

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ»
Институт компьютерных технологий и защиты информации

Методические указания
к выполнению практических работ
по дисциплине
"Математическая логика и теория алгоритмов"

Казань

Оглавление

Содержание занятий	3
Методические указания по решению задач (помощь)	10
Перечень слайдов для компьютерной презентации	25
Литература	26

1. Содержание занятий.

Для каждого занятия предлагаются номера задач (упражнений) для решения их по пособию [2]. Дополнительные задачи можно брать из любых источников, например, из [1-11]. Преподаватель может строить занятия по произвольным задачам из [1-11] или из других источников, но тематика должна соответствовать указанной, взятой из программы дисциплины.

Практическое занятие № 1 Язык логики высказываний. Построение и интерпретация формул логики высказываний. Анализ общезначимости, выполнимости, противоречивости формул. Решение задач из логики высказываний [2].

Привести определение высказывания. Решить задачу № 1 (помощь, см. в разделе помощь). Сравнить с ответами:

а), б), в), г), з) – высказывания;

д), е), ж), и) – не являются высказываниями.

Решить задачу № 3 (помощь). Сравнить с ответами:

а) $A \& (\neg B)$;

б) $B \& (\neg A)$;

в) $(\neg A) \& (\neg B)$;

г) $A \vee B$;

д) $(A \& (\neg B)) \vee ((\neg A) \& B)$;

е) $(\neg A) \& (\neg B)$;

ж) $(\neg A) \& (\neg B)$;

з) $\neg (A \& B)$;

и) $A \equiv B$.

При решении задач обратить внимание на различие между «или» в смысле «хотя бы одно» и «или» в смысле «либо-либо». Решить задачи № 4, 6, 9.

Решения последней задачи сравнить с ответами:

а), б), в) - не являются пропозициональными формами,

г), д), е) – пропозициональные формы.

Самостоятельно составите таблицы истинности для пропозициональных форм (формул логики высказываний): $(\neg A)$, $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$ и $A \equiv B$. Решить задачу № 11(помощь). Сравнить с ответами:

- а) $A=И, B=И$;
- б) $A=И, B=И$;
- в) $A=Л, B=И, C=Л$;
- г) $A=Л, B=И; A=Л, B=Л$;
- д) $A=Л, B=И, C=Л; A=И, B=И, C=И$;
- е) $A=Л, B=И, C=И$;
- ж) $A=И, B=И, C=Л$;
- з) $A=Л, C=И, B=Л; A=Л, B=И, C=И$;
- и) $A=Л, C=Л, B=И$;
- к) $A=Л, B=И, C=Л$;
- л) $A=И, B=И, C=И$;
- м) $A=И, B=И, C=Л$.

Определить истинностную функцию и выяснить:

- а) сколько строк имеет таблица истинности истинностной функции зависящей от n переменных?
- б) каково число различных истинностных функций от n переменных?
- с) каково число различных истинностных функций от n переменных принимающих на наборах $(Л, Л, \dots, Л)$ и $(И, И, \dots, И)$ одинаковые значения?

Решить задачу № 12 а) – в). Сравните с ответом: результирующие столбцы содержат только «И», т.е. формы являются тавтологиями. Решить задачу № 17 (1-а-в-(помощь)) и сравнить с ответами:

- а) и б) – скобок нет, в) $A \Rightarrow B \Rightarrow (C \Rightarrow \neg C)$.

Решить задачу 17 2-а, б и сравнить с ответами:

- а) $(A \equiv ((B \vee (\neg C) \& A)) \Rightarrow (\neg A))$;
- б) $((\neg B) \Rightarrow B) \Rightarrow C \equiv (C \& D)$.

Сколькими способами можно расставить скобки в следующих выражениях, чтобы получались пропозициональные формы:

$$A \Rightarrow \neg B \Rightarrow C; \neg A \Rightarrow B \& C; A \Rightarrow \neg B \& D \vee C.$$

Записать основные равносильности между пропозициональными формами. Решить задачу №18 а) - е) (помощь). Сравнить с ответами:

- | | |
|----------------------|-----------------|
| а) A ; | б) $A \vee B$; |
| в) $\neg A \vee B$; | г) $A \& B$; |
| д) $\neg A \& B$; | е) A . |

При проведении практического занятия можно использовать слайды № 1 и 2 компьютерной презентации.

Домашнее задание. Задачи № 2, 7, 12 г)-е), 17 1- г)-е), 2- г)-е), 19, 33 д)-е) из логики высказываний.

Практическое занятие № 2 Язык логики высказываний. Построение и интерпретация формул логики высказываний. Равносильные преобразования формул. Решение задач по логике высказываний [2].

Выпишите самостоятельно основные равносильности между пропозициональными формами (формулами логики высказываний). Сравните свойства логических операций со свойствами алгебраических операций на множестве чисел. Решить задачу № 18 (ж - м) и сравнить с ответами:

- ж) $\neg B \vee B$; з) $A \vee \neg A$; и) $A \vee \neg A$; к) $\neg C \vee C$; л) $C \vee \neg C$; м) A .

Решить задачу № 31 и сравнить с ответами:

- а) A ; б) $\neg A \vee A$; в) B ; г) $\neg B \vee B$;
 д) A ; е) $\neg A \vee A$; ж) A ; з) $\neg A \vee A$;
 и) $\neg A \vee A$; к) A ; л) $\neg A \vee A$.

Задача № 33 (а - в) (помощь). Сравнить с ответами:

- а) $A \vee B$; б) $C \& (A \vee \neg D \vee \neg E)$; в) D .

Запишите соотношения между пропозициональными связками. Задачи № 29, 30, 34.

Запишите алгоритмы нахождения д.н.ф. и к.н.ф., а также с.д.н.ф. и с.к.н.ф. Задача № 37 (а, б) (помощь). Сравнить с ответами:

- а) д. н. ф.: $\neg A \vee A \& \neg B \vee B$
 к. н. ф.: $(\neg A \vee B \vee A) \& (\neg A \vee B \vee \neg B)$;
 б) д. н. ф.: $\neg A \& \neg C \vee \neg A \& D \vee B \& \neg C$;

к. н. ф.: $(\neg A \vee B) \& (\neg C \vee D) \vee (\neg A \vee \neg C)$.

Решить задачу № 38 (а, б) (помощь). Сравнить с ответами:

а) д. н. ф.: $\neg A \& \neg B \& \neg C \vee A \& B \vee A \& C$

к. н. ф.: $(\neg A \vee B \vee C) \& (A \vee \neg B) \& (A \vee \neg C)$

форма выполнима, но не является тавтологией;

с. д. н. ф.: $\neg A \& \neg B \& \neg C \vee A \& \neg B \& C \vee A \& B \& \neg C \vee A \& B \& C$

с. к. н. ф.: $(A \vee B \vee \neg C) \& (A \vee \neg B \vee C) \& (A \vee \neg B \vee \neg C) \& (\neg A \vee B \vee C)$;

б) д. н. ф.: $\neg A \& C \vee \neg B \& C$

к. н. ф.: $(\neg A \vee \neg B) \& C$

форма выполнима, но не является тавтологией

с. д. н. ф.: $\neg A \& B \& C \vee \neg A \& \neg B \& C \vee A \& \neg B \& C$

с. к. н. ф.: $(A \vee B \vee C) \& (A \vee \neg B \vee C) \& (\neg A \vee B \vee C) \& (\neg A \vee \neg B \vee C) \& (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$.

Обозначим пропозициональную форму пункта а) этого упражнения через **A**, а форму пункта б) - через **B**. Используя с.д.н.ф. форм **A** и **B**, построить с.д.н.ф. для $A \vee B$, $A \& B$ и для $A \Rightarrow B$.

При проведении практического занятия можно использовать слайды № 1 и 2 компьютерной презентации.

Домашнее задание. Задачи № 25, 33 и)-м), 37 в)-д), 38 в)-д) по логике высказываний.

Практические занятия № 3 Логика предикатов. Формулы логики предикатов, интерпретация. Логически общезначимые, выполнимые формулы. Равносильные преобразования формул логики предикатов.

Решение задач из логики предикатов [2]. Задача № 1 (помощь). Решить задачу № 2 а)-г) (помощь); сравнить с ответами:

а) $\forall x \exists y (x + y = 5)$;

б) $\forall y \exists x (y - x < 0)$;

в) $\forall x \exists y ((x \neq 0) \& (x/y = 2))$;

г) $\forall x \forall y (x + y = y + x)$.

Решить задачу № 3 (1 – 6) и сравнить ответами:

1) $\forall t \exists x Z(x, t),$

2) $\exists t \forall x \neg Z(x, t),$

3) $\exists x \forall t \neg Z(x, t),$

4) $\forall x \exists t Z(x, t),$

5) $\forall x \forall t (Z(x, t) \Rightarrow P(x, t)),$

6) $\forall x \forall t \exists t^* (Z(x, t) \Rightarrow Q(t, t^*) \& P(x, t^*)).$

Решить задачу № 8; сравнить с ответами. Пусть T_P – обозначает область истинности предиката Р. Тогда имеем соответственно:

а) $T_P = \bar{T}_A;$

б) $T_P = T_A \cap T_B;$

в) $T_P = T_A \cup T_B;$

г) $T_P = \bar{T}_A \cup T_B;$

д) $T_P = (\bar{T}_A \cup T_B) \cap (\bar{T}_B \cup T_A).$

Решить задачу № 11. Сравните с ответами:

а) $\forall x A(x),$

б) $\forall x A(x),$

в) $\forall x A(x),$

г) $\exists x A(x),$

д) $\neg \forall x A(x),$

е) $\neg \forall x A(x),$

ж) $\forall x \neg A(x),$

з) $\neg \exists x A(x),$

и) $\neg \exists x A(x),$

к) $\exists x \neg A(x),$

л) $\forall x \neg A(x).$

Решить задачи № 12 (помощь), 9. Решить задачу № 13; сравнить с ответом: только д)- является формулой. Решить задачи № 15, 19 (а, б) (помощь).

Решение задачи 19 сравнить с ответами:

а) выполнима; б) ложна (не выполнима).

Решить задачу № 20 а), б); сравнить с ответами:

а) $P(y) = \forall x A(x, y): P(1) = Л, P(2) = Л, P(3) = И;$

б) $Q(y) = \exists x A(x, y): Q(1) = И, Q(2) = И, Q(3) = И.$

При проведении практического занятия можно использовать слайды № 3 и 4 компьютерной презентации.

Домашнее задание. Задачи № 3 (14-16), 4 (1-5), 7, 10, 14, 19 в)-г) по логике предикатов.

Практическое занятие № 4. Логически общезначимые, выполнимые формулы. Равносильные преобразования формул логики предикатов. Предваренная нормальная форма. Алгоритм ее получения.

Решение задач из логики предикатов [2]. Задачи № 27 (помощь), 28, 29 (помощь), 30, 44, 46 (помощь). Решить задачу № 47 (а – г). Сравнить с ответами:

- а) $\forall x \forall y (\neg A(x) \vee B(y))$,
- б) $\exists x \exists y (\neg A(x) \vee B(y))$,
- в) $\forall x \forall y \forall z \exists v (\neg A(x, y) \vee \neg B(y, z) \vee C(x, y, v))$,
- г) $\forall x \exists y (\neg A(x) \vee B(x, y))$.

При проведении практического занятия можно использовать слайды № 5, 6 и 7 компьютерной презентации.

Домашнее задание. Задачи № 21, 26, 31, 47 д)-ж) по логике предикатов.

Практическое занятие № 5. Проблема дедукции, логическое следование в логике высказываний. Метод резолюций в логике высказываний, стратегии метода резолюций.

Решение задач из третьей главы пособия [2]. Решить задачу № 1 (помощь). Задачи № 2, 4, 5 (а - ж) (помощь), 10 (помощь), 11, 12.

Домашнее задание. Задачи № 3, 5 з)-м), 13 по логическому следствию и методу резолюций.

Практическое занятие № 6. Сколемовская стандартная форма. Унификация. Алгоритм построения наиболее общего унификатора. Метод резолюций в логике предикатов.

Решение задач из третьей главы пособия [2]. Решить задачи № 14, 15 (помощь), 17. Решение задачи 17 сравнить с ответами:

- а), б), в), е) – не унифицируемы;
- г), д), ж) – унифицируемы.

Задачи № 19 (помощь), 20, 24 (1, 3, 5) (помощь).

При проведении практического занятия можно использовать слайд № 8 компьютерной презентации.

Домашнее задание. Задачи № 16 а)-г), 18, 21, 24 (2, 4) по логическому следствию и методу резолюций.

Практическое занятие № 7. Теория алгоритмов. Нормальные алгоритмы и машины Тьюринга.

Решение задач по теории алгоритмов по [2]. Решить задачу № 1 (помощь). Сравнить с ответом:

алгоритм применим только к слову $P=*1*1$ и в результате получаем слово $1*1$.

Решить задачу № 2. Сравнить с ответом:

алгоритм применим только к слову $P=11111$ и в результате получаем слово 111111 .

Решить задачи № 3, 6. Решение задачи 6 сравнить с ответом:

$$A = \begin{cases} \alpha \rightarrow x \alpha, x \in A, \\ y \alpha \rightarrow \bullet A, y \in A, \\ A \rightarrow \alpha \end{cases}$$

Алгоритм A является алгоритмом под алфавитом A .

Задачи № 7, 10, 14, 17 (помощь), 26 (помощь). Решение задачи 26 сравнить с ответом:

во всех случаях машина применима и получает результат: 1) вва, 2) свв, 3) св, 4) ас.

Решить задачи № 27, 35, 37.

При проведении практического занятия можно использовать слайды № 9 и 10 компьютерной презентации.

Домашнее задание. Задачи № 4, 5, 8, 13 г), 15, 29 по теории алгоритмов и решить по 1-2 задачи (выборочно) по предыдущим разделам.

Занятие № 8.

Рейтинговая контрольная работа (максимальное число баллов 24).

Контрольная работа выполняется по всем пройденным темам.

Практическое занятие № 9. Исчисление высказываний как формальная система. Поиск выводимости формул в исчислении высказываний.

Решение задач главы дедуктивные теории из [2]. Рассмотреть и проанализировать доказательства леммы 4.2 и 4.3 в § 8-11 пособия [2]. Задачи № 1 (помощь), 2, 3, 5 (1), 6 (помощь).

2. Методические указания по решению задач (помощь)

Приводятся некоторые рекомендации по решению задач (упражнений). Все упражнения из пособия [2].

Занятие 1. Упражнение 1 главы 1.

Высказывание – это повествовательное предложение, которое либо истинно, либо ложно. В пункте *a*) предложение « $2 \cdot 2 = 4$ » истинно, следовательно, является высказыванием. В пункте *e*) имеем: « $3x = 2$ ». В этом случае нельзя определить истинно оно либо ложно, ибо значение x не задано. Следовательно, « $3x = 2$ » не является высказыванием. Аналогично исследуется и другие предложения.

Упражнение 3 главы 1.

Очевидно, что предложение пункта *a*) можно записать в виде: $A \& (\bar{B})$; предложение пункта *б*) в виде $B \& (\bar{A})$; предложение пункта *в*) в виде: $(\bar{A}) \& (\bar{B})$. Для решения пункта *д*) выпишем все варианты, кто студент, кто не студент:

$$\begin{aligned} & A \& B, \\ & (\bar{A}) \& B, \\ & A \& (\bar{B}), \end{aligned}$$

$$(\bar{A}) \& (\bar{B})$$

Ясно, что предложению пункта δ) соответствует запись: $((\bar{A}) \& B) \vee (A \& (\bar{B}))$.

Упражнение 11 главы 1.

Рассмотрим задачу пункта a) $\bar{A} \& B = Л$. Из условия получаем, что $A \& B = И$. Тогда по определению конъюнкции должно быть $A = И$, $B = И$.

В пункте b) $\bar{A} \Rightarrow (\bar{B}) = И$. Тогда $A \Rightarrow \bar{B} = Л$. Импликация ложна только тогда, когда посылка истинна, а заключение ложно, следовательно, $A = И$, $\bar{B} = Л$. В результате $A = И$, $B = И$.

В пункте $ж$) имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} (\bar{A} \& B) \equiv C = И, \\ (C \vee (\bar{A})) = Л. \end{cases}$$

Решение лучше начинать со второго уравнения: $(C \vee (\bar{A})) = Л$. Дизъюнкция ложна, если ложны оба слагаемых, то есть $C = Л$ и $(\bar{A}) = Л$, тогда $A = И$, $C = Л$. Подставив эти значения в первое уравнение системы, получим: $(\bar{И} \& B) \equiv Л = И$. Из него следует, что $((\bar{B}) \equiv Л) = И$. Эквивалентность истинна, если участвующие высказывания принимают одинаковые значения. Тогда, $\bar{B} = Л$, следовательно, $B = И$. Итак, получили, что $A = И$, $B = И$, $C = Л$.

Упражнение 17 главы 1.

Опускаем внешнюю пару скобок, затем скобки для отрицания, потом последовательно для \vee , \Rightarrow , \equiv . В пунктах a) и b) можно опустить все скобки, а для $в$) останется одна пара скобок: $A \Rightarrow B \Rightarrow (C \Rightarrow \bar{C})$.

Восстановление скобок осуществляем сначала для $\bar{}$ двигаясь слева направо, затем для $\&$, тоже просматривая слева направо, потом, аналогичным образом, для дизъюнкции, потом для \Rightarrow и, наконец, для \equiv и расставляем внешнюю пару скобок.

Упражнение 18 главы 1.

Просмотрите важнейшие пары равносильных пропозициональных форм, то есть соотношения 1-20 из § 6 [2]. Отметим, что в 1-20 буквы A , B и C могут быть заменены произвольными формами A , B и C соответственно.

Для пункта $a)$ задачи, используя закон поглощения (соотношение 19), сразу получим, что $A \& (A \vee B) \sim A$. Далее, используя соотношение (18) получим: $A \vee A \& B \sim A$. Ясно, что дальнейшее упрощение невозможно.

Для решения задачи пункта $b)$ последовательно используем соотношения 7, 12 и 14: $A \vee \bar{A} \& B \sim (A \vee \bar{A}) \& (A \vee B) \sim T \& (A \vee B) \sim A \vee B$.

Для упрощения формы пункта $e)$ сначала используем соотношения 11 и 10: $A \vee A \vee A \& A \& B \& C \sim A \vee A \& A \& B \& C \sim A \vee A \& B \& C$. Затем используем ассоциативность, то есть соотношение 4): $A \vee (A \& B) \& C \sim A \vee A \& (B \& C)$. Теперь используем закон поглощения (соотношение 18), полагая, что в нем переменная B заменена формой $B \& C$. В результате имеем: $A \vee A \& (B \& C) \sim A$.

Занятие 2. Упражнение 33 главы 1.

Для формы пункта $a)$ раскрываем скобки, используя закон дистрибутивности (соотношение 6), затем применяем законы идемпотентности, поглощения и противоречия (соотношения 10, 18 и 13):

$$\begin{aligned}
 (A \vee B \vee C) \& (A \vee B \vee \bar{C}) &\sim A \& A \vee A \& B \vee A \& \bar{C} \vee B \& A \vee B \& B \vee B \& \bar{C} \vee C \& A \vee C \& \\
 B \vee C \& \bar{C} &\sim A \vee A \& B \vee A \& \bar{C} \vee A \& B \vee B \vee B \& \bar{C} \vee A \& C \vee B \& C \vee \Pi \sim \\
 &\underbrace{\underbrace{A}_{A}}_{A} \quad \underbrace{B}_{B} \\
 &\sim A \vee B \vee A \& C \vee B \& C \vee \Pi \sim A \vee A \& C \vee B \vee B \& C \vee \Pi \sim A \vee B \vee \Pi \sim A \vee B. \\
 &\quad \underbrace{A}_{A} \quad \underbrace{B}_{B}
 \end{aligned}$$

Для формы пункта $b)$ применяем закон поглощения (соотношение 19):

$$(C \vee D \vee \bar{E}) \& C \& (A \vee \bar{D} \vee \bar{E}) \sim C \& (A \vee \bar{D} \vee \bar{E}).$$

Для формы пункта в) применяем законы коммутативности, ассоциативности и поглощения (соотношения 2, 4 и 18):

$$D \vee (E \& D \& C) \sim D \vee (D \& E \& C) \sim D \vee (D \& (E \& C)) \sim D.$$

Упражнение 37 главы 1.

Для нахождения д.н.ф. для формы A необходимо:

- 1) исключить из A все связки, кроме \neg , $\&$, \vee ,
- 2) добиться, чтобы \neg относилась только к пропозициональным буквам,
- 3) раскрыть скобки по первому дистрибутивному закону.

Используя этот алгоритм, для формы пункта а) имеем:

$$A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \sim \neg A \vee (\neg \neg A \vee B) \vee B \sim \neg A \vee A \& \neg B \vee B$$

В результате получили д.н.ф.

Для получения к.н.ф. нужно:

- 1) исключить из A все связки, кроме \neg , $\&$, \vee ,
- 2) добиться, чтобы \neg относилась только к пропозициональным буквам,
- 3) сгруппировать в скобки, пользуясь вторым дистрибутивным законом.

Используя уже полученный выше результат, для формы пункта а) имеем:

$$\neg A \vee A \& \neg B \vee B \sim \neg A \vee B \vee A \& \neg B \sim (\neg A \vee B \vee A) \& (\neg A \vee B \vee \neg B)$$

Полученная форма будет к.н.ф.

Упражнение 38 главы 1.

Существует два метода нахождения с.д.н.ф. и с.к.н.ф.:

- равносильными преобразованиями,
- с помощью таблиц истинности.

При методе равносильных преобразований для нахождения с.д.н.ф. (с.к.н.ф) находим сначала д.н.ф. (к.н.ф), затем добиваемся выполнения всех условий для с.д.н.ф (с.к.н.ф). Для формы пункта а) имеем следующую

последовательность нахождения с.д.н.ф методом равносильных преобразований:

$$\begin{aligned} A \equiv B \vee C \sim (A \Rightarrow (B \vee C)) \& ((B \vee C) \Rightarrow A) \sim (\bar{A} \vee B \vee C) \& (\bar{B} \vee C \vee A) \sim \\ & (\bar{A} \vee B \vee C) \& (\bar{B} \& \bar{C} \vee A) \sim \\ \sim \bar{A} \& \bar{B} \& \bar{C} \vee \bar{A} \& A \vee B \& \bar{B} \& \bar{C} \vee A \& B \vee C \& \bar{B} \& \bar{C} \vee A \& C \sim \\ \sim \bar{A} \& \bar{B} \& \bar{C} \vee A \& B \vee A \& C. \end{aligned}$$

Последняя форма есть д.н.ф., но второе слагаемое не содержит букву C , а третье – не содержит букву B . Умножаем эти слагаемые на тавтологию, что не изменяет истинностное значение выражения, и раскрываем скобки:

$$\begin{aligned} \bar{A} \& \bar{B} \& \bar{C} \vee A \& B \vee A \& C \sim \bar{A} \& \bar{B} \& \bar{C} \vee A \& B \& (C \vee \bar{C}) \vee A \& C \& (B \vee \bar{B}) \\ \sim \bar{A} \& \bar{B} \& \bar{C} \vee A \& B \& C \vee A \& B \& \bar{C} \vee A \& B \& C \vee A \& \bar{B} \& C. \end{aligned}$$

Второе и четвертое слагаемые одинаковы, оставляя только одно из них, получим с.д.н.ф.:

$$\bar{A} \& \bar{B} \& \bar{C} \vee A \& B \& C \vee A \& B \& \bar{C} \vee A \& \bar{B} \& C.$$

Для получения к.н.ф начинаем с формы полученной ранее и применяем второй закон дистрибутивности:

$$(\bar{A} \vee B \vee C) \& (A \vee \bar{B} \& \bar{C}) \sim (\bar{A} \vee B \vee C) \& (A \vee \bar{B}) \& (A \vee \bar{C})$$

Получили к.н.ф., но не с.к.н.ф., т.к. во втором множителе не хватает буквы C , а в третьем – буквы B . Вводим эти буквы, с помощью добавления противоречия, не изменяя истинностного значения формы. Затем используем второй закон дистрибутивности:

$$\begin{aligned} (\bar{A} \vee B \vee C) \& (A \vee \bar{B}) \& (A \vee \bar{C}) \sim (\bar{A} \vee B \vee C) \& (A \vee \bar{B} \vee C \& \bar{C}) \& (A \vee \bar{C} \vee B \& \bar{B}) \sim \\ & (\bar{A} \vee B \vee C) \& (A \vee \bar{B} \vee C) \& (A \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \& (A \vee B \vee \bar{C}) \& (A \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \end{aligned}$$

Третий и пятый множители одинаковы, оставим только один из них и получим с.к.н.ф.:

$$(\bar{A} \vee B \vee C) \& (A \vee \bar{B} \vee C) \& (A \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \& (A \vee B \vee \bar{C}).$$

Для нахождения с.д.н.ф. и с.к.н.ф. табличным методом строим таблицу истинности.

A	B	C	$A \equiv B \vee C$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Для построения с.д.н.ф. выбираем строки, в которых форма принимает значения истина, т. е. строки: 1, 6, 7 и 8. Используя известные правила, получим с.д.н.ф.:

$$\bar{A} \& \bar{B} \& \bar{C} \vee A \& \bar{B} \& C \vee A \& B \& \bar{C} \vee A \& B \& C.$$

Для построения с.к.н.ф. выбираем строки, где

форма принимает значение ложь, т.е. строки 2,3, 4 и 5. Используя известные правила, получим с.к.н.ф.:

$$(A \vee B \vee \bar{C}) \& (A \vee \bar{B} \vee C) \& (A \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \& (\bar{A} \vee B \vee C).$$

Занятие 3. Упражнение 1 главы 2.

Предложение будет предикатом, если оно высказывание или при фиксировании переменных превращается в высказывание.

Для пункта а) если выбрать вместо x , например $x=7$, то получим высказывание «7 – простое число». Итак, «число x – простое число» является предикатом.

Для пункта г) при фиксировании x и y получим, например: $2 \times 4 + 5$. Это утверждение не истинно и не ложно, поэтому « $2 \times x + y$ » не является предикатом.

Для пункта и) предложение «8 – нечетное число» является высказыванием, следовательно, является предикатом (нульместным предикатом).

Упражнение 2 главы 2.

Предложение пункта а) запишется в виде: $\forall x \exists y (x+y=5)$, а для б) в виде: $\forall y \exists x (y-x < 0)$. Далее имеем соответственно:

в): $\forall x \exists y (x \neq 0) \& (x/y = 2)$. з): $\forall x \forall y (x + y = y + x)$.

Упражнение 12 главы 2.

Выражение $\forall x A(x)$ является символьной записью любого из следующих предложений:

- для всех x имеет место $A(x)$;
- для каждого x имеет место $A(x)$;
- для любого x имеет место $A(x)$;
- каково бы ни было x имеет место $A(x)$;
- при произвольном x имеет место $A(x)$.

Выражение $\exists x A(x)$ является символьной записью любого из следующих предложений:

- для некоторого x имеет место $A(x)$;
- для некоторых x имеет место $A(x)$;
- хотя бы для одного x имеет место $A(x)$;
- существует x , что имеет место $A(x)$;
- найдется x , что имеет место $A(x)$.

Аналогичные списки нужно составить для остальных пунктов упражнения.

Упражнение 19 главы 2.

Рассмотрим задачу 1) п. а). Приведенная в упражнении формула в заданной интерпретации запишется в виде:

$$\ln(x+y)=y; \quad x, y \in (-\infty, \infty).$$

Ясно, что при $x = 1, y = 0$ получим истинное высказывание. При $x = 1, y = 1$ это выражение будет ложно. Итак, при некоторых значениях свободных переменных x, y получаем истину, при других – ложь. Следовательно, формула выполнима в данной интерпретации.

Занятие 4. Упражнение 27 главы 2.

В указанной интерпретации формула имеет вид: $\forall x \exists y (x + y < z)$. Полученное выражение является одноместным предикатом зависящим от z , $z \in (-\infty; \infty)$:

$$P(z) = \forall x \exists y (x + y < z).$$

Если выбрать, например, $z = 1$, то получим:

$$P(1) = \forall x \exists y (x + y < 1),$$

Которое, очевидно, истинно. Так же ясно, что и при любом z , $z \in (-\infty; \infty)$, $P(z)$ будет истинно. Следовательно, исходная формула не только выполнима, но и истинна в данной интерпретации.

Упражнение 29 главы 2.

Пусть область интерпретации M содержит два элемента, положим $M = \{a, b\}$. Тогда формула $\forall x P(x, y) \Rightarrow P(y, y)$ при $y = a$ представима в виде:

$$\forall x P(x, a) \Rightarrow P(a, a).$$

Учитывая, что квантор общности для конечных областей совпадает с конъюнкцией (см. формулу (2.7) в § 2) получим:

$$P(a, a) \& P(b, a) \Rightarrow P(a, a).$$

Выражения $P(a, a)$, $P(b, a)$ являются высказываниями которые можно обозначить например через A , B соответственно. Тогда получим: $A \& B \Rightarrow A$. Это высказывание равносильно следующему:

$$\neg(A \& B) \vee A \sim \neg A \vee \neg B \vee A \sim T.$$

Последнее выражение истинно при любых возможных значениях $A = P(a, a)$ и $B = P(b, a)$. Аналогичным образом рассматриваем случай, когда $y = b$. Тоже получим тавтологию. В результате имеем, что исходная формула истинна на произвольной двухэлементной области.

Упражнение 46-2 главы 2.

Для формулы пункта а) при вынесении квантора $\exists y$ за скобки нужно переименовать переменную y , например, на t :

$$\forall x (A(x) \Rightarrow B(x, y)) \Rightarrow ((\exists t A(t)) \Rightarrow \exists z B(y, z)).$$

При вынесении квантора из посылки он меняется на двойственный, а из заключения выносится без изменения. Тогда получим:

$$\begin{aligned} & \forall x(A(x) \Rightarrow B(x, y)) \Rightarrow \forall t \exists z(A(t) \Rightarrow B(y, z)) \sim \\ & \sim \exists x \forall t \exists z((A(x) \Rightarrow B(x, y)) \Rightarrow (A(t) \Rightarrow B(y, z))). \end{aligned}$$

Занятие 5. Упражнение 1 главы 3.

Пусть A, B, C пропозициональные формы и $A \models B \& C$. Последнее означает, что, если $A = И$, то $B \& C$ тоже равно $И$. Следовательно, $A \Rightarrow B \& C$ будет всегда равно $И$, т. е. $A \Rightarrow B \& C$ будет тавтологией, что записывается в виде: $\models A \Rightarrow B \& C$. Теперь пусть $A \Rightarrow B \& C$ всегда истинно, следовательно, если $A = И$, то и $B \& C = И$. Таким образом из истинности A следует истинность $B \& C$, это означает, что из A логически следует $B \& C$.

Упражнение 5 главы 3.

Рассмотрим вариант а) $A, A \Rightarrow B \models B$.

Докажем от противного. Пусть $A = И$, $A \Rightarrow B = И$. Допустим, что $B = Л$. Тогда очевидно, что $A \Rightarrow B$ не может быть истинным, следовательно, допущение неверно, и всякий раз, когда $A = И$ и $A \Rightarrow B = И$, имеем $B = И$, т. е. из $A, A \Rightarrow B$ логически следует B .

Упражнение 10 главы 3.

Множество дизъюнктов будет невыполнимо, если из него можно вывести (методом резолюций) пустой дизъюнкт. Положим

$$D_1 = \neg P \vee \neg Q \vee R,$$

$$D_2 = P \vee R,$$

$$D_3 = Q \vee R,$$

$$D_4 = \neg R.$$

Используя D_4 и D_3 , получим бинарную резольвенту – дизъюнкт $D_5 = Q$. Из D_4 и D_2 , а затем из D_4 и D_1 получим дизъюнкты:

$$D_6 = P,$$

$$D_7 = \neg P \vee \neg Q.$$

Теперь из D_5 и D_7 получаем дизъюнкт:

$$D_8 = \neg P.$$

Дизъюнкт D_6 и D_8 дают пустой дизъюнкт \square . Следовательно, исходное множество дизъюнктов невыполнимо.

Занятие 6. Упражнение 15 главы 3.

Рассмотрим формулу A пункта а). Формула представлена в предваренной нормальной форме. Для получения сколемовской стандартной формы нужно исключить кванторы существования (вводя сколемовские функции) и привести матрицу формулы к к.н.ф. Для приведения к к.н.ф. в данном примере достаточно исключить импликацию. Получим:

$$A = \exists x \forall y \forall z (\neg P(x, y) \vee Q(x, y)).$$

Для исключения квантора $\exists x$, в матрице вхождение x заменим на предметную постоянную a . В результате получим сколемовскую стандартную форму:

$$A_s = \forall y \forall z (\neg P(a, y) \vee Q(a, y)).$$

В варианте г) перед квантором $\exists x$ стоят кванторы общности $\forall x$ и $\forall y$. Тогда вхождение z в матрице формулы нужно заменить на $f(x, y)$; здесь f – новая функциональная буква, которой нет в матрице формулы. В результате получим сколемовскую стандартную форму:

$$A_s = \forall x \forall y (\neg P(x, y) \vee Q(x, f(x, y))).$$

Упражнение 19 главы 3.

Для решения задачи согласно теореме 3.4, [2] нужно выяснить будет ли противоречием формула A , равная конъюнкции заданного множества формул и отрицания требуемого заключения:

$$A = (\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x) \& R(x))) \& (\exists x (P(x) \& S(x))) \& \neg \exists x (S(x) \& R(x)).$$

Для выяснения, будет ли A противоречием, сначала находим для A предваренную нормальную форму (при этом необходимо переименование переменных). Эта форма имеет вид:

$$\exists y \forall x \forall z (\neg P(x) \vee Q(x) \& R(x)) \& P(y) \& S(y) \& (\neg S(z) \vee \neg R(z)).$$

Приводим матрицу к к.н.ф.:

$$\exists y \forall x \forall z (\neg P(x) \vee Q(x)) \& (\neg P(x) \vee R(x)) \& P(y) \& S(y) \& (\neg S(z) \vee \neg R(z)).$$

Исключая квантор $\exists y$, и вводя при этом предметную постоянную a , получим сколемовскую стандартную форму:

$$A_S = \forall x \forall z (\neg P(x) \vee Q(x)) \& (\neg P(x) \vee R(x)) \& P(a) \& S(a) \& (\neg S(z) \vee \neg R(z)).$$

В матрице формулы A_S имеются 5 дизъюнктов:

- 1) $\neg P(x) \vee Q(x)$,
- 2) $\neg P(x) \vee R(x)$,
- 3) $P(a)$,
- 4) $S(a)$,
- 5) $\neg S(z) \vee \neg R(z)$.

Методом резолюций выясним, будет ли это множество дизъюнктов невыполнимым. Легко видеть, что из 2) и 3), а затем из 4) и 5) получим:

- 6) $R(a)$ из 2) и 3),
- 7) $\neg R(a)$ из 4) и 5).

Теперь имеем:

- 8) \square из 6) и 7).

Следовательно, формула A - противоречие, тогда из данного множества формул логически следует формула $\exists x(S(x) \& R(x))$. Что и требовалось.

Упражнение 24 главы 3.

Рассмотрим задачу пункта 1). В §2 главы 2 работы [2], см. также [6], приведены символьные представления для утверждений со словами "все" и "некоторые". Выпишем эти утверждения вместе с их символьными записями:

$$\text{всякое } S \text{ есть } P \quad - \quad \forall x(S(x) \Rightarrow P(x));$$

- ни одно S не есть P - $\forall x(S(x) \Rightarrow \neg P(x))$;
 некоторые S есть P - $\exists x(S(x) \& P(x))$;
 некоторые S не есть P - $\exists x(S(x) \& \neg P(x))$.

Отметим, что когда используется квантор общности, то используется импликация, а для квантора существования - конъюнкция.

В задаче 1) имеем две посылки, которые запишутся в виде формул:

$$P_1 = \exists x(A(x) \& B(x)); \quad P_2 = \forall x(B(x) \Rightarrow C(x));$$

а заключение в виде формулы:

$$Z = \exists x(A(x) \& C(x)).$$

Для выяснения будет ли из P_1 и P_2 логически следовать Z , поступаем как при решении упражнения 19: надо выяснить будет ли формула $A = P_1 \& P_2 \& \neg Z$ противоречием или нет. Имеем:

$$A = (\exists x(A(x) \& B(x))) \& (\forall x(B(x) \Rightarrow C(x))) \& \neg \exists x(A(x) \& C(x));$$

Проводим переименование переменных, отрицание переносим через квантор, исключаем импликацию:

$$A \sim \exists x \forall y \forall z (A(x) \& B(x) \& (\neg B(y) \vee C(y)) \& (\neg A(z) \vee \neg C(z)));$$

Получим сколемовскую нормальную формулу:

$$A_s = \forall y \forall z (A(a) \& B(a) \& (\neg B(y) \vee C(y)) \& (\neg A(z) \vee \neg C(z)));$$

В A_s имеются 4 дизъюнкта:

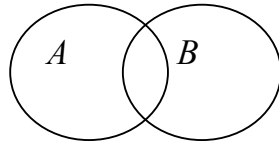
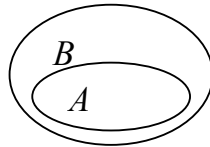
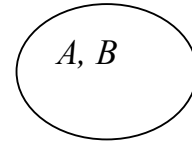
- 1) $A(a)$,
- 2) $B(a)$,
- 3) $\neg B(y) \vee C(y)$,
- 4) $\neg A(z) \vee \neg C(z)$.

Далее легко получить:

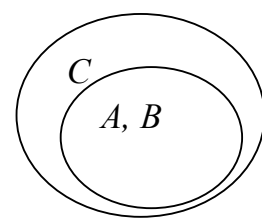
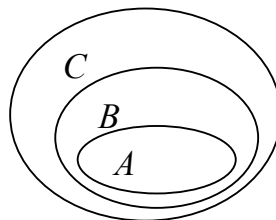
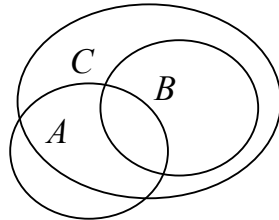
- 5) $\neg C(a)$ из 1) и 4),
- 6) $C(a)$ из 2) и 3),
- 7) \square из 5) и 6).

Таким образом, из конъюнкции посылок логически следует заключение. Построим диаграммы Эйлера-Венна для рассматриваемого случая. Пусть A ,

B и C обозначают области истинности предикатов $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$ соответственно. Первая посылка означает, что некоторые элементы из A принадлежат B . Это возможно, когда $A \cap B \neq \emptyset$, при этом возможны три случая:

1) $A \cap B \neq \emptyset$ 2) $A \cap B \neq \emptyset, A \subset B$ 3) $A \cap B \neq \emptyset, A = B$

Вторая посылка означает, что $B \subseteq C$. Объединяя обе посылки, получим следующие три варианта диаграмм Эйлера – Венна:



В частном случае может оказаться, что $B = C$. Но из этих диаграмм видно, что в каждом случае некоторые элементы из A будут принадлежать C , т.е. из заданных посылок следует заключение.

Занятие 7. Упражнение 1 по теории алгоритмов [2].

Перенумеруем подстановки данного нормального алгоритма

$$B = \begin{cases} * 11 \rightarrow 1 & (1) \\ * 1 \rightarrow 1 & (2) \\ \lambda \rightarrow 1 & (3) \end{cases}$$

Применяя алгоритм B к слову $P=111$, получим последовательно:

111

1111 (3)

11111 (3)

111111 (3)

...

Легко видеть, что B будет бесконечно приписывать единички слева от заданного слова $P=111$. Следовательно, алгоритм B не применим к этому слову.

При применении алгоритма B к слову $P=**$, получим последовательно:

**

 $1** \quad (3)$ $11** \quad (3)$ $111** \quad (3)$

...

Таким образом, алгоритм B не применим к слову $P=**$.

Алгоритм B не применим и к слову $P=11*$. Применим B к слову $P=*1*1$. По (2)-ой подстановке первое вхождение $*1$ заменится на единичку, и процесс преобразования завершится, ибо эта подстановка заключительная. Результат равен $1*1$.

Упражнение 17 главы по теории алгоритмов.

Для каждой буквы алфавита a введите букву двойник, например a^* . Затем преобразуйте любую букву x слова P (в алфавите A) в xx^* . Далее, перестановкой букв с буквами двойниками, можно получить, что P преобразуется в PP^* , где P^* состоит из букв двойников. Наконец, нужно преобразовать буквы двойники в буквы исходного алфавита.

Упражнение 26 главы по теории алгоритмов.

Перенумеруем команды машины Тьюринга:

$$q_0 a s_0 q_0 \quad (1)$$

$$q_0 s R q_0 \quad (2)$$

$$q_0 b s_0 q_1 \quad (3)$$

Применим эту машину Тьюринга к слову $P = aabbba$

	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>a</i>		
	Δ_{q_0}							
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>a</i>		
	Δ_{q_0}							
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>a</i>		
	Δ_{q_0}							
			<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>a</i>		
	Δ_{q_0}							

(1)

(2)

(1)

Указанные действия можно представить в виде:

$$q_0 a a b b b a$$

$$q_0 s_0 a b b b a \quad (1)$$

$$q_0 a b b b a \quad (2)$$

$$q_0 s_0 b b b a \quad (1)$$

Далее аналогичным образом получим последовательно:

$$q_0 b b b a \quad (2)$$

$$q_1 s_0 b b a \quad (3)$$

Машина находится в состоянии q_1 , обозревает пустую ячейку (S_0), а команд начинающихся с $q_1 S_0$ нет. Поэтому машина Тьюринга остановится и результатом является слово $b b a$.

Применим машину Тьюринга к слову $P = c b b$:

$$q_0 c b b$$

Машина находится в состоянии q_0 , обозревает ячейку с символом c , команды начинающейся с $q_0 c$ нет. Поэтому машина Тьюринга остановится и результатом является то же слово $c b b$.

Применяя машину Тьюринга к слову $P = a c b$, имеем:

$$q_0 a c b$$

$$q_0 s_0 c b \quad (1)$$

$$q_0 c b \quad (2)$$

Машина останавливается и результатом является слово $c b$.

Занятие 9. Упражнение 1 главы по дедуктивным теориям [2].

Сравнить данную последовательность формул 1) – 5) с последовательностью формул, полученную при доказательстве леммы 4.1 (§ 8 главы 4). Легко убедиться, что данная в упражнении последовательность формул является выводом формулы $\neg A \Rightarrow \neg A$ в исчислении высказываний.

Упражнение 5 главы по дедуктивным теориям.

Если формула A логики высказываний является тавтологией, то она теорема, следовательно имеет вывод (в исчислении высказываний):

$$B_1, B_2, \dots, B_n, B_n = A.$$

Продумайте, чем является каждая из формул B_i . Используйте это для решения упражнения.

Перечень слайдов для компьютерной презентации

1. Логические операции.
2. Основные равносильности.
3. Кванторы-1.
4. Кванторы-2.
5. Правила вынесения кванторов за скобки-1.
6. Правила вынесения кванторов за скобки-2.
7. Правила вынесения кванторов за скобки-3.
8. Силлогизмы Аристотеля.
9. Нормальный алгоритм.
10. Машина Тьюринга.

Литература

1. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Сборник задач по дискретной математике. -М.: Наука, 1977. –368 с.
2. Галиев Ш. И. Математическая логика и теория алгоритмов. Учебное пособие. Казань: Изд-во КГТУ им. А. Н. Туполева, 2004. -334 с.
3. Галиев Ш.И., Сигаев А.Ю. Методические указания к самостоятельной работе по «Математической логике и теории формальных языков» Казань, Казан. авиац. ин-т; 1990. 36 с.
4. Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах. М.: Наука, 1975. –288 с.
5. Клини С. Математическая логика. Пер. с англ. -М.: Мир, 1973. –480с.
6. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. -М.: Наука, 1975. -240с.
7. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. Пер. с англ. -М.: Наука, 1984. –320 с.
8. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов. –СПб.: Питер., 2001. –304 с.
9. Судоплатов С.В., Овчинникова Е. В. Математическая логика и теория алгоритмов. Учебник. Москва, Новосибирск. 2004. -224 с.
10. Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. Пер. с англ. -М.: Наука, 1983. -360 с.
11. Шапорев С.Д. Математическая логика. Курс лекции и практических занятий. Учебное пособие. Санкт-Петербург. Изд-во БХВ-Петербург. 2005. -416 с.