

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ»

Институт компьютерных технологий и защиты информации

Кафедра прикладной математики и информатики

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине
ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Составитель: доцент кафедры ПМИ, к.ф.-м.н. Арутюнова Н.К.

Казань 2020

ПЛАН (рекомендованный) практических занятий
по дисциплине ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Приводятся основные задачи, разбираемые на практических занятиях и выдаваемые в качестве домашнего задания. Задания для проведения текущего контроля знаний обучающихся и подготовки к нему в данные указания не включены: они определены в комплексе оценочных средств дисциплины. Дополнительные задачи можно брать из любых источников, указанных в перечне информационного обеспечения дисциплины в рабочей программе.

Каждое занятие (кроме первого, в семестре) рекомендуется начинать с разбора (при необходимости) сложных моментов, ответа на вопросы обучающихся, возникших в процессе выполнения ими домашней работы. Завершать занятие – также – ответом на возникшие в процессе занятия вопросы студентов, подведением итогов, выдачей указаний по выполнению домашнего задания.

Практическое занятие № 1. Множества, основные понятия и операции.

Напомнить основные понятия и обозначения, операции над множествами.

Решать на усмотрение преподавателя примерно половину из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

- 1.** Запишите булеаны следующих множеств. Каковы мощности множеств и их булеанов?
- а) \emptyset ; б) $\{\emptyset\}$; в) $\{A\}$; г) $\{A, B, C\}$.
- 2.** Пусть $X = \{a, b, c, d, e\}$ и $Y = \{b, c, e\}$. Какой(-ие) символ(-ы) можно поставить вместо знака \circ в следующих выражениях, чтобы получить верное высказывание?
- а) $a \circ X$; б) $\{b\} \circ Y$; в) $X \circ Y$; г) $Y \circ X$;

- | | | | |
|--------------------|----------------------|----------------------------|--------------------------------------|
| д) $X \circ 2^Y$; | ж) $X \circ 2^X$; | и) $\emptyset \circ Y$; | л) $\emptyset \circ \emptyset$; |
| е) $Y \circ 2^X$; | з) $2^Y \circ 2^X$; | к) $\emptyset \circ 2^Y$; | м) $\emptyset \circ \{\emptyset\}$. |

3. Пусть $A = \{0, 2, 4, 5, 7\}$, $B = \{x, t, s\}$, $C = \{2, t, 5, z\}$. Запишите в явном виде следующие множества:

- | | | |
|----------------------------|---------------------------|--|
| а) пересечение B и C ; | д) разность A и B ; | и) симметрическую разность B и C ; |
| б) пересечение A и B ; | е) разность C и A ; | |
| в) объединение A и B ; | ж) дополнение A в B ; | к) симметрическую разность A и B . |
| г) объединение A и C ; | з) дополнение C в B ; | |

4. Для множеств A , B и C из предыдущего задания записать в явном виде множества:

- | | | |
|-----------------------------------|---|-------------------------------------|
| а) $A \cup (B \cap C)$; | г) $A \cap (B \setminus C)$; | ж) $(C \setminus B) \setminus A$; |
| б) $B \cap (A \cup C)$; | д) $(C \setminus A) \cup B$; | з) $(A \cup B) \Delta C$; |
| в) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$; | е) $(B \setminus C) \cap (C \setminus A)$; | и) $(A \cup C) \Delta (B \cap C)$. |

5. При произвольных множествах A , B и C построить диаграммы для множеств, записанных в предыдущем примере.

6. Найти результат выполнения следующих действий:

- | | | |
|---------------------------------|------------------------------------|---|
| а) $[1; 5] \cup [-3; 0]$; | г) $(3; 7) \setminus (1; 2)$; | ж) $(-3; 3) \Delta [-3; 3]$; |
| б) $(0; 5) \cap [3; 6]$; | д) $[-4; 4] \setminus \{4; -4\}$; | з) $[0; 4] \Delta \{0; 4\}$; |
| в) $[-2; 3] \setminus [1; 6]$; | е) $(2; 5) \Delta (3; 5)$; | и) $[4; 7] \Delta [3; 5] \Delta [5; 7]$. |

7. Доказать следующие соотношения:

- | | | |
|---------------------------|---|---|
| а) $A \cap B \subset A$; | г) $B \subset A \cup B$; | ж) $A \subset B \leftrightarrow A \cup B = B$ |
| б) $A \cap B \subset B$; | д) $A \cap B \subset A \cup B$; | |
| в) $A \subset A \cup B$; | е) $A \subset B \leftrightarrow A \cap B = A$; | |

В качестве дополнительных задач на занятии и/или в качестве домашнего задания можно использовать задачи 1-10 пособия [1].

Практическое занятие № 2. Доказательство / проверка равенства множеств. Графический и логический методы. Преобразования в алгебре множеств.

Перечислись основные методы проверки / доказательства равенства множеств. Напомнить основные законы алгебры множеств, а также способы представления одних операций через другие.

Продemonстрировать на примерах применение графического и логического методов, а также выполнение преобразований в алгебре множеств с целью упрощения аналитических записей.

Решать на усмотрение преподавателя примерно половину из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

1. Доказать равенства множеств логическим методом, методом преобразований в алгебре множеств, если нужно, проверить графически:

- | | |
|--|--|
| а) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ | б) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ |
| в) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ | г) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$ |
| д) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ | е) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ |
| ж) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ | з) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ |
| и) $A \Delta (A \cap B) = A \setminus B$ | к) $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$ |

2. Упростить и, если нужно, проверить результат графически:

- | | |
|--|---|
| а) $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup \overline{A \cap B \cap C} \cup \overline{A \cup A \cap B}$ | б) $(A \cup \overline{B \cup C}) \cap \overline{\overline{A \cap B} \cap \overline{A \cap C} \cap \bar{B}}$ |
| в) $\bar{A} \setminus (\bar{B} \setminus \bar{C} \setminus \bar{A} \setminus \bar{B})$ | г) $(A \setminus B) \Delta B$ |
| д) $A \Delta (A \Delta B)$ | е) $(A \Delta B) \Delta \bar{B}$ |
| ж) $A \Delta B \Delta (A \cap B)$ | з) $(A \Delta B) \setminus (\bar{A} \Delta \bar{B})$ |

3. Доказать соотношения:

- | | |
|---|---|
| а) $A \setminus (B \cup C) \subset (A \setminus B) \cup C;$ | б) $A \setminus (B \cap C) \supset (A \setminus B) \cap C,$ |
|---|---|

используя тот факт, что $X \subset Y \leftrightarrow X \cup Y = Y \leftrightarrow X \cap Y = X$.

В качестве дополнительных задач на занятии и/или в качестве домашнего задания можно использовать задачи 11-20 пособия [1].

Практическое занятие № 3. Доказательство / проверка равенства множеств. Преобразования в алгебре множеств. Декартово произведение.

Напомнить основные методы проверки / доказательства равенства множеств, основные законы алгебры множеств, а также способы представления одних операций через другие. Привести определение декартова произведения множеств.

Продemonстрировать на примерах применение метода индикаторных (характеристических) функций и метода преобразований в алгебре множеств.

Решать на усмотрение преподавателя примерно половину из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

1. Упростить аналитическую запись множества и проверить результат графически:

- | | |
|--|---|
| а) $\overline{A \cup \overline{B} \cup C} \cup \overline{A \setminus C}$ | б) $(\overline{A \cap \overline{B}} \setminus \overline{A \cup C}) \setminus (A \cap \overline{B} \cap C)$ |
| в) $(A \cup (B \setminus C) \cup \overline{B \cap \overline{C}}) \Delta \overline{A}$ | г) $\overline{A \cap \overline{B}} \setminus (\overline{A \cup \overline{C}} \cup \overline{A \setminus \overline{B}})$ |
| д) $((A \Delta B) \setminus (A \cap B \cap C)) \cup \overline{A \setminus \overline{B}}$ | е) $((A \setminus B) \Delta (B \setminus C)) \Delta (C \setminus A)$ |

2. Доказать равенство методом индикаторных функций и с помощью преобразований в алгебре множеств:

- | | |
|---|--|
| а) $A \Delta A = \emptyset$ | б) $A \Delta \emptyset = A$ |
| в) $A \setminus (\overline{B} \cup C) = (A \cap B) \setminus C$ | г) $(A \cap C) \cup \overline{B} = \overline{B \setminus A} \cap \overline{B \setminus C}$ |
| д) $(A \cap B) \Delta (A \setminus B) = A$ | е) $(A \Delta B) \setminus B = A \setminus B$ |
| ж) $\overline{A \Delta B} \cup (B \setminus A) = \overline{A} \cup B$ | и) $(A \setminus B) \Delta (B \setminus A) = A \Delta B$ |

3. Проверить равенство:

- | | |
|--|--|
| а) $\overline{A \times B} \cup \overline{C \times D} = (\overline{A} \cup \overline{C}) \times (\overline{B} \cup \overline{D})$ | б) $(A \times B) \Delta (C \times D) = (A \Delta C) \times (B \Delta D)$ |
| в) $(A \times B) \cup \overline{A \times C} = A \times (B \cup \overline{C})$ | г) $(A \times B) \Delta (A \times \overline{B}) = (\overline{A} \times B) \Delta (\overline{A} \times \overline{B})$ |
| д) $((A \cap B) \times C) \Delta ((A \cup B) \times C) = (A \times C) \Delta (B \times C)$ | е) $(A \times (B \setminus C)) \Delta (A \times (C \setminus B)) = (A \times B) \Delta (A \times C)$ |

4. Представить множество графически:

- а) $((A \cap C) \times B) \cap D$, где $A = \{x: x \geq -7\}$, $B = \{y: y < 6\}$, $C = \{x: x < 10\}$, $D = \{(x,y): x > y - 3\}$;
- б) $(A \cup B) \times C$, где $A = \{x: x^3 \geq 8\}$, $B = \{x: 3^x \leq 1\}$, $C = \{y: 0 < y < 6\}$;
- в) $(A \cap B) \setminus C$, где $A = \{(x,y): y - 1 = (x + 3)^2\}$, $B = [-3; 3] \times [-4; 4]$, $C = \{(x,y): 0 < y - 2\}$.

В качестве дополнительных задач на занятии и/или в качестве домашнего задания можно использовать задачи 23-27 пособия [1].

Практическое занятие № 4. Декартово произведение: доказательство свойств и проверка равенств.

Напомнить основные методы проверки / доказательства равенства множеств, определение декартова произведения множеств.

Продemonстрировать применение различных методов проверки / доказательства равенства множеств, содержащих в себе операцию декартова произведения, на примерах доказательства свойств декартова произведения.

Решать на усмотрение преподавателя примерно половину из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

1. Доказать свойства декартова произведения графическим, логическим методами и методом индикаторных функций:

- а) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ б) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
 в) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ г) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
 д) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$ е) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$
 ж) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ з) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$
 и) $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$ к) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

2. Проверить равенство графически, а также одним из методов – логическим или методом индикаторных функций:

- а) $\overline{A} \times (\overline{B} \cup \overline{C}) = \overline{A \times B} \cap \overline{A \times C}$ б) $(A \times \overline{C}) \cup (B \times \overline{C}) = \overline{(A \cup B) \times C}$
 в) $(A \times \overline{B}) \cap (C \times \overline{D}) = (A \cap C) \times \overline{B \cup D}$ г) $(A \setminus B) \times (C \setminus D) = (A \times C) \setminus (B \times D)$
 д) $((A \setminus B) \times C) \Delta ((B \setminus A) \times D) = (A \Delta B) \times (C \Delta D)$ е) $\overline{A \times B} \Delta (\overline{A} \times \overline{B}) = (A \times \overline{B}) \Delta (\overline{A} \times B)$

Практическое занятие № 5. Отображения, их представления, анализ

Напомнить основные понятия, способы представления, характеристики и виды отображений. Привести при необходимости примеры.

Продemonстрировать выполнение анализа отображений по предлагаемой схеме.

Решать на усмотрение преподавателя примерно половину из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

1. Для заданных в табл. 1 отображений f и g построить:

- а) таблицу обратного отображения;
 б) граф;
 в) график;
 г) матрицу.

Таблица 1

x	$f(x)$	$g(x)$
a_1	$\{b_2, b_5\}$	$\{c_3\}$
a_2	$\{b_1\}$	$\{c_4\}$
a_3	$\{b_3, b_4\}$	$\{c_2\}$
a_4	$\{b_6\}$	$\{c_1\}$
a_5	$\{b_7\}$	$\{c_4\}$

Произвести анализ прямых и обратных отображений (см. табл. 2), указав откуда следуют те или иные заключения.

2. Произвести анализ (см. табл. 2) числовых функций $y_i = f_i(x): (-\infty; \infty) \rightarrow (-\infty; \infty)$, $i = \overline{1, 8}$, и обратных к ним отображений, указав откуда следуют те или иные заключения:

а) $y_1 = 3x - 4$;

б) $y_2 = x^3$;

в) $y_3 = -x^4 + 3$;

г) $y_4 = |x|$;

д) $y_5 = 3\sin 2x$;

е) $y_6 = \operatorname{tg} x$;

ж) $y_7 = 2^x$;

з) $y_8 = x^{-1}$.

Таблица 2

Характеристика / свойство	Отображение			
	f_1	f_2	...	f_n
Область определения, $D(f)$				
Область значений, $\operatorname{Im}(f)$				
полное / частичное				
на / в				
однозначное / многозначное				
инъекция				
сюръекция				
биекция				

В качестве дополнительных задач на занятии и/или в качестве домашнего задания можно использовать задачи 32-35 пособия [1].

Практическое занятие № 6. Отображения, их представления, анализ, использование.

Напомнить основные понятия, способы представления, характеристики и виды отображений. Привести при необходимости примеры.

Решать на усмотрение преподавателя примерно половину из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

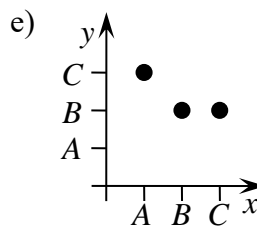
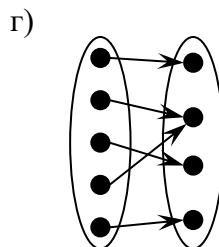
1. Произвести анализ отображений по приведённым представлениям, определив основные характеристики / свойства (см. табл. 2). Составить, если возможно, другие формы представления приведённого отображения.

а)

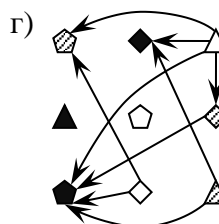
x	$f(x)$
1	$\{a, c\}$
2	$\{b\}$
3	$\{b, e\}$
4	$\{a, c, e\}$

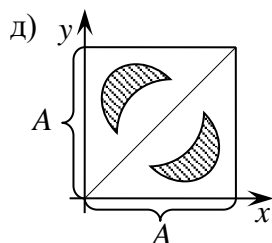
б)

x	$f(x)$
α	\circ
β	\perp
γ	Δ
δ	\square
ε	\triangle



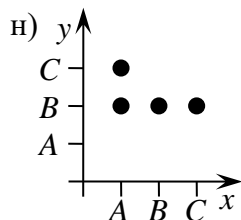
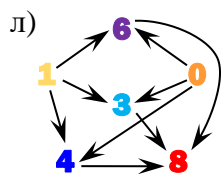
$$3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



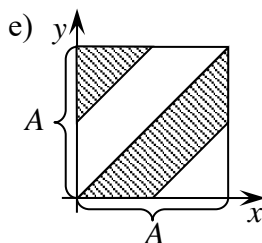


ж)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и) $R = \{(2;2);(1;0);(0;-1);(-1;1)\},$
 $R \subset \{-2;-1;0;1;2\}^2$

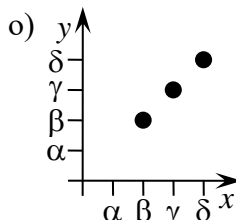
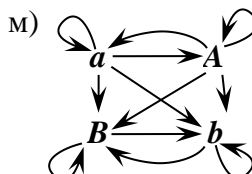


п)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



з)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

к) $R = \{(0;1);(2;3);(4;5)\},$
 $R \subset \{0;1;2;3;4;5\}^2$



р)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В качестве дополнительных задач на занятия и/или в качестве домашнего задания можно использовать задачи 49, 50 и 66 пособия [1].

Практическое занятие № 8. Проверка свойств бинарных отношений. Отношения эквивалентности и порядка.

Напомнить понятия отношения эквивалентности и порядка и им сопутствующие понятия. Привести при необходимости примеры.

Решать на усмотрение преподавателя примерно половину из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

1. Выполнить анализ, т.е. аргументированно выяснить, какими свойствами обладает бинарное отношение R , является ли порядком (если – да, то – каким) или эквивалентностью (если – да, то указать классы эквивалентности и фактор-множество).

- а) $\forall x, y \in (-\infty; \infty): (xRy \leftrightarrow x \leq y)$ б) $\forall A, B \in 2^U: (A R B \leftrightarrow A \subset B)$
- в) $\forall x, y \in A: (xRy \leftrightarrow x \parallel y),$ г) $\forall x, y \in A: (xRy \leftrightarrow x \perp y),$
 A – множество прямых на плоскости A – множество прямых в пространстве \mathbb{R}^3
- д) $\forall x, y \in A: (xRy \leftrightarrow \langle x \text{ является братом } y \rangle),$ е) $\forall x, y \in A: (xRy \leftrightarrow \langle x \text{ является сыном } y \rangle),$
 A – множество жителей г. Казани A – множество жителей г. Москва
- ж) $\forall x, y \in (-\infty; \infty)^n: (xRy \leftrightarrow \forall i = \overline{1, n} (x_i \leq y_i))$ з) $\forall f, g \in C_{[a, b]}: (f R g \leftrightarrow \forall x \in [a, b] (f(x) \leq g(x)))$
- и) $\forall x, y \in \mathbb{Z}: (xRy \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} (x = y + pk))$ к) $\forall x, y \in \mathbb{Z}: (xRy \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} (x + y = 2k + 1))$
- л) $\forall x, y \in \mathbb{Z}: (xRy \leftrightarrow \langle x + y - \text{чётное число} \rangle)$ м) $\forall x, y \in \mathbb{N}: (xRy \leftrightarrow \langle x - \text{делитель } y \rangle)$

2. Рассмотреть бинарные отношения, заданные на предыдущем занятии, и указать, которые из них являются порядком (каким именно и почему), а какие – эквивалентностью (каковы при этом классы эквивалентности и фактор-множество).

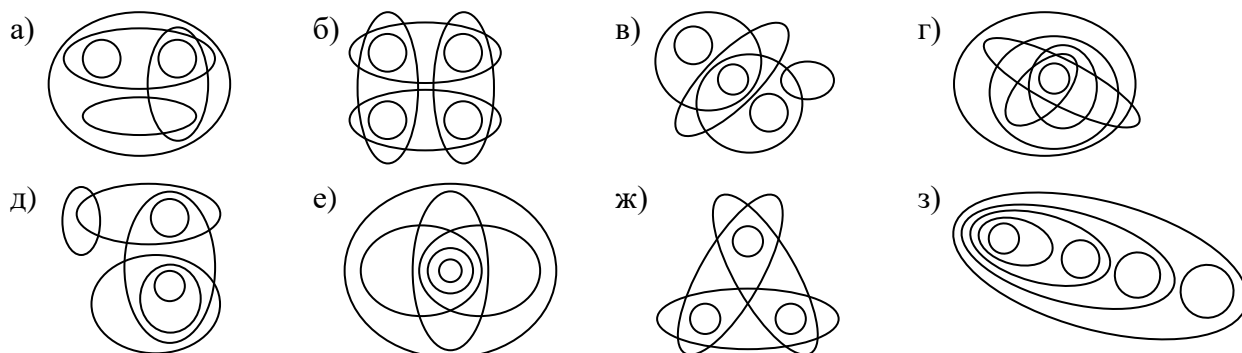
В качестве дополнительных задач на занятии и/или в качестве домашнего задания можно использовать задачи 51-53, 56 пособия [1].

Практическое занятие № 9. Упорядоченные множества. Диаграмма Хассе.

Напомнить основные виды отношений порядка и упорядоченных множеств, основные принципы построения диаграмм Хассе. Привести при необходимости примеры.

Решать на усмотрение преподавателя примерно половину из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

1. Построить диаграмму Хассе для семейства множеств, представленного на диаграмме, упорядоченного с помощью отношения включения $\forall X, Y \in 2^U: (XRY \leftrightarrow X \subset Y)$, и отметить максимальный(-е) и минимальный(-е), наибольший и наименьший элементы, если таковые имеются:



2. Показать структуру частично упорядоченного множества $(2^U, \subset)$, построив диаграмму Хассе, для $U = \{a, b, c\}$.

3. Для заданных множеств $A \subset \{0; 1\}^3$ и $B \subset \{0; 1\}^4$ выполнить упорядочивание элементов

- 1) по лексикографическому неравенству (по возрастанию);
- 2) по неравенству Парето, построив диаграмму Хассе и указав минимальный(-е) и максимальный(-е), наибольший и наименьший элементы (если существуют).

а) $A = \{(1;0;1), (0;1;0), (1;1;1), (0;0;1), (1;1;0), (0;1;1)\}$

б) $A = \{(1;1;0), (0;1;1), (1;1;1), (0;0;0), (1;0;0)\}$

в) $A = \{(1;0;0), (0;1;0), (0;0;1), (1;0;1), (0;1;1)\}$

г) $A = \{(1;1;0), (0;0;0), (1;1;1), (0;1;0)\}$

д) $B = \{(1;0;0;0), (1;0;1;0), (1;0;1;1), (1;1;1;1), (0;0;0;0)\}$

е) $B = \{(1;0;1;0), (0;1;1;0), (1;1;0;1), (1;0;0;1), (1;1;1;0), (1;0;1;1), (0;1;1;1), (0;1;0;0), (1;0;0;0)\}$

ж) $B = \{(1;1;0;1), (0;0;1;1), (0;1;1;1), (0;0;1;0), (1;1;0;0), (1;1;1;1), (0;0;0;1), (0;1;0;0)\}$

з) $B = \{(1;1;1;0), (0;1;0;0), (1;1;1;1), (0;1;1;0), (0;1;0;1), (0;1;1;1)\}$

4. Для следующих семейств $\{f_1, \dots, f_n\}$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, упорядоченных с помощью неравенства функций: $\forall f, g \in C_{[a,b]}: (fRg \leftrightarrow \forall x \in [a,b] (f(x) \leq g(x)))$, построить диаграмму Хассе и отметить максимальный(-е) и минимальный(-е), наибольший и наименьший элементы, если таковые имеются:

а) $a = -\pi/2; b = 0;$

$f_1 = \sqrt[3]{x}; f_2 = -|x|; f_3 = -\sin x; f_4 = 1; f_5 = x - 1$

б) $a = -1; b = 1;$

$f_1 = -x^2; f_2 = x^3 + 1; f_3 = (x+1)^4; f_4 = 0; f_5 = -x - 2$

в) $a = 0; b = 2;$

$f_1 = 2^x; f_2 = \sqrt{x} - 1; f_3 = x; f_4 = -x^4 + 1; f_5 = |x + 2|$

г) $a = 1; b = 4;$

$f_1 = \frac{\pi}{2}x; f_2 = \log_2 x; f_3 = -\frac{1}{x}; f_4 = x - 2; f_5 = 2$

В качестве дополнительной задачи на занятии и/или в качестве домашнего задания можно использовать задачу 62 пособия [1].

Практическое занятие № 10. Операции над отношениями.

Напомнить основные операции над отношениями, свойства бинарных отношений. Привести при необходимости примеры.

Решать на усмотрение преподавателя примерно половину из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

1. Доказать свойства операций над бинарными отношениями:

а) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$

б) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$

в) $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subset (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$

г) $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$

$$\text{д) } (R^{-1})^{-1} = R$$

$$\text{е) } (R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$$

$$\text{ж) } (R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

$$\text{з) } R_1 \subset R_2 \rightarrow R_1^{-1} \subset R_2^{-1}$$

2. Доказать, что, если отношения R_1 и R_2 симметричны, то симметричны и отношения:

$$\text{а) } R_1^{-1}$$

$$\text{б) } R_1 \cap R_2$$

$$\text{в) } R_1 \cup R_2$$

$$\text{г) } R_1 \circ R_1^{-1}$$

3. Доказать, что, если отношения R_1 и R_2 антисимметричны, то антисимметричны и отношения:

$$\text{а) } R_1^{-1}$$

$$\text{б) } R_1 \cap R_2$$

В качестве дополнительных задач на занятии и/или в качестве домашнего задания можно использовать задачи 59-61 пособия [1].

Практическое занятие № 11. Подготовка к тесту текущего контроля (1 аттестация) и его проведение.

Ознакомление с правилами проведения и оценивания. Разбор основных задач теста с напоминанием основных понятий и методов решения задач. Ответы на возникающие вопросы студентов перед началом тестирования.

Проведение тестирования.

По окончании тестирования при необходимости – разбор сложных моментов.

Практическое занятие № 12. Алгебраические операции и системы.

Напомнить основные понятия, связанные с алгебраическими операциями и системами. Привести при необходимости примеры.

Решать на усмотрение преподавателя примерно половину из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

1. Определить, какими свойствами обладают следующие операции \circ на указанных множествах A , а также, если существуют, нейтральный и симметричный элементы:

$$\text{а) } A = \mathbb{R}; \quad \circ: \quad *, \quad /, \quad x^y, \quad \log_x y;$$

$$\text{б) } A = \{И, Л\}; \quad \circ: \quad \&, \quad \vee, \quad \rightarrow, \quad \leftrightarrow;$$

$$\text{в) } A = 2^U; \quad \circ: \quad \setminus, \quad \Delta.$$

2. Дана алгебра $\langle \mathbb{R}; +; \times \rangle$. Определить являются ли её подалгебрами:

$$\text{а) } \langle \mathbb{Z}; +; \times \rangle;$$

$$\text{б) } \langle \mathbb{N}; +; \times \rangle;$$

$$\text{в) } \langle \mathbb{Q}; +; \times \rangle;$$

$$\text{г) } \langle \bar{\mathbb{Q}}; +; \times \rangle, (\bar{\mathbb{Q}} - \text{множество иррациональных чисел});$$

$$\text{д) } \langle A; +; \times \rangle,$$

$$\text{е) } \langle B; +; \times \rangle,$$

A – множество нечётных чисел); B – множество чётных чисел).

3. Привести некоторые морфизмы алгебр из задания 2 друг на друга (доказать это).

4. Определить тип группоида, указав его тип наиболее точно: полугруппа, моноид или группа; привести при этом, если существуют, нейтральный и симметричный элементы.

- | | | | |
|--------------------------------------|---|---|--------------------------------------|
| а) $\langle \mathbb{N}; + \rangle$; | б) $\langle \mathbb{Z}; \times \rangle$; | в) $\langle \mathbb{N}; \times \rangle$; | г) $\langle \mathbb{Z}; + \rangle$; |
| д) $\langle 2^U; \cup \rangle$; | е) $\langle 2^U; \setminus \rangle$; | ж) $\langle 2^U; \cap \rangle$; | з) $\langle 2^U; \Delta \rangle$. |

В качестве дополнительных задач на занятии и/или в качестве домашнего задания можно использовать задачи 1-11, 18, 21 пособия [2].

Практическое занятие № 13. Элементы комбинаторики.

Напомнить основные понятия и правила комбинаторики, виды выборов, расчётные формулы. Совместно с обучающимися разобрать некоторые задачи.

Решать на усмотрение преподавателя примерно половину из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

- № 1-11 из пособия [3].
- Доп. задача:

Из колоды, состоящей из 36 карт, последовательно взяли 4 карты. В скольких случаях:

- а) это будут: валет, дама, король, туз;
- б) окажутся все карты разных мастей;
- в) среди них будут две карты одной масти, две карты – другой.

Практическое занятие № 14. Элементы комбинаторики.

Совместно с обучающимися разобрать некоторые задачи.

Решать на усмотрение преподавателя примерно половину из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

- № 12-20 из пособия [3].
- Доп. задачи:

1. Сколько трехбуквенных слов можно составить из букв слова «логика»? А сколько – шестибуквенных?

2. Сколько существует анаграмм (слов, получаемых перестановкой букв) слова «палата»?

3. Сколько существует анаграмм слова «математика»:

- а) начинающихся с буквы «а»;

б) заканчивающихся буквой «м»?

4. Система генерирует четырёхсимвольный код подтверждения, который может содержать маленькие и большие латинские буквы. Сколько возможно «легко читаемых» вариантов кода, т.е. в которых не встречается более 2 гласных/согласных подряд, например, MarK, AEro, Leto, saab (гласными считать A, E, I, O, U)?

Практическое занятие № 15. Элементы комбинаторики.

Совместно с обучающимися разобрать некоторые задачи.

Решать на усмотрение преподавателя примерно половину из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

- № 23, 27-32 из пособия [3].
- Доп. задача:

В аудиторию с 15 двухместными партами заходит группа из 30 студентов, в которой учится 11 девушек. Сколько имеется вариантов рассадки таких, что никакие две девушки не сидят вместе?

Практическое занятие № 16. Подготовка к контрольной работе (2 аттестация) и её проведение.

Ознакомление с правилами проведения, оформления и оценивания. Разбор основных сложностей, возникших в процессе изучения раздела. Ответы на вопросы студентов перед началом контрольной работы.

Проведение контрольной работы.

По окончании – при необходимости – разбор сложных моментов.

Практическое занятие № 17. Резервное. Повторное проведение тестирования (1 аттестации) и контрольной работы (2 аттестация) при необходимости.

Напоминание основных правил проведения, оформления и оценивания.

Проведение тестирования и/или контрольной работы.

2 СЕМЕСТР

Практическое занятие № 1. Булевы функции, основные операции, правила сокращённой записи формул, построение таблиц истинности.

Напомнить основные определения, операции, порядок их выполнения, принципы построения таблиц истинности. Совместно с обучающимися разобрать некоторые примеры.

Решать на усмотрение преподавателя примерно половину из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

1. Опустить лишние скобки:

- а) $(((((\neg x) \mid y) \vee (z \Rightarrow ((\neg y) \& x))) \Rightarrow z);$
- б) $((((\neg x) \Rightarrow (y \vee (\neg z))) \equiv ((y \downarrow x) \vee (\neg y)))$;
- в) $((((x \vee (\neg y)) \vee z) \Rightarrow ((\neg x) \oplus y))$;
- г) $((x \Rightarrow y) \Rightarrow (z \Rightarrow (\neg z)))$;
- д) $(((((\neg x) \equiv y) \& (y \vee (\neg z))) \equiv x)$;
- е) $(((((x \Rightarrow (\neg x)) \vee (\neg y)) \vee z) \& (x \Rightarrow y))$;
- ж) $((x \Rightarrow y) \Rightarrow (z \Rightarrow t))$.

2. Восстановить все скобки, чтобы был чётко ясен порядок выполнения действий:

- а) $y \Rightarrow \neg x \equiv \neg y \& z \Rightarrow \neg x \vee y$;
- б) $x \equiv y \vee \neg z \& x \Rightarrow \neg x$;
- в) $\neg y \Rightarrow y \Rightarrow z \equiv z \& t$;
- г) $x \equiv y \equiv \neg x \vee \neg y \& x$;
- д) $x \Rightarrow y \Rightarrow \neg x \& y \vee z$;
- е) $x \equiv y \Rightarrow z \vee \neg x \& \neg y \vee x$;
- ж) $x \& \neg y \& z \Rightarrow x \Rightarrow \neg x \vee x \equiv y$.

3. С использованием таблиц истинности проверить равносильности:

- а) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow z \sim x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$;
- б) $(x \oplus y) \oplus z \sim x \oplus (y \oplus z)$;
- в) $x \& y \equiv x \vee y \sim \neg x \equiv y$;
- г) $(x \mid y) \mid z \sim x \mid (y \mid z)$.

В качестве дополнительных задач на занятии и/или в качестве домашнего задания можно использовать задачи 1-12 пособия [3].

Практическое занятие № 2. Булевы функции, упрощение формул с помощью равносильных преобразований.

Напомнить основные операции, порядок их выполнения, свойства. Совместно с обучающимися разобрать некоторые примеры.

Решать на усмотрение преподавателя примерно половину из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

1. Упростить формулы и проверить результат построением таблиц истинности:

- | | |
|--|---|
| а) $\neg x \& (x \vee y)$; | е) $(x \vee (y \downarrow \neg z)) \vee \neg x \& (\neg y \vee z)$; |
| б) $x \& x \& y \vee y \Rightarrow x \& y \vee y \vee x \& x \& z$; | ж) $x \vee \neg z \& y \Rightarrow z \vee \neg z$; |
| в) $x \& \neg y \equiv y \vee z \Rightarrow \neg x$; | з) $\neg x \Rightarrow (x \& y \equiv \neg z)$; |
| г) $x \vee \neg x \& y$; | и) $x \& \neg y \oplus y \vee z$; |
| д) $x \vee x \vee x \vee x \& \neg y \& z$; | к) $\bar{x} \vee (\bar{y} \downarrow z) \oplus (x \bar{x} \& y \vee z)$. |

В качестве дополнительных задач на занятии и/или в качестве домашнего задания можно использовать задачи 13, 18-21, 26, 28 пособия [3].

Практическое занятие № 3. Булевы функции, нахождение нормальных форм.

Напомнить понятия ДНФ и КНФ, алгоритм их нахождения. Совместно с обучающимися разобрать некоторые примеры.

Решать на усмотрение преподавателя примерно половину из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

Упростить, найти ДНФ и КНФ булевой функции:

- | | |
|--|--|
| а) $y \& (\bar{x} \Rightarrow z \vee \bar{y} \& (\bar{z} \equiv x))$ | ж) $x \& \bar{y} \vee x \& \bar{y} \& z \vee y \vee \bar{z}$; |
| б) $x \Rightarrow y \equiv y \Rightarrow x$; | з) $x \vee \bar{y} \& z \Rightarrow x \& \bar{y} \vee z$; |
| в) $x \& y \equiv \bar{z} \vee x \Rightarrow y$; | и) $(x \equiv y) \Rightarrow (x \oplus y)$; |
| г) $x \equiv \bar{y} \Rightarrow y \oplus \bar{x}$; | к) $(x \oplus y) \Rightarrow (x \equiv y)$; |
| д) $x \vee \bar{y} \& z \Rightarrow x \oplus \bar{z}$; | л) $(x y) \vee (x \downarrow y)$; |
| е) $x y \vee t \Rightarrow \bar{z} \& x \vee \bar{y}$; | м) $(x y) \& (x \downarrow y)$. |

В качестве дополнительных задач на занятии и/или в качестве домашнего задания можно использовать задачи 32-36 пособия [3].

Практическое занятие № 4. Булевы функции, нахождение совершенных нормальных форм.

Напомнить понятия СДНФ и СКНФ, алгоритмы их нахождения. Совместно с обучающимися разобрать некоторые примеры.

Решать на усмотрение преподавателя примерно половину из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

Найти СДНФ и СКНФ (двумя способами) для булевых функций предыдущего занятия, а также для функций:

$$\text{а) } x \Rightarrow \bar{y} \downarrow y \Rightarrow \bar{x} \Rightarrow x;$$

$$\text{б) } x \equiv \bar{y} \equiv x | y \equiv \bar{x};$$

$$\text{в) } x \vee \bar{y} \equiv \bar{x} \vee z \Rightarrow y \& x;$$

$$\text{г) } x \& y \oplus x \Rightarrow \bar{y} \vee \bar{x};$$

$$\text{д) } x \Rightarrow y \vee \bar{x} \downarrow \bar{z} \& y;$$

$$\text{е) } (x | \bar{y}) \equiv x \vee y \oplus (\bar{x} \downarrow y).$$

В качестве дополнительных задач на занятии и/или в качестве домашнего задания можно использовать задачи 37, 38 пособия [3].

Практическое занятие № 5. Булевы функции, нахождение минимальных нормальных форм. Метод импликантных матриц.

Напомнить понятия импликанты, сокращённой, тупиковой, минимальной ДНФ, метод импликантных матриц. Совместно с обучающимися разобрать некоторые примеры.

Решать на усмотрение преподавателя примерно половину из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

Найти методом импликантных матриц минимальную ДНФ булевой функции трёх переменных, если она равна единице только на наборах с номерами:

$$\text{а) } 0, 1, 3, 4, 6, 7;$$

$$\text{б) } 1, 3, 4, 5, 7;$$

$$\text{в) } 0, 2, 3, 4, 6;$$

$$\text{г) } 1, 2, 3, 5, 7;$$

$$\text{д) } 0, 1, 4, 5;$$

$$\text{е) } 2, 3, 5, 6, 7.$$

Попытаться найти также и минимальные КНФ.

В качестве дополнительных задач на занятии и/или в качестве домашнего задания можно использовать задачи 56, 57 пособия [3].

Практическое занятие № 6. Булевы функции, нахождение минимальных нормальных форм. Метод Мак-Класки.

Напомнить понятия импликанты, сокращённой, тупиковой, минимальной ДНФ, метод Мак-Класки. Совместно с обучающимися разобрать некоторые примеры.

Решать на усмотрение преподавателя примерно половину из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

1. Найти методом Мак-Класки минимальную ДНФ булевой функции трёх переменных, если она равна единице только на наборах с номерами:

$$\text{а) } 0, 2, 3, 4, 5, 7;$$

$$\text{б) } 1, 3, 5, 6, 7;$$

$$\text{в) } 0, 1, 3, 4, 5$$

$$\text{г) } 1, 2, 3, 6, 7;$$

$$\text{д) } 0, 2, 4, 6;$$

$$\text{е) } 2, 4, 5, 6, 7.$$

Попытаться найти также и минимальные КНФ.

2. Найти указанные минимальные НФ для следующих булевых функций:

$$\text{а) минимальную(-ые) ДНФ } f(x, y, z), \text{ если } f = 0 \text{ только на } 1, 6, 7 \text{ наборах;}$$

$$\text{б) минимальную(-ые) КНФ } f(x, y, z), \text{ если } f = 1 \text{ только на } 1, 2 \text{ наборах;}$$

- в) минимальную(-ые) ДНФ $f(x, y, z, t)$, если $f = 0$ только на 0, 1, 4, 5, 9, 13 наборах;
 г) минимальную(-ые) КНФ $f(x, y, z, t)$, если $f = 1$ только на 3, 9, 11, 13, 15 наборах.

В качестве дополнительных задач на занятии и/или в качестве домашнего задания можно использовать задачи 59-61 пособия [3].

Практическое занятие № 7. Булевы функции, полином Жегалкина и его нахождение.

Напомнить основные понятия и законы алгебры Жегалкина, способы построения полинома Жегалкина. Совместно с обучающимися разобрать некоторые примеры.

Решать на усмотрение преподавателя примерно половину из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

Построить полином Жегалкина (двумя способами) для булевой функции:

- | | |
|---|---|
| а) $(\bar{x} \downarrow y) \equiv z$; | г) $x \mid \bar{y} \Rightarrow \bar{z} \Rightarrow t$; |
| б) $\bar{x} \vee y \Rightarrow \bar{z}$; | д) $x \& \bar{y} \vee x \Rightarrow \bar{z} \oplus y$; |
| в) $x \equiv y \Rightarrow x \equiv y$; | е) $\bar{x} \vee y \Rightarrow x \equiv \bar{y} \vee x \Rightarrow y$. |

В качестве дополнительных задач на занятии и/или в качестве домашнего задания можно использовать задачи 44-46 пособия [3].

Практическое занятие № 8. Полнота систем булевых функций.

Напомнить понятия полной системы булевых функций, базиса, основные замкнутые классы булевых функций, критерий полноты. Совместно с обучающимися разобрать некоторые примеры.

Решать на усмотрение преподавателя примерно половину из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

Выяснить, полна ли система булевых функций? Является ли базисом? Какие базисы из неё можно выделить / Какие функции в неё можно добавить, чтобы получить полную систему?

- | | |
|---|--|
| а) $\{\neg, \&, \vee\}$; | е) $\{x + \bar{y} + z, x \equiv \bar{z}\}$; |
| б) $\{x \Rightarrow y, x \equiv y \equiv z\}$; | ж) $\{x \& y \vee z, x \mid \bar{y}, \bar{x} \downarrow y\}$; |
| в) $\{\&, +\}$; | з) $\{x \& y \downarrow z, x \Rightarrow \bar{y}, \bar{x} + y \Rightarrow z\}$; |
| г) $\{\mid, \downarrow\}$; | и) $\{(x \vee y) \& (y \vee z) \& (x \vee z), x \mid \bar{y} \mid z\}$; |
| д) $\{\bar{x} \& y, x \vee y \equiv z\}$; | к) $\{x \downarrow y \downarrow z, \bar{x} + y, x \vee y \Rightarrow z\}$. |

В качестве дополнительных задач на занятии и/или в качестве домашнего задания можно использовать задачи 62-67 пособия [3].

Практическое занятие № 9. Подготовка к тесту текущего контроля (1 аттестация) и его проведение.

Ознакомление с правилами проведения и оценивания. Разбор основных задач теста с напоминанием основных понятий и методов решения задач. Ответы на возникающие вопросы студентов перед началом тестирования.

Проведение тестирования.

По окончании тестирования при необходимости – разбор сложных моментов.

В начале занятия в продолжение прежней темы можно разобрать некоторые из дополнительных задач темы предыдущего занятия:

Выяснить, полна ли система булевых функций? Является ли базисом? Какие базисы из неё можно выделить / Какие функции в неё можно добавить, чтобы получить полную систему?

а) $\{x \equiv y \vee z, x \equiv y \downarrow z\}$;

в) $\{x \downarrow (y | z), (x | y) + z\}$;

б) $\{x \& \bar{y} \vee x \& z \vee \bar{y} \& z, x + \bar{y} \Rightarrow z, x \vee \bar{y}\}$;

г) $\{x \Rightarrow y \downarrow z, x \Rightarrow y \vee z\}$.

В качестве дополнительных задач на занятии и/или в качестве домашнего задания можно использовать задачи 62-67 пособия [3].

Практическое занятие № 10. Теория графов. Задачи поиска путей с наименьшим числом дуг и кратчайших путей (с учётом длин дуг).

Напомнить основные понятия, связанные с маршрутами и путями в графах, поставить задачи поиска путей с наименьшим числом дуг и кратчайших путей (с учётом длин дуг), описать и разобрать на примерах алгоритм Дейкстры для их решения.

Решать на усмотрение преподавателя примерно половину из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

В орграфе, представленном на рис. 1, найти пути:

1) с наименьшим числом дуг,

2) кратчайшей длины,
соединяющие вершины

а) v_1 и v_7 ;

б) v_1 и v_9 ;

в) v_2 и v_9 ;

г) v_3 и v_8 ;

д) v_3 и v_9 .

Числа на дугах означают их длины.

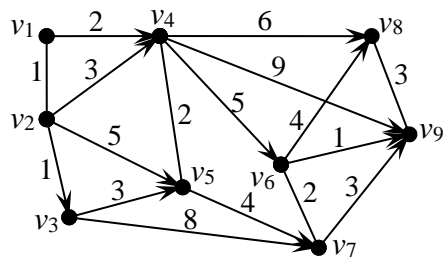


Рис. 1

Практическое занятие № 11. Теория графов. Задачи поиска наибольшей длины). Поиск расстояния с помощью матриц смежности.

Напомнить сформулировать задачу поиска путей наибольшей длины, отмечая её особенности и способы решения (модификации алгоритма Дейкстры). Привести некий подходящий для задачи оргграф и разобрать на его примере пошагово работу алгоритма. В качестве домашнего задания выдать другой оргграф для решения подобной задачи.

Напомнить матричные способы задания графов и их применение, в частности, для поиска расстояний в графах. Продемонстрировать на примерах.

Решать на усмотрение преподавателя примерно половину из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

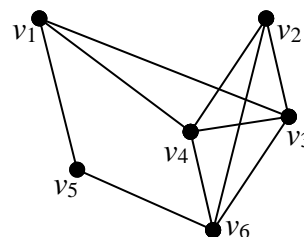


Рис. 2

В графе, диаграмма которого приведена на рис. 2 с помощью матриц смежности определить:

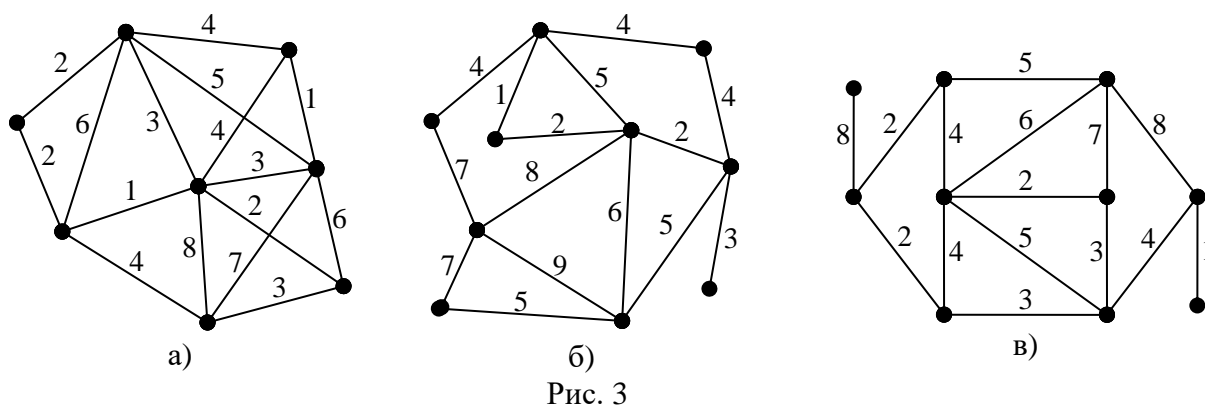
- | | |
|--------------------------------|--|
| 1) расстояние между вершинами: | 2) количество маршрутов: |
| а) v_2 и v_5 ; | а) длины 3 между вершинами v_3 и v_5 ; |
| б) v_2 и v_1 ; | б) длины 2 между вершинами v_1 и v_6 ; |
| в) v_4 и v_5 ; | в) длины 3 между вершинами v_3 и v_4 ; |
| г) v_3 и v_5 ; | г) длины 4 между вершинами v_5 и v_6 ; |
| д) v_1 и v_6 ; | д) длины 5 между вершинами v_2 и v_5 . |

Практическое занятие № 12. Теория графов. Поиск кратчайшего остова графа.

Напомнить понятие остова, сформулировать задачу поиска в графе кратчайшего остова. Продемонстрировать пример решения.

Решать на усмотрение преподавателя примерно некоторые из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

Найти кратчайшие остовы графов, представленных на рис. 3.а-в (числа на дугах означают их длины). Решить также задачу, приняв длину каждого ребра равной $10 - x$, где x – исходная длина ребра.



Практическое занятие № 13. Теория графов. Раскраска графов.

Напомнить понятия, принципы и алгоритмы раскраски графов. Продемонстрировать на примерах.

Решать на усмотрение преподавателя примерно некоторые из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

Определить хроматические числа и индексы графов, рассмотренных на предыдущих двух занятиях (рис. 2, 3).

Практическое занятие № 14. Теория графов. Транспортные сети. Поиск максимального потока и минимального разреза.

Напомнить понятия, связанные с транспортными сетями, сформулировать задачу поиска максимального потока и минимального разреза транспортной сети. Описать общую идею алгоритма Форда-Фалкерсона, разобрать пошагово на примере.

Решать на усмотрение преподавателя примерно некоторые из следующих задач (оставшиеся выдать в качестве домашнего задания):

Определить максимальные потоки и минимальные разрезы транспортных сетей, представленных на рис. 4.а,б. Значения пропускных способностей дуг для каждого из вариантов задачи брать из соответствующей строки таблицы 3.

Таблица 3. Значения пропускных способностей дуг

№ варианта	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
1	5	4	2	3	5	4	1
2	2	3	1	4	5	3	5
3	3	5	3	1	4	1	4
4	4	4	1	2	3	1	1
5	5	1	1	3	4	2	1

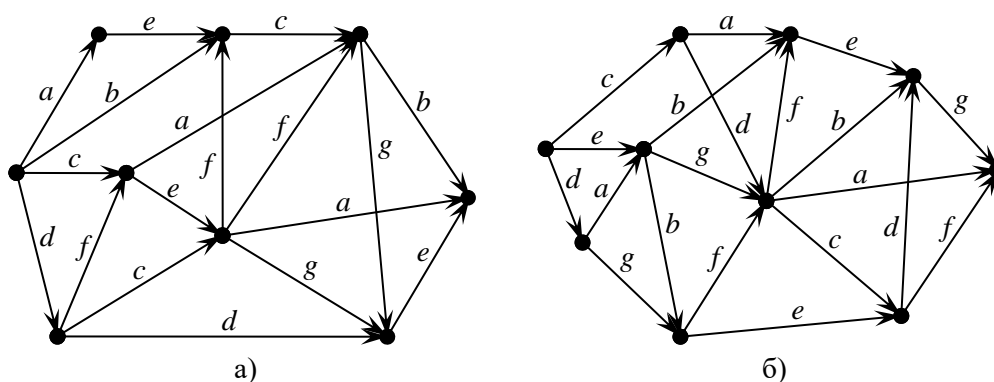


Рис. 4

Практическое занятие № 15. Подготовка к контрольной работе (2 аттестация).

Ознакомление с правилами проведения, оформления и оценивания. Разбор основных задач контрольной работы. Ответы на вопросы студентов, при необходимости – повторный разбор сложных моментов.

Практическое занятие № 16. Проведение контрольной работы (2 аттестация).

Напоминание с правил проведения, оформления и оценивания.

Проведение контрольной работы.

По окончании – при необходимости – разбор сложных моментов.

Практическое занятие № 17. Резервное. Повторное проведение тестирования (1 аттестации) и контрольной работы (2 аттестация) при необходимости.

Напоминание основных правил проведения, оформления и оценивания.

Проведение тестирования и/или контрольной работы.

Литература

1. Амбарцумов, Л.Г. Дискретная математика. Множества. Отображения. Отношения [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л.Г. Амбарцумов. Казань : Издательство КНИТУ-КАИ, 2013. 120 с. URL: http://jirbis.library.kai.ru/_docs_file/813100/HTML/index.html. Режим доступа: свободный.
2. Амбарцумов, Л.Г. Дискретная математика. Алгебраические системы. Алгебры. Модели [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л.Г. Амбарцумов. Казань : Издательство КНИТУ-КАИ, 2013. 107 с. URL: http://jirbis.library.kai.ru/_docs_file/813565/HTML/index.html. Режим доступа: свободный.
3. Галиев, Ш.И. Дискретная математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Ш.И. Галиев. Казань : Мастер Лайн, 2005. 174 с. URL: http://jirbis.library.kai.ru/_docs_file/783840/HTML/index.html. Режим доступа: свободный.