

# ОБЩАЯ ФИЗИКА

*Лабораторный практикум по механике*

Казань 2007

УДК 53  
ББК 22.3  
Л12

**Гайсин Ф.М., Каримов А.Х., Ахметзянов Р.Ш., Каспин Е.Л., Макаева Р.Х., Гайсин А.Ф.** Общая физика: Лабораторный практикум по механике. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2007. 52 с.

ISBN 978-5-7579-1063-5

Содержится описание семи лабораторных работ по механике, в основе которых лежат материалы практикумов, проведенных в течение 10 лет на кафедрах прикладной физики и технической физики, разработанных и изданных преподавателями этих кафедр.

Предназначено для студентов технических вузов.

Табл. 9. Ил. 14. Библиогр.: 15 назв.

Рецензенты: докт. техн. наук Н.Ф. Кашапов (Казанский государственный технологический университет);

канд. физ.-мат. наук Ю.Г. Малинин (Казанское высшее артиллерийское командное училище (военный институт))

ISBN 978-5-7579-1063-5

© Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2007  
© Гайсин Ф.М., Каримов А.Х.,  
Ахметзянов Р.Ш., Каспин Е.Л.,  
Макаева Р.Х., Гайсин А.Ф., 2007

## ВВЕДЕНИЕ

Цель и содержание физического лабораторного практикума – проиллюстрировать (прокомментировать) теоретические положения физики, изучаемые на лекционных занятиях.

При их выполнении студенты должны:

- приобрести навыки работы с приборами;
- научиться правильно выбирать измерительные приборы;
- научиться оценивать точность результатов измерений; анализировать результаты опыта и делать выводы; в соответствии с установленными требованиями оформлять отчет по работе;

Выполнение лабораторной работы включает следующие этапы:

- 1) получение задания у преподавателя;
- 2) подготовку к выполнению работы (изучение руководства, приборов, оборудования);
- 3) проведение лабораторного эксперимента;
- 4) обработку результатов эксперимента и формулировку выводов;
- 5) оформление отчета;
- 6) защиту отчета.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

**ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ  
И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ**

**1.1. Основные понятия**

При проведении физических экспериментов оперируют физическими величинами (ФВ), такими, как масса, длина, время, сила тока и т.д.

*Физической величиной* называют характеристику объектов или явлений материального мира, общую для них в качественном отношении и индивидуальную для каждого из них в количественном отношении.

Для определения физической величины вводят ее единицу измерения. Так, за основную единицу измерения массы в системе СИ принимают килограмм.

Количественное выражение ФВ называют *значением ФВ*. Значение ФВ – это оценка в виде некоторого числа принятых для нее единиц. Значение ФВ записывают, например, в виде  $m = 10$  кг (10 – число, кг – единица массы). *Размером ФВ* называют количественное содержание характеристики физического объекта. Например, тело имеет конкретный размер длины  $L$ , числовое выражение которого (т. е. значение) будет зависеть от выбранной единицы измерения длины:  $L = 1 \text{ м} = 100 \text{ см} = 1000 \text{ мм}$ .

**1.2. Системы единиц измерения физических величин**

Единицы измерения физических величин выбирают не произвольно, а руководствуясь некоторыми определенными принципами.

Совокупность выбранных определенным образом единиц измерения физических величин представляет систему единиц измерения физических величин.

В системе единиц для небольшого числа ФВ их единицы выбираются произвольно. Эти ФВ и их единицы называются *основными*. Единицы других ФВ определяют по формулам, связывающим их с основными (формулы связи). Рассчитанные подобным образом ФВ и их единицы называются *производными*. Например, единицей длины пути  $S$  является метр (м), времени  $\tau$  – секунда (с). Пусть они будут основными ФВ и их единицами измерения. Скорость  $v$  и ее единица измерения являются производными и определяются по формуле связи:  $v = \frac{S}{\tau}$ , м/с.

Существуют следующие системы единиц измерения физических величин: СИ, МКС, СГС и др.

Постановлением Государственного комитета СССР по стандартам с 1 января 1982 г. для применения в промышленности, науке, технике и в образовании введен ГОСТ 8.417-81 (СТ СЭВ 1052-78) «Единицы физических величин». Согласно этому ГОСТу обязательному применению подлежат единицы Международной системы, которая была принята на 11-й Генеральной конференции по мерам и весам в 1960 г. (Система интернациональная – СИ).

Основными единицами СИ являются: метр (м) – единица длины, килограмм (кг) – единица массы, Кельвин (К) – единица термодинамической температуры, кандела (кд) – единица силы света, моль (моль) – единица количества вещества.

Введены еще две дополнительные единицы СИ: радиан (рад) – единица плоского угла и стерадиан (ср.) – единица телесного угла.



В СИ каждой основной и производной физической величине дана характеристика, называемая *размерностью*. Размерности основных физических величин записываются в виде заглавных букв латинского или греческого алфавитов: длина –  $L$ , масса –  $M$ , время –  $T$ , сила электрического тока –  $I$ , температура –  $\theta$ , количество вещества –  $\nu$ , сила света –  $J$ . Размерность некоторой физической величины  $x$  обозначают  $\dim x$  (от англ. *dimension* – размерность) или  $[x]$ .

Если обозначить длину –  $l$ , массу –  $m$ , время –  $\tau$ , то можно записать:  $[l] = L$ ,  $[m] = M$ ,  $[\tau] = T$  и т.д.

Размерность производной физической величины отражает ее связь с основными физическими величинами данной системы единиц и определяется по формуле связи, например,

$$[v] = [l]/[\tau].$$

Согласно указанному ГОСТу наряду с основными единицами обязательному применению подлежат также десятичные дольные и кратные от них. Названия полных и кратных единиц образуются с помощью приставок: санти ( $10^{-2}$ ), милли ( $10^{-3}$ ), микро ( $10^{-6}$ ), нано ( $10^{-9}$ ), пико ( $10^{-12}$ ), кило ( $10^3$ ), мега ( $10^6$ ) и т. д. Например, м – мм, мкм, км; кг – г, мг; с – мс, мкс; А – кА, мА, мкА; В – кВ, мВ, мкВ и др.

**Задание 1.** Вывести единицы измерения и размерности: а) момента силы  $M = Fl$ ; б) момента инерции тела  $J = mr^2$ ; в) импульса (количества движения) тела  $p = mv$ .

### 1.3. Метод анализа размерностей

Рассмотрим некоторую производную механическую физическую величину  $x$ , зависящую, например, от длины  $l$ , массы  $m$  и времени  $t$ . Размерность величины  $x$  в общем случае записывается в виде:

$$[x] = [l]^{\alpha} \cdot [m]^{\beta} \cdot [t]^{\gamma} = L^{\alpha} \cdot M^{\beta} \cdot T^{\gamma},$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – показатели размерности ФВ. Приведенная формула называется формулой размерностей. Если  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , то ФВ является безразмерной.

Физические законы не зависят от выбора единиц измерения ФВ. Поэтому размерности обеих частей формулы, выражающей рассматриваемый физический закон, должны быть одинаковыми.

На основе размерностей ФВ разработан метод анализа размерностей, позволяющий установить функциональные связи между ФВ.

Если известны величины  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , от которых зависит искомая физическая величина  $y$ , то методом анализа размерностей можно с точностью до безразмерного множителя установить зависимость  $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ .

Согласно требованию равенства размерностей левой и правой частей физических уравнений можно записать  $[y] = [f]$ . Решая это уравнение, определяют показатели размерностей, входящих в формулу ФВ, и окончательный вид искомой формулы.

Рассмотрим применение метода анализа размерностей на конкретном примере.

**Пример 1.** Требуется определить время  $\tau$  прохождения пути  $S$  телом массой  $m$ , движущимся поступательно и прямолинейно под действием постоянной силы  $F$ .

В левой части будущей формулы ставим искомую величину  $\tau$ , а справа – заданные величины:  $S$ ,  $m$  и  $F$ . Составим уравнение размерностей:

$$[\tau] = C \cdot [S]^{\alpha} \cdot [m]^{\beta} \cdot [F]^{\gamma},$$

где  $C$  – постоянная.

Подставляя размерности величин, получим:

$$T = CL^{\alpha} M^{\beta} (LMT^{-2})^{\gamma}.$$

Требование равенства размерностей левой и правой частей формулы приводит к следующей системе уравнений для показателей размерностей:

$$\text{при } L: \alpha + \gamma = 0; \text{ при } M: \beta + \gamma = 0; \text{ при } T: -2\gamma = 1.$$

Решая эти уравнения, получим:  $\alpha = \beta = 1/2$ ,  $\gamma = -1/2$ .

Переходя к исходным заданным величинам, запишем искомую формулу:  $\tau = C \sqrt{\frac{mS}{F}}$ .

Из 2-го закона динамики Ньютона  $a = F/m$  и общего закона механического движения с нулевой начальной скоростью:

$$S = a\tau^2/2 \text{ следует: } \tau^2 = \frac{2S}{a} = \frac{2Sm}{F} \text{ и } \tau = \sqrt{\frac{2Sm}{F}}.$$

Следовательно, метод анализа размерностей позволил определить искомую зависимость с точностью до постоянного коэффициента  $\sqrt{2}$ .

Метод анализа размерностей применяют в случаях, когда точное аналитическое решение получить сложно.

Задание 2. Методом анализа размерностей определить скорость  $v$ , с которой приземлится свободно падающее с высоты  $h$  тело массой  $m$ .

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

### ИЗМЕРЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН И КЛАССИФИКАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Цель работы: Ознакомление с основами теории погрешностей.

#### Теоретическая часть

Человек получает знания об окружающем мире посредством опыта (экспериментальных измерений). Измерить какую-либо величину – значит узнать, сколько содержится в ней однородной величины, принятой за единицу измерения (эталон). Различают *прямые* и *косвенные* измерения физических величин.

*При прямом измерении* значение физической величины определяется непосредственно с помощью измерительного средства (например, по шкале прибора).

*Косвенным измерением* называют измерение, при котором искомое значение физической величины находят по аналитической зависимости через входящие в нее физические величины, определяемые прямыми измерениями.

Измерить физическую величину абсолютно точно невозможно, так как всякое измерение сопровождается той или иной ошибкой или погрешностью. Различают три вида погрешностей: промахи, систематические и случайные погрешности измерения.

*Промахи* являются результатом низкой квалификации экспериментатора, выполнявшего измерения. Промахи, как правило, исключают из анализа.



Систематические погрешности являются следствием несовершенства приборов, недостатка методики измерения. Они всегда дают отклонение результата измерения в одну и ту же сторону. Систематические погрешности можно уменьшить, применяя более точные приборы.

Случайные погрешности являются следствием случайных, неконтролируемых помех, влияние которых на процесс измерения невозможно учесть непосредственно. Случайные погрешности влияют на результат измерения, давая отклонения от истинного значения с равной вероятностью как в одну, так и в другую сторону. Согласно теории погрешностей случайные погрешности измерений подчиняются закону нормального распределения (закону Гаусса). Влияние случайных ошибок на результат измерения физической величины учитывается при определенной обработке проведенной серии результатов измерения.

#### Определение погрешностей при прямых измерениях

Пусть необходимо измерить некоторую физическую величину  $N$ . Для повышения достоверности результата проводим несколько повторных измерений, при которых получаем ряд значений данной величины  $N_1, N_2, N_3, \dots, N_n$ , где  $n$  – число измерений.

Определение результата прямого измерения физической величины  $N$  и его погрешности выполняют в следующей последовательности.

1) Вычисляется среднее арифметическое значение измеряемой величины:

$$\bar{N} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i.$$

Эта величина является наиболее близкой к истинному значению определяемой физической величины.

2) Определяется полуширина доверительного интервала:

$$\Delta \bar{N} = \sqrt{\theta^2 + \varepsilon^2},$$

где  $\theta$  – систематическая погрешность измерения;  $\varepsilon$  – случайная погрешность измерения, определяемая по формуле:

$$\varepsilon = \frac{t_{p,n} S_N}{\sqrt{n}},$$

здесь  $S_N$  – среднеквадратичное отклонение серии отдельных измерений, определяемое по формуле:

$$S_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta N_i)^2}{n-1}};$$

где  $t_{p,n}$  – коэффициент Стьюдента, учитывающий закон распределения результатов измерений);  $\Delta N_i = |N_i - \bar{N}|$  – отклонение  $i$ -измерения.

Значения коэффициента Стьюдента находят в зависимости от числа измерений  $n$  и принятой доверительной вероятности  $P$ , определяют его из таблиц (фрагмент такой таблицы представлен в табл. 1):

Таблица 1

$n$	2	3	5	8	10
$t_{p,n}$	12,7	4,3	2,8	2,4	2,3

Из табл. 1 видно, что для получения приемлемого результата достаточно провести 3–5 повторных измерений.

Если известен класс точности  $K$ , % прибора, то  $\theta = \frac{a_n \cdot K}{100\%}$ ,

где  $a_n$  – предел измерения прибора.

Если класс точности прибора не известен, то  $\theta$  принимают равной цене наименьшего деления измерительного средства.

3) Результат измерения записывается в виде

$$N_{\text{ист}} = \bar{N} \pm \Delta\bar{N}, \quad p = \dots, \quad n = \dots$$

и читается так: истинное значение  $N_{\text{ист}}$  измеряемой физической величины  $N$  с доверительной вероятностью  $P$  и при числе измерений  $n$  находится в интервале:  $\bar{N} - \Delta\bar{N} \leq N_{\text{ист}} \leq \bar{N} + \Delta\bar{N}$ .

4) Относительная погрешность измерения

$$\delta N = \frac{\Delta N}{\bar{N}} \cdot 100\%.$$

Иногда результат измерения  $N$  записывают в виде

$$N = \bar{N} \pm \delta N, \quad p = \dots, \quad n = \dots$$

**Задание 3.** Записать результат измерения длины  $l$  тела, если при трех повторных измерениях были получены значения  $l_1 = 90$  мм,  $l_2 = 92$  мм,  $l_3 = 94$  мм. Измерения проведены манометром с ценой деления в 1 мм.

#### **Определение погрешностей при косвенных измерениях**

В практике экспериментальных измерений часто приходится производить не прямые измерения физических величин, а косвенные, т.е. через физические величины, связанные с измеряемой физической величиной некоторой функциональной зависимостью.

При косвенном измерении значение искомой физической величины  $y$  находят по аналитической зависимости  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — физические величины, определяемые прямыми измерениями.

Погрешность  $\Delta y$  зависит от погрешностей  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  и вида формулы.

Обработку результата косвенного измерения выполняют в следующей последовательности:

1. По результатам прямых измерений величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$  определяют  $x_{1\text{cp}}, x_{2\text{cp}}, x_{3\text{cp}}$  и  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ .

2. Среднее номинальное значение  $y_{\text{cp}}$  искомой физической величины  $y$  рассчитывается по аналитической зависимости при подставлении в нее  $x_{1\text{cp}}, x_{2\text{cp}}, x_{3\text{cp}}$ :  $y_{\text{cp}} = f(x_{1\text{cp}}, x_{2\text{cp}}, x_{3\text{cp}})$ .

3. Далее определяется относительная погрешность  $\delta y$  искомой физической величины:

$$\delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right)^2},$$

где  $f$  — функция  $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots)$ .

4. Полуширину доверительного интервала, или абсолютную погрешность  $\Delta y$ , определяют как:  $\Delta y = y_{\text{cp}} \cdot \delta y$ .

5. Результат косвенного измерения физической величины записывают в виде:

$$y = y_{\text{cp}} \pm \Delta y \text{ при } P = \dots, \quad n = \dots$$

или

$$y = y_{\text{cp}} \pm \delta y \text{ при } P = \dots, \quad n = \dots$$

**Пример 2.** Определить плотность материала цилиндрического тела диаметром  $d$ , длиной  $l$  и массой  $m$ . Расчетная формула для определения плотности:

$$\rho = \frac{m}{0,785d^2l}.$$

По результатам трех прямых измерений установлено:

$$m_{\text{cp}} = 98,25 \text{ г}, \quad \Delta m = 0,32 \text{ г};$$

$$d_{\text{ср}} = 35,5 \text{ мм}, \quad \Delta d = 0,06 \text{ мм};$$

$$l_{\text{ср}} = 35,75 \text{ мм}, \quad \Delta l = 0,06 \text{ мм}.$$

При прямых измерениях величин  $m$ ,  $l$  и  $d$  имели место случайные и систематические погрешности. Доверительную вероятность принимали  $P = 0,95$  при трех измерениях  $n = 3$ . Доверительные интервалы случайных погрешностей определяли с помощью коэффициента Стьюдента из табл. 2:  $t_{p,n} = 4,3$ .

По средним значениям  $m$ ,  $d$  и  $l$  определяем номинальное (среднее) значение плотности материала:

$$\rho = \frac{98,25}{0,785 \cdot 35,5^2 \cdot 35,75} = 2,78 \cdot 10^{-3} \text{ г/мм}^3 = 2,78 \text{ г/см}^3.$$

Расчет  $\Delta\rho$  удобнее вести через относительную погрешность:

$$\begin{aligned} \delta\rho &= \pm \frac{\Delta\rho}{\rho_{\text{ср}}} \cdot 100\% = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m_{\text{ср}}}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta d}{d_{\text{ср}}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l_{\text{ср}}}\right)^2} \cdot 100\% = \\ &= \sqrt{\left(\frac{0,32}{98,25}\right)^2 + 2\left(\frac{0,06}{35,5}\right)^2 + \left(\frac{0,06}{35,75}\right)^2} \cdot 100\% = \pm 0,012 \text{ г/см}^3. \end{aligned}$$

Полуширина доверительного интервала (абсолютная погрешность)

$$\Delta\rho = \pm \delta\rho \cdot \rho_{\text{ср}} = \frac{2,78 \cdot 0,43\%}{100\%} = \pm 0,012 \text{ г/см}^3.$$

Окончательный результат:

$$\Delta\rho = 2,78 \text{ г/см}^3 \pm 0,012 \text{ г/см}^3, \quad P = 0,95; \quad n = 3.$$

#### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

### КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПО ОКРУЖНОСТИ

Цель работы: Изучение теории кинематики вращательного движения материальной точки по окружности. Экспериментальное определение и расчет кинематических параметров вращательного движения.

#### Теоретическая часть

##### *Движение материальной точки по окружности*

Особым случаем криволинейного движения является движение по круговой орбите (по окружности). Движение материальной точки  $M$  по окружности характеризуется следующими кинематическими параметрами: линейной скоростью  $\vec{v}$ , угловой скоростью  $\vec{\omega}$ , тангенциальным ускорением  $\vec{a}_\tau$ , нормальным ускорением  $\vec{a}_n$ , полным ускорением  $\vec{a}$ , угловым ускорением  $\vec{\epsilon}$ .

При равномерном движении по окружности ( $\vec{\omega} = \text{const}$ ) радиусом  $R$  касательное ускорение определяется выражением:

$$a_\tau = \frac{dv}{d\tau} = \frac{d(\omega \cdot R)}{d\tau} = R \frac{d\omega}{d\tau} = 0, \quad (1)$$

следовательно, общее ускорение направлено к центру (центростремительное ускорение) и равно:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (2)$$



Линейная скорость  $\vec{v}$  связана с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ , и радиусом окружности  $R$  соотношением:

$$\vec{v} = \vec{\omega} R. \quad (3)$$

Кроме того, для этого вида движения справедливы уравнения:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0; \quad \varphi = \int \omega dt = \omega t + \varphi_0, \quad (4)$$

где  $\varphi_0$  — угол, образуемый радиус-вектором движущейся точки, проведенным из центра окружности с определенным, выбранным в качестве базиса направлением радиус-вектора ко времени  $t_0 = 0$ . Обычно выбирают  $\varphi_0 = 0$ .

Назовем периодом обращения при равномерном движении по окружности отрезок времени, за который точка пробегает по окружности один раз. Тогда

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{r\omega} = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (5)$$

Частота вращения по окружности, т.е. число оборотов в единицу времени, будет определяться как

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (6)$$

Для центростремительного ускорения справедливы также формулы:

$$a_n = \omega^2 R = 4\pi^2 \nu^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R. \quad (7)$$

На рис. 1 представлена схема вращения материальной точки  $M$  вокруг неподвижной оси  $OO'$  (перпендикулярна плоскости чертежа). На схеме показаны линейная  $\vec{v}$  и угловая  $\vec{\omega}$  скорости; тангенциальное  $\vec{a}_\tau$ , нормальное  $\vec{a}_n$ , полное  $\vec{a}$

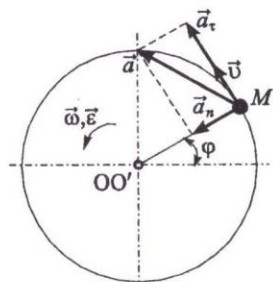


Рис. 1

и угловое  $\vec{\varepsilon}$  ускорения точки  $M$ .

Схема приведена для случая равноускоренного движения, поэтому тангенциальное ускорение  $\vec{a}_\tau$  направлено по вектору линейной скорости  $\vec{v}$ , а угловое ускорение  $\vec{\varepsilon}$  совпадает с направлением вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$  (оба этих вектора направлены по оси  $OO'$  к нам). В случае равнозамедленного движения ускорения будут направлены противоположно скоростям.

### Описание экспериментальной установки

1. Приборы и материалы: маховик на валу с подвешенным грузом, измерительная линейка, штангенциркуль, секундомер.

2. Описание экспериментальной установки. На рис. 2 приведена схема экспериментальной установки. Груз  $I$  на нити прикреплен к шкиву 2, насаженному на конец вала 3. На этом же валу установлено колесо 4. Вся конструкция расположена на столе 5.

Перед началом эксперимента нить наматывают на шкив и груз поднимается в исходное положение. В начальный момент времени точка  $M$  на ободе шкива имеет следующие кинематические параметры  $v_0 = 0$ ;  $a_n = 0$ ;  $a_{\text{гр}} = 0$ . При отпускании груза под действием силы тяжести он перемещается вниз. Натянутая грузом нить раскручивает вал.

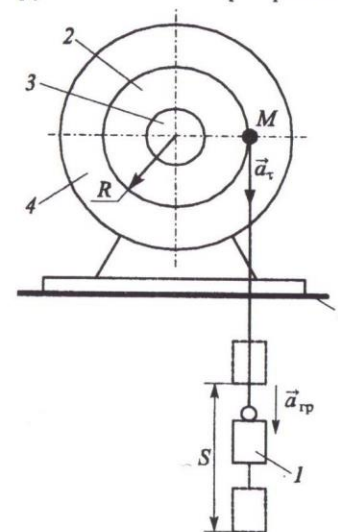


Рис. 2

Груз с ускорением  $\vec{a}_{\text{гр}}$  движется равноускоренно вниз до нижнего крайнего положения, пройдя путь  $s$ . Этот же линейный путь  $s$  проходит материальная точка  $M$ , вращаясь по окружности за несколько оборотов вала.

### Определение кинематических параметров

При движении материальной точки  $M$  по окружности движение характеризуется следующими кинематическими параметрами:  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}_n$ ,  $\vec{a}_\tau$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{\omega}$  и  $\vec{\epsilon}$ .

Линейное ускорение груза равно тангенциальному ускорению материальной точки  $M$  при вращении по окружности:

$$a_{\text{гр}} = a_\tau. \quad (8)$$

Зная путь груза  $s$  при равноускоренном движении с учетом  $v_0 = 0$  и выражения (8), из формулы:

$$s = \frac{a_{\text{гр}} \tau^2}{2} \quad (9)$$

определим тангенциальное ускорение:

$$a_\tau = \frac{2s}{\tau^2}. \quad (10)$$

Скорость материальной точки  $M$  в конце движения:

$$v = v_0 + a_\tau \tau = a_\tau \tau. \quad (11)$$

Изменив радиус  $R$  шкива, можно вычислить:

• угловую скорость

$$\omega = v/R, \quad (12)$$

• угловое ускорение

$$\epsilon = a_\tau/R,$$

• нормальное ускорение:

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (13)$$

• полное линейное ускорение:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \quad (14)$$

Число оборотов  $N$ , сделанных шкивом за время перемещения груза:

$$N = \frac{s}{2\pi \cdot R}. \quad (15)$$

Соответственно, угловой путь, пройденный материальной точкой  $M$  за это время, равен:

$$\varphi = 2\pi N, \text{ рад.} \quad (16)$$

### Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с лабораторной установкой.
2. Измерить штангенциркулем диаметр шкива  $d$ , мм, на который наматывается нить.
3. Намотать нить с грузом на шкив. Придерживая шкив рукой, зафиксировать верхнее положение груза. Отпустить шкив и зафиксировать нижнее положение груза. Измерить линейкой расстояние  $s$  между верхним и нижним положениями груза.
4. Повторить п. 3 еще два раза.
5. С помощью секундомера измерить время  $\tau$  падения груза из верхнего положения в нижнее. Результаты измерения занести в табл. 2.

Таблица 2

Номер опыта	1	2	3	$\bar{x}$	$\theta$	$S_x$	$\epsilon$	$\Delta x$	$\delta_x$
$s$ , мм									
$\tau$ , с									
$S = S \pm \Delta S$ $n = 3$ $p = 0,95$						$\tau = \tau \pm \Delta \tau$ $n = 3$ $p = 0,95$			

6. Повторить п. 5 еще два раза.
7. Обработать результаты измерения  $s$  и  $\tau$  по методике прямых измерений. Результаты занести в табл. 2.

8. С учетом измеренных значений  $s$  и  $\tau$  рассчитать ускорение  $a_{гр}$  движения груза. Обработать результат определения  $a_{гр}$  по методике косвенных измерений.

9. Учítывая, что  $a_{гр} = a_{\tau}$ , рассчитать кинематические параметры движения материальной точки  $M$ . Результаты записать в табл. 3.

Таблица 3

$v$	$a_n$	$a$	$\omega$	$\varepsilon$	$N$	$\varphi$

10. Сделать выводы по работе.

#### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛА

Цель работы: изучение и освоение экспериментального метода определения момента инерции тела сложной формы.

#### Теоретическая часть

Вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси  $OO'$ , проходящей через центр масс (рис. 3), под действием внешнего момента  $\vec{M}$  силы  $\vec{F}$  описывается уравнением динамики вращательного движения твердого тела:

$$\vec{M} = \vec{J} \cdot \vec{\varepsilon}, \quad (17)$$

где  $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$  – момент силы (рис. 3,а);  $\vec{J}$  – момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси  $OO'$ , проходящей через центр масс;  $\vec{\varepsilon}$  – угловое ускорение;  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки  $A$  приложения силы  $\vec{F}$ .

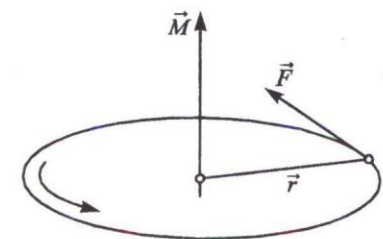
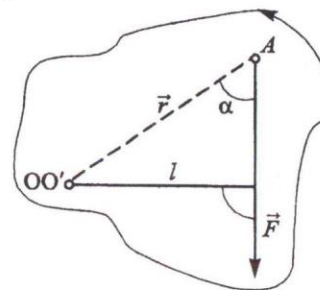


Рис. 3



Модуль момента силы  $\vec{F}$  равен:

$$|M| = F \times r \times \sin \alpha = F \times l, \quad (18)$$

где  $l$  – «плечо» силы  $\vec{F}$  относительно оси  $OO'$ , перпендикулярное направлению силы  $\vec{F}$  (рис. 3,б).

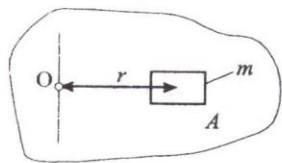


Рис. 4

Величину, равную произведению массы материальной точки на квадрат расстояния от нее до центра вращения, называют *моментом инерции материальной точки относительно точки O*. Единицей измерения момента инерции в системе СИ является  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$  (рис. 4):

$$J = m \cdot r^2. \quad (19)$$

В случае твердого тела произвольной формы момент инерции характеризуется распределением массы в этом теле и определяется суммой моментов инерции совокупности материальных точек, на которые можно разбить любое твердое тело:

$$J = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2, \quad (20)$$

где  $\Delta m_i$  – масса  $i$ -й материальной точки;  $r_i$  – расстояние от  $i$ -й материальной точки до оси вращения.

Момент инерции служит мерой инертности тела при вращении и, таким образом, играет ту же роль, что и масса в случае поступательного движения. Однако в отличие от массы тела, которая при обычных условиях остается неизменной, момент инерции можно легко менять. Момент инерции вращающегося тела простой геометрической формы (сплошной диск, шар, цилиндр и др.) можно рассчитать аналитически.

В зависимости от формы тела и выбранной оси вращения твердые тела одной и той же массы имеют различные моменты

инерции. Так, момент инерции полого цилиндра радиуса  $R$  относительно его оси симметрии равен:

$$J_{\text{пол.ц}} = mR^2; \quad (21)$$

сплошного однородного шара, вращающегося относительно оси, проходящей через его центр:

$$J_{\text{ш}} = \frac{2}{5} mR^2; \quad (22)$$

сплошного однородного цилиндра, вращающегося относительно своей оси симметрии:

$$J_{\text{спл.ц}} = \frac{1}{2} mr^2. \quad (23)$$

### Момент инерции тела относительно произвольной оси вращения (теорема Штейнера)

Параллельное смещение оси вращения, проходящей через центр масс, приводит к увеличению момента инерции данного тела. Момент инерции тела относительно произвольной оси  $AA'$  ( $J_A$ ) (рис. 5) равен моменту инерции относительно оси  $OO'$ , проходящей через центр масс ( $J_O$ ) параллельно этой произвольной оси, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между этими осями:

$$J_A = J_O + mS^2, \quad (24)$$

где  $J_O = J_0 = \sum m_i r_i^2$ ;  $m$  – масса тела;

$S$  – расстояние между осями.

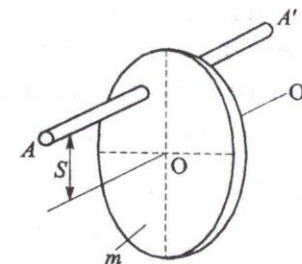


Рис. 5

Уравнение (24) выражает теорему Штейнера, устанавливающую связь между  $J_A$  и  $J_O$ .

Для тела сложной геометрической формы и при неравномерном распределении массы вращающегося тела по радиусу относительно

оси момент инерции определяется экспериментальным способом. Рассмотрим это на примере диска (1) сложной геометрической формы (рис. 6), вращающегося вокруг оси, проходящей через центр масс.

К шкиву (2) прикреплена нить длиной  $l$  с грузом (3) массой  $m$ .

Вращая диск, наматывают нить на шкив, и груз поднимают на высоту  $h$  от нижнего положения. Поднятый груз приобретает потенциальную энергию  $mgh$  (рис. 6,а).

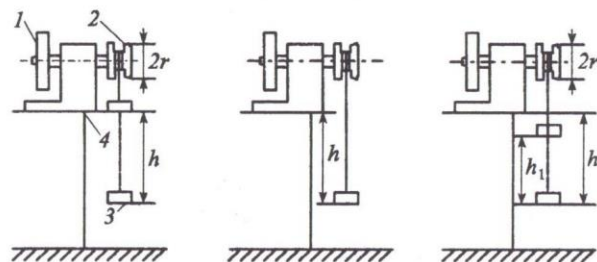


Рис. 6

Если груз отпустить, то он под действием силы тяжести будет опускаться вниз, натягивая нить и вращая диск. Опускание груза продолжается до нижнего положения, определяемого длиной нити. Высота падения груза равна  $h$  (рис. 6,б). При падении потенциальная энергия груза преобразуется в кинетическую энергию поступательного движения груза  $1/2mv^2$  и кинетическую энергию вращательного движения диска  $1/2J\omega^2$ .

Часть потенциальной энергии затрачивается на работу по преодолению сил трения в опорах:

$$A = F_{\text{тр}} \cdot h. \quad (25)$$

Согласно закону сохранения энергии:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + F_{\text{тр}} \cdot h, \quad (26)$$

где  $m$  – масса груза;  $h$  – высота падения груза;  $v$  – скорость поступательного движения груза;  $J$  – момент инерции диска;  $\omega$  – угловая скорость вращения диска;  $F_{\text{тр}}$  – сила трения.

Для расчета момента инерции  $J$  диска физические величины  $v$ ,  $\omega$  и  $F_{\text{тр}}$  можно выразить через экспериментально измеряемые высоту  $h$  и время  $\tau$  падения груза.

Так как движение груза равноускоренное, то его скорость равна:

$$v = 2h/\tau, \quad (27)$$

где  $\tau$  – время падения груза.

Угловая скорость вращения диска:

$$\omega = 2h/r\tau, \quad (28)$$

где  $r$  – радиус шкива 2 (см. рис. 6,а).

Сила трения  $F_{\text{тр}}$  рассчитывается следующим образом. Груз массой  $m$ , падая с высоты  $h$ , достигает нижней точки, ограничиваемой длиной нити. Раскрученный диск продолжает вращаться по инерции, наматывая нить на шкив. Вследствие этого груз поднимается на высоту  $h_1 < h$  (рис. 6,в). Приобретенная при таком подъеме груза потенциальная энергия выразится как  $mgh_1$ .

Убыль потенциальной энергии обусловлена расходом ее на преодоление сил трения:

$$mgh - mgh_1 = F_{\text{тр}}(h + h_1). \quad (29)$$

Отсюда

$$F_{\text{тр}} = mg \frac{h - h_1}{h + h_1}. \quad (30)$$

Окончательную формулу для расчета момента инерции диска получаем подстановкой выражений (27), (28), (30) в формулу (26):

$$J = mr^2 \left[ g\tau^2 \cdot \frac{h_1}{h(h - h_1)} - 1 \right]. \quad (31)$$



### Экспериментальная часть

Приборы и принадлежности: стальной диск сложной формы на валу и опорах качения, измерительная линейка, штангенциркуль, секундомер, нить с грузом.

#### Порядок выполнения работы

1. Определить радиус  $r$  шкива 2 (см. рис. 6,а), измерив штангенциркулем его диаметр. Измерение произвести один раз, результат занести в табл. 4. Значение массы груза  $m$ , указанного на нем, и высоты  $h$  также занести в эту таблицу.

Таблица 4

№ п/п	$h$ , м	$\tau$ , с
1		
2		
3		

2. Прикрепить нить одним концом к шкиву, другим – к грузу. Вращая диск, установить груз нижним торцом по нижней плоскости основания установки 4 (см. рис. 6,а).

3. Отпустить шкив. Измерить линейкой с точностью до 1 мм высоту  $h$  падения груза.

4. Повторно поднять груз и определить с точностью до 0,01с время  $\tau$  падения груза с высоты  $h$ . Повторить измерение времени  $\tau$  падения груза еще два раза.

5. Определить высоту  $h_1$  подъема груза диском при его вращении по инерции. Повторить измерение  $h_1$  еще 2 раза. Результаты всех измерений занести в табл. 5.

6. Обработать результаты измерения времени  $\tau$  падения груза с высоты  $h$  и высоты  $h_1$  подъема груза по методике обработки результатов прямого измерения.

7. Определить момент инерции  $J_{\text{диска}}$  по методике косвенных измерений. При расчетах принимать переменными величинами  $m$ ,  $h_1$ ,  $\tau$ , а  $\Delta m = 10^{-3}$  кг.

8. Сделать выводы по работе.

### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5

## ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

Цель работы: экспериментальная проверка основного закона динамики вращательного движения.

### Теоретическая часть

#### Основной закон динамики вращательного движения

Под действием момента силы  $\vec{M}$  закрепленное на оси твердое тело приобретает угловое ускорение  $\vec{\epsilon}$ . Полный момент действующей на данное тело силы равен сумме моментов всех сил, действующих на отдельные элементы  $\Delta m_i$  массы тела.

Пусть  $m = \Delta m_1 + \Delta m_2 + \Delta m_3 \dots$  – масса тела, равная сумме отдельных элементов массы;  $r_i$  – расстояние элемента массы  $\Delta m_i$  от оси вращения. Угловое ускорение, с которым вращается твердое тело, одинаково у всех элементов массы.

Так как момент силы равен:  $\vec{M} = \vec{F} \cdot \vec{r}$ , а согласно второму закону Ньютона (в случае  $m = \text{const}$ ):

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

то

$$\vec{M} = m\vec{a}\vec{r} = m \frac{\Delta \vec{v}}{d\tau} \vec{r} = m \frac{\vec{r} \Delta \omega}{\Delta \tau} \vec{r} = m r^2 \epsilon; \quad (32)$$

$$M_{\text{полн}} = \sum \epsilon \Delta m_i r_i^2. \quad (33)$$



Так как угловое ускорение  $\varepsilon = \text{const}$ , то  $M_{\text{полн}} = \varepsilon \sum \Delta m_i r_i^2$ , и окончательно:

$$\vec{M}_{\text{полн}} = J \vec{\varepsilon}. \quad (34)$$

Это уравнение представляет собой основной закон динамики вращательного движения тела.

Если момент инерции не постоянен, то

$$\vec{M}_{\text{полн}} = \frac{d(\vec{J}\vec{\omega})}{d\tau} \quad (35)$$

или

$$\vec{M}_{\text{полн}} = \frac{d\vec{L}}{d\tau}, \quad (36)$$

где  $\vec{L} = \vec{J}\vec{\omega}$  – момент импульса (или кинетический момент тела).

#### Экспериментальное определение момента инерции

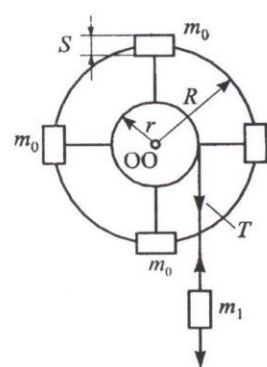


Рис. 7

В настоящей работе проверка основного закона динамики вращательного движения осуществляется с помощью маятника Обербека, представляющего собой конструкцию (рис. 7), состоящую из шкива радиуса  $r$ , вращающегося около оси  $OO$ , четырех стержней, расположенных под прямым углом друг к другу и четырех одинаковых цилиндрических грузов  $m_0$ , которые можно перемещать вдоль стержней и закреплять на определенном расстоянии от оси. Грузы

закрепляются симметрично, т.е. так, чтобы центр масс системы совпал с осью вращения. Маятник приводится во вращение под действием момента силы, определяемого по формуле:

$$M = Tr = m(g - a)r, \quad (37)$$

где  $T$  – натяжение нити;  $m$  – масса груза;  $a$  – линейное ускорение, с которым движется груз.

Если через  $h$  обозначить пройденный в равноускоренном движении массой  $m$  путь, то ускорение  $a$  найдем по формуле:

$$a = 2h/\tau^2. \quad (38)$$

С учетом формулы (38) формулу (37) для расчета момента силы запишем в виде:

$$M = mr(g - 2h/\tau^2). \quad (39)$$

Линейное и угловое ускорения связаны соотношением:

$$a = \varepsilon r. \quad (40)$$

Сопоставив (38) и (40), найдем:

$$\varepsilon = \frac{2h}{r\tau^2}. \quad (41)$$

Из выражения (34) следует:

$$J = M/\varepsilon. \quad (42)$$

Таким образом, из соотношений (39), (41), (42), экспериментально измерив  $h$  и  $\tau$ , и зная массу груза  $m$  и радиус шкива  $r$ , можно найти момент инерции прибора:

$$J = mr^2 \left( \frac{g\tau^2}{2h} - 1 \right). \quad (43)$$

Момент инерции прибора можно также определить расчетным путем по формуле:

$$J = J_{\text{крест}} + 4m_0R^2, \quad (44)$$

где  $J_{\text{крест}}$  – момент инерции крестовины (известен), а  $J = m_0R^2$  – момент инерции груза;  $m_0$  – масса каждого груза;  $R$  – расстояние от центра масс каждого из четырех грузов до оси вращения.

В заключение отметим, что уравнения (41), (42) получены без учета сил трения в опорах маятника.

## Экспериментальная часть

Приборы и принадлежности: основной прибор – маятник Обербека с двумя сменными грузами, масштабная линейка, секундомер.

Описание экспериментальной установки (см. рис. 7). Основные параметры прибора: радиус шкива  $r = 17$  мм; момент инерции крестовины  $J_{\text{крест}} = 0,005$  кг·м<sup>2</sup>, масса цилиндрического груза  $m_0 = 0,135$  кг; высота цилиндрического груза  $S = 0,025$  м; массы грузов  $m_1 = 0,1$  кг;  $m_2 = 0,2$  кг;  $m_3 = 0,3$  кг.

### Порядок выполнения работы

1. Закрепить грузики  $m_0$  на некотором расстоянии от оси так, чтобы крестовина находилась в безразличном равновесии, чего добиваются установлением равновесия крестовины в двух ее взаимно перпендикулярных плоскостях с помощью малых перемещений грузов.

2. Намотать на шкив нить с грузом  $m_1$ . Линейкой измерить высоту груза над уровнем пола.

3. Опустить крестовину и измерить секундомером время  $\tau$  падения груза массой  $m_1$  с высоты  $h$ . Опыт повторить три раза, найти среднее значение времени падения  $\tau_{\text{ср}}$ .

4. Подставив в формулы (39) и (41) значения величины  $r$ ,  $h$ ,  $\tau_{\text{ср}}$  и массы  $m_1$ , вычислить  $M_1$  и  $\epsilon_1$ .

5. Повторить аналогичную процедуру с грузами массой  $m_2$  и  $m_3$ .

6. Экспериментально измеренные величины  $h$  и  $\tau_{\text{ср}}$  и вычисленные значения  $M$ ,  $\epsilon$ ,  $J$  записать в табл. 5.

Таблица 5

Номер опыта	$h$ , м	$\tau_{\text{ср}}$ , с	$M$ , Н·м	$\epsilon$ , с <sup>-2</sup>	$J_{\text{расч}}$ , кг·м <sup>2</sup>	$J$ , кг·м <sup>2</sup>
1						
2						
3						

7. Результаты эксперимента представить в виде графика зависимости  $M = f(\epsilon)$ . Из графика определить значение момента инерции прибора  $J_3$ .

При расчетном определении момента инерции:

1. Определить расстояние  $R$  от центра тяжести грузиков  $m_0$  до оси вращения. Для этого измерить расстояние  $l$  между наружными концами грузиков, закрепленных на двух стержнях, расположенных на одной прямой, проходящей через ось крестовины. Тогда:  $R = (l - s)/2$ , где  $s$  – высота груза.

2. Подставив в формулу (44) значения  $J_0$ ,  $m_0$ ,  $R$ , определить расчетное значение момента инерции прибора  $J_{\text{рас}}$ .

3. Сравнить момент инерции, определенный из эксперимента по тангенсу угла наклона линии  $J_3$  со значением  $J_{\text{рас}}$ , вычисленным по формуле (44).

4. Пользуясь построенным графиком, найти момент сил трения.

### Результаты измерений

Результаты измеренных и расчетных величин представить в виде следующей таблицы.

Сделать выводы о проделанной работе



ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ  
СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ  
С ПОМОЩЬЮ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА**

Цель работы: определение величины ускорения свободного падения методом, основанным на измерении периода колебаний «оборотного» маятника.

**Теоретическая часть**

Движение тела только под действием силы тяжести называется *свободным падением*. Свободно падающее тело движется равноускоренно с постоянным ускорением  $\vec{g}$ , называемым ускорением свободного падения. Экспериментально установлено, что вблизи поверхности Земли любой свободный предмет падает по направлению к центру Земли с ускорением  $9,8 \text{ м/с}^2$ . Это ускорение принято обозначать буквой латинского алфавита  $g$ . Ускорение свободного падения не зависит ни от массы, ни от состава, ни от начальной скорости тела. Если сопротивление воздуха является существенным, то ускорение оказывается меньше.

Считают, что  $g$  – положительная величина. Поэтому, если ось  $X$  направлена вверх (направление движения тела), то ускорение отрицательно  $\vec{a} = -\vec{g}$ .

Величина  $g$  не зависит от свойств падающих тел, но зависит от географической широты местности и высоты над уровнем моря.

На полюсе  $g_{90} = 9,832213 \text{ м/с}^2$ , на экваторе  $g_0 = 9,78 \text{ м/с}^2$  на широте  $45^\circ$   $g_{45} = 9,8063 \text{ м/с}^2$ . Стандартное («нормальное») значение, принятое при построении систем единиц,  $g = 9,80665 \text{ м/с}^2$ , а в технических расчетах обычно принимают  $g = 9,82 \text{ м/с}^2$ .

Измерение величины свободного падения (и, соответственно, силы тяжести) имеет важное теоретическое и прикладное значение в геофизике, геодезии, геологии, космонавтике и является основой науки, именуемой *гравиметрия*. По измеренным значениям  $g$  в различных точках Земли определяется ее фигура (геоида) и распределение масс в ее недрах, а данные о различных аномалиях (отклонениях силы тяжести от нормальной, определяемой геометрическими характеристиками геоиды) служат для поиска и разведки месторождений полезных ископаемых.

**Методы измерения ускорения свободного падения**

Приборы для измерения силы тяжести и соответствующего ускорения свободного падения называются гравиметрами. Их разделяют на *статические* и *динамические*. Статические гравиметры основаны на уравнивании силы тяжести упругой силой прибора. Динамические гравиметры подразделяются на *струнные*, *маятниковые* и *баллистические*.

Струнные гравиметры применяются для относительных измерений  $g$  (для измерения отклонений  $g$  от «нормальной» величины, принятой для некоторого пункта) и основаны на изменении частоты собственных колебаний струны, натяжение которой определяется грузом (силой тяжести в данном месте). Принцип действия маятниковых гравиметров основан на изменении периода свободных колебаний физического маятника в зависимости от  $g$ .

В настоящей работе используется зависимость периодов колебаний математического или физического маятников от ускорения свободного падения.



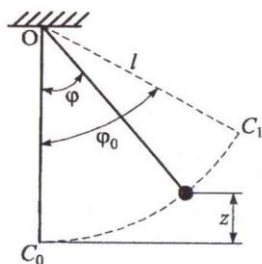


Рис. 8

Математическим маятником (ММ) (рис. 8) называется материальная точка, подвешенная к неподвижной точке на невесомой нерастяжимой нити (или стержне) и совершающая под действием силы тяжести движение в вертикальной плоскости. Период  $T$  малых колебаний ММ около положения равновесия не зависит от «размаха» колебаний (с точностью до 1% при наибольшем угле отклонения  $\varphi < 23^\circ$  нити от вертикального положения):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (45)$$

где  $l$  – длина нити маятника;  $g$  – ускорение свободного падения.

Физическим маятником называется твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести относительно неподвижной горизонтальной оси  $OO_1$  (на рис. 9, где  $O$  – ось качаний;  $O_1$  – центр качаний;  $C$  – центр масс маятника;  $l_{\text{прив}}$  – приведенная длина физического маятника) она проектируется в точку  $O$  на плоскости чертежа), не проходящей через его центр масс  $C$ .

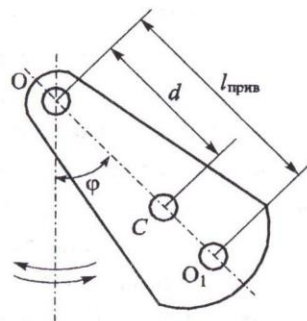


Рис. 9

Период малых колебаний физического маятника равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}}, \quad (46)$$

где  $J$  – момент инерции маятника относительно оси  $O$ ;  $m$  – масса маятника;  $g$  – ускорение свободного падения;  $d$  – расстояние от центра масс  $C$  до оси  $OO$ .

Приведенной длиной физического маятника называется длина  $l_{\text{привед}}$  математического маятника, имеющего такой же период колебаний, как данный физический маятник.

Сравнив формулу (46) с формулой (45) для периода колебаний математического маятника, получим:

$$l_{\text{привед}} = \frac{J}{md}. \quad (47)$$

Точка  $O_1$ , лежащая на прямой  $OC$  на расстоянии  $OO_1 = l_{\text{привед}}$ , называется *центром качаний физического маятника*.

В данной работе для определения ускорения свободного падения используется обратный маятник – физический маятник, у которого существуют две взаимно параллельные оси качаний  $O_1$  и  $O_2$ , соответствующие одинаковым периодам колебаний (рис. 10).

Периоды колебаний обратного маятника относительно осей  $O_1$  и  $O_2$  определяются формулами:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{J_1 / mgl_1^2} \quad \text{и} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{J_2 / mgl_2^2}, \quad (48)$$

где  $J_1$  и  $J_2$  – моменты инерции маятника относительно осей  $O_1$  и  $O_2$ ;  $l_1$  и  $l_2$  – расстояния от центра тяжести маятника до осей качания  $O_1$  и  $O_2$ .

Используя теорему Штейнера для моментов инерции  $J_1$  и  $J_2$ , напомним сведущие выражения:

$$J_1 = J_0 + ml_1^2; \quad J_2 = J_0 + ml_2^2, \quad (49)$$

где  $J_0$  – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной соответственно осям  $O_1$  и  $O_2$ .

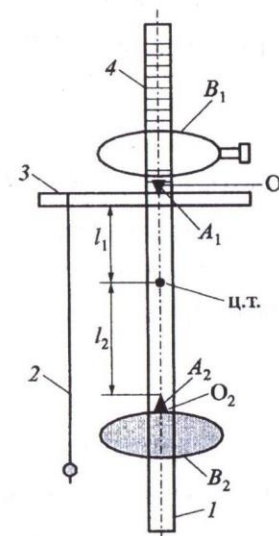


Рис. 10

Из выражений (48) и (49) получаем:

$$T_1^2 = 4\pi^2 \left( \frac{J_0}{mgl_1} + \frac{l_1}{g} \right); \quad T_2^2 = 4\pi^2 \left( \frac{J_0}{mgl_2} + \frac{l_2}{g} \right). \quad (50)$$

Умножая первое уравнение (50) на  $l_1$ , а второе – на  $l_2$  и вычитая из первого уравнения второе, получим:

$$T_1^2 l_1 - T_2^2 l_2 = \frac{4\pi^2}{g} (l_1^2 - l_2^2). \quad (51)$$

Учитывая, что периоды колебаний оборотного маятника относительно осей  $O_1$  и  $O_2$  равны ( $T_1 = T_2 = T$ ), из (51) получаем:

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} (l_1 + l_2), \quad (52)$$

где  $(l_1 + l_2)$  – расстояние между осями качаний  $O_1$  и  $O_2$ , соответствующее одинаковым периодам колебаний  $T$ .

Из выражения (52) найдем период колебаний оборотного маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_1 + l_2}{g}}. \quad (53)$$

Расстояние  $(l_1 + l_2)$  между осями качаний  $O_1$  и  $O_2$  является приведенной длиной оборотного маятника.

### Экспериментальная часть

Приборы и принадлежности: оборотный маятник, секундомер, линейка.

Описание лабораторной установки. Установка для выполнения настоящей работы состоит из оборотного маятника  $I$  с двумя неподвижными грузами  $B_1$  и  $B_2$  (рис. 10). Опора 3 жестко закреплена. Положение опоры  $A_1$  в процессе выполнения работы можно изменять.

Перемещая опору  $A_1$ , добиваются такого положения, при котором периоды колебаний оборотного маятника относительно осей качания  $O_1$  и  $O_2$  будут равны.

### Порядок выполнения работы

1. Установить вертикальную опору маятника при помощи отвеса 2 и уравнительных винтов в основании установки.

2. Закрепить опору  $A_1$  в одном из крайних положений и подвесить на ней маятник. Измерить время 10 полных колебаний ( $\tau_{10}$ ). Амплитуда колебаний маятника не должна быть более  $5^\circ$ . Определить период  $T_1$ .

3. Подвесить маятник на опоре  $A_2$ . Измерить время 10 полных колебаний и определить период  $T_2$ . Измерить расстояние между осями качаний  $l_1 + l_2$ .

4. Сместить опору  $A_1$  на 2 см по шкале 4 от предыдущей отметки и вновь измерить периоды колебаний относительно обеих опор  $T_1$  и  $T_2$  и расстояние  $l_1 + l_2$  (пп. 2 и 3). Результаты всех измерений и вычислений занести в табл. 6.

Таблица 6

Результаты измерений и вычислений

Номер опыта	Расстояние между осями $O_1$ и $O_2$ ( $l_1 + l_2$ ), м	Время 10 колебаний, с		Периоды колебаний, с	
		Относительно оси $O_1$ , $\tau_1$	Относительно оси $O_2$ , $\tau_2$	Относительно оси $O_1$ , $T_1$	Относительно оси $O_2$ , $T_2$
1 ⋮ 10					

5. Снова сместить опору  $A_1$  на 2 см и проделать все, что указано в пп. 2 и 3. Так продолжать до тех пор, пока опора  $A_1$  не займет предельного положения (опыт повторять не менее 10 раз).



6. По результатам измерений построить графики зависимости периодов  $T_1$  и  $T_2$  от расстояния между осями качаний  $l_1 + l_2$  (рис. 11).

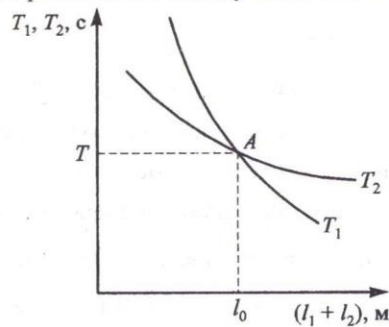


Рис. 11

Пересечение зависимостей периодов колебаний  $T_1, T_2$  оборотного маятника от расстояния  $(l_1 + l_2)$  между осями качаний в точке  $A$  показывает приведенную длину маятника  $l_0$ .

Точка пересечения кривых определяет положение опоры  $A_1$ , при котором периоды  $T_1$  и  $T_2$  равны между собой ( $T_1 = T_2 = T$ ), и расстояние между осями качаний  $O_1$  и  $O_2$  равно приведенной длине оборотного маятника  $L$ .

7. Подставляя в формулу (52) полученные из графиков значения  $T$  и  $(l_1 + l_2)$ , вычислить ускорение свободного падения.

8. Сравнить полученное значение  $g$  с табличным (справочным) и вычислить абсолютную и относительную ошибки.

9. Сделать выводы.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7

### СОУДАРЕНИЕ ТЕЛ

**Цель работы:** Изучение законов сохранения импульса и энергии на примере соударения шаров. Проведение экспериментов по соударению упругих и неупругих тел.

#### Теоретическая часть

Примерами применения законов сохранения импульса и энергии являются соударения тел.

*Соударением*, или *ударом*, называют столкновение тел, при котором взаимодействие тел длится малое время ( $10^{-1} \dots 10^{-3}$  с), а развивающиеся на площадках контакта ударные или мгновенные силы велики ( $p$  до  $10^4 \dots 10^5$  кгс/см<sup>2</sup>). Это позволяет пренебречь действующими на сталкивающиеся тела внешними силами и систему тел рассматривать как замкнутую механическую систему, к которой применимы законы сохранения.

Следствиями удара могут быть остаточные деформации, нагревание тел, изменение механических свойств материалов тел, а при скоростях удара больше критических — разрушение тел. Например, критические скорости составляют для стали 150 м/с, меди 15 м/с.

Процесс соударения двух тел разделяют на две фазы.

*Первая фаза* начинается с момента соприкосновения точек  $A$  и  $B$  тел (рис. 12). Прямая  $n$ , проходящая через точки соприкосновения



точек  $A$ ,  $B$ , и нормальная к поверхности тел, называется *линией удара*. Пусть скорость движения первого тела  $v_1$ , второго  $v_2$ , а точки  $C_1$  и  $C_2$  – центры тяжести тел.

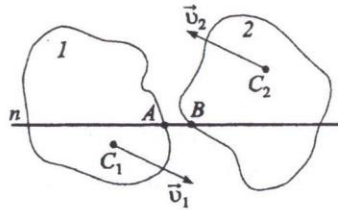


Рис. 12

Проекциями скоростей  $\vec{v}_A$  и  $\vec{v}_B$  на линию удара (общую нормаль) являются  $v_{An}$  и  $v_{Bn}$ . Следовательно, относительная скорость сближения точек  $A$  и  $B$  тел до удара будет равна  $v_{An} - v_{Bn}$ . К концу 1-й фазы удара сближение тел прекращается. Часть их кинетической энергии переходит в потенциальную энергию деформации.

Во второй фазе потенциальная энергия упругой деформации обратно переходит в кинетическую энергию тел. Тела начинают расходиться и к концу 2-й фазы точки  $A$  и  $B$  будут иметь относительную скорость расхождения  $v'_{An} - v'_{Bn}$ . Для абсолютно упругих тел механическая энергия восстанавливается полностью и  $|v_{An} - v_{Bn}| = |v'_{An} - v'_{Bn}|$ . Удар абсолютно неупругих тел заканчивается на первой фазе и  $v'_{An} - v'_{Bn} = 0$ .

При ударе реальных тел механическая энергия к концу удара восстанавливается лишь частично из-за потерь на остаточные деформации и нагревание тел. Поэтому  $|v'_{An} - v'_{Bn}| < |v_{An} - v_{Bn}|$ . Для учета этих потерь вводится коэффициент восстановления  $K$ , равный отношению нормальных составляющих относительной скорости тел до и после удара:

$$K = \frac{|v'_{An} - v'_{Bn}|}{|v_{An} - v_{Bn}|}. \quad (54)$$

Коэффициент восстановления  $K$  определяется экспериментально и зависит от физических свойств материалов тел. Например, при соударении тел: из дерева  $K \approx 0,5$ ; стали – 0,55; стекла – 0,94; свинца – 0. Для абсолютно упругого удара  $K = 1$ , а для абсолютно неупругого  $K = 0$ .

Если центры тяжести тел  $C_1$  и  $C_2$  лежат на линии удара, то удар называется *центральной*. Удар считается прямым при скоростях движения тел  $v_1$  и  $v_2$ , параллельных линии удара. В обратных случаях удар является нецентральной и косым.

Наиболее полно разработана теория удара абсолютно упругих тел. Задача удара неупругих тел является более сложной.

Рассмотрим краткую теорию центральных прямых абсолютно упругих и абсолютно неупругих ударов.

*Абсолютно упругим ударом* называют соударение двух тел, при котором суммарные кинетические энергии соударяющихся тел до и после удара равны. При этом сначала кинетическая энергия тел полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации тел и далее происходит обратный переход. Остаточные деформации тел отсутствуют.

Для абсолютно упругого удара выполняются законы сохранения суммарного импульса и полной энергии.

Пусть  $\vec{v}_1 > \vec{v}_2$  – скорости шаров массами  $m_1$  и  $m_2$  до удара, а  $v'_1$  и  $v'_2$  – после удара (рис. 13).

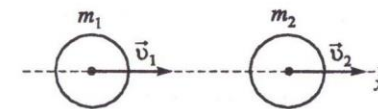


Рис. 13

Уравнения сохранения импульса и энергии запишутся в виде

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2; \quad (55)$$

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v'^2_1 + m_2 v'^2_2. \quad (56)$$

В результате решения этой системы уравнений получаем:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}; \quad (57)$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}. \quad (58)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи абсолютно упругого удара.

Пусть скорость второго тела до удара равна нулю, т.е.  $v_2 = 0$ .

а) Если  $m_1 = m_2$ , то из уравнений (57) и (58) следует, что  $v_1' = 0$ ,  $v_2' = v_1$ , т.е. после удара первый шар остановится, а второй будет двигаться в том же направлении со скоростью первого шара  $v_2' = v_1$ .

б) При  $m_1 > m_2$  оба шара будут двигаться в том же направлении: первый со скоростью  $v_1' = v_1$ , второй со скоростью  $v_1' < v_2' < v_1$ .

в) Если  $m_2 > m_1$ , то первый шар отскакивает в обратную сторону, второй шар будет двигаться в направлении первого до удара со скоростью  $v_1' < v_1$ .

При  $m_2 = m_1$ , из формул (57) и (58) получаем:  $v_1' = v_2$  и  $v_2' = v_1$ , т.е. при соударении шаров равной массы они «обмениваются» скоростями.

Близкими к абсолютно упругим ударам считают столкновение двух упругих твердых шаров, например, бильярдных; столкновения между атомами, ядрами, элементарными частицами.

*Абсолютно неупругим ударом* называют столкновение двух тел, при котором тела «слипаются» и движутся далее как одно целое. При таких соударениях часть начальной кинетической энергии

превращается в тепловую и затрачивается на остаточную деформацию тел. Поэтому суммарная кинетическая энергия механической системы не сохраняется, а уменьшается. Суммарный импульс тел остается постоянным.

В этом случае закон сохранения импульса системы в общем виде (без учета знаков) записывают в виде:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v',$$

где  $v' = v_1' = v_2'$  — скорость «слипшихся» после удара тел.

Отсюда

$$v' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}. \quad (59)$$

Если массы тел равны  $m_1 = m_2$ , то  $v' = \frac{v_1 + v_2}{2}$ .

Примерами абсолютно неупругого удара являются столкновение шаров из пластилина, глины, сцепление двух железнодорожных вагонов при движении.

Если в формуле (59) принять  $v_2 = 0$  и  $m_2 \gg m_1$ , то получается  $v' \ll v_1$ , т.е. почти вся кинетическая энергия переходит в другие формы энергии.

Примерами неупругих ударов служатковка, штамповка, клепка, забивание свай, гвоздей, перемещение в среде с большим сопротивлением.

### Экспериментальная часть

1. Приборы и принадлежности: экспериментальная установка, состоящая из основания, штатива, шкалы, двух подвесов, магнитного держателя шара, набора упругих и неупругих шаров.

Рассмотрим центральный удар двух шаров 1 и 2 массами  $m_1$  и  $m_2$ , подвешенных на нитях длиной  $l_1 = l_2 = l$  (рис. 14).



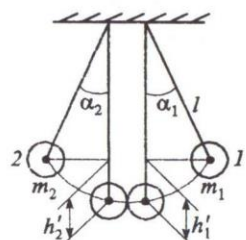


Рис. 14

Шар 1, отклоненный на первоначальный угол  $\alpha_1$ , перед соударением развивает скорость  $\vec{v}_1$ , которую можно определить из закона сохранения энергии:

$$m_1 g h_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2},$$

где  $h_1$  – высота подъема центра шара 1, соответствующая начальному углу  $\alpha_1$ .

Так как  $h_1 = l - l \cos \alpha = 2l \sin^2(\alpha_1/2)$ , то:

$$v_1 = 2\sqrt{gl} \cdot \sin \frac{\alpha_1}{2}. \quad (60)$$

После соударения шар 2 приобретает скорость  $v'_2$ , определяемую аналогично:

$$v'_2 = 2\sqrt{gl} \cdot \sin \frac{\alpha'_2}{2}. \quad (61)$$

При выводе формул (60) и (61) пренебрегли потерями энергии на сопротивление воздуха и трение в подвесах.

**Задание 1.** 1. Подвесить два одинаковых стальных шара диаметрами  $d = 20$  мм (случай I:  $m_1 = m_2 = m$ ).

2. Шар 2 установить в равновесное положение  $\alpha_2 = 0$ ,  $v_2 = 0$ , а шар 1 отвести на начальный угол  $\alpha_1 = 10^\circ$ .

3. Отпустить шар 1 и после соударения по шкале измерить угол  $\alpha'$  отклонения шара 2. Результат записать в табл. 7.

Таблица 7

Номер измерения	1	2	3	4	5	$\alpha'_{2cp}, ^\circ$
$\alpha'_2, ^\circ$						

4. Согласно теоретической части при  $m_1 = m_2$ ,  $v_2 = 0$  и абсолютно упругом ударе шар 1 после соударения должен остановиться ( $v'_1 = 0$ ). Убедитесь в этом на опыте.

5. Повторить пп. 2 и 3 еще четыре раза.

6. Обработать результаты пяти измерений угла  $\alpha'_2$  по методике прямых измерений. Записать результат прямых измерений.

7. Вычислить объем и массу шаров.

8. По формуле (60) определить скорость  $v_1$  шара 1 перед соударением и импульс  $p_1 = m \cdot v_1$ .

9. По формуле (61) рассчитать скорость  $v'_2$  шара 2 после соударения, которая обеспечит подъем шара 2 на высоту  $h'_2$  и отклонение на угол  $\alpha'_2$ . Определить импульс шара 2:  $p'_2 = m \cdot v'_2$ .

10. Вычислить коэффициент восстановления скорости  $k_e = \frac{v'_2}{v_1}$ .

11. Сделать вывод о соответствии выполненного опыта случаю абсолютно упругого удара.

**Задание 2.** 1. В качестве шара 1 подвесить стальной шар диаметром  $d = 36$  мм, а в качестве шара 2 – стальной шар диаметром  $d = 20$  мм (случай II:  $m_1 > m_2$ ).

2. Шар 2 установить в равновесное положение  $\alpha_2 = 0$ ,  $v_2 = 0$ , а шар 1 отвести на начальный угол  $\alpha_1 = 10^\circ$ .

3. Отпустить шар 1 и после соударения по шкале измерить угол  $\alpha'_2$  отклонения шара 2. Результат записать в табл. 8.

Таблица 8

Номер опыта	1	2	3	4	5	$\alpha'_{cp}, ^\circ$
$\alpha'_2, ^\circ$						
$\alpha_1, ^\circ$						



4. Согласно теоретической части при  $m_1 > m_2$ ,  $v_2 = 0$  и абсолютно упругом ударе шары 1 и 2 после соударения будут двигаться в одном направлении со скоростями  $v_1$ ,  $v_2$  и отклонятся на углы  $\alpha'_1$  и  $\alpha'_2$ .

5. Повторить пп. 2 и 3 еще четыре раза.

6. Повторить пп. 2 и 3 пять раз для измерения угла  $\alpha'_1$  отклонения шара 1 после соударения.

7. Обработать результаты измерений углов  $\alpha'_2$  и  $\alpha'_1$  по методике прямых измерений. Записать результат прямых измерений.

8. Вычислить объемы и массы шаров.

9. По формуле (60) определить скорость  $v_1$  шара 1 перед соударением и импульс:  $p_1 = m \cdot v_1$ .

10. По формуле (61) рассчитать скорости  $v'_1$  и  $v'_2$  шаров после соударения. Определить импульсы  $p'_1$  и  $p'_2$  и суммарный импульс:  $p' = p'_1 + p'_2$ .

11. Вычислить коэффициент восстановления скорости:

$$k_c = \frac{|v'_2 - v'_1|}{v'_1}.$$

12. Определить, насколько уменьшился передаваемый импульс.

13. Сделать вывод о соответствии выполненного опыта случаю абсолютно упругого удара.

**Задание 3.** 1. В качестве шара 1 подвесить стальной шар диаметром  $d = 20$  мм, а в качестве шара 2 – пластилиновый.

2. Пластилиновый шар 2 установить в равновесное положение  $\alpha_2 = 0$ ,  $v_2 = 0$ , а стальной шар 1 отвести на начальный угол  $\alpha_1 = 10^\circ$ .

3. Отпустить шар 1 и после соударения по шкале измерить угол отклонения пластилинового шара 2. Результат записать в табл. 9.

Таблица 9

Номер измерения	1	2	3	4	5	$\alpha'_{2cp}, ^\circ$
$\alpha'_2, ^\circ$						

4. Согласно теории абсолютно неупругого удара после соударения шары «слипаются» и движутся в одном направлении с одной скоростью  $v' = v'_1 = v'_2$ . Убедитесь в этом на опыте.

5. Повторить пп. 2 и 3 еще четыре раза.

6. Обработать результаты пяти измерений угла  $v'_2$  по методике прямых измерений. Записать результат прямых измерений.

7. Вычислить объемы и массы шаров.

8. По формуле (60) определить скорость  $v_1$  шара 1 перед соударением и импульс  $p_1 = m \cdot v_1$ .

9. По формуле (61) рассчитать экспериментальные значения скорости  $v'_2 = v'_1 = v'_{\text{эксн}}$  шара 2 после соударения.

10. По формуле (59) рассчитать теоретическое значение скорости  $v'_{\text{расч}}$  шаров после соударения.

11. Определить расхождение  $v'_{\text{эксн}}$  и  $v'_{\text{расч}}$ :

$$\delta_v = \frac{|v'_{\text{эксн}} - v'_{\text{расч}}|}{v'_{\text{расч}}} \cdot 100\%.$$

12. Вычислить суммарный импульс шаров после соударения:

$$p' = v'(m_1 + m_2).$$

13. Сравнить значения импульсов  $p_1$  и  $p'$  системы до и после соударения. Сделать вывод о сохранении импульса и о виде соударения.

### Контрольные вопросы

1. Назвать кинематические параметры движения материальной точки и формулы для их определения.
2. Дать определения понятиям: момента силы, момента инерции, угловой скорости, углового ускорения, момента импульса точки и момента импульса тела.
3. Пояснить методику обработки результатов прямых измерений.
4. Пояснить методику обработки результатов косвенных измерений.
5. Что называется моментом инерции? Единицы его измерения.
6. Что является мерой инертности тела при поступательном и вращательном движениях?
7. Опишите последовательность определения момента инерции твердого тела методом физического маятника.
8. Как будет двигаться диск (см. рис. 6) при отсутствии трения? Выведите расчетную формулу для момента инерции.
9. Что характеризует момент инерции твердого тела? В чем заключается его влияние на движение тела?
10. Опишите последовательность определения момента инерции твердого тела при крутильных колебаниях методом сравнения с эталоном.
11. Поясните вывод уравнения крутильных колебаний и физический смысл входящих в него величин.

12. Почему график функции  $M = f(\epsilon)$  имеет линейный характер?
13. Меняется ли натяжение нити в зависимости от расстояния грузов до оси вращения?
14. Вывести расчетную формулу для определения  $\epsilon$ ,  $M$ ,  $J$ .
15. Почему линия на графике  $M = f(\epsilon)$  не проходит через начало координат?
16. Какой маятник называется физическим? Записать формулу для определения периода колебаний физического маятника.
17. В чем состоит отличие физического маятника от математического?
18. Чем отличается уравнение колебаний физического маятника от уравнения колебаний математического маятника?
19. Какой маятник называется оборотным? Каковы периоды его колебаний относительно осей  $O_1$  и  $O_2$ ?
20. Что такое приведенная длина оборотного (физического) маятника? Как она может быть определена?
21. Выведите формулу для определения ускорения силы тяжести по данным исследования колебаний оборотного маятника?
22. Указать две фазы процесса соударения тел.
23. Как вы понимаете коэффициент восстановления  $k_c$ ?
24. Дать определение абсолютно упругого удара, рассмотреть его частные случаи.
25. Дать определение абсолютно неупругого удара.
26. Какой удар считается неупругим?
27. Что понимается под баллистическим маятником?
28. Сформулируйте и запишите закон сохранения импульса.
29. Получите формулу (72) для относительной погрешности косвенного измерения.