$, где используется известная из (1.2) вероятность индикации $\mathrm{B}_k^{(j|i)}(x) = \mathrm{M}[\delta_{j,\, \mathrm{o}_k^{(i)}(x, W_k^{\square})}]$, так и условной плотности $\omega_k^{(ij)}(x, y \mid \overline{z}) = \beta_k(j, y \mid i, x)\, \pi_k(i, x \mid \overline{z}) \Big/ \Omega_k^{(ij)}(\overline{z})$.

Кроме того, из согласованности (4.3) имеем $\Pi_k^{(i)}(\overline{z}) = \sum_j \Omega_k^{(ij)}(\overline{z})$ и

$$\pi_k^{(i)}(x \mid \overline{z}) = \sum\nolimits_j \Omega_k^{(ij)}(\overline{z}) \int \omega_k^{(ij)}(x, y \mid \overline{z})\, dy \Big/ \Pi_k^{(i)}(\overline{z}). \tag{6.4}$$

В свою очередь, отношение (4.5) позволяет установить связи вроде (6.3):

$$\Xi_k^{(i|u)}(z) = Q_k^{(iu)} \int q_k^{(iu)}(x,z)\,dx \Big/ \sum\nolimits_i numerator,$$
$$\xi_k^{(i|u)}(x \mid z) = q_k^{(iu)}(x,z) \Big/ \int numerator\,dx. \qquad (6.5)$$

Аппроксимация условной плотности. С целью получения аналитических выражений для функций оценивания $\imath_k(\cdot)$, $g_k(\cdot)$ и прогнозирования $\upsilon_k(\cdot)$, $\psi_k(\cdot)$ выполним гауссовскую аппроксимацию условной плотности вероятности из числителя оценивающей плотности (6.3):

$$\omega_k^{(ij)}(x,y \mid \overline{z}) \approx N(x,y \,||\, \lambda_k^{(ij)}(\overline{z}), \mu_k^{(ij)}(\overline{z}); \Psi_k^{(ij)}(\overline{z}), \Phi_k^{(ij)}(\overline{z}), \Delta_k^{(ij)}(\overline{z})). \qquad (6.6)$$

Здесь $N(\theta \,||\, m; D)$ – плотность нормального закона распределения вектора Θ с параметрами $m = \mathrm{M}[\Theta]$ и $D = \mathrm{cov}[\Theta, \Theta]$. В качестве условия близости в (6.6) выберем равенства их математических ожиданий и ковариаций

$$\lambda_k^{(ij)}(\overline{z}) = \int\int x\,\omega_k^{(ij)}(x,y \mid \overline{z})\,dx\,dy\,, \qquad (6.7)$$

$$\mu_k^{(ij)}(\overline{z}) = \int\int y\,\omega_k^{(ij)}(x,y \mid \overline{z})\,dx\,dy\,, \qquad (6.8)$$

$$\Psi_k^{(ij)}(\overline{z}) = \int\int x\,x^{\mathrm{T}}\omega_k^{(ij)}(x,y \mid \overline{z})\,dx\,dy - \lambda_k^{(ij)}(\overline{z})\lambda_k^{(ij)\mathrm{T}}(\overline{z}), \qquad (6.9)$$

$$\Delta_k^{(ij)}(\overline{z}) = \int\int x\,y^{\mathrm{T}}\omega_k^{(ij)}(x,y \mid \overline{z})\,dx\,dy - \lambda_k^{(ij)}(\overline{z})\mu_k^{(ij)\mathrm{T}}(\overline{z}),$$
$$\Phi_k^{(ij)}(\overline{z}) = \int\int y\,y^{\mathrm{T}}\omega_k^{(ij)}(x,y \mid \overline{z})\,dx\,dy - \mu_k^{(ij)}(\overline{z})\mu_k^{(ij)\mathrm{T}}(\overline{z}). \qquad (6.10)$$

Функции оценивания. Вследствие аппроксимации (6.6) приближение к распределению из числителя (4.1) также гауссово

$$\omega_k(i,x,j,y \mid \overline{z}) \approx \Omega_k^{(ij)}\, N(x,y \,||\, \lambda_k^{(ij)}, \mu_k^{(ij)}; \Psi_k^{(ij)}, \Phi_k^{(ij)}, \Delta_k^{(ij)}), \qquad (6.11)$$

т.е. полностью определяется моментами (6.7)-(6.10) и вероятностью (6.2). Последние характеризуют, соответственно, прогнозы векторов состояния X_k и измерения Y_k, а также прогнозы номера режима I_k и выхода индикатора J_k. Применим теперь теорему о нормальной корреляции.

Лемма 2 [6, 7]. *Пусть существуют моменты (6.7)-(6.10) и справедливо (6.6). Тогда вероятность и плотность (6.3) имеют приближения*

$$\mathrm{P}_k^{(i|j)}(y,\overline{z}) \approx \Omega_k^{(ij)}(\overline{z})\, N(y \,||\, \mu_k^{(ij)}(\overline{z}); \Phi_k^{(ij)}(\overline{z})) \Big/ \sum\nolimits_i numerator\,, \qquad (6.12)$$

$$\rho_k^{(i|j)}(x \mid y,\overline{z}) \approx N(x \,||\, \sigma_k^{(i|j)}(y,\overline{z}), \Upsilon_k^{(i|j)}(\overline{z})), \qquad (6.13)$$

$$\sigma_k^{(i|j)}(y,\overline{z}) = \lambda_k^{(ij)}(\overline{z}) + \Delta_k^{(ij)}(\overline{z})\Phi_k^{(ij)\oplus}(\overline{z})[y - \mu_k^{(ij)}(\overline{z})], \qquad (6.14)$$

где $\oplus$ – символ псевдообращения матрицы по Муру–Пенроузу.

В итоге подстановка (6.13) в (3.3) позволяет установить следующее.

Лемма 3 [6, 7]. *В условиях леммы 2 субоптимальные функции оценивания фильтра (2.1), (2.4) выражаются через (6.2), (6.14) по формулам*

$$\iota_k(j,y,\overline{z}) \in \operatorname{Arg}\max_{i=1,L} \mathrm{P}_k^{(i|j)}(y,\overline{z}),\ g_k(j,y,\overline{z}) \approx \sum\nolimits_i \mathrm{P}_k^{(i|j)}(y,\overline{z})\sigma_k^{(i|j)}(y,\overline{z}). \quad (6.15)$$

Связи между параметрами условной плотности. В случае приближения (6.11) прогнозирующее распределение (4.3) полигауссово

$$\pi_k(i,x\,|\,\overline{z}) \approx \sum\nolimits_j \Omega_k^{(ij)}(\overline{z}) N(x\,\|\,\lambda_k^{(ij)}(\overline{z});\Psi_k^{(ij)}(\overline{z})).$$

Подставляя же в (6.8), (6.10) содержащую это распределение дробь, которая следует из (4.2) и (6.1), несложно получить следующие зависимости тройки $\mu_k^{(ij)}$, $\Phi_k^{(ij)}$, $\Delta_k^{(ij)}$ от тройки $\lambda_k^{(ij)}$, $\Psi_k^{(ij)}$, $\Omega_k^{(ij)}$. Для их записи будем использовать обозначение $\mathrm{M}_N^{m,D}[f(X)] \square \int f(x) N(x\,\|\,m,D)\,dx$.

Лемма 4 [6, 7]. *В условиях леммы 2 характеристики прогноза измерения (6.8), (6.10) при каждом значении их аргумента $\overline{z}$ выражаются через характеристики прогнозов состояния (6.7), (6.9) и вероятность прогноза режима-индикации (6.2) алгебраически по формулам*

$$\begin{aligned}
\mu_k^{(ij)} &\approx \sum\nolimits_\gamma \Omega_k^{(i\gamma)} h_k^{(j|i)}[\lambda_k^{(i\gamma)};\Psi_k^{(i\gamma)}] \Big/ \Omega_k^{(ij)},\\
\Delta_k^{(ij)} &\approx \sum\nolimits_\gamma \Omega_k^{(i\gamma)} G_k^{(j|i)}[\lambda_k^{(i\gamma)};\Psi_k^{(i\gamma)}] \Big/ \Omega_k^{(ij)} - \lambda_k^{(ij)}\mu_k^{(ij)\mathrm{T}},\\
\Phi_k^{(ij)} &\approx \sum\nolimits_\gamma \Omega_k^{(i\gamma)} F_k^{(j|i)}[\lambda_k^{(i\gamma)};\Psi_k^{(i\gamma)}] \Big/ \Omega_k^{(ij)} - \mu_k^{(ij)}\mu_k^{(ij)\mathrm{T}}.
\end{aligned} \quad (6.16)$$

*Здесь $h_k^{(j|i)}(\cdot)$, $G_k^{(j|i)}(\cdot)$, $F_k^{(j|i)}(\cdot)$ – **функции коррекции***

$$\begin{aligned}
&h_k^{(j|i)}(m,D) = \mathrm{M}_N^{m,D}[\nu_k^{(j|i)}(X)], \quad F_k^{(j|i)}(m,D) = \mathrm{M}_N^{m,D}[\mathrm{H}_k^{(j|i)}(X)],\\
&G_k^{(j|i)}(m,D) = m\,h_k^{(j|i)\mathrm{T}}(m,D) + D[h_k^{(j|i)}(m,D)]'^{\mathrm{T}}_m,
\end{aligned} \quad (6.17)$$

*определяемые по **условным средним индикатора-измерителя***

$$\begin{aligned}
\nu_k^{(j|i)}(x) &= \mathrm{M}[\delta_{j,\,\mathrm{o}_k^{(i)}(x,W_k^{\square})}\, b_k^{(i)}(x,W_k)],\\
\mathrm{H}_k^{(j|i)}(x) &= \mathrm{M}[\delta_{j,\,\mathrm{o}_k^{(i)}(x,W_k^{\square})}\, b_k^{(i)}(x,W_k) b_k^{(i)\mathrm{T}}(x,W_k)].
\end{aligned}$$

Функции прогнозирования. Из (6.4), (6.11) имеем приближение

$$\pi_k^{(i)}(x\,|\,\overline{z}) \approx \sum\nolimits_j \Omega_k^{(ij)} N(x\,\|\,\lambda_k^{(ij)};\Psi_k^{(ij)}) \Big/ \Pi_k^{(i)},\ \Pi_k^{(i)} = \sum\nolimits_j \Omega_k^{(ij)}. \quad (6.18)$$

Подставляя это в (3.5), благодаря линейности интегрирования находим

$$\upsilon_k(\overline{z}_k) \in \operatorname{Arg}\max_{i=1,L} \Pi_{k+1}^{(i)}(\overline{z}_k),\ \ \psi_k(\overline{z}_k) \approx \sum\nolimits_i \sum\nolimits_j \Omega_{k+1}^{(ij)}(\overline{z}_k)\lambda_{k+1}^{(ij)}(\overline{z}_k). \quad (6.19)$$

Условные средние всей системы наблюдения. В (6.2), (6.7), (6.9) можно выделить интегралы по y, которые по (4.2), (6.1) выражаются через $\pi_k(\cdot)$, а оно – по (4.4) через сомножители $\xi_k(\cdot)$ как

$$\pi_{k+1}(l,\chi\,|\,u,z)=\sum\nolimits_i \Xi_k^{(i|u)}(z)\int \zeta_k(l,\chi\,|\,i,x,j,y)\,\xi_k^{(i|u)}(x\,|\,z)\,dx,$$

где $u=(j,j_{k-l+1}^{k-1})$. Поэтому для искомых параметров получим выражения

$$\Omega_{k+1}^{(lf)}(u,z)=\sum\nolimits_i \Xi_k^{(i|u)}(z)\int \varsigma_k^{(lf|ij)}(x,y)\,\xi_k^{(i|u)}(x\,|\,z)\,dx,$$

$$\lambda_{k+1}^{(lf)}(u,z)=\sum\nolimits_i \Xi_k^{(i|u)}(z)\int \varphi_k^{(lf|ij)}(x,y)\,\xi_k^{(i|u)}(x\,|\,z)\,dx\Big/\Omega_{k+1}^{(lf)}(u,z), \qquad (6.20)$$

$$\Psi_{k+1}^{(lf)}(u,z)=\sum\nolimits_i \Xi_k^{(i|u)}(z)\int \Sigma_k^{(lf|ij)}(x,y)\,\xi_k^{(i|u)}(x\,|\,z)\,dx\Big/\Omega_{k+1}^{(lf)}-\lambda_{k+1}^{(lf)}\lambda_{k+1}^{(lf)\mathrm{T}},$$

через ***условные средние всей системы наблюдения***

$$\varsigma_k^{(lf|ij)}(x,y)=\int \mathrm{B}_{k+1}^{(f|l)}(\chi)\,\zeta_k(l,\chi\,|\,i,x,j,y)\,d\chi,$$

$$\varphi_k^{(lf|ij)}(x,y)=\int \chi\,\mathrm{B}_{k+1}^{(f|l)}(\chi)\,\zeta_k(l,\chi\,|\,i,x,j,y)\,d\chi, \qquad (6.21)$$

$$\Sigma_k^{(lf|ij)}(x,y)=\int \chi\chi^{\mathrm{T}}\,\mathrm{B}_{k+1}^{(f|l)}(\chi)\,\zeta_k(l,\chi\,|\,i,x,j,y)\,d\chi.$$

Следствие [7]. *В случае независимости помехи $\bar{W}_k$ от шума $\bar{V}_k$ средние (6.21) не зависят от j, y и определяются только по (1.2) как*

$$\varsigma_k^{(lf|i)}(x)=\mathrm{M}[e_k^{(lf|i)}(x,\bar{V}_k)],\ \ \varphi_k^{(lf|i)}(x)=\mathrm{M}[a_k^{(i)}(x,V_k)\,e_k^{(lf|i)}(x,\bar{V}_k)],$$

$$\mathrm{X}_k^{(lf|i)}(x)=\mathrm{M}[a_k^{(i)}(x,V_k)\,a_k^{(i)\mathrm{T}}(x,V_k)\,e_k^{(lf|i)}(x,\bar{V}_k)],$$

где общий сомножитель $e_k^{(lf|i)}(x,\bar{V}_k)=\mathrm{B}_{k+1}^{(f|l)}\{a_k^{(i)}(x,V_k)\}\delta_{l,\,\phi_k^{(i)}(x,V_k^{\square})}$.

Аппроксимация безусловной плотности. Так как $\xi_k(\cdot)$ согласно (4.5) определяется по $q_k(\cdot)$, то с целью получения алгебраических зависимостей для функций $\Omega_k^{(ij)}(\cdot)$, $\lambda_k^{(ij)}(\cdot)$, $\Psi_k^{(ij)}(\cdot)$ также аппроксимируем

$$q_k^{(iu)}(x,z)\approx N(x,z\,\|\,m_k^{x|iu},m_k^{z|iu};D_k^{x|iu},D_k^{z|iu},D_{kk}^{xz|iu}), \qquad (6.22)$$

Тогда аналогично (6.12)-(6.14) получаем такие связи.

Лемма 5 [6, 7]. *Если справедлива аппроксимация (6.22), то условные вероятность и плотность (6.5) имеют приближения*

$$\Xi_k^{(i|u)}(z)\approx Q_k^{(iu)}N(z\,\|\,m_k^{z|iu};D_k^{z|iu})\Big/\sum\nolimits_i numerator,$$
$$\xi_k^{(i|u)}(x\,|\,z)\approx N[x\,\|\,\vartheta_k^{(i|u)}(z);T_k^{(i|u)}],\quad \vartheta_k^{(i|u)}(z)=\Gamma_k^{(i|u)}z+\kappa_k^{(i|u)}, \qquad (6.23)$$

с числовыми параметрами

$$\Gamma_k^{(i|u)}=D_{kk}^{xz|iu}(D_k^{z|iu})^{\oplus},\ \kappa_k^{(i|u)}=m_k^{x|iu}-\Gamma_k^{(i|u)}m_k^{z|iu},\ T_k^{(i|u)}=D_k^{x|iu}-\Gamma_k^{(i|u)}(D_{kk}^{xz|iu})^{\mathrm{T}}.$$

Теперь используем в (6.20) гауссовость плотности $\xi_k^{(\cdot)}(\cdot)$.

Лемма 6 [7]. *Если имеет место приближение (6.22), то вероятность (6.2) и моменты (6.7), (6.9) вычисляются по формулам*

$$\Omega_{k+1}^{(lf)}(u,z) \approx \sum\nolimits_i \Xi_k^{(i|u)}(z)\eta_k^{(lf|iu)}[y,\vartheta_k^{(i|u)}(z);T_k^{(i|u)}],\quad z=(y,C_z z_{k-1}),$$

$$\lambda_{k+1}^{(lf)}(u,z) \approx \sum\nolimits_i \Xi_k^{(i|u)}(z)\tau_k^{(lf|iu)}[y,\vartheta_k^{(i|u)}(z);T_k^{(i|u)}]\Big/\Omega_{k+1}^{(lf)}(u,z), \qquad (6.24)$$

$$\Psi_{k+1}^{(lf)}(u,z) \approx \sum\nolimits_i \Xi_k^{(i|u)}(z)\mathrm{X}_k^{(lf|iu)}[y,\vartheta_k^{(i|u)}(z);T_k^{(i|u)}]\Big/\Omega_{k+1}^{(lf)} - \lambda_{k+1}^{(lf)}\lambda_{k+1}^{(lf)\mathrm{T}},$$

с определяемыми по средним (6.21) функциями ***гауссовского прогноза***

$$\begin{Bmatrix}\eta_k^{(lf|ij)}\\ \tau_k^{(lf|ij)}\\ \mathrm{X}_k^{(lf|ij)}\end{Bmatrix}(y,m,D) = \mathrm{M}_N^{m,D}\left[\begin{Bmatrix}\varsigma_k^{(lf|ij)}\\ \varphi_k^{(lf|ij)}\\ \Sigma_k^{(lf|ij)}\end{Bmatrix}(X,y)\right]. \qquad (6.25)$$

Отметим, что в построении зависимостей (6.24) по функциям (6.25) участвуют две тройки числовых параметров гауссовских приближений (6.23). Это $Q_k^{(iu)}$, $m_k^{z|iu}$, $D_k^{z|iu}$, а также $\Gamma_k^{(i|u)}$, $\kappa_k^{(i|u)}$, $T_k^{(i|u)}$.

Алгоритм работы гауссовского фильтра-предиктора. До начала процесса оценивания по уравнениям объекта (1.1) и измерителя (1.2) должны быть аналитически найдены те же структурные функции (6.17), (6.25) гауссовского ФПКП, что и для гауссовского АОФ [7]. Числовые же параметры находятся методом Монте-Карло в процессе статистического моделирования самого ФПКП так же, как и гауссовского ФОС [7].

Везде ниже случайные значения детерминированных функций в случайных точках обозначены символами самих функций, например $\mathrm{P}_k^{(i)} = \mathrm{P}_k^{(i|J_k)}(Y_k,\overline{Z}_{k-1})$, $\Xi_k^{(i)} = \Xi_k^{(i|U_k)}(Z_k)$.

Теорема 2. *Если имеют место аппроксимации (6.6), (6.22), то вычисление субоптимальным ФПКП оценок и прогнозов состояния объекта (1.1) по наблюдениям (1.2) состоит из следующих шагов, где* $i,l=\overline{1,L}$, $j,f=\overline{1,M}$. *После задания начальных условий* $\Omega_0^{(ij)},\lambda_0^{(ij)},\mu_0^{(ij)},\Psi_0^{(ij)},\Delta_0^{(ij)},\Phi_0^{(ij)}$ [7], *на каждом такте* $k=\overline{0,\mathrm{K}}$ *последовательно осуществляются:*

1. Регистрация наблюдений J_k, Y_k *и формирование состояния фильтра*

$U_0=[J_0\ 0_{l-1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $Z_0=[Y_0^{\mathrm{T}}\ o_{l-1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $U_k=[J_k\ (C_u U_{k-1})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $Z_k=[Y_k\ (C_z Z_{k-1})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$.

2. Конкретизация шести условных прогнозов $\Omega_k^{(i)}=\Omega_k^{(i\,J_k)},\ldots,\Phi_k^{(i)}=\Phi_k^{(i\,J_k)}$, *а также шести параметров фильтра* $\Gamma_k^{(i)}=\Gamma_k^{(i|U_k)},\ldots,D_k^{z|i}=D_k^{z|iU_k}$.

3. Вычисление параметров $\mathrm{P}_k^{(i)}$, $\sigma_k^{(i)}$ *приближения к* $\rho_k(\cdot)$ *по (6.12), (6.14).*

4. Определение оценок $\hat{I}_k$, $\hat{X}_k$ *состояния объекта* $\overline{X}_k$ *по (2.1), (6.15).*

5. Получение вероятностей $\Xi_k^{(i)}$ *и модификаций* $\vartheta_k^{(i)}$ *вектора* Z_k *по (6.23)*

6. Вычисление условных прогнозов $\Omega_{k+1}^{(lf)}$, $\lambda_{k+1}^{(lf)}$, $\Psi_{k+1}^{(lf)}$ *состояния по (6.24).*

7. Нахождение прогнозов $\tilde{I}_{k+1}$, $\tilde{X}_{k+1}$ *состояния* $\overline{X}_{k+1}$ *по (2.6), (6.18), (6.19).*

8. Получение прогнозов $\mu_{k+1}^{(ij)}$, $\Delta_{k+1}^{(ij)}$, $\Phi_{k+1}^{(ij)}$ *измерения* Y_{k+1} *по (6.16).*

9. Возврат к 1 при $k < K$ *с новым* $k := k+1$, *иначе завершение вычислений.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-08-01902-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухалёв В.А. Распознавание, оценивание и управление в системах со случайной скачкообразной структурой. М.: Наука, 1996.

2. Немура А., Клёкис Э. Оценивание параметров и состояния систем со скачкообразно меняющимися свойствами. Вильнюс: Мокслас, 1988.

3. Bain A., Crisan D. Fundamentals of Stochastic Filtering. N.Y.: Shpringer. 2009.

4. Босов А.В., Панков А.Р. Условно-минимаксная фильтрация в системе с переключающимися каналами наблюдения // АиТ. 1995. №6. С. 87-97.

5. Руденко Е.А. Оптимальный дискретный логико-динамический нелинейный фильтр-предиктор // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. №3. С. 28-38.

6. Руденко Е.А. Численно-аналитические приближения к оптимальному рекуррентному логико-динамическому фильтру-предиктору малого порядка // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. №5. С. 24-47.

7. Руденко Е.А. Конечномерные рекуррентные алгоритмы оптимальной логико-динамической фильтрации // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. №1. С. 43-65.

8. Руденко Е.А. Оптимальный дискретный нелинейный фильтр произвольного порядка // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. №4. С. 39-51.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕДВИЖЕНИЕМ В СИСТЕМЕ АВТОНОМНЫХ ТАКСИ

С.С. Зайдуллин, Н.М. Вдовичев, Р.И. Габитов
(КНИТУ-КАИ, Россия, 420111, Казань, К. Маркса, 10)
E-mail: SSZaydullin@kai.ru

THE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL OF MOVEMENT IN THE SYSTEM OF AUTONOMOUS TAXIS

S.S. Zaydullin, N.M. Vdovichev, R.I. Gabitov
(KNRTU-KAI, 420111, Kazan, K.Marx str., 10)

Keywords: autonomousvehicle, distributed systems, optimal control

Целый ряд крупных производителиавтомобилей(Audi,Mercedes-Benz,Nissan, Volvo и др.) ведут разработки в области создания автономных транспортных средств. Активное участие в таких проектах принимают и ведущие IT-компании (Google, Intel, Amazon.com. inси др.). Результаты этой работы можно наблюдать не только на тестовых полигонах, но и на некоторых городских улицах, например, в Сингапуре. Ряд экспертов полагает, что автономные автомобили будут постепенно вытеснять с рынка традиционные машины. Как следствие интерес к ним стали проявлять и крупные кампании, предоставляющие услуги такси, ярким примером чего являются совместные проекты Uber с Volvoи Toyota. Становится очевидным, если чья-либо система автономных такси (CAT) напрактике продемонстрирует свою эффективность, то можно ожидать значительный рост их числа.

Создание эффективной CAT требует решения следующих задач:

– обеспечение надёжности и безопасности автономных автомобилей;

– создание безотказной системы оперативного обмена информацией между компонентами CAT;

– обеспечение информационной безопасности CAT;

– эффективное техническое обслуживание машин CAT.

Актуальность первой проблемы не вызывает сомнений и на её решение выделяются значительные ресурсы. Остальные проблемы не столь медийно заметны, но это не означает, что они игнорируются техническим и научным сообществом. Решение соответствующих задач выполняется в работах [1-3] соответственно, а также – целым рядом других авторов.

Одной из важнейших задач, решаемых в рамках CAT, является оперативное управление выполнением заказов её транспортными средствами (автономными машинами такси). Современные службы такси содержат целый штат диспетчеров, но их эффективность в рамках CAT вызывает со-

мнение. Более перспективной является автоматизация процессов управления выполнением заказов. Однако предлагаемые автором работы [4] методы оперативного планирования существенно ориентированы на обслуживание заявок, некритичных ко времени начала / завершения их обслуживания, что в реальной жизни мегаполиса встречается достаточно редко. В работах [5-6] существенную роль играет ранжирование заявок по приоритетам. Это связано со спецификой рассматриваемых систем, но с точки зрения клиентов САТ далеко не всегда оправдано. В данной работе предлагается альтернативный подход к управлению передвижением в САТ.

Общий алгоритм функционирования любой службы такси может быть описан следующим образом. Поток заявок на обслуживание (поток вызовов) поступает в диспетчерский пункт, где он распределяется между ближайшими свободными машинами. При отсутствии хотя бы одной свободной машины вызов становится в очередь. Освободившаяся машина немедленно приступает к обслуживанию очередного вызова, если только очередь не пуста.

Рассмотрим задачу о назначении машин САТ соответствующим заявкам, следующего вида:

$$\begin{aligned} &Z = \sum_{i=0}^{n(\tau)} \sum_{j=0}^{m(\tau)} p_{ij}(\tau) \cdot x_{kij}(\tau) \to \min, \\ &\sum_{i=0}^{n(\tau)} x_{kij}(\tau) = 1,\ j = \overline{0, m(\tau)}, \\ &\sum_{j=0}^{m(\tau)} x_{kij}(\tau) = 1, i = \overline{0, n(\tau)}, \\ &x_{kij}(\tau) = \{0,1\}. \end{aligned} \qquad (1)$$

где $n(\tau)$ – количество заявок поступивших в САТ в момент времени τ; $m(\tau)$ – количество свободных машин САТ в момент времени τ, причём $n(\tau) = m(\tau)$; k – тип машины (может зависеть, например, от количества пассажирских мест, наличия детских удерживающих устройств или кондиционера и т.п.);

$$x_{kij}(\tau) = \begin{cases} 1, \text{если } i \text{ - ый вызов закреплен за j - ой машиной,} \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь $P(\tau) = [p_{ij}(\tau)]$ – матрица времени, где $p_{ij}(\tau)$ – это минимальное время, которое необходимо на то, чтобы доехать от местонахождения j-ой машины САТ до i-ой заявки в момент времени τ.

Задача (1) описывает случай, когда количество свободных машин совпадает с количеством вызовов, на практике, эти величины обычно различ-

ны. Рассмотрим ситуацию, когда количество свободных машин будет больше, чем количество заявок, поступивших в момент времени τ, то есть m(τ) >n(τ). В этом случае задача (1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} &Z = \sum_{i=0}^{n(\tau)} \sum_{j=0}^{m(\tau)} p_{ij}(\tau) x_{k\,ij}(\tau) \to \min, \\ &\sum_{i=0}^{n(\tau)} x_{k\,ij}(\tau) \geq 1, \ \ \mathrm{j} = \overline{0, \mathrm{m}(\tau)}, \\ &\sum_{j=0}^{m(\tau)} x_{k\,ij}(\tau) = 1, \ \ \mathrm{i} = \overline{0, \mathrm{n}(\tau)}, \\ &x_{k\,ij}(\tau) \in \{0,1\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Аналогичным образом можно получить модель задачи для случая, когда количество заявок больше, чем количество свободных машин в момент времени τ:

$$\begin{aligned} &Z = \sum_{i=0}^{n(\tau)} \sum_{j=0}^{m(\tau)} p_{ij}(\tau) x_{k\,ij}(\tau) \to \min, \\ &\sum_{i=0}^{n(\tau)} x_{k\,ij}(\tau) = 1, \ \ \mathrm{j} = \overline{0, m(\tau)}, \\ &\sum_{j=0}^{m(\tau)} x_{k\,ij}(\tau) \geq 1, \mathrm{i} = \overline{0, \mathrm{n}(\tau)}, \\ &x_{k\,ij}(\tau) \in \{0,1\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Минимальное время движения до месторасположения клиента в момент времени τ можно найти следующим образом:

$$p_{ij}(\tau) = \frac{l_{ij}}{v_{ij}(\tau)} \tag{5}$$

где l_{ij} – минимальное расстояние между клиентом и свободной машиной (данная величина является константой относительно момента времени τ), а $v_{ij}(\tau)$ – максимальная средняя скорость, которую может развить автомобиль САТ, двигаясь по улицам города к месторасположению клиента в момент времени τ.

Определим, в каких пределах изменяется величина Z – время необходимое на обслуживание n заявок m машинами САТ в момент времени τ, то есть покажем, что $\mathrm{Z} = \sum_{\mathrm{i}=0}^{n(\tau)} \sum_{j=0}^{m(\tau)} p_{i\,j}(\tau) \cdot x_{k\,i\,j}(\tau) \to \min \neq -\infty$.

Введём следующее обозначение: $p^{**} = \min p_{ij}(\tau)$. Тогда Z можно оценить следующим образом:

1) $\underline{n(\tau) = m(\tau)}$

$$Z = \sum_{i=0}^{n(\tau)} \sum_{j=0}^{m(\tau)} p_{ij}(\tau) \cdot x_{kij}(\tau) \geq \sum_{i=0}^{n(\tau)} \sum_{j=0}^{m(\tau)} p^{**} \cdot x_{kij}(\tau) = p^{**} \sum_{i=0}^{n(\tau)} \sum_{j=0}^{m(\tau)} x_{kij}(\tau) =$$

$$= (\sum_{j=0}^{m(\tau)} x_{kij}(\tau) = 1) = n \cdot p^{**};$$

2) $\underline{n(\tau) > m(\tau)}$

$$Z = \sum_{i=0}^{n(\tau)} \sum_{j=0}^{m(\tau)} p_{ij}(\tau) \cdot x_{kij}(\tau) \geq \sum_{i=0}^{n(\tau)} \sum_{j=0}^{m(\tau)} p^{**} \cdot x_{kij}(\tau) = p^{**} \sum_{i=0}^{n(\tau)} \sum_{j=0}^{m(\tau)} x_{kij}(\tau) =$$

$$= (\sum_{i=0}^{n(\tau)} x_{kij}(\tau) = 1) = m \cdot p^{**};$$

3) $\underline{n(\tau) < m(\tau)}$

$$Z = \sum_{i=0}^{n(\tau)} \sum_{j=0}^{m(\tau)} p_{ij}(\tau) \cdot x_{kij}(\tau) \geq \sum_{i=0}^{n(\tau)} \sum_{j=0}^{m(\tau)} p^{**} \cdot x_{kij}(\tau) = p^{**} \sum_{i=0}^{n(\tau)} \sum_{j=0}^{m(\tau)} x_{kij}(\tau) =$$

$$= (\sum_{j=0}^{m(\tau)} x_{kij}(\tau) = 1) = n \cdot p^{**}.$$

Таким образом, величина Z изменяется в следующих диапазонах:

$$v_1 \leq Z \text{, где } v_1 = \begin{cases} m(\tau) \cdot p^*, \text{где } n(\tau) = m(\tau), \\ m(\tau) \cdot p^*, \text{где } n(\tau) > m(\tau), \\ n(\tau) \cdot p^*, \text{где } n(\tau) < m(\tau). \end{cases} .$$

Для нахождения матриц L и $V(\tau)$ можно воспользоваться статистическими данными и картой обслуживаемого САТ города. В частности для построения матрицы L предлагается использовать алгоритмом Флойда [7], суть которого заключается в следующем. Дан непустой взвешенный граф G = (W, E) с произвольными весами дуг. В нашем случае множество вершин W графа образуется перекрестками рассматриваемого города, а множество дуг E – улицами города. Для нахождения минимальных расстояний между всеми вершинами графа необходимо выполнить следующие действия:

Шаг 0: Построить матрицу D^0 размерности $|W| \times |W|$, элементы которой определяются по правилу:

$$D^0 = \begin{cases} d_{ii}^{\,0} = 0, \\ d_{ij}^{\,0} = \text{длина дуги}(w_i, w_j), \text{если } i \neq j, \\ d_{ij}^{\,0} = \infty, \text{если нет дуги}(w_i, w_j), i \neq j. \end{cases} \quad (6)$$

Шаг 1: Строим матрицу вида:

$$D^{m+1} = \begin{cases} d_{ij}^{\,m+1} = \min\{d_{ij}^{\,m}, d_{i(m+1)}^{\,m} + d_{(m+1)j}^{\,m}\}, \text{где i} \neq \text{j}, \\ d_{ii}^{\,m+1} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Шаг 2: Если $d_{im}^{\,m} + d_{mi}^{\,m} \geq 0$, то устанавливаем $\text{m} = \text{m} + 1$ и повторяем шаг 1 до тех пор, пока выполняется неравенство $m < |W|$.

Так как граф G даже для сравнительно небольших городов будет содержать в себе большое количество вершин и ребер, то сбор входной информации будет достаточно трудоёмок, и будет сопровождаться большим количеством ошибок, что значительно увеличит погрешность решения поставленной задачи. Для снижения затрат предлагается воспользоваться следующим подходом. Город разбивается на зоны, размер которых можно определить, например, по количеству улиц. Чем больше требуемая точность вычислений, тем меньшее количество улиц будет содержаться в зоне, и наоборот. Надо заметить, что вычисления можно проводить поэтапно, на каждой итерации получая решение заданной точности. Этого можно добиться, уменьшая на каждом этапе размер зон.

В этом случае граф G в алгоритме Флойда будет представлять собой граф с вершинами в центральной точке зоны, а его ребрами будут дуги, соединяющие вершины зон, имеющих общие границы.

Для вычисления матрицы V(τ) средних скоростей движения машин по улицам города можно использовать статистическую информацию, а предельные (граничные) значения можно брать по знакам дорожного движения.

Описанные методы определения матриц L и V(τ), однако, не являются достаточно точными и удобными. Во-первых, в ходе вычислений могут возникнуть погрешности достаточно большой величины. Во-вторых, методы вышеописанные методы статичны, поскольку в городах строятся новые улицы и дома, увеличивается количество транспорта на дорогах, таким образом, информацию о средних скоростях и о длинах улиц придётся постоянно обновлять. Наиболее очевидной альтернативой для измерения расстояния между клиентом и машиной САТ, а также определения средней скорости движения, является спутниковая навигация GPS/ГЛОНАСС [8].

Информация о скорости и положении машины поступает по защищённым каналам связи в информационную систему САТ и накладывается на цифровую карту обслуживаемого ею города. Любое транспортное средство точно и однозначно идентифицируется и контролируется независимо от того, находится ли оно на заданном маршруте или вне него. Информация о положении, скорости и состоянии транспортного средства может сохраняться для последующего анализа и обработки. Обновление информа-

ции происходит непрерывно с высокой частотой по требованию или по заранее заданному графику. Отметим, что в качестве начальных данных о длине улиц и скорости движения транспорта можно использовать результаты метода зон и информацию по дорожным знакам.

Для решения задач (1), (3) и (4) можно воспользоваться, так называемым, венгерским методом [7]:

Шаг 0: Построим матрицу S, состоящую из элементов s(i,j) – расстояние между i-тым вызовом и j-ой машиной.

Шаг 1: Преобразуем матрицу S следующим образом: уменьшаем элементы каждой строки на число, равное минимальному элементу данной строки. То же самое делаем и для столбцов. В получившейся матрице каждая строка и каждый столбец должны содержать хотя бы по одному нулю.

Шаг 2: Ищем решение. Для этого берем первую строку; отметим один из нулей, а нули, находящиеся в других строках, но в том же столбце, что и отмеченный ноль зачеркиваем. То же делаем со всеми остальными строками. Если в результате проделанных действий окажется, что в каждой строке имеется отмеченный ноль, то решение выглядит следующим образом, если отмеченный ноль стоит на пересечении i-ой строки и j-го столбца, то элементу k_i назначается элемент k_j. Если решение не найдено, то переходим к шагу 3.

Шаг 3: Проводим минимальное количество вертикальных и горизонтальных линий, таким образом, что бы все нулевые элементы матрицы были вычеркнуты.

Шаг 4: Рассмотрим матрицу, состоящую из не вычеркнутых элементов. Среди этих элементов найдем минимальный элемент. Затем из всех, не вычеркнутых элементов, отнимем найденный минимальный элемент, а к элементам, находящимся на пересечении проведенных линий, прибавим этот минимальный элемент. Переходим к шагу 2.

Надо заметить, что этот метод можно применить как для квадратных, так и не для квадратных матриц. Если матрица $P(\tau)$ произвольная, дополняем её нужным числом нулевых рядов или столбцов.

Пример № 1. Рассмотрим граф G, в котором вершинами являются перекрёстки улиц среднего по размерам населённого пункта. Общее количество вершин равно 69. Пусть в момент времени τ_1 на улицах города имеется 5 свободных машин, которые находятся в вершинах $w_{13}, w_{29}, w_{67}, w_{51}, w_1$. Пусть в момент времени τ_1 поступило 5 заявок (вызовов такси), расположенных в вершинах $w_{33}, w_{15}, w_{18}, w_{10}, w_5$. Для нахождения минимального расстояния между вершинами воспользуемся алгоритмом Флойда. После его применения матрица L будет иметь следующий вид:

$$L = \left[\begin{array}{c|ccccc} & w_1 & w_{13} & w_{29} & w_{51} & w_{67} \\ \hline w_5 & 5{,}3 & 11 & 10 & 4{,}3 & 18{,}5 \\ w_{10} & 10{,}3 & 6 & 12 & 6 & 13{,}5 \\ w_{15} & 21 & 5 & 1{,}5 & 16{,}5 & 10 \\ w_{18} & 27 & 11 & 7{,}5 & 22{,}5 & 8{,}5 \\ w_{33} & 14 & 3 & 6 & 9{,}5 & 14{,}5 \end{array}\right] \times k$$

где k – это масштаб карты и L измеряется в километрах.

Матрица $V(\tau_1)$, элементы которой измеряются в км/час, имеет следующий вид:

$$V(\tau_1) = \begin{array}{c|ccccc} & w_1 & w_{13} & w_{29} & w_{51} & w_{67} \\ \hline w_5 & 5 & 15 & 10 & 17 & 70 \\ w_{10} & 12 & 18 & 16 & 40 & 15 \\ w_{15} & 15 & 21 & 30 & 60 & 30 \\ w_{18} & 19 & 16 & 20 & 22 & 32 \\ w_{33} & 40 & 60 & 30 & 25 & 28 \end{array}$$

Выполняя последовательно все шаги венгерского метода, получим следующий результат:

$$P(\tau_1) = \left[\begin{array}{c|ccccc} & w_1 & w_{13} & w_{29} & w_{51} & w_{67} \\ \hline w_5 & 0{,}36 & 0{,}33 & 0{,}75 & [0] & 0{,}01 \\ w_{10} & 0{,}23 & [0] & 0{,}6 & 0 & 0{,}75 \\ w_{15} & 0{,}9 & 0{,}01 & [0] & 0{,}23 & 0{,}25 \\ w_{18} & 0{,}7 & 0{,}24 & 0{,}11 & 0{,}75 & [0] \\ w_{33} & [0] & 0 & 0{,}3 & 0{,}51 & 0{,}65 \end{array}\right] \times k$$

Тогда окончательное решение имеет вид: на заявку w_5 назначается машина 51, на заявку w_{10} назначается машина 13, на заявку w_{15} назначается машина 29, на заявку w18 назначается машина 67, а на заявку w33 – машина 1.

Пусть в момент времени τ_2 в САТ имеется 5 свободных машин, которые находятся в вершинах $w_{13}, w_{29}, w_{67}, w_{51}, w_1$. Пусть в момент времени τ_2 поступило 4 заявки, расположенных в вершинах $w_{33}, w_{15}, w_{18}, w_{10}$.

Матрица L не изменит своего вида, поскольку она является постоянной и с течением времени не меняется.

Пусть в момент времени τ_2 матрица $V(\tau_2)$ имеет вид:

$$V(\tau_2) = \begin{array}{c|ccccc} & w_1 & w_{13} & w_{29} & w_{51} & w_{67} \\ \hline w_{33} & 35 & 65 & 25 & 30 & 23 \\ w_{10} & 7 & 13 & 11 & 45 & 20 \\ w_{15} & 10 & 16 & 35 & 55 & 35 \\ w_{18} & 14 & 16 & 20 & 22 & 32 \end{array}$$

Аналогично выполняя последовательно все шаги венгерского метода, получим следующий результат:

$$P(\tau_2)=\left[\begin{array}{c|ccccc} & w_1 & w_{13} & w_{29} & w_{51} & w_{67} \\ \hline w_{33} & [0] & 0 & 0{,}19 & 0{,}27 & 0{,}33 \\ w_{10} & 1{,}02 & 0{,}33 & 0{,}96 & [0] & 0{,}3 \\ w_{15} & 1{,}71 & 0{,}27 & [0] & 0{,}26 & 0 \\ w_{18} & 1{,}36 & [0] & 0{,}11 & 0{,}24 & 0{,}01 \end{array}\right]\times k$$

Таким образом, решение найдено: на вызов w_{33} назначается машина 1, на вызов w_{10} – машина 51, на вызов w_{15} – машина 29, а на вызов w_{18} –13.

Данный пример показывает, что венгерский метод можно применить к произвольной матрице $P(\tau)$.

Пример № 2. Рассмотрим САТ из примера № 1, но граф G будем строить иначе: вершинами Z будут являться центральные точки зон города, а рёбрами – дуги, соединяющие центральные точки зон имеющих общие границы. Количество вершин $|Z|=45$. Пусть вызовы находятся в следующих зонах: $v_5\in z_6, v_{10}\in z_{13}, v_{15}\in z_{35}, v_{18}\in z_{38}, v_{33}\in z_{24}$, а свободные машины находятся в зонах $v_1\in z_1, v_{13}\in z_{24}, v_{24}\in z_{35}, v_{51}\in z_8$, $v_{67}\in z_{39}$

Тогда матрица L будет иметь следующий вид:

$$L=\left[\begin{array}{c|ccccc} & z_1 & z_{24} & z_{35} & z_8 & z_{39} \\ \hline z_6 & 7{,}5 & 12{,}3 & 17 & 4 & 25{,}5 \\ z_{13} & 10{,}3 & 8{,}8 & 13{,}8 & 6{,}8 & 22{,}3 \\ z_{35} & 22{,}8 & 6{,}5 & 0 & 17{,}5 & 8{,}5 \\ z_{38} & 31{,}3 & 13{,}3 & 6{,}8 & 24{,}3 & 6{,}8 \\ z_{24} & 17{,}8 & 0 & 6{,}5 & 12{,}5 & 15 \end{array}\right]\times k$$

Матрица $V(\tau_1)$ в момент времени τ_1 имеет вид:

$$V(\tau_1)=\begin{array}{c|ccccc} & z_1 & z_{24} & z_{35} & z_8 & z_{39} \\ \hline z_6 & 15 & 18 & 10 & 20 & 30 \\ z_{13} & 10 & 18 & 23 & 40 & 50 \\ z_{35} & 30 & 16 & 15 & 23 & 70 \\ z_{38} & 45 & 10 & 30 & 20 & 25 \\ z_{24} & 10 & 10 & 16 & 22 & 25 \end{array}$$

Применяя венгерский метод, получим следующий результат:

$$P(\tau_1)=\left[\begin{array}{c|ccccc} & z_1 & z_{24} & z_{35} & z_8 & z_{39} \\ \hline z_6 & [0] & 0{,}48 & 1{,}5 & 0 & 0{,}61 \\ z_{13} & 0{,}56 & 0{,}32 & 0{,}43 & [0] & 0{,}24 \\ z_{35} & 0{,}46 & 0{,}36 & [0] & 0{,}76 & 0{,}08 \\ z_{38} & 0{,}17 & 1{,}1 & 0 & 0{,}99 & [0] \\ z_{24} & 1{,}48 & [0] & 0{,}41 & 0{,}57 & 0{,}56 \end{array}\right]\times k$$

Решение найдено: на вызов, находящийся в зоне 6, назначается машина из зоны 1, на вызов из зоны 13 назначается машина из зоны 8, на вызов

из зоны 35 назначается машина из зоны 35, на вызов из зоны 38 назначается машина из зоны 39, а на вызов, из зоны 24 назначается машина из зоны 24.

Пусть в момент времени τ_2 все параметры станции останутся прежними, кроме матрицы $V(\tau_2)$, которая будет иметь вид:

$$V(\tau_2)=\begin{array}{c|ccccc} & z_1 & z_{24} & z_{35} & z_8 & z_{39} \\ \hline z_6 & 5 & 10 & 15 & 5 & 50 \\ z_{13} & 10 & 18 & 23 & 40 & 50 \\ z_{35} & 30 & 16 & 15 & 23 & 70 \\ z_{38} & 45 & 10 & 30 & 20 & 25 \\ z_{24} & 10 & 10 & 16 & 22 & 25 \end{array}$$

Применяя венгерский метод, получим следующий результат:

$$P(\tau_2)=\left[\begin{array}{c|ccccc} & z_1 & z_{24} & z_{35} & z_8 & z_{39} \\ \hline z_6 & 0{,}52 & 0{,}72 & 0{,}62 & 0{,}29 & [0] \\ z_{13} & 0{,}39 & 0{,}32 & 0{,}43 & [0] & 0{,}71 \\ z_{35} & 0{,}29 & 0{,}4 & [0] & 0{,}76 & 0.12 \\ z_{38} & [0] & 1{,}1 & 0 & 0{,}97 & 0{,}04 \\ z_{24} & 1{,}31 & [0] & 0{,}4 & 0{,}57 & 0{,}6 \end{array}\right]\times k$$

Решение найдено: на вызов, находящийся в зоне 6 назначается машина из зоны 39, на вызов из зоны 13 назначается машина из зоны 8, на вызов из зоны 35 назначается из зоны 35, на вызов из зоны 38 назначается из зоны 1, а на вызов, находящийся в зоне 24 назначается машина из зоны 24.

Как видим, при изменении матрицы скоростей $V(\tau)$ с течением времени при остальных постоянных параметрах, изменяется и решение задачи.

Заключение

В работе выделены основные направления обеспечения эффективного функционирования перспективных систем автономных такси. Рассмотрена задача безоператорного управления передвижением таких такси и предложен метод её решения для неприоритезируемых заявок. В дальнейшем авторы предполагают усовершенствовать алгоритм, добавив возможность опережающего (прогнозного) выделения на заявку ещё не освободившихся машин САТ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моисеев В.С., Тутубалин П.И., Шафигуллин Р.Р. Оптимизация состава вычислительного кластера мобильной распределенной интегрированной информационной системы // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева. 2012. № 1. С. 120-128.

2. Моисеев В.С., Тутубалин П.И. Вероятностная динамическая модель функционирования программных средств активной защиты мобильных распределенных АСУ // Информационные технологии. 2013. № 6. С. 37-42.

3. Моисеев В.С., Зайдуллин С.С.Задачи анализа и синтеза сложных территориально распределенных систем // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева. 2000. № 2. С. 39-44

4. Зайдуллин С.С. Информационная технология управления распределенной системой обслуживания // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева. 2003. № 3. С. 50-58.

5. Бутузова А.В., Моисеев В.С., Тутубалин П.И. Теоретические основы информатизации службы скорой медицинской помощи: Монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2011, 242с.

6. Сонькин Д.М. Адаптивный алгоритм распределения заказов на обслуживание автомобилями такси // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2009. Т. 315. № 5. С. 65-69.

7. Хэмди А. Таха Введение в исследование операций – М.: Издательский дом «Вильямс», 2007, 912 с.

8. Погребной В.Ю.Методы регистрации местоположения и параметров движения городского маршрутного транспорта по данным спутникового мониторинга // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2015. № 8. С. 10-17.

ПРОГРАММНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ 1 ДЛЯ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Е.В. Карачанская (ДВГУПС, Россия, 680027, Хабаровск, Серышева, 47;
ТОГУ, Россия, 680035, Хабаровск, Тихоокеанская, 136)
E-mail: elena_chal@mail.ru

PROGRAM CONTROL WITH PROBABILITY 1 FOR RANDOM PERTURBATIONS SYSTEMS

E.V. Karachanskaya (FESTU, Russia, 680027, Khabarovsk, Serysheva str., 47;
PNU, Russia, 680035, Khabarovsk, Tiho-okeanskaya str., 136)

Keywords: stochastic system, Ito's equation, Poisson jumps, control program with probability 1.

Введение. Возможность описания динамической системы с помощью стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) позволяет учитывать как постоянные случайные возмущения в виде винеровского процесса, так и скачкообразные, вызванные пуассоновским процессом. Теория стохастических первых интегралов [1]позволяет строить множество управлений, обеспечивающих сохранение с вероятностью 1 заданных свойств динамической системы [2], например, законы сохранения. Отметим, что сохраняющиеся величины обычно имеют глубокий содержательный смысл и могут быть вычислены непосредственно [3]. Поскольку часто для описания эволюции системы используются дифференциальные уравнения, то можно необходимый закон сохранения рассматривать как первый интеграл этой системы. При этом первый интеграл несет всю информацию о моделируемой системе. Описание системы управления в виде системы, состоящей из nстохастических дифференциальных уравнений Ито (СДУ) с винеровскими и пуассоновскими возмущениями (скачками)

$$dX(t) = \alpha(t, X(t), u(t, X(t)))dt + \beta(t, X(t), u(t, X(t)))dW(t) + \int_{\Theta} G(t, X(t), \theta)\nu(dt, d\theta), \quad X(t) = X(t, \mathrm{x}(0), \omega)|_{t=0} = \mathrm{x}(0), \quad t \geq 0, \tag{22}$$

дает возможность, зная первый интеграл уравнения[2,4], построить программное управление с вероятностью 1 ((PCP1 – Programmed Control with Probability 1), обеспечивающее данной системе сохранение заданного свойства – первого интеграла [2,4-8].Теоретической основой такого управления является применение обобщенной формулы Ито-Вентцеля [5,7,8].Следует отметить, что в стохастическое уравнение Ито входит стандартная (нецентрированная) пуасссоновская мера, что является более приближенным к реальным ситуациям, поскольку возникающие пуассоновские процессы обычно не являются центрированными.

Как известно, с помощью стохастических уравнений Ито возможно описание множества реальных процессов, в том числе в химии, биологии, аэродинамике, турбулентной диффузии, климатологии и др., при этом часто коэффициенты сноса и диффузии считаются известными, определенными ранее какими-либо методами. В работах [5,6] в уравнении, определяемом управляемую систему с управление в коэффициенте сноса, коэффициент диффузии был по условию неизвестен и определялся в дальнейшем, исходя из вида сохраняющейся функции.Внесение дополнительно управления в слагаемое при винеровском возмущении $dW(t)$

$$dX(t) = [P(t,(t)) + Q(t,X(t))u_1(t,X(t))]dt + \left[V(t,X(t)) + u_2(t,X(t))\right]dW(t) + \\ + \int_{\Theta} G(t,X(t),\theta)\nu(dt,d\theta), \qquad (23)$$
$$X(t) = X(t,\mathrm{x}(0),\omega)|_{t=0} = \mathrm{x}(0), \quad t \geq 0,$$

также позволяет решить задачу построения РСР1 для систем с известными коэффициентами $V(t,X(t))$ при $dW(t)$.

Постановка задачи.Рассмотреть построение программных управлений с вероятностью 1 для стохастической динамической системы с управлениями в детерминированной и «шумовой» частях вида (2), а также для системы с управлением только по части фазовых переменных.

Программные управления с вероятностью 1. Рассмотрим систему уравнений Ито:

$$dX(t) = A(t,X(t))dt + B(t,X(t))dW(t) + \int_{\Theta} G(t,X(t),\theta)\nu(dt,d\theta), \\ X(t) = X(t;\mathrm{x}(0);\omega)|_{t=0} = \mathrm{x}(0), \quad t \geq 0. \qquad (24)$$

Коэффициенты матриц $A(t,x) = \|a_i(t,x)\|$, $B(t,x) = \|b_{ik}(t,x)\|$ и $G(t,x,\gamma) = \|g_i(t,x,\gamma)\|$ уравнения (3) выбраны таким образом, чтобы были обеспечены условия существования и единственности решения, как и во всех уравнениях, рассматриваемых ниже.

Определение1. Программным управлением с вероятностью 1 (РСР1) будем называть управление в стохастической системе, которое с вероятностью, равной 1, обеспечивает нечувствительность системы к случайным возмущениям.

Определение 2.Неслучайную функцию $s(t,x)$ будем называть первым интегралом системы СДУ Ито (3), если она с вероятностью 1 сохраняет постоянное значение для любой реализации случайного процесса $X(t;\mathrm{x}(0);\omega)$, являющегося решеним этой системы: $s(t,\mathrm{X}(t,\mathrm{x}(0),\omega)) = s(0,\mathrm{x}(0))$.

Чтобы функция $s(t,x(t))$ была первым интегралом системы (3), должны выполняться условия, которые получены в результате применения обобщенной формулы Ито-Вентцеля[5,8]:

- $b_{ik}(t,x)\dfrac{\partial s(t,x)}{\partial x_i} = 0$, для всех $k = \{1,...,m\}$;

- $\frac{\partial s(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial s(t,x)}{\partial x_i}[a_i(t,x)-\frac{1}{2}b_{jk}(t,x)\frac{\partial b_{ik}(t,x)}{\partial x_j}]=0$;
- $s(t,x)-s(t,x+g(t,x,\gamma))=0$ для любых $\gamma\in\Theta$.

Определение 3. Программным движением стохастической системы (1), где $W(t)-$ m-мерный винеровский процесс, $\nu(dt,d\theta)$ - однородная по *t*стандартная уассоновская мера [12], будем называть решение $X(t,\mathrm{x}(0),u(t),\omega_0)$ позволяющее с вероятностью 1 при некотором управлении (РСР1) $u(t,X(t))$ для всех t оставаться на неслучайном интегральном многообразии $s(t,X(t,\mathrm{x}(0))=s(0,\mathrm{x}(0))$, являющемся первым интегралом уравнения (1) при заданных начальных условиях.

Такое определение программного движения ближе к понятию динамического инварианта [5], т. е. поверхность рассматривается в расширенном фазовомпространстве. Таким образом предполагается также и динамичность многообразия, его изменение с течением времени.

В [4] доказана теорема о построении системы стохастическх дмфференциальных уравнений, имеющей заданное множество первых интегралов. В соответствии с этой теоремой будем строить РСР1. Идея построения РСР1 основана на равенстве коэффициентов систем (2) и (3).

Отметим, что при этом определяются также реакции на случайные возмущения, обеспечивающие это программное управление. Получающееся множество управлений зависит от произвольных функций, выбор которыхпозволяет построить наиболее удобную реализацию управления.

Пример 1. Найти управления и реакции на случайные возмущения, чтобы динамическая система

$$\begin{aligned} dx_1(t)&=[x_1(t)+x_2(t)+e^{-t}+u_1(t,\mathbf{x}(t))]dt+[x_1(t)x_2(t)+\mathrm{u}_3(t,\mathbf{x}(t))]d\mathrm{w}(t)+\\ &+\int_\Theta g_1(t,\mathbf{x}(t),\gamma)\nu(dt,d\gamma),\\ dx_2(t)&=[x_1(t)x_2(t)+e^{-2t}+u_2(t,\mathbf{x}(t))]dt+[x_1(t)e^{-t}+\mathrm{u}_4(t,\mathbf{x}(t))]d\mathrm{w}(t)+\\ &+\int_\Theta g_2(t,\mathbf{x}(t),\gamma)\nu(dt,d\gamma), \end{aligned} \tag{25}$$

подверженная воздействию винеровского процесса и совершающая скачки под действием пуассоновского процесса, с вероятностью 1 обеспечивала движение по поверхности $x_2(t)e^{-2x_1(t)}-e^{-2}=0$.

Сначала строим систему стохастических дифференциальных уравнений, опираясь на[4], для которой функция $s(t,\mathbf{x}(t))=x_2(t)e^{-2x_1(t)}-e^{-2}$ является первым интегралом, т.е. $s(t,\mathbf{x}(t))\equiv x_2(t)e^{-2x_1(t)}-e^{-2}=s(0,\mathbf{x}(0))$.Данное условие соответствует начальным данным $\mathbf{x}(0)=(1,1)^T$.

Построенная система имеет вид:

$$dx_1(t) = \left[-\frac{f_1(t,\mathbf{x}(t))}{f_2(t,\mathbf{x}(t)) + 2\,f_3(t,\mathbf{x}(t))x_2(t)} - q_{oo}^2(t,\mathbf{x}(t))e^{-4x_1(t)} \right] dt +$$
$$+ q_{oo}(t,\mathbf{x}(t))e^{-2x_1(t)} d\mathrm{w}(t) + \int_\Theta (\frac{1}{2}\ln\left(2\gamma + e^{2x_1(t)}\right) - x_1(t))\nu(dt, d\gamma), \quad (26)$$

$$dx_2(t) = \left[-\frac{2\,f_1(t,\mathbf{x}(t))x_2(t)}{f_2(t,\mathbf{x}(t)) + 2\,f_3(t,\mathbf{x}(t))x_2(t)} \right] dt + 2q_{oo}x_2(t)e^{-2x_1(t)})d\mathrm{w}(t) +$$
$$+ \int_\Theta (2x_2(t)\gamma e^{-2x_1(t)})\nu(dt, d\gamma). \quad (27)$$

Искомое управление - решение системы линейных уравнений:

$$x_1(t) + x_2(t) + e^{-t} + u_1(t,\mathbf{x}(t)) = -\frac{f_1(t,\mathbf{x}(t))}{f_2(t,\mathbf{x}(t)) + 2\,f_3(t,\mathbf{x}(t))x_2(t)} - q_{oo}^2(t,\mathbf{x}(t))e^{-4x_1(t)},$$
$$x_1(t)x_2(t) + e^{-2t} + u_2(t,\mathbf{x}(t)) = -\frac{2\,f_1(t,\mathbf{x}(t))x_2(t)}{f_2(t,\mathbf{x}(t)) + 2\,f_3(t,\mathbf{x}(t))x_2(t)},$$
$$x_1(t)x_2(t) + \mathrm{u}_3(t,\mathbf{x}(t)) = q_{oo}(t,\mathbf{x}(t))e^{-2x_1(t)},$$
$$x_1(t)e^{-t} + \mathrm{u}_4(t,\mathbf{x}(t)) = 2q_{oo}(t,\mathbf{x}(t))x_2(t)e^{-2x_1(t)}, \quad (28)$$

Следовательно,

$$u_1(t,\mathbf{x}(t)) = -\frac{f_1(t,\mathbf{x}(t))}{f_2(t,\mathbf{x}(t)) + 2\,f_3(t,\mathbf{x}(t))x_2(t)} - q_{oo}^2(t,\mathbf{x}(t))e^{-4x_1(t)} - x_1(t) - x_2(t) - e^{-t},$$
$$u_2(t,\mathbf{x}(t)) = -\frac{2\,f_1(t,\mathbf{x}(t))x_2(t)}{f_2(t,\mathbf{x}(t)) + 2\,f_3(t,\mathbf{x}(t))x_2(t)} - x_1(t)x_2(t) - e^{-2t},$$
$$\mathrm{u}_3(t,\mathbf{x}(t)) = q_{oo}(t,\mathbf{x}(t))e^{-2x_1(t)} - x_1(t)x_2(t),$$
$$\mathrm{u}_4(t,\mathbf{x}(t)) = 2q_{oo}(t,\mathbf{x}(t))x_2(t)e^{-2x_1(t)} - x_1(t)e^{-t}, \quad (29)$$

для любых функций $f_i(t,\mathbf{x})$, $i = 1,2,3$, обеспечивающих существование возникающих дробей.

Таким образом, искомое управление и реакции на случайные возмущения – коэффициенты при винеровской и пуассоновской частях в формулах (5) и (6) - найдены. Выбор функций $f_i(t,\mathbf{x})$, $i = 1,2,3$ и $q_{oo}(t,\mathbf{x})$ определяется на основе какие-либо условий, например, удобством для моделирования и позволяет выбирать наиболее удобные для реализации управления.

Для проверки выполнения равенства $x_2(t)e^{-2x_1(t)} - e^{-2} = s(0,\mathbf{x}(0))$ при внесении найденный управлений в систему, найдем численное решение системы уравнений (6)-(7)**.**

В динамических управляемых системах часто присутствует уравнение, не содержащее управления. Для таких систем при внесении

случайного возмущения в виде винеровского процесса также возможно построение РСР1, при этом возникает ограничение на вид необходимого для системы закона сохранения и становится обязательным введение «компенсирующего управления» в уравнение, не содержащее управление. Обусловлено первое условие тем, что в «неуправляемом» уравнении отсутствует случайная составляющая, а второе – тем, что построенное уравнение имеет свои коэффициенты, не совпадающие с коэффициентами исходного уравнения, при этом «управляемые» уравнения дают возможность определить искомое управление, а в «неуправляемое» нужно внести поправку, не изменяющую исходную систему.

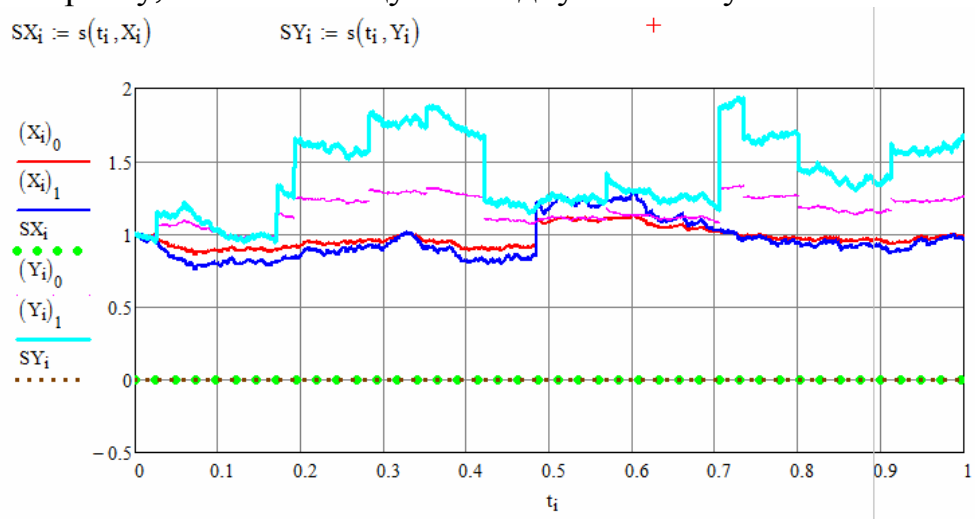

Рис. 1. Две реализации решения системы (5)-(6) и графики значений функции $s(t,\mathbf{x}(t))$ при этих реализациях

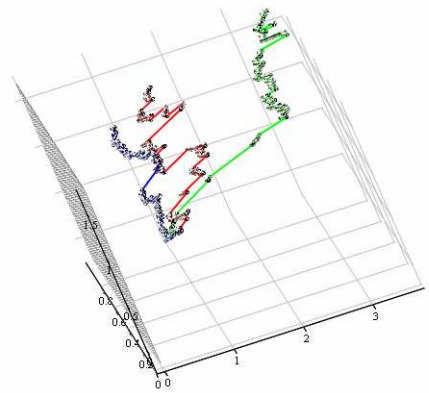

Рис. 2. Три реализации решения системы (5)-(6), находящиеся на одной поверхности

Приведем без доказательства лемму.

Лемма. «Компенсирующееуправление» $u_0(t,\mathbf{x})$ имеет вид:

$$u_0(t,\mathbf{x}) = -\frac{\partial s(t,\mathbf{x})}{\partial t} - a_1(t,\mathbf{x}), \qquad (9)$$

где $a_1(t,\mathbf{x})$ - коэффициент сноса «неуправляемого уравнения», - функция, сохранение которой необходимо, зависящая от (t,x_i), где x_i - одна из фазовых переменных.

Пример 2. Построить управление, позволяющее динамической системе

$$dx_0(t) = (x_1(t) - e^{-t})dt,$$

$$dx_1(t) = (x_0(t) + x_1(t) + 2x_2(t))dt + \mathrm{u}_1(t,\mathbf{x}(t)) - \mathrm{u}_2(t,\mathbf{x}(t)) + \sum_{k=1}^{2} b_{1k}(t,\mathbf{x}(t))dw_k(t), \quad (10)$$

$$dx_2(t) = x_0(t) - x_1(t) - x_2(t) + \mathrm{u}_3(t,\mathbf{x}(t)) + \sum_{k=1}^{2} b_{2k}(t,\mathbf{x}(t))dw_k(t),$$

с вероятностью 1 сохранять выполнение равенства $x_0(t) - e^t + 1 = s(0,\mathbf{x}(0))$.

Построенная система уравнений имеет вид:

$$dx_0(t) = e^{-t}dt,$$

$$dx_1(t) = \frac{e^t(g_1(\cdot)h_3(\cdot) - h_1(\cdot)g_3(\cdot)) + (g_0(\cdot)h_3(\cdot) - h_0(\cdot)g_3(\cdot))}{g_2(\cdot)h_3(\cdot) - h_2(\cdot)g_3(\cdot)} + Q_1(\cdot))dt + q(\cdot)Q_1(\cdot)\sum_{k=1}^{2} dw_k(t), \quad (11)$$

$$dx_2(t) = \frac{e^t(g_1(\cdot)h_2(\cdot) - h_1(\cdot)g_2(\cdot)) + (g_0(\cdot)h_2(\cdot) - h_0(\cdot)g_2(\cdot))}{g_2(\cdot)h_3(\cdot) - h_2(\cdot)g_3(\cdot)} + Q_2(\cdot))dt + q(\cdot)Q_2(\cdot)\sum_{k=1}^{2} dw_k(t),$$

здесьфункции зависят от $(t,\mathbf{x}(t))$ и выбираются таким образом, чтобы исключить деление на «0».

Учитывая вид коэффициента в первом уравнении, введем «компенсирующее управление» $u_0(t,\mathbf{x})$ в первое уравнение исходной динамической системы.

Проведем проверку найденного решения. Для построенной системы найдем численное решение, положив:

$$q(t,\mathbf{x}) = x_0 + 1, \quad h_0(t,\mathbf{x}) = \sin(x_0) + \cos(x_1), \quad h_1(t,\mathbf{x}) = \cos(t) + 5x_0, \quad h_2(t,\mathbf{x}) = te^{-t},$$

$$h_3(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{t+1} + 1, \quad g_0(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{t+1}, \quad g_1(t,\mathbf{x}) = x_0\sin(t), \quad g_2(t,\mathbf{x}) = x_0 + e^t, \quad (12)$$

$$g_3(t,\mathbf{x}) = x_2\cos(x_1), \quad Q_1(t,\mathbf{x}) = x_1, \quad Q_2(t,\mathbf{x}) = \sin(t) + x_1$$

при начальных данных $\mathbf{x}(0) = (1,1,1)^T$ и определяя соответствующие значения функции $s(t,\mathbf{x}(t)) = x_0(t) - e^t + 1$. Результаты представлены на рис. 3, значения управлений – на рис. 4.

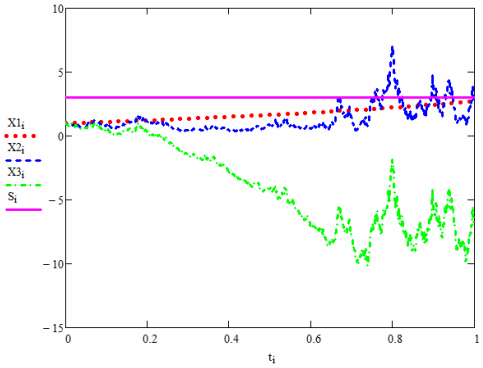

Рис. 3. Результаты численного решения уравнения (11) при коэффициентах (12)

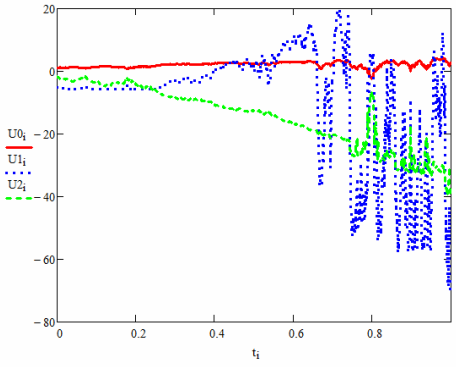

Рис. 4. Управления динамической системой (10)

Таким образом, программное управление с вероятностью 1 обеспечивает сохранение в динамической системе постоянного значения для заданной функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубко В.А. Вопросыт еориии применения стохастических дифференциальных уравнений. Владивосток: ДВО АН СССР, 1989.

2. Карачанская Е.В. Построение программных управлений динамической системы на основе множества ее первых интегралов. // Современная математика. Фундаментальные направления, 2011, Т. 42.

3. Визгин В.П. Развитие взаимосвязи принципов инвариантности с законами сохранения в классической физике. М.: Наука, 1972.

4. Карачанская Е.В. Построение множества дифференциальных уравнений с заданным набором первых интегралов // Вестник Тихоокеанского госуниверситета, № 3(22), 2011.

5. Дубко В.А. Открытые эволюционирующие системы / Первая междунар. научно-техн. конф. “Открытые эволюционирующие системы” (26–27 апреля 2002 г.). Тез.докл. Киев.: ВНЗ ВМУРоЛ, 2002.

6. Карачанская Е.В. Построение программных управлений с вероятностью 1 для динамической системы с пуассоновскими возмущениями // Вестник Тихоокеанского госуниверситета, № 2(21), 2011.

7. Карачанская Е.В. Интегральные инварианты стохастических систем и программные управления с вероятностью 1. Хабаровск :Изд-во Тихоокеанского гос. ун-та. 2015,

8. Карачанская Е.В. Обобщенная формула Ито–Вентцеля для случая нецентрированной пуассоновской меры, стохастический первый интеграл и первый интеграл// Математические труды 2014, Т.17. № 1.

УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕВЕРНУТЫМ МАЯТНИКОМ НА ТЕЛЕЖКЕ[2]

А.И. Маликов, И.М. Фатхутдинов (ИММ КазНЦ РАН, КНИТУ-КАИ, Россия, 420111, Казань, К.Маркса, 10)
E-mail: a_i_malikov@mail.ru, imfatkhutdinov@kai.ru

CONTROL OF AN INVERTED PENDULUM ON A CART

A.I. Malikov, I.M. Fatkhutdinov (IME KazSC RAS, KNPTU-KAI, 420111, Kazan, K.Marx str., 10)

Keywords: inverted pendulum, control design, pendulum on a cart, finite time boundedness.

Введение. Рассматривается задача стабилизации перевернутого маятника на тележке [1,2]. Для синтеза управления используется метод инвариантных эллипсоидов и метод дифференциальных линейных матричных неравенств [1-6]. Для компенсации неопределенных возмущений и влияния нелинейностей системы синтезируется управление в виде комбинированной обратной связи по состоянию и возмущениям на основании подхода, представленного в [5]. При этом задача синтеза управления сводится к задаче оптимизации с линейными матричными неравенствами [6] или к задаче оптимизации с дифференциальными линейными матричными неравенствами [7,8]. Для реализации комбинированного управления используется наблюдатель состояния и неизвестных входов. Синтез наблюдателя производится на основе подхода, предложенного в [9,10].

Постановка задачи. Рассматривается задача стабилизации перевернутого маятника, кинематическая схема которого представлена на рис.1.

При построении математической модели приняты следующие допущения:

- массы сосредоточены;
- сопротивление среды и сухое трение учитываются как неопределенные возмущения;
- вязкое трение учитывается пропорционально скорости движения с коэффициентами B_x,B_θ.

Математическая модель системы представлена в виде уравнений Лагранжа второго рода. В качестве обобщенных координат для рассматриваемой системы с двумя степенями свободы приняты $\theta(t)$ – угол отклонения звена маятника и $x(t)$ – положение тележки.

[2] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан (проект 17-41-160814 р_а).

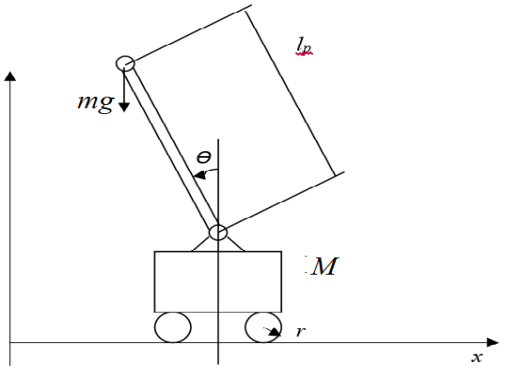

Рис. 1. Перевернутый маятник на тележке

Уравнения динамики объединенной механической системы маятника и двигателя постоянного тока с зубчатой передачей рассмотрены в работах [1,2] и имеют вид:

$$\begin{aligned}(M+m)\ddot{x} - ml\cos(\theta)\ddot{\theta} &= -ml\sin(\theta)\dot{\theta} + \beta I - B_x\dot{x} - f(x),\\ -ml\cos(\theta)\theta + (ml^2 + I_p)\ddot{\theta} &= mgl\sin(\theta) - B_\theta\dot{\theta} - f_\theta,\end{aligned} \qquad (1)$$

$$L_m\frac{dI}{dt} + IR_m + \beta\dot{x} = V,$$

где $M, m, I_p, l, g, L_m, R_m, K_m, K_g, r$ - параметры маятника и двигателя, $\beta = \dfrac{K_m K_g}{r}$, f_x, f_θ - неопределенные возмущения, ограниченные по норме.

При не учете динамики изменения тока в обмотках двигателя (L_m– мало) данную систему уравнений можно представить в векторно-матричной форме в пространстве состояний с зависимыми от состояния системными матрицами

$$\dot{x} = A(x)x + B_1(x)u + D_1(x)w_1, \qquad (2)$$

$$y = C_y x + D_2 w_2, \qquad (3)$$

где $x = (x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})^T \in R^n$– вектор состояния, $w_1(t) = (f_x, f_\theta)^T \in W_r \subset R^r$ – вектор внешних неопределенных возмущений, $w_2(t) \in R^q$ вектор погрешностей измерений, $y \in R^l$ – вектор измеряемого выхода, $A(x) \in R^{n\times n}, B_1(x) \in R^{n\times m}, D_1(x) \in R^{n\times r}$ $C_y \in R^{l\times n}$, $D_2 \in R^{l\times h}$ – матрицы с непрерывными и ограниченными элементами при всех $t \in [t_0, T]$, $T > 0$ – заданная константа. Матрицы $A(x), B_1(x), D_1(x)$ определяются как в [1], а C_y, D_2 имеют вид:

$$C_y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\ D_2 = \begin{bmatrix}0{,}05 & 0\\ 0 & 0{,}05\end{bmatrix}$$

Уравнение (2) перепишем в виде:

$$\dot{x} = Ax + B_1 u + E_1 \nu, \tag{4}$$

где $\nu \in R^p$ – приведенный вектор неопределенных возмущений и нелинейностей (неизвестных входных воздействий),

$$E_1 \nu(t) = D_1(x)w + (A(x) - A)x + (B_1(x) - B_1)u, \tag{5}$$

A,B_1 – матрицы линеаризованной относительно верхнего неустойчивого положения равновесия системы:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-(ml^2 + I_p)(\beta^2 / R_m + B_x)}{D_0} & \dfrac{(ml)^2 g}{D_0} & \dfrac{-mlB_\theta}{D_0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{-ml(\beta^2 / R_m + B_x)}{D_0} & \dfrac{(M+m)mgl}{D_0} & -\dfrac{(M+m)B_\theta}{D_0} \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{(ml^2 + I_p)\beta}{(D_0 R_m)} \\ 0 \\ \dfrac{ml\beta}{(D_0 R_m)} \end{bmatrix}, \; E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; D_0 = mMl^2 + (M+m)I_p \neq 0.$$

Предполагается $l \geq p$ (количество измеряемых компонент вектора выхода y не меньше количества компонент вектора неизвестных входов ν, пара (A,B_1) – управляема (стабилизируема), пара (A,C_y) – наблюдаема (детектируема). Возмущения являются ограниченными по L_∞ норме функциями вместе со своими производными по времени:

$$W = \{\nu : \|\nu(t)\|^2 \leq 1 \text{ и } \|\dot{\nu}(t)\|^2 \leq 1\}$$

В [4] для компенсации внешних возмущений предложено использовать регулятор в виде комбинированной обратной связи по состоянию и возмущению

$$u = Kx + K_1 \nu, \quad K \in R^{m \times n}, K_1 \in R^{m \times p}, \tag{6}$$

причем мгновенные значения компонент вектора возмущений $\nu(t)$ предполагаются известными в текущий момент времени t. Для рассматриваемой системы будем также искать управление в форме комбинированной линейной обратной связи (6), которая стабилизирует замкнутую систему (2),(3) и подавляет воздействие неизвестных возмущений $\nu(t)$. Чтобы реализовать такой регулятор при измерении только части координат состояния и отсутствии информации о текущих значениях приведенного вектора

неопределенных возмущений и нелинейностей потребуется синтезировать наблюдатель состояния и неизвестных входных воздействий.

Синтез комбинированного регулятора. Предложенный в [5] способ синтеза регулятора в виде комбинированной обратной связи используется для рассматриваемой системы. Задача определения коэффициенты усиления K, K_1 сводится к задаче минимизации следа матрицы инвариантного эллипсоида ограничивающего выход замкнутой системы $z = Cx + B_2Kx$, где $C \in R^{s\times n}, B_2 \in R^{s\times m}$ – заданные матрицы.

Определение 1. Эллипсоид

$$E(P) = \{x \in R^n : x^T P^{-1} x \le 1\}, P > 0,$$

называется инвариантным для системы (2),(3), если условие $x(0) \in \varepsilon_x$ влечет $x(t) \in E(P)$ для всех $t \ge 0$.

Теорема 1. [4]. Пусть существует решение $\hat{P}, \hat{Y}, \hat{K}_1, \hat{H}$ задачи

$trH \to \min$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\mathrm{T}} + B_1Y + Y^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}} + \alpha P & E_1 + B_1K_1 \\ E_1 + K_1^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}} & -\alpha I \end{pmatrix} < 0, \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} CPC^{\mathrm{T}} - H + B_2YC^{\mathrm{T}} + CY^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} & B_2Y \\ Y^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} & -P \end{pmatrix} < 0, \quad (8)$$

относительно матричных переменных $P \in R^{n\times n}, Y \in R^{p\times m}, H \in R^{s\times s}$, $K_1 \in R^{p\times m}$ и скалярного параметра $\alpha > 0$.

Тогда комбинированная обратная связь $u = \hat{Y}\hat{P}^{-1}x + \hat{K}_1\nu$ стабилизирует систему (2),(3), а матрица $\hat{H}$ определяет ограничивающий эллипсоид для выхода z замкнутой системы с x_0=0.

Синтез наблюдателя, обеспечивающего на конечном интервале ограниченность относительно заданных множеств ошибки оценивания. Наблюдатель полного порядка для оценки вектора состояния $x(t)$ и вектора неизвестных входов $\nu(t)$ строится в виде [9,10]

$$\dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x} + B(t)u + E_1(t)\hat{v}(t) + L_1(t)(y - \hat{y}),\ \hat{x}(t_0) = 0,$$

$$\dot{\hat{v}} = L_2(t)[y - \hat{y}],\ \hat{v}(t_0) = 0,\ \hat{y} = C_y(t)\hat{x}, \quad (11)$$

где матрица $L(t)=\begin{bmatrix} L_1(t) \\ L_2(t) \end{bmatrix}$ коэффициентов усиления наблюдателя будет выбираться из условия получения требуемого эволюционирующего во времени эллипсоида $E(S(t))$, ограничивающего ошибку оценивания $\varepsilon = \begin{pmatrix} (x-\hat{x})^{\mathrm{T}} & (\nu-\hat{\nu})^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ на рассматриваемом интервале $[t_0, T]$.

Введем расширенные векторы $x_p=[x^{\mathrm{T}}, \nu^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $\hat{x}_p=[\hat{x}^{\mathrm{T}}, \hat{\nu}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ и запишем уравнение наблюдателя (11) в виде:

$$\dot{\hat{x}}_p = A_p(t)\hat{x}_p + B_p(t)u + \Phi(t)\varphi(\hat{x}) + L(t)(y - C_p(t)\hat{x}_p), \tag{12}$$

где приняты обозначения:

$$C_p(t)=[C_y(t), 0_{l\times p}], A_p(t)=\begin{bmatrix} A(t) & E_1(t) \\ 0_{p\times n} & 0_{p\times p} \end{bmatrix}, \; B_p(t)=\begin{bmatrix} B(t) \\ 0_{p\times m} \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнение для ошибки $\varepsilon = x_p - \hat{x}_p$ будет иметь вид

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x}_p - \dot{\hat{x}}_p = [A_p(t) - L(t)C_p(t)]\varepsilon_p + [D_p(t) - L(t)D_2(t)]w(t) + G\dot{\nu}, \tag{13}$$

где $D_p(t)=\begin{bmatrix} D_1(t) \\ 0_{p\times r} \end{bmatrix}$, $G=\begin{bmatrix} 0_{n\times p} \\ I_p \end{bmatrix}$.

Определение 2 [9]. Наблюдатель (12) обеспечивает на заданном интервале $[t_0, T]$ ограниченность ошибки оценивания относительно заданных множеств $(E(S_0), E(S(t)))$ если для всех $\varepsilon_0 \in E(S_0)$ существуют на $[t_0, T]$ решения $\varepsilon(t)=\varepsilon(t, t_0, x_0)$ системы (13) с начальными данными $\varepsilon(t_0)=\varepsilon_0$, и для них имеет место $\varepsilon(t, t_0, x_0) \in E(S(t))$ при всех $t \in [t_0, T]$, $w(t) \in W$, $\nu(t) \in \Sigma$.

Теорема 2 [9]. *Для того чтобы наблюдатель* (11) *обеспечил на заданном интервале* $[t_0, T]$ *ограниченность ошибки оценивания относительно заданных множеств* $(E(S_0), E(S(t)))$ ($S_0, S(t)$ *- заданные положительно определенные матрицы, причем* $S_0 = \mathrm{diag}\{S_{x0}, S_v\}, S_{x0} - n\times n, S_v - p\times p$ *- положительно определенные матрицы*) *достаточно, чтобы при некоторых* $\alpha_1, \alpha_2 > 0, \beta > 0$ *существовали при всех* $t \in [t_0, T]$ *симметрическая матрица* $P(t)$ *и матрица* $L(t)$ *такие, что выполняются следующие матричные неравенства:*

$$dP/dt + (A_p - LC_p)^{\mathrm{T}}P + P(A_p - LC_p) + (\alpha_1 + \alpha_2)P + \\ + \frac{1}{\alpha_1}P(D_p - LD_2)(D_p - LD_2)^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\alpha_2}PGG^{\mathrm{T}}P < 0, \tag{14}$$

$$P(t_0) \le S_0^{-1},\ P(t) \ge S^{-1}(t). \qquad (15)$$

Замечание 1. Нелинейное дифференциальное матричное неравенство (14) при фиксированных $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ с учетом замены $Y = PL$ и леммы Шура сводится к следующему дифференциальному линейному матричному неравенству относительно переменных P и Y

$$\begin{bmatrix} dP/dt + A_p^{\mathrm{T}}P + PA_p - C_p^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} - YC_p + (\alpha_1+\alpha_2)P & PD_p - YD_2 & PG \\ D_p^{\mathrm{T}}P - D_2^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & -\alpha_1 I & 0 \\ G^{\mathrm{T}}P & 0 & -\alpha_2 I \end{bmatrix} < 0. \qquad (16)$$

Таким образом, задача синтеза наблюдателя состояния на конечном интервале $[t_0, T]$ со свойством ограниченности ошибки оценивания относительно заданных множеств $(E(S_0), E(S(t))$ сводится к следующей задаче оптимизации с ДЛМН:

Минимизировать $\mathrm{tr}(Q(t))$ при ограничениях (16), (15) и

$$\begin{bmatrix} Q(t) & I \\ I & P(t) \end{bmatrix} \ge 0. \qquad (17)$$

Здесь оптимизация проводится по матричным переменным $Q(t), P(t), Y(t)$ и скалярной переменной $\beta(t)$. По найденному решению матрица $L(t)$ определится $L = P^{-1}Y$.

Отметим, что решение задачи оптимизации с дифференциальными линейными матричными неравенствами путем их дискретизации на рассматриваемом интервале $[t_0, T]$ по методу Эйлера может быть сведено к совокупности взаимосвязанных задач оптимизации в дискретные моменты времени с ограничениями в виде ЛМН. При этом могут быть применены существующие программные средства полуопределенного программирования (Robust control toolbox пакета Matlab, CVX и др.).

Результаты решения задачи стабилизации перевернутого маятника. Расчеты проводились при значениях параметров представленных в табл. 1.

На основе теоремы 1 в пакете Matlab было получено решение задачи оптимизации с ЛМН (7), (8) и коэффициенты регулятора в виде комбинированной обратной связи:

K=[51,3896 86,9775 -497,7208 -124,7498], K_1=[8,3392 -5,8766].

Для системы синтезированы наблюдатель состояния и неизвестных входов по рассмотренным выше способам. Путем численного решения задачи оптимизации с ЛМН (15)–(17) получен наблюдатель с постоянной матрицей

$$L^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 40{,}17 & 61{,}55 & 2{,}99 & 57{,}00 & 99{,}70 & -3{,}41 \\ 3{,}86 & 66{,}86 & 88{,}77 & 771{,}29 & -6{,}15 & 69{,}35 \end{bmatrix}.$$

Таблица 1

Значения параметров системы с перевернутым маятником

Переменная	Размерность	Значение
M	кг	0,455
m	кг	0,210
l	м	0,3048
I_p	кг м^2	0,02
R	ом	2,6
K_m	Nm/A	0,00767
r	м	0,00635
K_g	-	3,7

Результаты моделирования системы с полученным регулятором и наблюдателем без учета возмущений представлены на рисунках 2-3. Начальные условия были заданы следующим образом: $x_0 = (0\ 0\ 0{,}85\ 0)^{\mathrm{T}}, \hat{x}_0 = (0\ 0\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}$. На рис. 2, сплошной линией показаны изменения координат состояния, а штриховой линией их оценки. Оценки приведенного вектор неопределенных возмущений и нелинейностей $\nu_1(t)$ и $\nu_2(t)$ представлены на рис. 3.

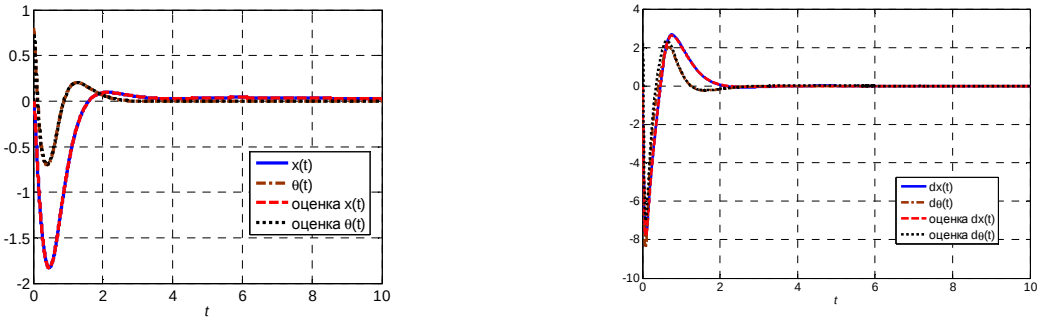

Рис. 2. Изменения координат состояния и их оценки

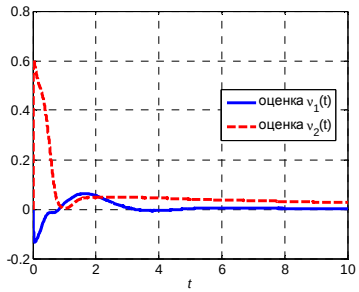

Рис. 3. Оценки неизвестных входов

Результаты моделирования системы с наблюдателем и комбинированным регулятором по состоянию наблюдателя при действии возмущений представлены на рисунках 4-5. При моделировании внешние возмущения задавались в виде $w_1(t) = r_1 * 0.2 * (\sin(2t) + \cos(t)); w_2(t) = r_2 * \cos(r) * \sin 3t)/10$, где амплитуды r_1, r_2 выбирались из диапазона [-0,5;0,5] с помощью датчика случайных чисел. Рис. 3 показывает изменения координат состояния и их оценки при действии возмущений. На рис. 4 представлены оценки компонент приведенного вектора неопределенных возмущений и нелинейностей (неизвестных входов).

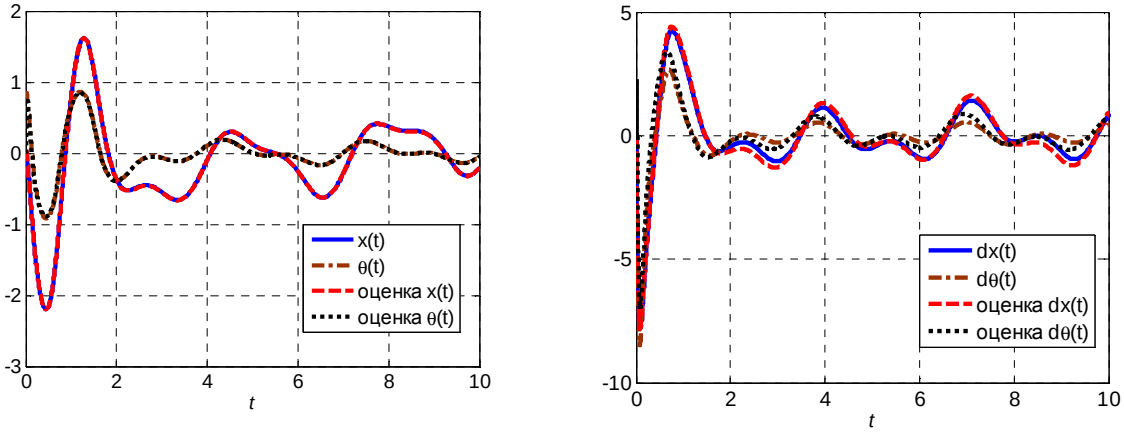

Рис. 4. Изменения координат состояния и их оценки при наличии возмущений

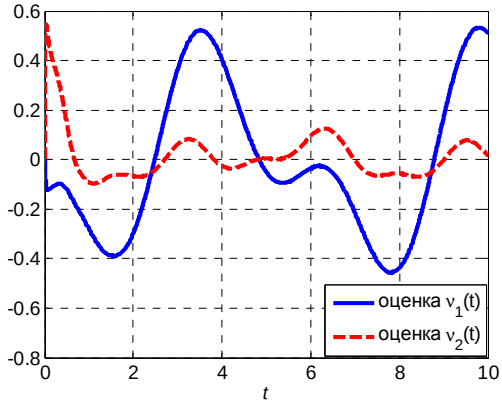

Рис. 5. Оценки неизвестных входов при наличии возмущений

Таким образом, полученный регулятор в виде комбинированный обратной связи по состоянию и приведенному вектору неопределенных возмущений и нелинейностей, восстанавливаемых с помощью наблюдателя, обеспечивает стабилизацию перевернутого маятника с требуемой точностью, в том числе при действии возмущений. Следует отметить, что полученные с использованием наблюдателя, обеспечивающего ограниченность ошибки оценивания, оценки как координат состояния, так и неизвестных входов достаточно точно воспроизводят их поведение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галялтдинова Н.И., Маликов А.И. Управление роботом с перевернутым маятником //Международная научно-практическая конференция "Поиск эффективных решений в процессе создания и реализации научных разработок в российской авиационной и ракетно-космической промышленности".Казань. 2014. Том. II. С. 399–403.

2. Маликов А.И., Евстифеев А.Е. Управление двухступенчатым перевернутым маятником на тележке // Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева, 2010. №3. С. 182–188.

3. Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автомат. и телемех., 2007. № 3. С. 106–125.

4. Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Щербаков П. С., Нелинейные системы с ограниченными или мультипликативными возмущениями // Проблемы устойчивости и управления, Сб. научн. ст., посв. 80-летию академика В. М. Матросова. М. Физматлит. 2013. С. 271–299.

5. ХлебниковМ. В. Управление линейными системами при внешних возмущениях: комбинированная обратная связь // Автомат. и телемех., 2016. № 7. С. 20–32.

6. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.

7. Маликов А. И. Метод матричных систем сравнения в анализе и синтезе систем управления с неопределенностями //Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды X Международной Четаевской конференции. Т. 2. С. 360–370.

8. Маликов А. И. Оценивание состояния и стабилизация непрерывных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями // Автомат.и телемех., 2016. № 5.С. 19–36.

9. Маликов А.И. Синтез наблюдателей состояния для нелинейных Липшицевых систем с неопределенными ограниченными по L_∞ норме возмущениями // Вестник КГТУ им.А.Н.Туполева. 2016. №3. С. 128–140.

10. Маликов А.И. Синтез наблюдателей состояния по результатам измерений для нелинейных Липшицевых систем с неопределенными возмущениями // Автомат.и телемех., 2017. №5. С.16–35.

СОДЕРЖАНИЕ

Роднищев Н.Е. Необходимые условия идентификации параметров и управления стохастических систем с ограничениями типа неравенств 3
Рыбаков К.А. О применении спектрального метода в задачах оптимального управления динамическими системами с ограничениями 10
Сабиров М.И., Виноградов С.С., Зиннуров Н.Р. Разработка универсальной беспилотной авиационной платформы вертикального взлета-посадки мультироторного типа повышенной грузоподъемности 20
Сейфуллаев Р.Э. Сетевое управление гамильтоновыми системами на примере управления энергией маятника 29
Сиразетдинов Р.Т., Марков Д.С. Многопродуктовая модель производства на основе регистров бухгалтерского учета 37
Сомов Е.И., Бутырин С.А. Наведение и управление ориентацией информационного спутника в начальных режимах 41
Сомов Е.И., Бутырин С.А. Анализ движения изображения в космическом телескопе землеобзора при сканирующей съемке 52
Сомов С.Е. Широтно-импульсное управление спутником землеобзора при начальной остановке вращения и удержании на солнечно-синхронной орбите 65
Сомова Т.Е. Векторные сплайновые законы наведения и компьютерная технология полетной поддержки системы управления ориентацией спутника землеобзора 76
Сорокина Н.В. Численно-аналитическое решение задачи о транспортировке вязкой слабосжимаемой жидкости по трубопроводу при нестационарных краевых условиях 87
Суркин Н.Р. Организация управления движением беспилотных транспортных средств: двухуровневый принцип 93
Тахтенкова Л.С. О стабилизации движения спутника при случайных возмущениях 97
Терентьев С.А. Управление, обеспечивающее динамическое подобие технической системы 101
ТукмеевА.Н., Маликов А.И. Управление синхронным генератором в электроэнергетической системе при резком изменении нагрузки 106
Тутубалин П.И., Комиссарова Е.М. Вопросы разработки автоматизированных систем по бронированию и продаже авиабилетов 116
Файзутдинов Р.Н., Спиридонов И.О., Маханько А.А. Многокритериальный синтез системы стабилизации линии визирования оптического прибора 122

Филиппова Т.Ф., Матвийчук О.Г. К задаче оценивания многозначных движений управляемой системы с неопределенностью и фазовыми ограничениями 127
Французова Г.А. О некоторых свойствах систем экстремального регулирования, основанных на методе локализации 137
Фуртат И.Б. Управление с компенсацией возмущений и помех измерения 144
Хрусталев М.М. Слабая инвариантность стохастических систем диффузионного типа 154
Хусаинов Р.Р., Климчик А.С., Магид Е.А., Сагитов А.Г. Управление движением человекоподобного робота на основе операционной системы ROS 161
Чернышев К.Р. Статистическая линеаризация на основе энтропии Цаллиса..... 169
Шашихин В.Н. Робастная стабилизация систем с параметрическими возмущениями 178
Шориков А.Ф., Булаев В.В., Горанов А.Ю. Формализация и общая схема решения задачи оптимального программного управления процессом стабилизации движения ракеты-носителя 185
Шориков А.Ф., Калёв В.И. Оптимизация программного терминального управления расходом топлива жидкостной ракеты-носителя 195
Шулюмов Е.А., Бусыгин А.А. Алгоритм анализа критериев данных снс для обеспечения автоматической начальной выставки инерциальной навигационной системы с заданной точностью для БЛА 204
Юмашев А.Ю. Система автоматического управления подвеской автомобиля 207
Перегудова О.А. Об управлении манипуляционными роботами с упругими сочленениями и с неполным измерением 216
Руденко Е.А. Оптимальный дискретный логико-динамический фильтр-предиктор с конечной памятью 221
Зайдуллин С.С., Вдовичев Н.М., Габитов Р.И. Задача оптимального управления передвижением в системе автономных такси 232
Карачанская Е.В. Программные управления с вероятностью 1 для систем со случайными возмущениями 242
Маликов А.И., Фатхутдинов И.М. Управление перевернутым маятником на тележке..... 249

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ

ТРУДЫ XI МЕЖДУНАРОДНОЙ ЧЕТАЕВСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

ТОМ 3

Секция 3. УПРАВЛЕНИЕ

Часть III

13 – 17 июня 2017 г.

Статьи воспроизводятся с оригиналов, представленных авторами, и Издатель не несет ответственности за содержание статей

Ответственный за выпуск В.Н. Милёхин
Компьютерная верстка – Н.Н. Семёнова
Дизайн обложки – Н.Н. Семёнова

Подписано в печать 05.06.17.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 15,1. Тираж 300 экз. Заказ Б 37.

Издательство КНИТУ-КАИ
420111, Казань, К. Маркса, 10

ISBN 978-5-7579-2233-1