

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ»
Институт компьютерных технологий и защиты информации
Кафедра прикладной математики и информатики

**Методические указания
для практических работ по дисциплине
«Линейная алгебра и аналитическая геометрия»**

Преподаватель:

д.т.н., профессор Емалетдинова Л.Ю.

Казань 2019



ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 1

1. Определить ранг матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -3 & 7 & -1 \\ 5 & -9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, использующей взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

2. Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор

$$\text{свободных членов имеет вид: } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} 19 & 28 & 40 \\ -3 & -3 & -7 \\ -5 & -8 & -10 \end{pmatrix}.$$

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0.$$

5. Найти угол между прямой $\begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ 3x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ и плоскостью $x + y + \sqrt{6}z = 0$.

Задание 2

1. Определить ранг матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 3 \\ -5 & 8 & 2 \\ 4 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, использующей взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

2. Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор

$$\text{свободных членов имеет вид: } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} 19 & 28 & 40 \\ 23 & -3 & -7 \\ -5 & -8 & -10 \end{pmatrix}.$$

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0.$$

5. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $(-1, -1, 3)$, параллельную прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z-5}{6}$ и $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-8}$.

Задание 3

1. Определить ранг матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & -7 \end{pmatrix}.$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, использующей взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

2. Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор

$$\text{свободных членов имеет вид: } b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} -31 & 52 & 146 \\ -7 & 13 & 31 \\ -5 & 8 & 24 \end{pmatrix}.$$

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0.$$

5. Найти точку Q , симметричную точке $P(1, 3, -4)$ относительно плоскости $3x + y - 2z = 0$.

Задание 4

2. Определить ранг матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 3 & -4 & 7 \\ 4 & -9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, использующей взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

3. Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор

$$\text{свободных членов имеет вид: } b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

4. Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} 14 & 69 & 87 \\ -11 & -62 & -81 \\ 7 & 41 & 54 \end{pmatrix}.$$

5. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 11 = 0.$$

6. Через точку $M(2, 1, 2)$ провести прямую, параллельную данной

$$\begin{cases} x - y + z + 2 = 0; \\ x + y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

Задание 5

1. Определить ранг матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, использующей взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

2. Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор

$$\text{свободных членов имеет вид: } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 24 \\ 8 & 3 & 32 \\ -3 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$5x^2 + 24xy - 5y^2 + 8x - 1 = 0.$$

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(1, -1, -1)$, перпендикулярно к прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{4}$.

Задание 6

1. Определить ранг матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 4 \\ 4 & -9 & -3 \\ 2 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, использующей взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

2. Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор

$$\text{свободных членов имеет вид: } b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} 21 & 36 & 66 \\ -6 & -11 & -18 \\ -3 & -5 & -10 \end{pmatrix}.$$

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 + 8 = 0.$$

5. Через точку $P(3, -2, -1)$ провести плоскость, перпендикулярную двум другим плоскостям $x - 3y + 4z + 1 = 0$ и $5x + y - 2z + 4 = 0$.

Задание 7

1. Определить ранг матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -5 \\ -5 & 7 & -7 \\ 8 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, использующей взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

2. Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор

$$\text{свободных членов имеет вид: } b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3. Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} 14 & -11 & 7 \\ 69 & -62 & 41 \\ 87 & -81 & 54 \end{pmatrix}.$$

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$3x^2 - 2xy - 3y^2 + 12y - 15 = 0.$$

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат, через точку $M(1, 2, 3)$, перпендикулярно плоскости $x - y + 2z - 4 = 0$.

Задание 8

1. Определить ранг матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & -8 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, используя взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

2. Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор

$$\text{свободных членов имеет вид: } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3. Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 7x - 12 = 0.$$

5. Через прямую $\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $x + 2y - z + 1 = 0$.

Задание 9

1. Определить ранг матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, используя взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

2. Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор

$$\text{свободных членов имеет вид: } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 24 & 32 & -9 \end{pmatrix}.$$

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0.$$

5. Найти углы между прямыми $\begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$ и $\frac{x-4}{5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-1}$.

Задание 10

1. Определить ранг матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 8 \\ 9 & 7 & 5 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, используя взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

2. Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор

$$\text{свободных членов имеет вид: } b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 24 & 32 & -9 \end{pmatrix}$$

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0.$$

5. Через прямую $\begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ и точку $M(2, 1, 1)$ провести плоскость.

Задание 11

1. Определить ранг матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 7 & -2 & 7 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, использующей взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

2. Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор

$$\text{свободных членов имеет вид: } b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} 21 & -6 & -3 \\ 36 & -11 & -5 \\ 66 & -18 & -10 \end{pmatrix}$$

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 = 0.$$

5. Через прямую $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

Задание 12

1. Определить ранг матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 2 & -7 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, использующей взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

2. Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор

$$\text{свободных членов имеет вид: } b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} 9 & 12 & 26 \\ 7 & 13 & 25 \\ -5 & -8 & -16 \end{pmatrix}$$

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$5x^2 + 14xy + 11y^2 + 12x - 7y + 19 = 0.$$

5. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(2, 3, 1)$ на

$$\text{прямую } \begin{cases} 3x + 2y + z + 1 = 0; \\ 2x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Задание 13

1. Определить ранг матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 5 & 9 & 8 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, использующей взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

2. Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор

$$\text{свободных членов имеет вид: } b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$25x^2 - 20xy + 4y^2 - 12x + 20y - 17 = 0.$$

5. Найти углы между прямыми $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x + y + z + 4 = 0 \\ 5x - 7y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$.

Задание 14

1. Определить ранг матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 7 & -9 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, использующей взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

2. Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор

$$\text{свободных членов имеет вид: } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 24 & 32 & -9 \end{pmatrix}$$

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$3x^2 - 8xy + 7y^2 + 8x - 15y + 20 = 0.$$

5. Через точку $(-1, 0, 4)$ провести прямую, параллельную плоскости $3x - 4y + z - 10 = 0$ так, чтобы она пересекала прямую

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}.$$

Задание 15

1. Определить ранг матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -3 & -2 & -5 \\ -4 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, использующей взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

2. Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор

$$\text{свободных членов имеет вид: } b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} -11 & -26 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$2x^2 + 10xy + 12y^2 - 7x + 18y - 15 = 0.$$

5. Через точку $M(-2, 3, 5)$ провести плоскость параллельную прямой

$$\frac{x+5}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{0} \text{ и перпендикулярную плоскости } x - z = 0.$$

Задание 16

1. Определить ранг матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -7 & 2 & -5 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, использующей взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

2. Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор

$$\text{свободных членов имеет вид: } b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & -5 \\ 12 & 13 & -8 \\ 26 & 25 & -16 \end{pmatrix}.$$

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$$

5. Через точку $M(2, 1, 1)$ провести прямую, параллельную прямой

$$\begin{cases} x - y + z + 2 = 0; \\ x + y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

Задание 17

1. Определить ранг матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ -9 & 8 & 4 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, использующей взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

2. Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор

$$\text{свободных членов имеет вид: } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3. Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0.$$

5. Через прямую $\begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ и точку $M(2, 1, 1)$ провести плоскость.

Задание 18

1. Определить ранг матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 5 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, использующей взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

2. Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор свободных членов имеет вид: $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} -31 & -7 & -5 \\ 52 & 13 & 8 \\ 146 & 31 & 24 \end{pmatrix}.$$

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 8 = 0.$$

5. Через линии пересечения плоскостей $\begin{cases} 3x + y - 2z - 6 = 0 \\ x - 2y + 5z - 1 = 0 \end{cases}$ провести плоскость, перпендикулярную первой плоскости.

Задание 19

1. Определить ранг матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 4 \\ 2 & -6 & -3 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, использующей взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

2. Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор свободных членов имеет вид: $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3. Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} 13 & 6 & 54 \\ 16 & 6 & 62 \\ -5 & -2 & -20 \end{pmatrix}.$$

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0.$$

5. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $(-1, -2, 3)$ параллельно прямым $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z-5}{6}$ и $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-8}$.

Задание 20

1. Определить ранг матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 7 & -7 \\ 3 & -5 & 2 \\ 8 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, используя взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

- Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор

$$\text{свободных членов имеет вид: } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} -22 & 20 & -12 \\ -18 & 16 & -9 \\ 10 & -10 & 7 \end{pmatrix}.$$

- Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 29 = 0.$$

- Через прямую $\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $x + 2y - z + 1 = 0$.

Задание 21

- Определить ранг матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 5 \\ 9 & -8 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, используя взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

- Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте

данного задания, вектор свободных членов имеет вид: $b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} -6 & -12 & 34 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

- Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0.$$

- Через линию пересечения плоскостей $\begin{cases} 3x + y - 2z + 6 = 0 \\ x + 2y + 5z - 1 = 0 \end{cases}$ провести плоскость, перпендикулярную первой плоскости.

Задание 22

- Определить ранг матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, используя взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

- Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор

свободных членов имеет вид: $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

- Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} 19 & 23 & -5 \\ 28 & -3 & -8 \\ 40 & -7 & -10 \end{pmatrix}$$

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0.$$

5. Найти угол между прямой $\begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ 3x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ и плоскостью $x + y + 6z = 0$.

Задание 23

1. Определить ранг матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 9 & 5 \\ 7 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, использующей взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

2. Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор

$$\text{свободных членов имеет вид: } b = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 24 & 32 & -9 \end{pmatrix}$$

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0.$$

5. Через прямую $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

Задание 24

1. Определить ранг матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 7 \\ 8 & -9 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, использующей взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

2. Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор

$$\text{свободных членов имеет вид: } b = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

3. Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} 13 & 16 & -5 \\ 6 & 6 & -2 \\ 54 & 62 & -20 \end{pmatrix}$$

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 2y - 1 = 0.$$

5. Найти расстояние между двумя плоскостями $3x - y + 2z - 1 = 0$ и $6x - 2y + 4z + 5 = 0$.

Задание 25

1. Определить ранг матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 13 \\ 7 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Вычислить обратную матрицу A^{-1} двумя способами: по формуле, использующей взаимную матрицу и определитель, а также методом Жордана – Гаусса.

2. Решить систему $Ax = b$ методом Жордана – Гаусса и по формуле Крамера. Матрица A задана в первом пункте данного задания, вектор

$$\text{свободных членов имеет вид: } b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Привести к диагональному виду следующую матрицу, осуществив преобразование подобия:

$$\begin{pmatrix} 19 & -3 & -5 \\ 28 & -3 & -8 \\ 40 & -7 & -10 \end{pmatrix}$$

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка. Определить вид кривой, угол поворота φ и новое начало координат:

$$9x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 2y = 0.$$

5. Через точку $Z(-1, 0, 4)$ провести прямую, параллельную плоскости $3x - 4y + z - 10 = 0$ так, чтобы она пересекала прямую

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}.$$

Методические указания для выполнения расчетных работ

Вычисление ранга матрицы

Рангом матрицы называется наибольший порядок минора, выделенного из матрицы и отличного от нуля. В соответствии с этим определением для нахождения ранга матрицы необходимо вычислить последовательно все миноры и найти наибольший порядок минора, отличного от нуля. Этот способ нахождения ранга связан с большим объемом вычислений. Рассмотрим более простой способ нахождения ранга, основанный на приведении исходной матрицы к треугольному или диагональному виду с помощью элементарных преобразований.

К элементарным преобразованиям матрицы относятся следующие действия над элементами матрицы:

- перестановка двух строк (или столбцов);
- умножение строки или столбца на число $C \neq 0$;
- прибавление к некоторой строке матрицы другой её строки, умноженной на любое число (или такая же операция со столбцами);
- вычеркивание пропорциональных или нулевых строк (столбцов).

Справедлива теорема о том, что элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.

Пример. Найти ранг матрицы A.

Осуществим элементарные преобразования над матрицей, направленные на приведение её к треугольному виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & -5 & 11 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -9 & 5 \\ 0 & 3 & -9 & -10 & 6 \\ 0 & -3 & -7 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим подробно первый шаг преобразований для получения матрицы с единичным столбцом:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -9 & 5 \\ 0 & 3 & -9 & -10 & 6 \\ 0 & -3 & -7 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Первая строка остаётся неизменной. Вторая, третья и четвертая строки изменяются: каждая из них складывается с первой строкой, предварительно умноженной соответственно на -2; -4; -1.

На втором шаге преобразований первая и вторая строки остаются неизменными, из третьей вычитается вторая, четвертая складывается со второй. В последней матрице две строки пропорциональны, одну из них вычеркиваем, а наибольший минор, который можно выделить, имеет третий порядок. Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}$$

Он равен произведению диагональных элементов $1 \cdot 3 \cdot (-8) = -24$ и отличен от нуля. Следовательно, ранг матрицы равен 3, то есть порядку этого минора.

Вычисление обратной матрицы и решение систем линейных

алгебраических уравнений методом Жордана – Гаусса

Квадратная матрица B называется обратной по отношению к матрице A , если $AB = BA = E$. Матрица A имеет обратную тогда и только тогда, если она неособенная ($|A| \neq 0$). Обратная матрица обозначается A^{-1} .

Она единственна для данной матрицы A и равна $A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|}$.

Матрица \tilde{A} – взаимная. Она составлена из алгебраических дополнений элементов матрицы A с последующим транспонированием.

Другим способом вычисления обратной матрицы является метод Жордана – Гаусса. Этот метод основан на использовании элементарных преобразований строк расширенной матрицы (AE) с целью получения

единичной матрицы E на месте матрицы A . В результате преобразований Жордана – Гаусса на месте исходной единичной матрицы E будет находиться матрица A^{-1} .

Пример. Вычислить обратную матрицу двумя способами для заданной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Первый способ. Вычислим обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|}$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = -27,$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} - \text{взаимная матрица.}$$

Вычислим алгебраическое дополнение:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3; A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6; A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -6; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3; A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6; A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Составим матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & 6 & -3 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Второй способ (по методу Жордана – Гаусса). Преобразуем матрицу

(AE) к виду (EA^{-1}) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Следовательно, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Метод Жордана – Гаусса может быть использован для получения решения системы $Ax = b$.

Предполагаем, что квадратная матрица A неособенная, тогда для нее существует единственная обратная матрица A^{-1} . Умножим обе части исходной системы на A^{-1} слева и получим $A^{-1}Ax = A^{-1}b$ или $x = A^{-1}b$. Таким образом, вектор решения системы равен произведению обратной матрицы A^{-1} на столбец b свободных членов системы. Осуществим преобразования Жордана – Гаусса над матрицей (Ab) таким образом, чтобы на месте матрицы A получил единичную матрицу E . При этом на месте столбца b получается столбец $A^{-1}b$, являющийся решением исходной системы. Одновременно с решением системы можно получить и матрицу A^{-1} , если преобразовать по методу Жордана – Гаусса матрицу (AbE) , приведя ее к виду $(E(A^{-1}b)A^{-1})$.

Приведение матрицы к диагональной форме

В ряде задач (например, при изучении систем линейных дифференциальных уравнений) целесообразно от исходной матрицы A перейти к подобной ей матрице с помощью преобразований подобия $B = T^{-1}AT$. При этом подобные матрицы обладают сходными во многих отношениях свойствами. Естественно попытаться осуществить преобразование подобия таким образом, чтобы матрица B имела возможно более простую структуру.

Рассмотрим простейший случай, когда все собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы A различны. Используем теорему о приведении матриц к диагональному виду: если все собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы A различны, то A может быть некоторым подобным преобразованием приведена к диагональной форме. Причем на диагонали располагаются собственные значения матрицы A .

Пример. Найти матрицу, подобную исходной $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

а) Запишем характеристическое уравнение, соответствующее этой матрице:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 6 & 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0.$$

Найдем корни этого уравнения: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. Эти корни являются собственными значениями матрицы A .

б) Найдем собственные столбцы (векторы), отвечающие этим собственным значениям. Для первого корня $\lambda_1 = 1$ составим систему линейных уравнений вида $(A - \lambda_1 E)X^{(1)} = 0$ или, обозначая элементы собственного столбца $X^{(1)}$ через $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$:

$$\begin{cases} 4x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} - 3x_3^{(1)} = 0; \\ 4x_1^{(1)} + 4x_2^{(1)} - 4x_3^{(1)} = 0; \\ 6x_1^{(1)} + 4x_2^{(1)} - 5x_3^{(1)} = 0. \end{cases}$$

Решая эту однородную систему, находим, что $2x_1^{(1)} = 2x_2^{(1)} = x_3^{(1)}$. Собственный столбец определяется с точностью до числового множителя.

Таким образом, полагая $x_1^{(1)} = 1$, получаем $x_2^{(1)} = 1$, $x_3^{(1)} = 2$ и $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Аналогично, находим для $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ соответствующие собственные векторы:

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

в) Составим преобразующую матрицу T из собственных столбцов $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$: $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Матрица T неособенная, то есть ее определитель $|T| \neq 0$. Найдем

$$\text{обратную к ней по формуле } T^{-1} = \frac{\tilde{T}}{|T|} = \frac{1}{|T|} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

г) Находим матрицу диагонального вида, подобную исходной, осуществляя преобразование подобия $T^{-1}AT$:

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Порядок расположения собственных значений по диагонали в матрице B совпадает с порядком соответствующих собственных векторов в матрице T .

Аналитическая геометрия на плоскости

Пусть задана декартова прямоугольная система координат (O, \vec{i}, \vec{j}) , где O – начало координат, \vec{i}, \vec{j} – ортонормированные базисные векторы, скалярное произведение которых $(\vec{i}, \vec{j}) = 0$, а длина векторов $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$.

Любой вектор на плоскости можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов. Так радиус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, где x и y – коэффициенты линейной комбинации, которые являются координатами вектора \overrightarrow{OM} и совпадают с координатами конечной точки M .

Пусть точки $M(x, y)$ и $M_0(x_0, y_0)$ принадлежат прямой L , тогда вектор $\overrightarrow{M_0M} \in L$. Рассмотрим ненулевой вектор $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j}$, ортогональный прямой L , а следовательно, и вектору $\overrightarrow{M_0M}$. Запишем условие ортогональности векторов:

$$(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0. \quad (1)$$

Точка $M(x, y) \in L$ выбрана произвольно, ее координаты называются текущими, а уравнение (1) является уравнением прямой на плоскости в векторной форме. В координатной форме это уравнение запишется так:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (2)$$

или $Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$. Принимая во внимание $(\vec{n}, \vec{r}) = Ax + By$; $C = -Ax_0 - By_0$, получим уравнение $(\vec{n}, \vec{r}) + C = 0$ или $Ax + By + C = 0$, которое является общим уравнением прямой на плоскости.

Уравнение (2) при различных значениях A и B описывает лучок прямых, проходящих через точку $M_0(x_0, y_0)$. Если перейти от уравнения (2) к уравнению $y - y_0 = k(x - x_0)$, где $k = -\frac{A}{B}$ (угловой коэффициент прямой), а затем выразить y и обозначить через $b = y_0 - kx_0$, то получим $y = kx + b$.

Это уравнение прямой с угловым коэффициентом. Оно описывает множество прямых при различных k и b , но сюда не войдут прямые, для

которых $k = -\frac{A}{B} = \operatorname{tg} \alpha = \infty$. При этом, $B = 0, \alpha = 90^\circ$ — угол наклона прямой к положительному направлению оси ОХ. Таким образом, исключены прямые, параллельные оси ОУ и сама ось ОУ.

Из общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ можно получить уравнение прямой в отрезках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $a = -\frac{C}{A}$; $b = -\frac{C}{B}$ — отрезки, отсекаемые прямой соответственно на координатных осях ОХ и ОУ.

Пусть $\vec{n}^0 (\cos \alpha, \sin \alpha)$ — нормальный вектор прямой L и p — расстояние от начала координат до прямой $\vec{r}(x, y)$, тогда запишем нормальное уравнение прямой: $(\vec{n}^0, \vec{r}) - p = 0$ или $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$.

Используем нормальное уравнение прямой для нахождения расстояния от произвольной точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой L . Это расстояние определяется по формуле: $d = |x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p|$.

Получим каноническое уравнение прямой на плоскости. Если вектор $\vec{s}(p, m)$ коллинеарен прямой L , то \vec{s} называется направляющим вектором прямой. Пусть заданы точки $M_0(x_0, y_0) \in L$, $M(x, y) \in L$ и вектор $\vec{s}(p, m)$, тогда используя условие параллельности $\overline{M_0M}$ и \vec{s} , запишем уравнение прямой в виде: $\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{m}$. Это уравнение называется каноническим.

Если известны две точки на прямой L : $M_0(x_0, y_0) \in L$, $M_1(x_1, y_1) \in L$, то в качестве направляющего вектора прямой \vec{s} можно взять вектор $\overline{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Тогда $p = x_1 - x_0$, $m = y_1 - y_0$.

Можно определить взаимное расположение двух прямых, заданных своими уравнениями. Зададим общие уравнения двух прямых следующим образом:

$$\begin{aligned} L_1: A_1x + B_1y + C_1 &= 0; \\ L_2: A_2x + B_2y + C_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Угол φ между этими прямыми определяется как угол между векторами $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$ по формуле:

$$\varphi = \arccos \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} = \arccos \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Другой угол $\beta = 180^\circ - \varphi$.

При $\varphi = 90^\circ$ условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 запишется так:

$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$. В случае, если прямые не пересекаются, то они — параллельны. Это означает, что $\varphi = 0^\circ$, $\beta = 180^\circ$. При этом $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, т.е.

$\left| \frac{A_1}{A_2} \frac{B_1}{B_2} \right| = 0$ и в общем случае система (3) несовместна.

Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, то прямые сливаются. При этом система (3) является совместной и неопределенной, имеет бесконечное множество решений.

При $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ определитель $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, система уравнений (3) имеет единственное решение, т.е. она совместная и определенная, а прямые L_1 и L_2 пересекаются.

Угол φ между прямыми, заданными уравнениями с угловыми коэффициентами $L_1: y = k_1x + b_1$, $L_2: y = k_2x + b_2$, определяется

формулой: $\varphi = \arctg \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$. Другой угол $\beta = 180^\circ - \varphi$.

Условие параллельности прямых: $k_1 = k_2$, условие перпендикулярности: $1 + k_1k_2 = 0$ или $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Плоскость и прямая в пространстве

Общее уравнение плоскости имеет вид: $Ax + By + Cz + D = 0$, а нормаль: $\vec{n}(A, B, C)$.

Уравнение плоскости в отрезках имеет вид: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Нормальное

уравнение плоскости имеет вид:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0, \quad \vec{n}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$, перпендикулярно заданному направлению $\vec{n} = (A, B, C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, запишем:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Это равенство является условием компланарности векторов $\vec{M_1M_2}, \vec{M_1M_3}$, согласно которому их смешанное произведение равно нулю, то есть $(\vec{M_1M_2}, \vec{M_1M_3}, \vec{M_1M_3}) = 0$. Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости определяется в соответствии со следующим соотношением $d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p|$.

Угол φ между двумя плоскостями

$$p_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \quad p_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (4)$$

находится по формуле $\varphi = \arccos \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$, как угол

между их нормальными векторами. Другой угол $\beta = 180^\circ - \varphi$.

Условие перпендикулярности плоскостей имеет вид: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$. Условие параллельности плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Пространственная прямая является пересечением двух плоскостей p_1, p_2 , поэтому ее общее уравнение задается системой уравнений (4).

Каноническое уравнение прямой в пространстве, проходящей через

точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{S}(p, m, t)$,

$$\text{имеет вид: } \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{t}. \quad (5)$$

Угол ψ между прямой (5) и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ равен $90^\circ - \alpha$, где α определяется как угол между прямой и нормальным вектором плоскости по формуле:

$$\alpha = \arccos \frac{Ap + Bm + Ct}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{p^2 + m^2 + t^2}}.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости имеет вид: $\frac{A}{p} = \frac{B}{m} = \frac{C}{t}$.

Условие параллельности прямой и плоскости: $Ap + Bm + Ct = 0$.

Пример 1. Составить уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $M(2; -1)$ параллельно прямой $2x - 3y + 1 = 0$.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через точку имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \text{ В нашем случае } A(x - 2) + B(y + 1) = 0. \quad (6)$$

Коэффициенты A и B определим из условия параллельности прямых

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{-3} = \lambda, \quad A = 2\lambda, \quad B = -3\lambda. \text{ Подставим эти значения в (6) и получим}$$

$$\text{искомое уравнение: } 2\lambda(x - 2) - 3\lambda(y + 1) = 0 \text{ или } 2x - 3y - 7 = 0.$$

Пример 2. Написать уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(-1, 2, +1)$, $M_2(2, 3, -1)$ перпендикулярно другой плоскости $2x - y + z - 1 = 0$, где $\vec{n}(2, -1, 1)$.

Решение. Пусть $M(x, y, z)$ - точка искомой плоскости, тогда векторы $\vec{M_1M}(x + 1, y - 2, -1)$, $\vec{M_1M_2}(3, 1, -2)$ и $\vec{n}(2, -1, 1)$ лежат в одной плоскости, а значит их смешанное произведение равно нулю:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = x + 7y + 5z - 18 = 0 - \text{искомое уравнение.}$$

Пример 3. Найти угол между плоскостями

$$p_1: 2x + 3y - 4 = 0, \quad p_2: x - y + 2z + 1 = 0.$$

Решение. $\vec{n}_1(2, 3, 0), \vec{n}_2(1, -1, 2)$. Угол между плоскостями $\varphi = \arccos \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$.

$$\text{то есть } \varphi = \arccos \frac{2 \cdot 1 + 3(-1) + 0 \cdot 2}{\sqrt{4+9} \sqrt{1+4}} = \arccos \left(\frac{-1}{\sqrt{78}} \right); \quad \beta = 180^\circ - \varphi.$$

Пример 4. Найти общее уравнение плоскости $p: Ax + By + Cz + D = 0$, проходящей через точку $M(1; 3; 0)$ перпендикулярно двум плоскостям

$$p_1: x + 2y + 3z - 5 = 0, \text{ и } p_2: 3x - 5y + 4z - 12 = 0.$$

Решение. $\vec{n}_1(1, 2, 3), \vec{n}_2(3, -5, 4), \vec{n}(A, B, C)$. Из условия перпендикулярности плоскостей $p \perp p_1, p \perp p_2$ следует, что вектор \vec{n} коллинеарен векторному произведению $[\vec{n}_1, \vec{n}_2]$, то есть

$$\lambda \vec{n} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 23 \cdot \vec{i} + 5 \cdot \vec{j} - 11 \cdot \vec{k}. \quad \text{При } \lambda = 1 \quad \text{вектор}$$

$$\vec{n}(23, 5, -11). \quad \text{Уравнение} \quad \text{искомой} \quad \text{плоскости} \quad \text{имеет} \quad \text{вид:} \\ A(x-1) + B(y-3) + Cz = 0; \quad 23(x-1) + 5(y-3) - 11z = 0 \quad \text{или} \\ 23x + 5y - 11z - 38 = 0.$$

Пример 5. Найти расстояние от точки $A(2, -1, 3)$ до плоскости $5x + 2y + z - 7 = 0$.

Решение. Приведем уравнение плоскости к нормальной форме

$$5x + 2y + z - 7 = 0, \quad \frac{5x + 2y + z - 7}{\sqrt{5^2 + 2^2 + 1}} = 0, \quad \frac{5x + 2y + z - 7}{\sqrt{30}} = 0. \quad \text{Найдем искомое расстояние}$$

$$d = \left| \frac{5 \cdot 2 + 2(-1) + 1 \cdot 3 - 7}{\sqrt{30}} \right| = \frac{4}{\sqrt{30}}.$$

Пример 6. Написать каноническое уравнение пространственной прямой, проходящей через точку $M_0(1; 0; 1)$ перпендикулярно двум другим прямым

$$L_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-0}{2}; \quad L_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{0}.$$

Решение. Уравнение прямой в канонической форме имеет вид

$$L: \frac{x-1}{p} = \frac{y-0}{m} = \frac{z-1}{t}.$$

Направляющий вектор для прямой L имеет координаты: $\vec{S}(m, n, l)$ для

$L_1: \vec{S}_1(3, -2, 2), \quad L_2: \vec{S}_2(3, 2, 0)$. По условию задачи $\vec{S} \perp \vec{S}_1, \vec{S} \perp \vec{S}_2$, следовательно, вектор \vec{S} коллинеарен векторному произведению $[\vec{S}_1, \vec{S}_2]$:

$$\lambda \vec{S} = [\vec{S}_1, \vec{S}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot \vec{i} + 6 \cdot \vec{j} + 12 \cdot \vec{k}. \quad \text{При } \lambda = 2 \quad \text{вектор}$$

$$\vec{S} = -2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} + 6 \cdot \vec{k}.$$

$$\text{Уравнение} \text{ искомой} \text{ прямой} \text{ примет вид: } \frac{x-1}{-2} = \frac{y-0}{3} = \frac{z-1}{6}.$$

Пример 7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку

$$M_0(1, -1, 1) \text{ перпендикулярно прямой } L: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{4}.$$

Решение. Уравнение плоскости p , проходящей через заданную точку M_0 , имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad \text{В нашем случае}$$

$$A(x - 1) + B(y + 1) + C(z + 1) = 0.$$

Для нахождения $\vec{n}(A, B, C)$ используем условие $p \perp L$, согласно которому вектор \vec{n} коллинеарен направляющему вектору прямой $\vec{S}(2, -3, 4)$. Вектор

$\vec{n} = \lambda \vec{S}$, а значит $A = 2\lambda$, $B = -3\lambda$, $C = 4\lambda$. Тогда уравнение искомой плоскости имеет вид:

$$2\lambda(x-1) - 3\lambda(y+1) + 4\lambda(z+1) = 0. \text{ Следовательно, } 2x - 3y + 4z - 1 = 0.$$

Пример 8. Составить уравнение пространственной прямой, которая проходит через начало координат и параллельна другой прямой L_1 :

$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0; \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Составим искомое уравнение в каноническом виде $L: \frac{x}{m} = \frac{y}{p} = \frac{z}{t}$.

Направляющие векторы прямых L и L_1 коллинеарны из условия параллельности этих прямых, следовательно, $\vec{S} = \lambda \vec{S}_1$, $\vec{S}(m, p, t)$, $\vec{S}_1(m_1, p_1, t_1)$. Вектор \vec{S}_1 можно найти, используя коллинеарность этого вектора векторному произведению $[\vec{n}_1, \vec{n}_2]$, где $\vec{n}_1(2, -3, -3)$, $\vec{n}_2(1, -2, 1)$ – векторы, коллинеарные нормальным векторам плоскостей, пересекающихся по прямой L_1 . Итак:

$$\mu \vec{S}_1 = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -9 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j} - \vec{k}. \quad \text{При } \mu = 1 \text{ вектор}$$

$\vec{S}_1 = (-9, -5, -1)$. Координаты вектора \vec{S} при $\lambda = 1$ совпадают с координатами вектора \vec{S}_1 . Следовательно, уравнение искомой прямой примет вид: $\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z}{1}$.

Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

Рассмотрим общее уравнение кривой второго порядка:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (7)$$

Приведение этого уравнения к каноническому виду можно осуществить переходом от одной декартовой прямоугольной системы координат на плоскости к другой путем параллельного переноса системы координат и поворота осей координат системы на угол φ :

1. Параллельный перенос осей координат.

Старые координаты точки (x, y) связаны с новыми (x', y') соотношениями:

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0,$$

где x_0, y_0 – координаты нового начала координат O' в старой системе ОХУ. Получим уравнение кривой в новых координатах, используя эту связь:

$$a_{11}(x' + x_0)^2 + 2a_{12}(x' + x_0)(y' + y_0) + a_{22}(y' + y_0)^2 + 2a_{13}(x' + x_0) + 2a_{23}(y' + y_0) + a_{33} = 0.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11}x_0^2 + a_{12}y_0 + a_{13}; a'_{23} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}; \\ a'_{33} &= a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение кривой в новых координатах будет иметь вид:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0.$$

Заметим, что при параллельном переносе изменяются лишь коэффициенты группы линейных членов. Можно подобрать значения (x_0, y_0) таким образом, чтобы уравнение не содержало слагаемых $2a'_{13}x'$ и $2a'_{23}y'$, для этого полагаем коэффициенты $a'_{13} = 0$ и $a'_{23} = 0$. В этом случае:

$$a'_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \quad a'_{23} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0. \quad (8)$$

Если эта система имеет единственное решение, то получим значения точки (x_0, y_0) . Эта точка является центром симметрии кривой, а сама кривая – центральной. Если система (8) имеет неединственное решение или не имеет решения, то кривая не является центральной.

Уравнение кривой (7) примет вид:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a'_{33} = 0. \quad (9)$$

2. Поворот осей координат на угол φ .

Старые и новые координаты связаны соотношением $x = x'' \cos \varphi - y'' \sin \varphi$;

$$y = x'' \sin \varphi + y'' \cos \varphi.$$

(10)

Подставляя эти выражения в общее уравнение кривой, получим

$$a_{11}(x'' \cos \varphi - y'' \sin \varphi)^2 + 2a_{12}(x'' \cos \varphi - y'' \sin \varphi)(x'' \sin \varphi + y'' \cos \varphi) + a_{22}(x'' \sin \varphi + y'' \cos \varphi)^2 + 2a_{13}(x'' \cos \varphi - y'' \sin \varphi) + 2a_{23}(x'' \sin \varphi + y'' \cos \varphi) + a_{33} = 0$$

или

$$a_{11}'' x''^2 + 2a_{12}'' x'' y'' + a_{22}'' y''^2 + 2a_{13}'' x'' + 2a_{23}'' y'' + a_{33}'' = 0,$$

$$\text{где } a_{11}'' = a_{12} \sin 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22});$$

$$a_{22}'' = -a_{12} \sin 2\varphi - \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22});$$

$$a_{12}'' = -\frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \sin 2\varphi + a_{12} \cos 2\varphi; \quad a_{13}'' = a_{13} \cos \varphi + a_{23} \sin \varphi;$$

$$a_{23}'' = a_{23} \cos \varphi - a_{13} \sin \varphi; \quad a_{33}'' = a_{33}.$$

С помощью этого преобразования можно добиться, чтобы слагаемое $2a_{12}'' x'' y''$ не содержалось в уравнении. Для этого подбираем угол поворота φ таким, чтобы $a_{12}'' = 0$ или $-\frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \sin 2\varphi + a_{12} \cos 2\varphi = 0$. Отсюда получаем

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.$$

Это соотношение даёт возможность определить угол

поворота $\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} \right)$. Уравнение кривой в новых координатах

$$\text{имеет вид: } a_{11}'' x''^2 + a_{22}'' y''^2 + 2a_{13}'' x'' + 2a_{23}'' y'' + a_{33}'' = 0.$$

Классификация кривых

Классификация кривой осуществляется на основе анализа

$$\text{инвариантов ее уравнения: } J_1 = a_{11} + a_{22}, J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, J_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Если $J_2 > 0$, то имеем эллиптический тип кривой, $J_2 < 0$ – гиперболический тип. Если $J_2 = 0$, то тип кривой является параболическим.

Рассмотрим выполнение следующих условий:

1. Случай $J_2 \neq 0$.

Запишем уравнение центральной кривой (7) после осуществления параллельного переноса осей: $a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a_{33} = 0$ или учитывая, что $J_3 = J_2 a_{33}$: $a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{J_3}{J_2} = 0$.

После поворота осей на угол φ , определяемого из соотношения:

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}, \text{ с учетом связи старых и новых координат:}$$

$$x' = x'' \cos \varphi - y'' \sin \varphi; \quad y' = x'' \sin \varphi + y'' \cos \varphi,$$

$$\text{уравнение кривой имеет вид: } a_{11}'' x''^2 + a_{22}'' y''^2 + \frac{J_3}{J_2} = 0.$$

Кривые эллиптического типа соответствуют условию $J_2 > 0$, т.е.

$$J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad a_{11}a_{22} > 0.$$

Следовательно, оба коэффициента a_{11} и a_{22} отличны от нуля и имеют одинаковый знак, совпадающий со знаком $J_1 = a_{11} + a_{22}$. В случае, если $a_{11} < 0$ и $a_{22} < 0$, то положительности коэффициентов a_{11} и a_{22} можно добиться умножением исходного уравнения на (-1).

$$\text{При } J_2 > 0, \quad J_1 > 0, \quad J_3 < 0 \text{ уравнение } a_{11}'' x''^2 + a_{22}'' y''^2 + \frac{J_3}{J_2} = 0.$$

$$\text{представляет собой эллипс: } \frac{x''^2}{\left(\frac{J_3}{J_2 a_{11}''}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\frac{-J_3}{J_2 a_{22}''}\right)^2} = 1.$$

$$\text{При } J_3 = 0 \text{ уравнению, канонический вид которого } \frac{x''^2}{\left(\frac{1}{a_{11}''}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\frac{1}{a_{22}''}\right)^2} = 0,$$

удовлетворяют координаты лишь одной точки $x'' = y'' = 0$.

При $J_3 > 0$ уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости. В этом случае уравнение описывает мнимый эллипс:

$$x'^2 + \frac{y'^2}{J_2} = -1.$$

Кривые гиперболического типа соответствуют условию $J_2 < 0$, т.е. $J_2 = a''_{11}a''_{22} < 0$. Из этого условия следует, что a''_{11} и a''_{22} имеют разные знаки. Считаем, что имеют место неравенства: $a''_{11} > 0, a''_{22} < 0$. При $J_2 < 0, J_3 \neq 0$ уравнение $a''_{11}x'^2 + a''_{22}y'^2 + \frac{J_3}{J_2} = 0$ описывает гиперболу, а при $J_3 = 0$ — пару пересекающихся прямых.

В случае $J_2 < 0, J_3 < 0$ уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x'^2}{\left(\sqrt{\frac{J_3}{J_2 a''_{11}}}\right)^2} - \frac{y'^2}{\left(\sqrt{\frac{J_3}{J_2 (-a''_{22})}}\right)^2} = -1,$$

где $\sqrt{\frac{J_3}{J_2 (-a''_{22})}}$ — действительная полуось гиперболы;

$\sqrt{\frac{J_3}{J_2 a''_{11}}}$ — мнимая полуось гиперболы.

В случае $J_2 < 0, J_3 > 0$, ось OX является действительной, OY — мнимой,

полуось соответственно равны $\sqrt{-\frac{J_3}{J_2 a''_{11}}}$ и $\sqrt{\frac{J_3}{J_2 (-a''_{22})}}$.

Каноническое уравнение гиперболы при этом имеет вид:

$$\frac{x'^2}{\left(\sqrt{\frac{J_3}{J_2 a''_{11}}}\right)^2} - \frac{y'^2}{\left(\sqrt{\frac{J_3}{J_2 (-a''_{22})}}\right)^2} = 1.$$

Уравнение, отвечающее случаю $J_3 = 0$, можно записать в виде:

$$\left(\frac{x''}{\sqrt{a''_{11}}} + \frac{y''}{\sqrt{-a''_{22}}} \right) \left(\frac{x''}{\sqrt{a''_{11}}} - \frac{y''}{\sqrt{-a''_{22}}} \right) = 0,$$

то есть получаем пару уравнений пересекающихся прямых

$$\frac{x''}{\sqrt{a''_{11}}} + \frac{y''}{\sqrt{-a''_{22}}} = 0 \text{ и } \frac{x''}{\sqrt{a''_{11}}} - \frac{y''}{\sqrt{-a''_{22}}} = 0.$$

Случай $a''_{11} < 0, a''_{22} > 0$ можно рассмотреть аналогично.

2. Случай $J_2 = 0$ соответствует параболическому типу кривой. Если $a_{12} \neq 0$, то осуществляем поворот осей на угол φ , удовлетворяющий уравнению $\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$ и приведем исходное уравнение (7) к виду

$$a''_{11}x'^2 + a''_{22}y'^2 + 2a''_{13}x' + 2a''_{23}y' + a''_{33} = 0.$$

Для этого уравнения $J_1 = a''_{11} + a''_{22}$ и $J_2 = a''_{11}a''_{22}$. Из условий $J_1 \neq 0$ и $J_2 = 0$ следует, что один из коэффициентов a''_{11} или a''_{22} равен нулю. Пусть $a''_{11} = 0, a''_{22} \neq 0$ (другой случай аналогичен). Тогда $J_1 = a''_{22}$ (считаем $a''_{22} > 0$) и уравнение запишем в виде:

$$J_1 y'^2 + 2a''_{13}x' + 2a''_{23}y' + a''_{33} = 0$$

или

$$J_1 \left(y' + \frac{a''_{23}}{J_1} \right)^2 + 2a''_{13}x' + a''_{33} - \frac{a''_{23}^2}{J_1} = 0.$$

Осуществим параллельный перенос: $x' = x'', y' = y'' + \frac{a''_{23}}{J_1}$, в результате

которого получим уравнение:

$$J_1 y''^2 + 2a''_{13}x'' + a''_{33} = 0, \quad (11)$$

где $a'_{13} = a''_{13}; a'_{33} = a''_{33} - \frac{a''_{23}^2}{J_1}$.

При этом,

$$J_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & J_1 & 0 \\ a'_{13} & 0 & a'_{33} \end{vmatrix} = -J_1 a'^2_{13}.$$

Уравнение кривой параболического типа при условии $J_3 \neq 0$ описывает параболу, а при $J_3 = 0$ либо пару действительных параллельных прямых, которые могут быть слившимися, либо пару мнимых параллельных прямых.

В случае $J_3 \neq 0$, $a'_{13} \neq 0$, $J_1 \neq 0$ уравнение (11) представим в виде:

$$J_1 y'^2 + 2a'_{13} \left(x' + \frac{a'_{33}}{2a'_{13}} \right) = 0. \quad (12)$$

Совершив параллельный перенос $X = x' + \frac{a'_{33}}{2a'_{13}}$, $Y = y'$ и обозначив

$$p = -\frac{a'_{13}}{J_1}, \text{ получим уравнение параболы в каноническом виде: } Y^2 = 2pX.$$

В случае, если $J_3 = 0$, $a'_{13} = 0$ и $J_1 \neq 0$ уравнение (11) примет вид:

$$J_1 y'^2 + a'_{33} = 0 \text{ или } y'^2 = -\frac{a'_{33}}{J_1}. \quad (13)$$

Если $-\frac{a'_{33}}{J_1} > 0$, то уравнение распадается на два: $y' = \sqrt{-\frac{a'_{33}}{J_1}}$ и

$$y' = -\sqrt{-\frac{a'_{33}}{J_1}}, \text{ которые описывают прямые параллельные линии.}$$

Если $-\frac{a'_{33}}{J_1} = 0$, то $y'^2 = 0$, т.е. $y' = 0$ и $y' = 0$ - пара слившихся

прямых. Наконец, при $(-\frac{a'_{33}}{J_1}) < 0$ уравнению $y'^2 = -\frac{a'_{33}}{J_1}$ не удовлетворяют

координаты ни одной точки плоскости. В этом случае уравнение определяет пару мнимых параллельных прямых.

Пример. Исследовать и получить канонический вид кривой, заданной следующим уравнением:

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0. \quad (14)$$

Коэффициенты уравнения имеют следующие значения:

$$a_{11} = 1; a_{12} = -1; a_{13} = -2; a_{22} = 2; a_{23} = -3; a_{33} = 3.$$

Вычислим J_1, J_2, J_3 :

$$J_1 = 1 + 2 = 3; J_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1; J_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -26.$$

В нашем примере $J_1 > 0$, $J_2 > 0$, $J_3 < 0$. Следовательно, исходное уравнение (14) описывает эллипс.

Для получения канонического вида эллипса сначала найдем центр кривой, решая систему из уравнений:

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0; a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0,$$

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{J_2} = 7; y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{12} & -a_{23} \end{vmatrix}}{J_2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{1} = 5.$$

Осуществим параллельный перенос: $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$, благодаря которому уравнение не будет содержать линейных членов $2a'_{13}x'$ и $2a'_{23}y'$. Уравнение (14) примет вид:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a'_{33} = 0. \quad (15)$$

Вычислим a'_{33} :

$$a'_{33} = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33};$$

$$a'_{33} = 7^2 + 2 \cdot (-1) \cdot 7 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot (-2) \cdot 7 + 2 \cdot (-3) \cdot 5 + 3 = -26.$$

Тогда уравнение (15) будет иметь следующий вид: $x'^2 - 2x'y' + 2y'^2 - 26 = 0$.

Осуществим поворот осей, в результате которого уравнение (15) не будет содержать $2a_{12}x''y''$. Угол поворота определим из уравнения:

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}, \text{ отсюда } \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

Уравнение (1) примет вид:

$$a''_{11}x'^2 + a''_{22}y'^2 + a''_{33} = 0;$$

где $a''_{11} = a_{12} \sin 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = -\sin 2\varphi - \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{3}{2} > 0$;

$a''_{22} = -a_{12} \sin 2\varphi - \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{3}{2} > 0$;

$$a''_{33} = a'_{33}.$$

Используя соотношение $J_3 = a''_{33}J_2$, перейдем к уравнению:

$$a''_{11}x'^2 + a''_{22}y'^2 + \frac{J_3}{J_2} = 0.$$

Таким образом, каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x'^2}{\left(\sqrt{\frac{J_3}{J_2 a''_{11}}}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\sqrt{\frac{J_3}{J_2 a''_{22}}}\right)^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x'^2}{\left(\sqrt{\frac{26}{a''_{11}}}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\sqrt{\frac{26}{a''_{22}}}\right)^2} = 1.$$

Список литературы

1. Чеботарев Г. Н. Элементы линейной алгебры, ч. 1.-Казань: КАИ, 1966. С. 1-10.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1968. С. 172-187.