

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
КАЗАНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.Н. ТУПОЛЕВА

Кафедра прикладной математики и информатики им. Ю.В. Кожевникова

Н.Е. РОДНИЦЕВ, С.Н. МЕДВЕДЕВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания к практическим занятиям

Казань 2019

СОДЕРЖАНИЕ

Практические занятия.....	3
Список литературы.....	81

Практические занятия

Практические занятия по учебной дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» проводятся по темам:

- Случайные события
- Случайные величины
- Системы случайных величин
- Предельные теоремы теории вероятностей

Используются следующие учебные пособия:

1. Учебное пособие [4] Курс теории вероятностей и математической статистики. Казань, КГТУ, 2007. (электр.издание).
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей, математической статистике. М., Высшая школа, 2005.

Рекомендуется следующая схема изучения каждой части:

- a. конспектирование теоретического материала по теме в соответствии с настоящими указаниями;
- b. проверка усвоения теоретического материала путем ответов на вопросы самопроверки;
- c. решение задач для лучшего уяснения теоретических сведений и приобретения практических навыков в применении теории вероятностей.

Часть 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Занятие 1. Действия с событиями. Классическое и геометрическое определение вероятности. Условная вероятность.

Событие – это всякий факт, который может произойти или не произойти в результате эксперимента.

События разделяются на следующие три вида: *достоверные*, *невозможные* и *случайные*.

Достоверным событием называют событие, которое обязательно произойдет при каждой реализации условий Ω . Достоверные события будем обозначать в дальнейшем знаком Ω .

Пример достоверного события – выпадение не более 6 очков при бросании одной игральной кости.

Невозможным событием называют событие, которое заведомо не произойдет при каждой реализации условий Ω . Невозможные события будем обозначать знаком \emptyset .

Пример невозможного события – выпадение 12 очков при бросании одной игральной кости.

Случайным событием называют событие, которое при реализации условий Ω может либо произойти, либо не произойти.

Обозначения случайных событий – латинские заглавные буквы начала алфавита, например, событие A , событие B и т.д.

Действия с событиями (алгебра событий) описываются в конспекте лекций (лекция 1).

Приведем свойства событий:

$$A + \Omega = \Omega;$$

$$A * \Omega = A;$$

$$A * A = A;$$

$$A + A = A;$$

$$C(A+B) = cA + cB;$$

$$A + \emptyset = A;$$

$$A * \emptyset = \emptyset;$$

$$(A \setminus B)(B \setminus A) = \emptyset;$$

$$A + B = B + A;$$

$$AB=BA;$$

Классическое определение вероятности.

Если событие A подразделяется на m частных случаев, входящих в полную группу из n попарно несовместимых и равновозможных событий, то вероятность $P(A)$ события A равна $P(A) = \frac{m}{n}$

Решение типовых задач

Пример 1.1.

Формулировка задачи.

Монета брошена 2 раза. Определить вероятность того, что хотя бы 1 раз появится «герб».

Решение.

Шаг 1. Определение события, вероятность которого требуется вычислить.

Если какая-то проблема взята из реальной жизни, то самое трудное и самое важное – сформулировать эту задачу на математическом языке. Основным этапом, от которого напрямую будет зависеть дальнейшее решение задачи, является определение события, вероятность которого требуется вычислить. Неправильно определить событие значит неправильно решить задачу.

Укажем событие, вероятность которого требуется посчитать. Для этого уточним, что тот факт, что хотя бы 1 раз при двух подбрасываниях монеты появится «герб» означает, что «герб» появится 1 раз или 2 раза.

Таким образом, *событие A состоит в том, что при подбрасывании монетки «герб» появится 1 раз или 2 раза.*

Определим подход, который целесообразнее применить для подсчета вероятности названного события. Задачу можно решать непосредственным подсчетом вероятности данного события A или методом определения вероятности события, противоположного A .

Конечно, разумнее вычислять вероятность противоположного A события, которое состоит в том, что «герб» не появится ни разу, поскольку оно является элементарным. Событие A же представляет собой сумму двух элементарных событий, а именно: события B , состоящего в том, что «герб» появится 1 раз, и события C , состоящего в том, что «герб» появится 2 раза при подбрасывании монетки.

Если мы вычислим вероятность противоположного события, то вероятность события A определим из соображения, что сумма вероятностей события A и противоположного с A события равна 1.

Шаг 2. Определение числа возможных исходов испытания.

При одном подбрасывании монетки число исходов равно 2, тогда при двух подбрасываниях число всех возможных исходов составляет 4.

Значит, $n=4$.

Шаг 3. Определение числа исходов, благоприятствующих событию, противоположному А.

Событие, противоположное А, состоит в том, что «герб» не появится ни разу, то есть при обоих подбрасываниях монетки выпадет «решка».

Количество исходов, благоприятствующих этому событию, очевидно, равно 1.

Итак, $m=1$.

Шаг 4. Применение формулы непосредственного подсчета вероятности.

Воспользовавшись формулой непосредственного подсчета вероятности, получим, что вероятность события, противоположного событию А, равна:

$$m/n = 1/4.$$

Значит, искомая вероятность события А равна:

$$P(A) = 1 - 1/4 = 3/4.$$

Пример 1.2.

Формулировка задачи.

Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь две окрашенные стороны.

Решение.

Введем событие А, состоящее в том, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь две окрашенные стороны. Всего кубиков $n = 1000$. Куб имеет 12 ребер, на каждом из которых по 8 кубиков с двумя окрашенными сторонами. Поэтому $m =$

$$12 \cdot 8 = 96, P(A) = \frac{m}{n} = \frac{12 \cdot 8}{1000} = 0,096.$$

Пример 1.3.

Формулировка задачи.

В партии из n изделий k бракованных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки m изделий ровно l окажутся бракованными.

Решение.

Введем событие А, состоящее в том, что среди выбранных наудачу для проверки m изделий ровно l окажутся бракованными. Число возможных способов взять m изделий из n равно C_n^m . Благоприятствующими являются случаи, когда из общего числа k бракованных изделий взято l (это можно сделать C_k^l способами), а остальные $m - l$ изделий не бракованные, т. е. они взяты из общего числа $n - k$

(количество способов равно C_{n-k}^{m-l}). Поэтому число благоприятствующих случаев равно $C_k^l C_{n-k}^{m-l}$. Искомая вероятность будет $P(A) = \frac{C_k^l C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m}$

Пример 1.4.

Формулировка задачи.

Из полного набора костей домино наудачу берутся пять костей. Найти вероятность p того, что среди них будет хотя бы одна с шестеркой.

Решение.

Введем событие A , состоящее в том, что среди них будет хотя бы одна с шестеркой. Найдем вероятность q - противоположного события. Тогда $p=1 - q$. Вероятность того, что все взятые пять костей не содержат шестерки (см. пример 2.2), равна $q = \frac{C_7^0 C_{21}^5}{C_{28}^5}$. Поэтому $P(A) = 1 - \frac{C_{21}^5}{C_{28}^5} = 0,793$.

Задачи для самостоятельной работы

1.1.

Лотерея выпущена на общую сумму n рублей. Цена одного билета r рублей. Ценные выигрыши падают на m билетов. Определить вероятность ценного выигрыша на один билет.

(Ответ: $p = \frac{mr}{n}$)

1.2.

Случайно выбранная кость домино оказалась не дублем. Найти вероятность того, что вторую также взятую наудачу кость домино можно приставить к первой.

(Ответ: $p = \frac{4}{9}$)

1.3.

В колоде 36 карт четырех мастей. После извлечения и возвращения одной карты колода перемешивается и снова извлекается одна карта. Определить вероятность того, что обе извлеченные карты одной масти.

(Ответ: $p = 0.25$)

1.4.

Буквенный замок содержит на общей оси пять дисков, каждый из которых разделен на шесть секторов с различными нанесенными на них буквами. Замок открывается только в том случае, если каждый диск занимает одно определенное

положение относительно корпуса замка. Определить вероятность открытия замка, если установлена произвольная комбинация букв.

(Ответ: $p = \frac{1}{6^5} = 0.00013$)

1.5.

В кошельке лежат три монеты достоинством по 20 коп. и семь монет по 3 коп. Наудачу берется одна монета, а затем извлекается вторая монета, оказавшаяся монетой в 20 коп. Определить вероятность того, что и первая извлеченная монета имеет достоинство в 20 коп.

(Ответ: $p = \frac{2}{9}$)

1.6.

Из партии деталей, среди которых n доброкачественных и m бракованных, для контроля наудачу взято s штук. При контроле оказалось, что первые k из s деталей доброкачественны. Определить вероятность того, что следующая деталь будет доброкачественной.

(Ответ: $p = \frac{n-k}{n+m-k}$)

1.7.

Десять книг на одной полке расставляются наудачу. Определить вероятность того, что при этом три определенные книги окажутся поставленными рядом.

(Ответ: $p = \frac{1}{15}$)

1.8.

Из десяти билетов выигрышными являются два. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов:

- а) один выигрышный;
- б) оба выигрышных;
- в) хотя бы один выигрышный.

(Ответ: а) $p = \frac{5}{9}$; б) $p = \frac{2}{9}$; в) $p = \frac{7}{9}$)

1.9.

Для уменьшения общего количества игр $2n$ команд-спортсменов по жребию разбиваются на две подгруппы. Определить вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся:

- а) в разных подгруппах;
- б) в одной подгруппе.

$$(\text{Ответ: а) } p = \frac{n}{2n-1}; \text{ б) } p = \frac{n-1}{2n-1})$$

1.10.

Из колоды карт (52 карты) наудачу извлекаются три карты. Найти вероятность того, что это будут тройка, семерка и туз.

(Ответ: $p = 0.0029$)

1.11.

Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются три карты. Определить вероятность того, что сумма очков этих карт равна 21, если валет составляет два очка, дама—три, король—четыре, туз—одиннадцать, а остальные карты—соответственно шесть, семь, восемь, девять и десять очков.

(Ответ: $p = 0.079$)

1.12.

Имеются пять билетов стоимостью по одному рублю, три билета по три рубля и два билета по пять рублей. Наугад берутся три билета. Определить вероятность того, что:

- а) хотя бы два из этих билетов имеют одинаковую стоимость;
- б) все три билета стоят семь рублей.

(Ответ: а) $p = 0,75$; б) $p = \frac{7}{24}$)

Геометрическое определение вероятности.

Применение классического определения носит ограниченный характер, так как оно применяется только при подсчете вероятностей событий в опытах, сводящихся к схеме случаев с конечным числом исходов.

Общая задача, которая ставилась и привела к расширению понятия вероятности, может быть сформулирована следующим способом.

Пусть, например, на плоскости имеется некоторая область G и в ней содержится другая область g с квадратуемой границей. В область G наудачу бросается точка и спрашивается, чему равна вероятность того, что точка попадет в область g . При этом выражению «точка бросается наудачу в область G » придается следующий смысл: брошенная точка может попасть в любую точку области G , вероятность попасть в какую-либо часть области G пропорциональна мере этой части (длине, площади и т. д.) и не зависит от ее расположения и формы.

Таким образом, по определению, геометрическая вероятность попадания в область g при бросании наудачу точки в область G равна

$$p = \frac{\text{mes } g}{\text{mes } G}$$

Решение типовых задач

Пример 1. Задача о встрече.

Два лица A и B условились Встретиться в определенном месте между 12 часами и часом. Пришедший первым ждет другого в течение 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи лиц A и B , если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти наудачу и моменты прихода независимы.

Решение.

Обозначим моменты прихода лица A через x и лица B через y . Для того чтобы встреча произошла, необходимо и достаточно, чтобы $|x - y| \leq 20$.

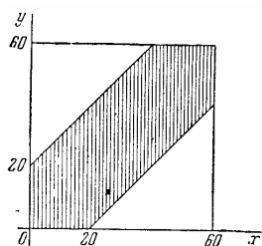


Рис. 2.1.

Будем изображать xOy как декартовы координаты на плоскости; в качестве единицы масштаба выберем минуту. Всевозможные исходы изобразятся точками квадрата со сторонами 60; благоприятствующие встрече — расположатся в заштрихованной области (рис. 2.1).

Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади всего квадрата:
$$p = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}$$

Пример 2. Задача Бюффона.

Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросается игла длины $2l (l \leq a)$. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

Решение.

Обозначим через x расстояние от центра до ближайшей параллели и через φ — угол, составленный иглой с этой параллелью. Величины x и φ полностью определяют положение иглы. Всевозможные положения иглы определяются точками прямоугольника со сторонами a и π . Из рис. 2.2. видно, что для пересечения иглы с параллелью необходимо и достаточно, чтобы $x \leq l \sin \varphi$.

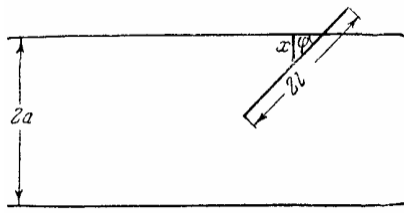


Рис. 2.2

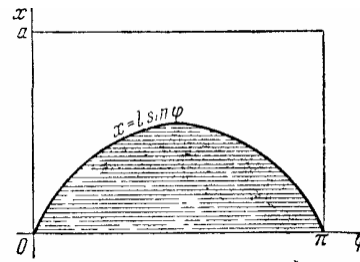


Рис. 2.3.

Искомая вероятность в силу сделанных предположений равна отношению площади заштрихованной на рис. 2.3. области к площади прямоугольника

$$p = \frac{1}{a\pi} \int_0^{\pi} l \sin \varphi d\varphi = \frac{2l}{a\pi}$$

Заметим, что задача Бюффона являлась исходным пунктом для решения некоторых проблем теории стрельбы, учитывающих размеры снаряда.

Задачи для самостоятельной работы

2.1.

В точке C , положение которой на телефонной линии AB длины L равновозможно, произошел разрыв. Определить вероятность того, что точка C удалена от точки A на расстояние, не меньшее l .

(Ответ: $p = 1 - \frac{l}{L}$)

2.2.

На плоскости проведены параллельные линии, расстояния между которыми попеременно равны 1,5 и 8 см. Определить вероятность того, что наудачу брошенный на эту плоскость круг радиуса 2,5 см не будет пересечен ни одной линией.

(Ответ: $p = \frac{3}{9.5} = 0.316$)

2.3.

В круге радиуса R проводятся хорды параллельно заданному направлению. Какова вероятность того, что длина наугад взятой хорды не более R , если равновозможны любые положения точек пересечения хорды с диаметром, перпендикулярным выбранному направлению?

(Ответ: $p = 0.134$)

2.4.

Перед вращающимся с постоянной скоростью диском находится отрезок длиной $2h$, расположенный в плоскости диска таким образом, что прямая, соединяющая середину отрезка с центром диска перпендикулярна отрезку. По касательной к окружности в произвольный момент времени слетает частица.

Определить вероятность попадания этой частицы на отрезок, если расстояние между отрезком и центром диска равно l .

$$(\text{Ответ: } p = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{h}{l})$$

2.5.

Прямоугольная решетка состоит из цилиндрических прутьев радиуса r . Расстояния между осями прутьев равны соответственно a и b . Определить вероятность попадания шариком диаметра d в решетку при одном бросании без прицеливания, если траектория полета шарика перпендикулярна плоскости решетки.

$$(\text{Ответ: } p = 1 - \left(1 - \frac{2r+d}{a}\right) \left(1 - \frac{2r+d}{b}\right))$$

2.6.

Начерчены пять concentрических окружностей, радиусы которых равны соответственно kr ($k=1, 2, 3, 4, 5$). Круг радиуса r и два кольца с внешними радиусами $3r$ и $5r$ заштрихованы. В круге радиуса $5r$ наудачу выбрана точка. Определить вероятность попадания этой точки:

- а) в круг радиуса $2r$;
- б) в заштрихованную область.

$$(\text{Ответ: а) } p = 0,16; \text{ б) } p = 0.6)$$

2.7.

Лодка перевозит груз с одного берега пролива на другой, пересекая пролив за один час. Какова вероятность того, что идущее вдоль пролива судно будет замечено, если с лодки обнаруживают судно в случае, когда пересекают его курс не ранее, чем за 20 мин. до пересечения судном курса лодки, и не позднее, чем через 20 мин. после пересечения судном курса лодки? Любой момент и любое место пересечения судном курса лодки равновозможны. Курс судна перпендикулярен курсу лодки.

$$(\text{Ответ: } p = \frac{5}{9})$$

2.8.

На отрезке длиной l наудачу выбраны две точки. Какова вероятность, что расстояние между ними меньше kl , где $0 < k < 1$?

$$(\text{Ответ: } p = k(2-k))$$

2.9.

На отрезке AB длиной l наудачу поставлены две точки L и M . Найти вероятность того, что точка L будет ближе к точке M , чем к точке A .

$$(\text{Ответ: } p = 0.75)$$

2.10.

На отрезке длиной l наудачу ставятся две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Определить вероятность того, что из трех получившихся частей отрезка можно построить треугольник.

(Ответ: $p = \frac{1}{4}$)

2.11.

Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода один час, а второго — два часа.

(Ответ: $p = 0.121$)

2.12

Два лица имеют одинаковую вероятность прийти к указанному месту в любой момент промежутка времени T . Определить вероятность того, что время ожидания одним другого будет не больше t .

(Ответ: $p = 1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2$)

Дополнительные задачи для решения:

Сборник задач [7] Ч.1 гл.1, §§ 1,2 стр.8-17; гл.2, §§ 1-4 стр.18-36; гл.3, § 1 стр.37-39.

Вопросы для самопроверки: Учебное пособие [4] стр. 18.

Дополнительные вопросы для самопроверки:

1. Что такое случайное событие?
2. Перечислите и дайте определение основных видов событий.
3. Что такое элементарный исход испытаний?
4. Привести формулу пояснить её содержание для определения вероятности по классической и статистической схеме.
5. Дать пример, когда вероятность события невозможно найти по классической схеме.
6. В чём состоит смысл принципов практической невозможности события с малой вероятностью и практической достоверности событий с вероятностью очень близкой к единице?

Дополнительные задачи для домашнего задания:

Учебное пособие [4] стр. 17 задачи № 1-6

Занятие 2. Условная вероятность. Формулы умножения и сложения.

Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей

Условной вероятностью $P(A|B)$ события A называется вероятность появления этого события, вычисленная при условии, что имело место событие B .

События A и B независимы, если $P(A|B) = P(A)$.

Вероятность произведения двух событий определяется по формуле

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B),$$

которая обобщается на произведение n событий:

$$P\left(\prod_{k=1}^n A_k\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \dots P\left(A_n \mid \prod_{k=1}^{n-1} A_k\right).$$

События A_1, A_2, \dots, A_n независимы в совокупности, если для любого m ($m=2, 3, \dots, n$) и любых k_j ($j=1, 2, \dots, m$), $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n$, выполняется:

$$P\left(\prod_{j=1}^m A_{k_j}\right) = \prod_{j=1}^m P(A_{k_j}).$$

Решение типовых задач

Пример 3.1.

Формулировка задачи.

Разрыв электрической цепи происходит в том случае, когда выходит из строя хотя бы один из трех последовательно соединенных элементов. Определить вероятность того, что не будет разрыва цепи, если элементы выходят из строя соответственно с вероятностями 0,3; 0,4 и 0,6. Как изменится искомая вероятность, если первый элемент не выходит из строя?

Решение.

Введем в рассмотрение событие A , состоящее в том, что не будет разрыва цепи. Искомая вероятность равна вероятности того, что не выйдут из строя все три элемента. Пусть событие A_k означает, что k -й элемент не выйдет из строя ($k=1, 2, 3$). Тогда

$$A = A_1 A_2 A_3, \text{ т.е. } P(A) = P(A_1 A_2 A_3).$$

Так как события независимы, то

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,168.$$

Если первый элемент не выходит из строя, то

$$p = P(A_2 A_3) = 0,24.$$

Пример 3.2.

Формулировка задачи.

Определить вероятность того, что выбранное наудачу изделие является первосортным, если известно, что 4% всей продукции являются браком, а 75% небракованных изделий удовлетворяют требованиям первого сорта.

Решение.

Пусть событие A состоит в том, что выбранное изделие небракованное, а событие B — в том, что выбранное изделие первосортное.

Дано:

$$P(A) = 1 - 0,04 = 0,96,$$

$$P(B|A) = 0,75.$$

$$\text{Искомая вероятность } p = P(AB) = 0,96 \cdot 0,75 = 0,72.$$

Пример 3.3.

Формулировка задачи.

Партия из ста деталей подвергается выборочному контролю. Условием непригодности всей партии является наличие хотя бы одной бракованной детали среди пяти проверяемых. Какова вероятность для данной партии быть принятой, если она содержит 5% неисправных деталей?

Решение.

Введем в рассмотрение событие A , состоящее в том, что в партии является в наличии хотя бы одна бракованная деталь среди пяти проверяемых.

Найдем вероятность q противоположного события \bar{A} , которое заключается в том, что партия деталей будет принята. Данное событие является произведением пяти событий

$$A = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5,$$

где A_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) означает, что k -я проверенная деталь доброкачественная.

Вероятность события A_1 равна

$$P(A_1) = \frac{95}{100},$$

так как всего деталей 100, а исправных 95.

После осуществления события A_1 деталей останется 99, среди которых исправных 94, поэтому

$$P(A_2|A_1) = \frac{94}{99}.$$

Аналогично

$$P(A_3|A_2 A_1) = \frac{93}{98},$$

$$P(A_4 | A_3 A_2 A_1) = \frac{92}{97},$$

$$P(A_5 | A_4 A_3 A_2 A_1) = \frac{91}{96}.$$

По общей формуле находим

$$q = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot \frac{92}{97} \cdot \frac{91}{96} = 0,77$$

Искомая вероятность $P(\bar{A}) = 1 - q = 0,23$.

Задачи для самостоятельной работы

3.1.

Два стрелка, для которых вероятности попадания в мишень равны соответственно 0,7 и 0,8, производят по одному выстрелу. Определить вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

(Ответ: $p = 0.94$)

3.2.

Вероятность выхода из строя k -го блока вычислительной машины за время T равна p_k , ($k=1, 2, \dots, n$). Определить вероятность выхода из строя за указанный промежуток времени хотя бы одного из n блоков этой машины, если работа всех блоков взаимно независима.

(Ответ: $p = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - p_k)$)

3.3.

Вероятность наступления события в каждом опыте одинакова и равна 0,2. Опыты производятся последовательно до наступления события. Определить вероятность того, что придется производить четвертый опыт.

(Ответ: $p = 0.512$)

3.4.

Вероятность того, что изготовленная на первом станке, деталь будет первосортной, равна 0,7. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовлены две детали, на втором три. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

(Ответ: $p = 0.251$)

3.5.

Разрыв электрической цепи может произойти вследствие выхода из строя элемента K или двух элементов K_1 и K_2 , которые выходят из строя независимо друг от друга соответственно с вероятностями 0,3; 0,2 и 0,2. Определить вероятность разрыва электрической цепи.

(Ответ: $p = 0.328$)

3.6.

Вероятность того, что в результате четырех независимых опытов событие A произойдет хотя бы один раз, равна половине. Определить вероятность появления события при одном опыте, если она во всех опытах остается неизменной.

(Ответ: $p \approx 0.159$)

3.7.

В круг радиуса R вписан равносторонний треугольник. Какова вероятность того, что четыре наугад поставленные в данном круге точки окажутся внутри треугольника?

(Ответ: $p = \left(\frac{S\Delta}{\pi R^2}\right)^4 = 0.029$)

3.8.

События A и B несовместны, $P(A) \neq 0$ и $P \neq (B)$. Зависимы ли данные события?

(Ответ: События зависимы)

3.9.

На участке AB для мотоциклиста-гонщика имеются 12 препятствий, вероятность остановки на каждом из которых равна 0,1. Вероятность того, что от пункта B до конечного пункта C мотоциклист проедет без остановки, равна 0,7. Определить вероятность того, что на участке AC не будет ни одной остановки.

(Ответ: $p = 0,197$)

3.10.

Три игрока играют на следующих условиях. Сначала против первого последовательно ходят второй и третий игроки. При этом первый игрок не выигрывает, а вероятности выигрыша для второго и третьего игроков одинаковы и равны 0,3. Если первый игрок не проигрывает, то он делает по одному ходу против второго и третьего игроков и выигрывает у каждого из них с вероятностью 0,4. После этого игра заканчивается. Определить вероятность того, что в результате такой игры первый игрок выиграет хотя бы у одного партнера.

(Ответ: $p = 0,7^2(1 - 0,6^2) = 0,314$)

3.11.

Вероятность поражения первой мишени для данного стрелка равна $2/3$. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то стрелок получает право на второй выстрел по другой мишени. Вероятность поражения обеих мишеней при двух выстрелах равна 0,5. Определить вероятность поражения второй мишени.

(Ответ: $p = 0,75$)

3.12.

С помощью шести карточек, на которых написано по одной букве, составлено слово «карета». Карточки перемешиваются, а затем наугад извлекаются по одной. Какова вероятность, что в порядке поступления букв образуется слово «ракета»?

$$(\text{Ответ: } p = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{360})$$

Теорема сложения вероятностей

Вероятность суммы двух событий определяется по формуле

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

которая обобщается на сумму любого числа событий

$$P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n P(A_k A_j) + \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n P(A_k A_j A_i) - \dots + (-1)^{n-1} P\left(\prod_{k=1}^n A_k\right)$$

Для несовместных событий вероятность суммы событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$$

Решение типовых задач

Пример 4.1.

Формулировка задачи.

Определить вероятность того, что партия из ста изделий, среди которых пять бракованных, будет принята при испытании наудачу выбранной половины всей партии, если условиями приема допускается бракованных изделий не более одного из пятидесяти.

Решение.

Введем в рассмотрение событие C , состоящее в том, что партия из ста изделий, среди которых пять бракованных, будет принята при испытании наудачу выбранной половины всей партии.

Обозначим через A событие, состоящее в том, что при испытании не получено ни одного бракованного изделия, а через B — событие, состоящее в том, что получено только одно бракованное изделие.

Так как $C=A+B$, то искомая вероятность $P(C) = P(A+B)$.

События A и B несовместны. Поэтому $P(C) = P(A) + P(B)$.

Из 100 изделий 50 можно выбрать C_{100}^{50} способами. Из 95 небракованных изделий 50 можно выбрать C_{95}^{50} способами.

$$\text{Поэтому } P(A) = \frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}.$$

$$\text{Аналогично } P(B) = \frac{C_5^1 C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}.$$

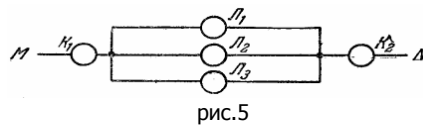
Тогда

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}} + \frac{C_5^1 C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}} = \frac{47 \cdot 37}{99 \cdot 97} = 0,181.$$

Пример 4.2.

Формулировка задачи.

Электрическая цепь между точками M и N составлена по схеме, приведенной на рис. 5.



Выход из строя за время T различных элементов цепи — независимые события, имеющие следующие вероятности (табл. 1).

Таблица 1

Элемент	K_1	K_2	L_1	L_2	L_3
Вероятность	0,6	0,5	0,4	0,7	0,9

Определить вероятность разрыва цепи за указанный промежуток времени.

Решение.

Введем в рассмотрение событие C , состоящее в том, что за указанный промежуток времени будет разрыв цепи.

Обозначим через A_j ($j = 1, 2$) событие, состоящее в выходе из строя элемента K_j , через A — выход из строя хотя бы одного элемента K_j , а через B — выход из строя всех трех элементов L_i ($i = 1, 2, 3$).

Тогда искомая вероятность

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

Так как

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0,8,$$

$$P(B) = P(L_1)P(L_2)P(L_3) = 0,252,$$

$$\text{то } P(C) \approx 0,85.$$

Пример 4.3.

Формулировка задачи.

В урне имеются n белых, m черных и l красных шаров, которые извлекаются наудачу по одному:

- без возвращения;
- с возвращением после каждого извлечения.

Определить в обоих случаях вероятности того, что белый шар будет извлечен раньше черного.

Решение.

Пусть P_1 — вероятность того, что белый шар будет извлечен раньше черного, а P_{11} — вероятность того, что черный шар будет извлечен раньше белого.

Вероятность P_1 является суммой вероятностей извлечения белого шара сразу, после извлечения одного красного, двух красных и т. д. Таким образом, можно записать в случае, когда шары не возвращаются,

$$P_1 = \frac{n}{n+m+l} + \frac{l}{n+m+l} \frac{n}{n+m+l-1} + \frac{l}{n+m+l} \frac{l-1}{n+m+l-1} \frac{n}{n+m+l-2} + \dots$$

а при возвращении шаров

$$P_1 = \frac{n}{n+m+l} + \frac{l \cdot n}{(n+m+l)^2} + \frac{l^2 n}{(n+m+l)^3} + \dots = \frac{n}{n+m}$$

Для получения вероятностей P_{11} в предыдущих формулах нужно произвести замену n на m , а m на n . Отсюда следует, что в обоих случаях $P_1: P_{11} = n:m$. Так как, кроме того, $P_1 + P_{11} = 1$, то искомая вероятность при извлечении шаров без возвращения также равна $P_1 = \frac{n}{n+m}$.

Пример 4.4.

Формулировка задачи.

Некто написал n писем, запечатал их в конверты, а затем наудачу на каждом из них написал различные адреса. Определить вероятность того, что хотя бы на одном из конвертов написан правильный адрес.

Решение.

Пусть событие A_k состоит в том, что на k -м конверте написан правильный адрес ($k = 1, 2, \dots, n$).

$$\text{Искомая вероятность } p = P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right).$$

События A_k совместны; при любых различных k, j, i, \dots имеют место равенства:

$$P(A_k) = \frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n!},$$

$$P(A_k A_j) = P(A_k) P(A_j | A_k) = \frac{(n-2)!}{n!},$$

$$P(A_k A_j A_i) = \frac{(n-3)!}{n!}, \quad \dots \quad P\left(\prod_{k=1}^n A_k\right) = \frac{1}{n!}$$

Используя формулу для вероятности суммы n событий, получаем

$$p = C_n^1 \frac{(n-1)!}{n!} - C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3 \frac{(n-3)!}{n!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

или

$$p = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

При больших n $p \approx 1 - e^{-1}$.

Дополнительные задачи для решения:

Сборник задач [7] Ч.2 гл.4 §§ 1,2,3 стр.52-78; гл.5 §1 стр.82-84; гл.6 §§ 1-6 стр.87-115

Домашнее задание: Учебное пособие [4] стр.33, задачи № 1-11

Задачи для самостоятельной работы

4.1.

Каждое из четырех несовместных событий может произойти соответственно с вероятностями 0,012, 0,010, 0,006 и 0,002. Определить вероятность того, что в результате опыта произойдет хотя бы одно из этих событий.

(Ответ: $p = 0,03$)

4.2.

Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из центрального круга и двух концентрических колец. Вероятности попадания в круг и кольца соответственно равны 0,20, 0,15 и 0,10. Определить вероятность не попадания в мишень.

(Ответ: $p = 0,55$)

4.3.

Две одинаковые монеты радиуса r расположены внутри круга радиуса R , в который наудачу бросается точка. Определить вероятность того, что эта точка упадет на одну из монет, если монеты не перекрываются.

(Ответ: $p = 2\left(\frac{r}{R}\right)^2$)

4.4.

Какова вероятность извлечь из колоды в 52 карты фигуру любой масти или карту пиковой масти (фигурой называется валет, дама или король)?

(Ответ: $p = \frac{11}{26}$)

4.5.

В ящике имеются 10 монет по 20 коп., 5 монет по 15 коп. и 2 монеты по 10 коп. Наугад берутся шесть монет. Какова вероятность, что в сумме они составят не более одного рубля?

(Ответ: $p = 1 - \frac{1}{C_{17}^6} (C_{10}^6 + C_{10}^5 C_5^1 + C_{10}^5 C_2^1 + C_{10}^4 C_5^2 + C_{10}^4 C_5^1 C_2^1 + C_{10}^3 C_5^3) \approx 0,4$)

4.6.

В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во второй соответственно 10, 8 и 6. Из обеих урн наудачу извлекается по одному шару. Какова вероятность, что оба шара одного цвета?

(Ответ: $p = 0,323$)

4.7.

Игра между A и B ведется на следующих условиях: в результате первого хода, который всегда делает A , он может выиграть с вероятностью 0,3; если первым ходом A не выигрывает, то ход делает B и может выиграть с вероятностью 0,5; если в результате этого хода B не выигрывает, то A делает второй ход, который может привести к его выигрышу с вероятностью 0,4. Определить вероятности выигрыша для A и для B .

(Ответ: $p_1 = 0,44$, $p_2 = 0,35$)

4.8.

Вероятность для данного спортсмена улучшить свой предыдущий результат с одной попытки равна p . Определить вероятность того, что на соревнованиях спортсмен улучшит свой результат, если разрешается делать две попытки.

(Ответ: $p(A) = p(2 - p)$)

4.9.

Из урны, содержащей n шаров с номерами от 1 до n , последовательно извлекаются два шара, причем первый шар возвращается, если его номер не равен единице. Определить вероятность того, что шар с номером 2 будет извлечен при втором извлечении.

(Ответ: $p = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{n^2 - n + 1}{n^2(n-1)}$)

4.10.

Игрок A поочередно играет с игроками B и C , имея вероятность выигрыша в каждой партии 0,25, и прекращает игру после первого проигрыша или после двух партий, сыгранных с каждым игроком. Определить вероятности выигрыша B и C .

(Ответ: $p_B \approx 0,8$, $p_C \approx 0,2$)

4.11.

Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше появится герб. Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.

(Ответ: $p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots = \frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots = \frac{1}{3}$)

4.12.

Вероятность получить очко, не теряя подачи, при игре двух равносильных волейбольных команд равна половине. Определить вероятность получения одного очка для подающей команды.

(Ответ: $p = \frac{2}{3}$)

Вопросы для самопроверки: Учебное пособие [4] стр. 34.

Дополнительные вопросы для самопроверки:

1. Что такое сумма случайных событий и как она определяется в случаях совместных и несовместных событий?
2. Чему равна вероятность суммы несовместных и совместных событий?
3. Как определяется вероятность суммы событий, образующих полную группу событий?
4. Пояснить что такое условная вероятность события? Какие события называются независимыми?
5. Приведите формулы для вероятности независимых и зависимых событий.
6. Как определяется вероятность появления хотя бы одного из совокупности событий?
7. Что позволяет определять формула полной вероятности?
8. Какой смысл имеет условная вероятность, определяемая по формуле Байесса?
9. Приведите формулы Бернулли и Пуассона о повторении независимых испытаний и что они позволяют определить?

Занятие 3. Формулы полной вероятности и Байеса. Формула Бернулли

Формула полной вероятности

Предположим, что событие B может осуществиться с одним и только с одним из n несовместных событий A_1, A_2, \dots, A_n . Иными словами, положим

$B = \sum_{i=1}^n BA_i$, где события BA_i и BA_j с разными индексами i и j несовместимы. По

теореме сложения вероятностей имеем: $P(B) = \sum_{i=1}^n P(BA_i)$.

Применяя теорему умножения, находим:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B/A_i)$$

Это равенство носит название *формулы полной вероятности*.

Решение типовых задач

Пример 5.1.

Формулировка задачи.

Среди n лиц разыгрываются $m \leq n$ выигрышей путем случайного извлечения из ящика n билетов. Одинаковы ли шансы выигрыша для любого из играющих? Когда выгоднее тащить билет?

Решение.

Обозначим через A_k событие, состоящее в извлечении выигрышного билета после k извлечений билетов из ящика. По результатам предыдущих опытов можно сделать $k+1$ гипотез. Пусть гипотеза H_{ks} означает, что из k извлеченных билетов выигрышных было s . Вероятности этих гипотез

$$P(H_{ks}) = \frac{C_m^s C_{n-m}^{k-s}}{C_n^k} \quad (s = 0, 1, \dots, k)$$

причем

$$P(H_{ks}) = 0, \text{ если } s > m.$$

Так как осталось $n-k$ билетов, из которых $m-s$ выигрышных, то при $m \geq s$

$$P(A_k | H_{ks}) = \frac{m-s}{n-k}.$$

По формуле полной вероятности находим

$$P(A_k) = \sum_{s=0}^k \frac{C_m^s C_{n-m}^{k-s}}{C_n^k} \cdot \frac{m-s}{n-k},$$

где $C_m^s = 0$ при $s > m$.

Данное равенство можно записать также в виде

$$P(A_k) = \frac{m}{n} \sum_{s=0}^k \frac{C_{m-1}^s C_{n-m}^{k-s}}{C_{n-1}^k}.$$

Имеем

$$\sum_{s=0}^k C_{m-1}^s C_{n-m}^{k-s} u^{n-k-1} = \frac{1}{k!} \sum_{s=0}^k C_k^s \frac{d^s u^{m-1}}{du^s} \frac{d^{k-s} u^{n-m}}{du^{k-s}} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{du^k} (u^{m-1} u^{n-m}) = \frac{1}{k!} \frac{d^k u^{n-1}}{du^k} = C_{n-1}^k u^{n-k-1},$$

т. е. справедливо равенство

$$\sum_{s=0}^k C_{m-1}^s C_{n-m}^{k-s} = C_{n-1}^k.$$

Искомая вероятность $P(A_k) = \frac{m}{n}$ при любом k . Таким образом, у всех играющих шансы одинаковы и очередность извлечения не имеет значения.

Пример 5.2.

Формулировка задачи.

Отмеченный шар с вероятностями p и $1-p$ может находиться в первой или во второй урне. Вероятность извлечь отмеченный шар из урны, в которой этот шар находится, равна $P(P \neq 1)$. Как следует распорядиться правом n раз извлекать шары из любой урны, чтобы вероятность извлечения отмеченного шара хотя бы один раз была наибольшей, если шар после извлечения возвращается в урну?

Решение.

Пусть событие A — извлечение отмеченного шара.

Гипотезы: H_1 — шар находится в первой урне, H_2 — во второй.

По условию $P(H_1)=p$, $P(H_2)=1-p$.

Допустим, что из первой урны извлечено m , а из второй $n-m$ шаров.

Условные вероятности извлечения отмеченного шара будут

$$P(A|H_1) = 1 - (1-p)^m, \quad P(A|H_2) = 1 - (1-p)^{n-m}.$$

По формуле полной вероятности искомая вероятность

$$P(A) = p[1 - (1-p)^m] + (1-p)[1 - (1-p)^{n-m}].$$

Нужно определить m так, чтобы была наибольшей вероятность $P(A)$.

Дифференцируя $P(A)$ по m (для нахождения приближенного значения m считаем m непрерывным), получаем

$$\frac{dP(A)}{dm} = -p(1-p)^m \ln(1-p) + (1-p)(1-p)^{n-m} \ln(1-p).$$

Полагая, $\frac{dP(A)}{dm} = 0$ приходим к равенству

$$(1-p)^{2m-n} = \frac{1-p}{p}.$$

Поэтому должно быть

$$m = \frac{n}{2} + \frac{p}{2 \ln(1-p)}.$$

Задачи для самостоятельной работы

5.1.

Имеются две партии изделий по 12 и 10 штук, причем в каждой партии одно изделие бракованное. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.

$$(\text{Ответ: } p = \frac{11}{12} \cdot \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{11} = \frac{13}{132})$$

5.2.

Из полного набора костей домино наугад берутся две кости. Определить вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой.

$$(\text{Ответ: } p = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{9} = \frac{7}{18})$$

5.3.

Имеется n урн, в каждой из которых по m белых и по k черных шаров. Из первой урны наудачу извлекается один шар и перекладывается во вторую. Затем из второй урны наудачу извлекается один шар и перекладывается в третью урну и т. д. Определить вероятность извлечения после такого перекладывания белого шара из последней урны.

$$(\text{Ответ: } p = \frac{m}{m+k})$$

5.4.

В тире имеются пять ружей, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 и 0,9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

$$(\text{Ответ: } p = 0,7)$$

5.5.

Для контроля продукции из трех партий деталей взята для испытания одна деталь. Как велика вероятность обнаружения бракованной продукции, если в одной партии $\frac{2}{3}$ деталей бракованные, а в двух других — все доброкачественные?

$$(\text{Ответ: } p = \frac{2}{9})$$

5.6.

Характеристика материала, взятого для изготовления продукции, с вероятностями 0,09; 0,16; 0,25; 0,25; 0,16 и 0,09 может находиться в шести различных интервалах. В зависимости от свойств материала вероятности получения первосортной продукции равны соответственно 0,2; 0,3; 0,4; 0,4; 0,3 и 0,2. Определить вероятность получения первосортной продукции.

$$(\text{Ответ: } p = 0,332)$$

5.7.

В сосуд, содержащий n шаров, опущен белый шар. Какова вероятность извлечь из этого сосуда белый шар, если все предположения о первоначальном числе белых шаров равновозможны?

$$(\text{Ответ: } p = \frac{n+2}{2(n+1)})$$

5.8.

В ящике находятся 15 теннисных мячей, из которых 9 новых. Для первой игры наугад берутся три мяча, которые после игры возвращаются в ящик. Для

второй игры также наугад берутся три мяча. Найти вероятность того, что все мячи, взятые для второй игры, новые.

(Ответ: $p = 0,089$)

5.9.

В правом кармане имеются три монеты по 20 коп. и четыре монеты по 3 коп., а в левом — шесть по 20 коп. и три по 3 коп. Из правого кармана в левый наудачу перекадываются пять монет. Определить вероятность извлечения из левого кармана после перекадывания монеты в 20 коп, если монета берется наудачу.

$$(Ответ: p = \frac{1}{14C_7^5} (9C_4^2 + 8C_3^2 C_4^3 + 7C_3^1) = 0,58)$$

5.10.

Пятнадцать экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Экзаменуемый может ответить только на 25 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса из одного билета или на один вопрос из первого билета и на указанный дополнительный вопрос из другого билета.

$$(Ответ: p = \frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29} + \left(\frac{25}{30} \cdot \frac{5}{29} + \frac{5}{30} \cdot \frac{25}{29} \right) \cdot \frac{24}{28} = \frac{190}{203})$$

Формула Байеса

Получим важные формулы Байеса или, как иногда говорят, формулы вероятности гипотез. Требуется найти вероятность события A_i , если известно, что B произошло. Согласно теореме умножения имеем:

$$P(A_i B) = P(B)P(A_i / B) = P(A_i)P(B / A_i) \quad (6.1)$$

Из соотношения (6.1) получаем

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{P(B)} \quad (6.2)$$

Используя формулу полной вероятности (5.1), находим:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B / A_j)} \quad (6.3)$$

Полученные формулы (6.3) носят название *формул Байеса*. Общая схема применения этих формул к решению практических задач такова.

Пусть событие B может протекать в различных условиях, относительно характера которых может быть сделано n гипотез: A_1, A_2, \dots, A_n . По тем или иным причинам нам известны вероятности $P(A_i)$ этих гипотез до испытания (априорные вероятности гипотез). Известно также, что гипотеза A_i сообщает событию B вероятность $P(B / A_i)$. Произведен опыт, в котором событие B

наступило. Это должно вызвать переоценку вероятностей гипотез A_i ; формулы Бейеса количественно решают этот вопрос.

Вероятности $P(A_i / B)$ называются *апостериорными вероятностями* события A_i .

Решение типовых задач

Пример 6.1.

Формулировка задачи.

Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в отношении 5:3.

Определить вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если:

- а) принят сигнал «точка»;
- б) принят сигнал «тире».

Решение.

Пусть событие A — принят сигнал «точка», а событие B — принят сигнал «тире».

Можно сделать две гипотезы: H_1 — передан сигнал «точка», H_2 — передан сигнал «тире».

По условию $P(H_1):P(H_2) = 5:3$.

Кроме того, $P(H_1) + P(H_2) = 1$.

Поэтому $P(H_1) = \frac{5}{8}$, $P(H_2) = \frac{3}{8}$.

Известно, что

$$P(A|H_1) = \frac{3}{5}, \quad P(A|H_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(B|H_1) = \frac{2}{5}, \quad P(B|H_2) = \frac{2}{3}$$

Вероятности событий A и B находим по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

Искомые вероятности будут:

$$а) \quad P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

$$б) \quad P(H_2|B) = \frac{P(H_2)P(B|H_2)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Пример 6.2.

Формулировка задачи.

Имеется две партии деталей, причем известно, что в одной партии все детали удовлетворяют техническим условиям, а в другой партии $1/4$ деталей недоброкачественные. Деталь, взятая из наудачу выбранной партии, оказалась доброкачественной. Определить вероятность того, что вторая деталь из этой же партии окажется недоброкачественной, если первая деталь после проверки возвращена в партию.

Решение.

Введем событие A , состоящее в том, что первая деталь доброкачественная.

Гипотезы:

H_1 — взята партия с недоброкачественными деталями,

H_2 — взята партия доброкачественных деталей.

По условию задачи

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2},$$

$$P(A|H_1) = \frac{3}{4},$$

$$P(A|H_2) = 1.$$

Поэтому по формуле полной вероятности вероятность события A будет

$$P(A) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} + 1 \right) = \frac{7}{8}.$$

После первого испытания вероятность того, что партия содержит недоброкачественные детали, равна

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{7}{8}} = \frac{3}{7}$$

Вероятность того, что партия содержит только доброкачественные детали,

$$P(H_2|A) = \frac{4}{7}$$

Пусть событие B состоит в том, что при втором испытании деталь оказалась недоброкачественной. Вероятность данного события также находится по формуле полной вероятности.

Если p_1 и p_2 — вероятности гипотез H_1 и H_2 после испытания, то согласно предыдущим вычислениям

$$p_1 = \frac{3}{7}, \quad p_2 = \frac{4}{7}.$$

Кроме того,

$$P(B|H_1) = \frac{1}{4},$$

$$P(B|H_2) = 0.$$

Поэтому искомая вероятность

$$P(B) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{28}$$

Задачи для самостоятельной работы

6.1.

Имеется десять одинаковых урн, из которых в девяти находятся по два черных и по два белых шара, а в одной — пять белых и один черный шар. Из урны, взятой наудачу, извлечен белый шар. Какова вероятность, что шар извлечен из урны, содержащей пять белых шаров?

$$(\text{Ответ: } p = \frac{0,1 \cdot \frac{5}{6}}{0,9 \cdot \frac{1}{2} + 0,1 \cdot \frac{5}{6}} = \frac{5}{32})$$

6.2.

Известно, что 96% выпускаемой продукции удовлетворяют стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную — с вероятностью 0,05. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту.

$$(\text{Ответ: } p = 0,998)$$

6.3.

Из партии в пять изделий наудачу взято одно изделие, оказавшееся бракованным. Количество бракованных изделий равновозможно любое. Какое предположение о количестве бракованных изделий наиболее вероятно?

(Ответ: Пять бракованных изделий)

6.4.

Игрок D играет с неизвестным противником на следующих условиях: ничейный исход исключен; первый ход делает противник; в случае его проигрыша делает ход D , выигрыш которого означает выигрыш игры, а при проигрыше игра повторяется второй раз на тех же условиях. Из двух равновозможных противников B имеет вероятность выиграть первым ходом 0,4, а вторым — 0,3; C имеет вероятность выиграть первым ходом 0,8, а вторым ходом 0,6. Для D вероятность выиграть первым ходом равна 0,3 и не зависит от противника, а для второго хода равна 0,5 при игре с B и 0,7 при игре с C . Игру выиграл D .

Какова вероятность:

а) что противником был B ;

б) что противником был C ?

(Ответ: а) $p = 0,59$; б) $p = 0,41$)

6.5.

Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8; 7 — с вероятностью 0,7; 4 — с вероятностью 0,6 и 2 — с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, но в мишень не попал. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

(Ответ: Ко второй группе)

6.6.

Вероятности попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}$. При одновременном выстреле всех трех стрелков имелось два попадания. Определить вероятность того, что промахнулся третий стрелок.

(Ответ: $p = \frac{6}{13}$)

6.7.

Трое охотников одновременно выстрелили по вепрю, который был убит одной пулей. Определить вероятности того, что вепрь убит первым, вторым или третьим охотником, если вероятности попадания для них равны соответственно 0,2; 0,4; 0,6.

(Ответ: $p_1 = 0,103$; $p_2 = 0,277$; $p_3 = 0,620$)

6.8.

Два стрелка поочередно стреляют в мишень. Вероятности попадания первыми выстрелами для них равны соответственно 0,4 и 0,5, а вероятности попадания при последующих выстрелах для каждого увеличиваются на 0,05. Какова вероятность, что первым произвел выстрел первый стрелок, если при пятом выстреле произошло попадание в мишень?

(Ответ: $p = \frac{5}{11}$)

6.9.

Произведено три независимых испытания, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью 0,2. Вероятность появления другого события B зависит от числа появлений события A : при однократном появлении события A эта вероятность равна 0,1, при двукратном появлении равна 0,3, при трехкратном появлении равна 0,7; если событие A не имело места ни разу, то событие B невозможно. Определить наивероятнейшее число появлений события A , если событие B имело место.

(Ответ: Одно появление)

6.10.

Получена партия из восьми изделий одного образца. По данным проверки половины партии, три изделия оказались технически исправными, а одно

бракованным. Какова вероятность, что при проверке трех последующих изделий одно из них окажется исправным, а два бракованными, если любое количество бракованных изделий в данной партии равновозможно?

(Ответ: $p = \frac{3}{14}$)

Формула Бернулли

Теорема Я. Бернулли. Если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p , то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие A появится ровно m раз в n опытах, выражается формулой:

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} p^m q^{n-m},$$

где $q = 1 - p$.

Решение типовых задач

Пример 7.1.

Формулировка задачи.

Что вероятнее выиграть у равносильного противника (ничейный исход партии исключен):

- а) три партии из четырех или пять из восьми;
- б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?

Решение.

Так как противники равносильные, то вероятности выигрыша и проигрыша каждой партии одинаковы и равны $p = q = 1/2$.

- а) Вероятность выиграть три партии из четырех

$$P_{4;3} = C_4^3 \frac{1}{2^4} = \frac{1}{4}$$

Вероятность выиграть пять партий из восьми

$$P_{8;5} = C_8^5 \frac{1}{2^8} = \frac{7}{32}.$$

Так как $\frac{1}{4} > \frac{7}{32}$, то вероятнее выиграть три партии из четырех.

- б) Вероятность выиграть не менее трех партий из четырех

$$R_{4;3} = P_{4;3} + P_{4;4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16},$$

а вероятность выиграть не менее пяти партий из восьми

$$R_{8,5} = P_{8,5} + P_{8,6} + P_{8,7} + P_{8,8} = \frac{7}{32} + \left(\frac{8 \cdot 7}{2} + 8 + 1 \right) \frac{1}{2^8} = \frac{93}{256}.$$

Так как $\frac{93}{256} > \frac{5}{16}$, то вероятнее выиграть не менее пяти партий из восьми.

Пример 7.2.

Формулировка задачи.

Имеется шесть потребителей электрического тока, для первого из которых при определенных условиях вероятность того, что произойдет авария, приводящая к отключению потребителя, равна 0,6, для второго — 0,2, а для четырех остальных — по 0,3. Определить вероятность того, что генератор тока будет отключен полностью:

- если все потребители соединены последовательно;
- если потребители соединены так, как показано на схеме (рис. 6).

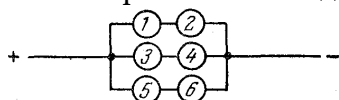


Рис. 6.

Решение.

а) Вероятность неотключения всех шести потребителей равна произведению вероятностей неотключения каждого потребителя, т. е.

$$q = q_1 q_2 q_3^4 \approx 0,077.$$

Искомая вероятность равна вероятности отключения хотя бы одного потребителя, т. е. $p = 1 - q \approx 0,923$.

б) В этом случае генератор будет отключен полностью, если в каждой паре последовательно соединенных потребителей отключен хотя бы один потребитель:

$$p = (1 - q_1 q_2)(1 - q_3^2)^2 \approx 0,177.$$

Пример 7.3.

Формулировка задачи.

Большая партия изделий содержит один процент брака. Каков должен быть объем случайной выборки, чтобы вероятность встретить в ней хотя бы одно бракованное изделие была не меньше 0,95?

Решение.

Искомое число n находится по формуле $n \geq \frac{\ln(1 - P)}{\ln(1 - p)}$.

В данном случае $P = 0,95$, а $p = 0,01$. Поэтому $n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,99} \approx 296$.

Пример 7.4.

Формулировка задачи.

Оптовая база снабжает 10 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,4 независимо от заявок других магазинов. Найти наивероятнейшее число заявок в день и вероятность получения этого числа заявок.

Решение.

В данном случае $n = 10$, $p = 0,4$, $(n + 1)p = 4,4$. Наивероятнейшее число μ , заявок равно целой части числа $(n + 1)p$, т. е. $p = 4$.

Вероятность четырёх заявок из десяти

$$P_{10;4} = C_{10}^4 \cdot 0,4^4 \cdot 0,6^6 = 0,251$$

Задачи для самостоятельной работы

7.1.

Определить вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины не содержит:

- а) цифры пять;
- б) двух пятерок.

Известно, что все номера четырехзначные, неповторяющиеся и равновозможные (считается возможным номер 0000).

(Ответ: а) $p = 0,9^4 = 0,656$; б) $p = 0,9^4 + 4 \cdot 0,1 \cdot 0,9^3 = 0,948$)

7.2.

В семье десять детей. Считая вероятности рождения мальчика и девочки равными 0,5, определить вероятность того, что в данной семье:

- а) пять мальчиков;
- б) мальчиков не менее трех, но и не более восьми.

(Ответ: а) $p = C_{10}^5 \frac{1}{2^{10}} = \frac{63}{256}$; б) $p = 1 - \frac{1}{2^{10}}(1 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 + 1) = \frac{957}{1024}$)

7.3.

В библиотеке имеются книги только по технике и математике. Вероятности того, что любой читатель возьмет книгу по технике и по математике, равны соответственно 0,7 и 0,3. Определить вероятность того, что пять читателей подряд возьмут книги или только по технике, или только по математике, если каждый из них берет только одну книгу.

(Ответ: $p = 0,17$)

7.4.

Событие B наступает в том случае, если событие A появится не менее трех раз. Определить вероятность появления события B , если вероятность появления события A при одном опыте равна 0,3 и произведено:

- а) пять независимых опытов;
- б) семь независимых опытов.

(Ответ: а) $p = 0,163$; б) $p = 0,353$)

7.5.

Производится четыре независимых опыта, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью $0,3$. Событие B наступает с вероятностью, равной 1 , если событие A произошло не менее двух раз; не может наступить, если событие A не имело места, и наступает с вероятностью $0,6$, если событие A имело место один раз. Определить вероятность появления события B .

(Ответ: $p = 1 - (0,7^4 + 4 \cdot 0,7^3 \cdot 0,3 \cdot 0,4) = 0,595$)

7.6.

По мишени в тире произведено 200 независимых выстрелов при одинаковых условиях, которые дали 116 попаданий. Определить, какое значение вероятности попадания на один выстрел более вероятно: $\frac{1}{2}$ или $\frac{2}{3}$, если до опыта обе гипотезы равновероятны и единственно возможны.

(Ответ: Вероятнее первая гипотеза)

7.7.

Вероятность хотя бы одного появления события при четырех независимых опытах равна $0,59$. Какова вероятность появления события A при одном опыте, если при каждом опыте эта вероятность одинакова?

(Ответ: $p = 0,2$)

7.8.

Вероятность появления некоторого события в каждом из восемнадцати независимых опытов равна $0,2$. Определить вероятность появления этого события по крайней мере три раза.

(Ответ: $p = 0,73$)

7.9.

Игра состоит в набрасывании колец на колышек. Игрок получает 6 колец и бросает кольца до первого попадания. Найти вероятность того, что хотя бы одно кольцо останется неизрасходованным, если вероятность попадания при каждом броске равна $0,1$.

(Ответ: $p = 1 - 0,9^5 = 0,41$)

7.10.

Определить вероятность получения не менее 28 очков при трех выстрелах из спортивного пистолета по мишени с максимальным числом очков, равным 10 , если вероятность получения 30 очков равна $0,008$. Известно, что при одном выстреле вероятность получения восьми очков равна $0,15$, а менее восьми очков — $0,4$.

(Ответ: $p = p_{10}^3 + 3p_{10}^2(p_9 + p_8) + 3p_{10}p_9^2 = 0,0935$)

7.11.

Два баскетболиста делают по три броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча при каждом броске равны соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятность того, что:

- а) у обоих будет равное количество попаданий;
- б) у первого баскетболиста будет больше попаданий, чем у второго.

(Ответ: а) $p = 0,321$; б) $p = 0,243$)

Часть 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Занятие 4. Закон распределения случайной величины. Ряд, многоугольник и функция распределения дискретной случайной величины

Ряд, многоугольник и функция распределения случайной дискретной величины

Случайная величина называется *дискретной*, если ее частные (возможные) значения можно пронумеровать.

Дискретная случайная величина X может быть задана рядом распределения или функцией распределения (интегральным законом распределения).

Рядом распределения называется совокупность всех возможных значений x_i и соответствующих им вероятностей $p_i = P(X = x_i)$. Ряд распределения может быть задан в виде таблицы (табл. 1) или формулой.

Таблица 1.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Вероятности p_i удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1,$$

где число возможных значений n может быть конечным или бесконечным.

Графическое изображение ряда распределения называется **многоугольником распределения**. Для его построения возможные значения случайной величины (x_i) откладываются по оси абсцисс, а вероятности p_i - по оси ординат; точки A_i с координатами $(x_i; p_i)$ соединяются ломаными линиями (рис. 1).

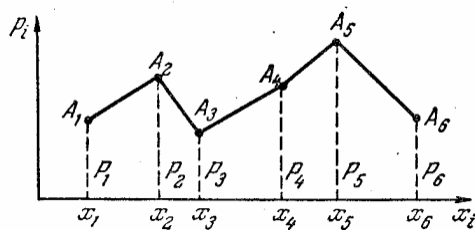


Рис. 1

Функцией распределения (интегральным законом распределения) случайной величины X называется функция $F(x)$, равная вероятности $P(X < x)$ того, что случайная величина будет меньше произвольно выбранного значения x . Функция $F(x)$ вычисляется по формуле

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i,$$

где суммирование ведется по всем значениям i , для которых $x_i < x$.

Числовые характеристики дискретных случайных величин

В качестве числовых характеристик [дискретных](#) случайных величин чаще всего используются моменты этих величин.

Начальный m_k и центральный μ_k моменты k -го порядка дискретной случайной величины определяются формулами

$$m_k = M[X^k] = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i,$$

$$\mu_k = M[(X - \bar{x})^k] = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k p_i,$$

где $M[X^k]$ — [математическое ожидание](#) X^k , x_i — возможные значения случайной величины X , p_i — соответствующие им вероятности, а \bar{x} — математическое ожидание X .

Таким образом, начальный момент первого порядка определяется формулой

$$\bar{x} = M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i,$$

второй центральный момент, или [дисперсия](#), — формулой

$$D[X] = M[(X - \bar{x})^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 p_i$$

или формулой

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2.$$

[Среднее квадратическое отклонение](#) σ определяется соотношением

$$\sigma = +\sqrt{D[X]}.$$

Если вероятности различных значений случайной величины X зависят от события A_k , то условное математическое ожидание случайной величины X при условии осуществления A_k есть

$$M[X | A_k] = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i | A_k).$$

Если A_k ($k = 1, 2, \dots, m$) образуют полную группу несовместных событий, т. е. $\sum_{k=1}^n P(A_k) = 1$, то полное математическое ожидание X связано с условным математическим ожиданием формулой

$$M[X] = M\{M[X | A_k]\} = \sum_{k=1}^m M[X | A_k] P(A_k).$$

Во всех приведенных выше формулах число слагаемых в суммах может быть бесконечным; в этом случае для существования соответствующего математического ожидания ряд должен сходиться абсолютно.

Пример 8.1.

Формулировка задачи.

Партия, насчитывающая 100 изделий, содержит 10 дефектных. Из всей партии случайным образом отбираются с целью проверки качества 5 изделий (случайная выборка). Найти математическое ожидание числа дефектных изделий, содержащихся в случайной выборке.

Решение.

Случайное число дефектных изделий, содержащихся в выборке, может иметь следующие значения:

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4, x_6 = 5.$$

Вероятности $p_i = P(X = x_i)$ того, что X принимает данное значение x_i , равны

$$p_i = \frac{C_{10}^{i-1} C_{90}^{6-i}}{C_{100}^5} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Искомое математическое ожидание

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^6 (i-1) \frac{C_{10}^{i-1} C_{90}^{6-i}}{C_{100}^5} = \frac{1}{C_{100}^5} \sum_{j=0}^5 j C_{10}^j C_{90}^{5-j}.$$

Так как $\sum_{i=0}^6 C_j^{10} C_{90}^{5-j}$ есть коэффициент при u^5 в произведении $(1+u)^{10}(1+u)^{90}$, то $\sum_{j=0}^5 j C_{10}^j C_{90}^{5-j}$ есть коэффициент при u^5 в выражении

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ (1+tu)^{10} (1+u)^{90} \} |_{t=1} = 10u(1+u)^{99}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=0}^5 j C_{10}^j C_{90}^{5-j} = 10C_{99}^4, \text{ а } \bar{x} = \frac{10C_{99}^4}{C_{100}^5} = 0,5.$$

Пример 8.2.

Формулировка задачи.

Дискретная случайная величина X задана рядом распределения $p_k = P(X = x_k)$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Выразить математическое ожидание случайной величины X через производящую функцию

$$G(u) = \sum_{k=1}^n p_k u^k.$$

Решение.

По определению математического ожидания случайной величины

$$M[X] = \sum_{k=1}^n k p_k.$$

С другой стороны, значение производной от производящей функции, вычисленное при $n=1$, равно

$$G'(1) = \left. \frac{dG(u)}{du} \right|_{u=1} = \sum_{k=1}^n k p_k u^{k-1} \Big|_{u=1} = \sum_{k=1}^n k p_k.$$

Следовательно,

$$M[X] = G'(1).$$

Пример 8.3.

Формулировка задачи.

Опыт может быть успешным с вероятностью p и неуспешным с вероятностью $1-p$.

Условная вероятность достижения намеченного результата после m успешных опытов $P(m)$ равна

$$P(m) = 1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^m \quad (\omega > 1).$$

Найти математическое ожидание числа независимых опытов, необходимых для достижения намеченного результата.

Решение.

Обозначим $P_n(A)$ вероятность достижения намеченного результата при n опытах. Если $P_{n,m}$ — вероятность иметь ровно m успешных из общего числа n опытов, то согласно формуле полной вероятности

$$P_n(A) = \sum_{m=0}^n P_{n,m} P(m).$$

Так как опыты независимы и вероятность успешного исхода в каждом из них равна p , то

$$P_{n,m} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Подставляя в формулу для $P_n(A)$ значения $P_{n,m}$ и $P(m)$, получим

$$P_n(A) = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^m \right\} = 1 - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^n.$$

Для достижения намеченного результата потребуется ровно n опытов, если при n -м опыте он будет достигнут. Вероятность последнего события равна $P_n(A) - P_{n-1}(A)$. Следовательно, математическое ожидание случайного числа опытов, необходимых для достижения намеченного результата,

$$M[X] = \sum_{n=1}^{\infty} n [P_n(A) - P_{n-1}(A)] = \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^n \right\} = \frac{p}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^{n-1}.$$

Для вычисления последней суммы воспользуемся равенством

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{1-x} \right] = \frac{1}{(1-x)^2},$$

справедливым при $|x| < 1$. Полагая в данном случае $x = 1 - \frac{p}{\omega}$, получим

$$M[X] = \frac{p}{\omega} \frac{1}{\left[1 - \left(1 - \frac{p}{\omega} \right) \right]^2} = \frac{\omega}{p}.$$

Пример 8.4.

Формулировка задачи.

Прибор имеет n предохранителей. В случае перегрузки сгорает один из предохранителей, который заменяется новым. Каково математическое ожидание $M[N]$ числа перегрузок N , после которых в приборе окажутся замененными все первоначально установленные предохранители, если выход из строя в момент перегрузки любого из n предохранителей (как незамененного, так и нового) равновероятен?

Решение.

Обозначим $M[N|k]$ математическое ожидание числа перегрузок, после которых все первоначально установленные n предохранителей окажутся замененными, если остались незамененными k предохранителей.

Для вычисления $M[N|k]$ воспользуемся формулой полного математического ожидания. Если остались незамененными k предохранителей ($k \geq 1$), то для повреждения одного из них потребуется очередная перегрузка. В зависимости от результатов очередной перегрузки будут различными средние числа перегрузок, необходимых для сгорания предохранителей, оставшихся из числа первоначально установленных.

При очередной перегрузке могут произойти два события:

A_1 — сгорел один из первоначально установленных предохранителей, вероятность чего $P(A_1) = \frac{k}{n}$;

A_2 — сгорел замененный предохранитель, вероятность чего $P(A_2) = 1 - \frac{k}{n}$.

Если при очередной перегрузке произойдет событие A_1 , то математическое ожидание числа перегрузок для замены всех k предохранителей, не замененных до очередной перегрузки, будет равно $1 + M[N|k-1]$. Если же при очередной перегрузке произойдет событие A_2 , то это математическое ожидание будет равно $1 + M[N|k]$. На основании формулы полного математического ожидания имеем

$$M[N | k] = \frac{k}{n} \{1 + M[N | k - 1]\} + \left(1 - \frac{k}{n}\right) \{1 + M[N | k]\} = 1 + \frac{k}{n} M[N | k - 1] + \frac{n - k}{n} M[N | k]$$

или, после несложных преобразований,

$$M[N | k] - M[N | k - 1] = \frac{n}{k}.$$

Если $k = 1$, т. е. остался лишь один незамененный предохранитель, то вероятность его замены равна $\frac{1}{n}$. Следовательно, на основании примера 9.3

будем иметь

$$M[N | 1] = n.$$

Итак, имеем цепь равенств:

$$M[N | n] - M[N | n - 1] = \frac{n}{n},$$

$$M[N | n - 1] - M[N | n - 2] = \frac{n}{n - 1},$$

.....

$$M[N | 3] - M[N | 2] = \frac{n}{3},$$

$$M[N | 2] - M[N | 1] = \frac{n}{2},$$

$$M[N | 1] = n,$$

суммируя которые, получим

$$M[N | n] = \frac{n}{n} + \frac{n}{n - 1} + \frac{n}{n - 2} + \dots + \frac{n}{3} + \frac{n}{2} + n$$

или

$$M[N] = M[N | n] = n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n - 1} + \frac{1}{n} \right).$$

Пример 8.5.

Формулировка задачи.

В результате испытаний двух приборов (А и В) установлена вероятность появления помех, оцениваемых по трехбалльной системе (табл. 1). (В случае отсутствия помех их уровень принимается равным нулю).

Таблица 1.

Уровень помех	1	2	3
Вероятность появления помех данного уровня для прибора А	0,20	0,06	0,04

Вероятность появления помех данного уровня для прибора В	0,06	0,04	0,10
--	------	------	------

По приведенным данным выбрать лучший прибор, если лучшим является тот, который в среднем имеет меньший уровень помех.

Решение.

Обозначим через X случайный уровень помех. Средний уровень помех для прибора А

$$M_A[X] = 0,20 \cdot 1 + 0,06 \cdot 2 + 0,04 \cdot 3 = 0,44 \text{ балла.}$$

Для прибора В

$$M_B[X] = 0,06 \cdot 1 + 0,04 \cdot 2 + 0,10 \cdot 3 = 0,44 \text{ балла.}$$

Итак, по среднему баллу оба прибора равноценны. В качестве дополнительного критерия сравнения используем среднее квадратическое отклонение уровня помех:

$$\sigma_A = \sqrt{D_A[X]} = \sqrt{M_A[X^2] - (\bar{x}_A)^2} = \sqrt{0,80 - 0,44^2} \approx 0,78 \text{ балла,}$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B[X]} = \sqrt{M_B[X^2] - (\bar{x}_B)^2} = \sqrt{1,12 - 0,44^2} \approx 0,96 \text{ балла.}$$

Таким образом, прибор А дает более устойчивые показания относительно средних, и, следовательно, он лучше прибора В.

Задачи для самостоятельной работы

8.1.

Построить ряд распределения и функцию распределения случайного числа попаданий мячом в корзину при одном броске, если вероятность попадания мячом в корзину при одном броске $p=0,3$.

Ответ:

Ряд распределения:

x_i	0	1
p_i	0,7	0,3

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 0,7 & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

8.2.

Опыт состоит из трех независимых бросаний монеты, при каждом из которых герб выпадает с вероятностью $p = 0,5$. Для случайного числа появлений герба построить:

- ряд распределения;
- многоугольник распределения;
- функцию распределения.

Ответ:

Ряд распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,125	0,375	0,375	0,125

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 0,125 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0,500 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0,875 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

8.3.

Производятся последовательные независимые испытания пяти приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Построить ряд распределения случайного числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытания для каждого из них равна 0,9.

Ответ:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6561

8.4.

Два баскетболиста поочередно забрасывают мяч в корзину до тех пор, пока один из них не попадет. Построить ряд распределения случайного числа бросков, производимых каждым из баскетболистов, если вероятность попадания для первого, равна 0,4, а для второго 0,6.

Ответ: X_1 - случайное число бросков для баскетболиста, начавшего броски;
 X_2 - то же для второго баскетболиста.

$$P(X_1 = m) = (0,6 \cdot 0,4)^{m-1} (0,4 + 0,6^2);$$

$$P(X_2 = 0) = 0,4;$$

$$P(X_2 = m) = 0,6(0,4 \cdot 0,6)^{m-1} (0,6 + 0,4^2), m \geq 1.$$

8.5.

Сигналы на включение приборов подаются через каждые 5 сек. Время от момента передачи сигнала до включения прибора 16 сек. Подача сигналов прекращается сразу же после того, как включится хотя бы один прибор. Найти ряд распределения для случайного числа поданных сигналов, если вероятность включения для каждого прибора равна $\frac{1}{2}$.

Ответ: $P(X = m) = q^{m-4} p = \frac{1}{2^{m-3}}$ для всех $m \geq 4$, так как минимальное число включений равно четырем и будет иметь место тогда, когда первый же включенный прибор сработает.

8.6.

Производятся испытания n изделий на надежность, причем вероятность выдержать испытания для каждого изделия равна p . Построить ряд распределения случайного числа изделий, выдержавших испытания.

Ответ: $P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$

8.7.

Вероятность выпадения герба при каждом из пяти бросаний монеты равна 0,5. Составить ряд распределения отношения числа X появлений герба к числу Y появлений решетки.

Ответ:

z_i	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	4	∞
p_i	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Занятие 5. Функция и плотность распределения непрерывной случайной величины.

Функция распределения и плотность вероятности непрерывной случайной величины

Случайная величина называется **непрерывной**, если существует неотрицательная функция $f(x)$, удовлетворяющая при любых x равенству

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

Функция $f(x)$ называется **плотностью вероятности**

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Непрерывная случайная величина задается либо функцией распределения $F(x)$ (интегральным законом распределения), либо плотностью вероятности $f(x)$ (дифференциальным законом распределения).

Функция распределения $F(x) = P(X < x)$, где x — произвольное действительное число, дает вероятность того, что случайная величина X окажется меньше x .

Функция распределения $F(x)$ имеет следующие основные свойства:

- 1) $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$;
- 2) $F(x_1) \leq F(x_2)$, если $x_1 \leq x_2$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.

Плотность вероятности (дифференциальный закон распределения) $f(x)$ обладает следующими основными свойствами:

- 1) $f(x) \geq 0$;
- 2) $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$;
- 3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;
- 4) $P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)dx$.

Величина x_p , определяемая равенством $F(x_p) = p$, называется **квантилем порядка p** , квантиль $x_{0,5}$ называют **медианой**. Если плотность имеет максимум, то значение x , при котором $f(x)$ достигает максимума, называется **модой**.

Решение типовых задач

Пример 9.1.

Формулировка задачи.

Плотность вероятности случайных амплитуд боковой качки корабля имеет вид (закон Рэлея)

$$f(x) = \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \quad (x \geq 0).$$

Определить:

- а) математическое ожидание $M[X]$;
- б) дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение σ_x ;
- в) центральные моменты третьего и четвертого порядков μ_3 и μ_4 .

Решение.

Вычисление моментов сводится к вычислению интегралов вида

$$J_n = \int_0^{\infty} t^n e^{-t^2} dt \quad (n > 0 \text{ целое}),$$

которые равны: при n четном

$$J_{2k} = \frac{1}{2} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}} \sqrt{\pi},$$

где

$$(2k-1)!! = (2k-1)(2k-3)(2k-5)\dots 3 \cdot 1,$$

и при n нечетном

$$J_{2k+1} = \frac{1}{2} \Gamma(k+1) = \frac{k!}{2}.$$

- а) Математическое ожидание случайной амплитуды боковой качки равно

$$\bar{x} = M[X] = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{a^2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx.$$

Произведя замену переменных $\frac{x}{a\sqrt{2}} = t$, получим

$$M[X] = 2\sqrt{2}a \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = 2\sqrt{2}a J_2 = 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{\pi}}{4} a = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

б) Так как

$$\sigma_x^2 = D[X] = M[X^2] - (\bar{x})^2 = 4a^2 J_3 - \frac{\pi}{2} a^2 = a^2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right), \text{ то}$$

$$\sigma_x = a\sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}.$$

в) $\mu_2 = M[(X - \bar{x})^3] = m_3 - 3\bar{x}m_2 + 2(\bar{x})^3,$

где $m_3 = 4\sqrt{2}a^3 J_4 = 3a^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

Следовательно,

$$\mu_3 = a^3 (\pi - 3) \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\mu_4 = M[(X - \bar{x})^4] = m_4 - 4\bar{x}m_3 + 6\bar{x}^2 m_2 - 3\bar{x}^4, \text{ где } m_4 = 8a^4 J_5 = 8a^4$$

Следовательно, $\mu_4 = a^4 \left(8 - \frac{3}{4} \pi^2 \right).$

Пример 9.2.

Формулировка задачи.

Найти срединное отклонение случайной величины, плотность вероятности которой имеет вид (распределение Лапласа)

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

Решение.

Так как плотность вероятности симметрична относительно нуля, то $\bar{x} = 0$.
Срединное отклонение E вычисляется по формуле

$$\frac{1}{2} = P(|X - \bar{x}| < E) = \int_{-E}^E \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_0^E e^{-x} dx = 1 - e^{-E}.$$

Отсюда $E = \ln 2 = 0,6931.$

Задачи для самостоятельной работы

9.1.

Функция распределения равномерно распределенной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ x & \text{при } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}.$$

Найти плотность вероятности случайной величины X .

Ответ: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ принадлежит } [0,1]; \\ 0, & \text{если } x \text{ не принадлежит } [0,1] \end{cases}$

9.2.

Дана функция распределения случайной величины (закон нормального распределения):

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Найти плотность вероятности случайной величины X .

Ответ: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$

9.3.

В книге Г. Крамера дана функция распределения годовых доходов лиц, облагаемых налогом:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha & \text{при } x \geq x_0 \ (\alpha > 0) \\ 0 & \text{при } x < x_0 \end{cases}.$$

Определить размер годового дохода, который для случайно выбранного налогоплательщика может быть превзойден с вероятностью 0,5.

Ответ: $2^{\frac{1}{\alpha}} x_0$

9.4.

Функция распределения случайного времени безотказной работы радиоаппаратуры имеет вид (экспоненциальный закон распределения)

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0).$$

Найти:

- а) вероятность безотказной работы аппаратуры в течение времени T ;
- б) плотность вероятности $f(t)$.

Ответ: а) $p = \frac{1}{e}$; б) $f(x) = \frac{1}{T} e^{-\frac{1}{T}}$

9.5.

Случайная величина эксцентриситета детали характеризуется функцией распределения Рэля

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (x \geq 0).$$

Найти:

- а) плотность вероятности $f(x)$;
- б) медиану распределения;
- в) моду распределения.

Ответ: а) σ ; б) $\sigma \sqrt{\frac{2 \lg 2}{\lg e}} \approx 1,18\sigma$; в) $f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

9.6.

Функция распределения Вейбулла

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^m}{x_0}} \quad (x \geq 0)$$

в ряде случаев характеризует срок службы элементов электронной аппаратуры.

Найти:

- а) плотность вероятности $f(x)$;
- б) квантиль распределения порядка p ;
- в) моду распределения.

Ответ: а) $f(x) = \frac{m}{x_0} x^{m-1} e^{-\frac{x^m}{x_0}} \quad (x \geq 0)$; б) $x_p = \{-x_0 \ln(1-p)\}^{\frac{1}{m}}$; в) $\left(\frac{m-1}{m} x_0\right)^{\frac{1}{m}}$.

9.7.

Дана функция распределения случайной величины X (закон Коши):

$$F(x) = c + b \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

Определить:

- а) постоянные c и b ;
- б) плотность вероятности;
- в) $P(\alpha < X < \beta)$.

Ответ: а) $c = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{\pi}$; б) $f(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}$; в)

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\alpha(\beta - \alpha)}{\alpha^2 + \alpha\beta}.$$

9.11.

Каково должно быть a , чтобы $f(x) = ae^{-x^2}$ являлось плотностью вероятности случайной величины X , изменяющейся в бесконечных пределах?

Ответ: $a = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

9.12.

При каком значении a функция

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2} \quad (-\infty < x < \infty)$$

является плотностью вероятности случайной величины X ? Найти:

- а) функцию распределения случайной величины X ;
- б) вероятность попадания случайной величины, в интервал $(-1, 1)$.

Ответ: а) $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x$; б) $P(|X| < 1) = \frac{1}{2}$.

Занятие 6. Числовые характеристики случайных величин. Нормальный закон распределения.

Числовые характеристики дискретных случайных величин

В качестве числовых характеристик [дискретных](#) случайных величин чаще всего используются моменты этих величин.

Начальный m_k и центральный μ_k моменты k -го порядка дискретной случайной величины определяются формулами

$$m_k = M[X^k] = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i,$$

$$\mu_k = M[(X - \bar{x})^k] = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k p_i,$$

где $M[X^k]$ — [математическое ожидание](#) X^k , x_i — возможные значения случайной величины X , p_i — соответствующие им вероятности, а \bar{x} — математическое ожидание X .

Таким образом, начальный момент первого порядка определяется формулой

$$\bar{x} = M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i,$$

второй центральный момент, или [дисперсия](#), — формулой

$$D[X] = M[(X - \bar{x})^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 p_i$$

или формулой

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2.$$

[Среднее квадратическое отклонение](#) σ определяется соотношением

$$\sigma = +\sqrt{D[X]}.$$

Если вероятности различных значений случайной величины X зависят от события A_k , то условное математическое ожидание случайной величины X при условии осуществления A_k есть

$$M[X | A_k] = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i | A_k).$$

Если A_k ($k = 1, 2, \dots, m$) образуют полную группу [несовместных](#) событий, т. е. $\sum_{k=1}^n P(A_k) = 1$, то полное математическое ожидание X связано с условным математическим ожиданием формулой

$$M[X] = M\{M[X | A_k]\} = \sum_{k=1}^m M[X | A_k] P(A_k).$$

Во всех приведенных выше формулах число слагаемых в суммах может быть бесконечным; в этом случае для существования соответствующего математического ожидания ряд должен сходиться абсолютно.

Решение типовых задач

Пример 10.1.

Формулировка задачи.

Партия, насчитывающая 100 изделий, содержит 10 дефектных. Из всей партии случайным образом отбираются с целью проверки качества 5 изделий (случайная выборка). Найти математическое ожидание числа дефектных изделий, содержащихся в случайной выборке.

Решение.

Случайное число дефектных изделий, содержащихся в выборке, может иметь следующие значения:

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4, x_6 = 5.$$

Вероятности $p_i = P(X = x_i)$ того, что X принимает данное значение x_i , равны

$$p_i = \frac{C_{10}^{i-1} C_{90}^{6-i}}{C_{100}^5} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Искомое математическое ожидание

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^6 (i-1) \frac{C_{10}^{i-1} C_{90}^{6-i}}{C_{100}^5} = \frac{1}{C_{100}^5} \sum_{j=0}^5 j C_{10}^j C_{90}^{5-j}.$$

Так как $\sum_{j=0}^5 C_{10}^j C_{90}^{5-j}$ есть коэффициент при u^5 в произведении $(1+u)^{10}(1+u)^{90}$,

то $\sum_{j=0}^5 j C_{10}^j C_{90}^{5-j}$ есть коэффициент при u^5 в выражении

$$\frac{\partial}{\partial t} \{1+tu\}^{10} (1+u)^{90} \Big|_{t=1} = 10u(1+u)^{99}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=0}^5 j C_{10}^j C_{90}^{5-j} = 10C_{99}^4, \text{ а } \bar{x} = \frac{10C_{99}^4}{C_{100}^5} = 0,5.$$

Пример 10.2.

Формулировка задачи.

Дискретная случайная величина X задана рядом распределения $p_k = P(X = x_k)$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Выразить математическое ожидание случайной величины X через производящую функцию

$$G(u) = \sum_{k=1}^n p_k u^k.$$

Решение.

По определению математического ожидания случайной величины

$$M[X] = \sum_{k=1}^n k p_k.$$

С другой стороны, значение производной от производящей функции, вычисленное при $n=1$, равно

$$G'(1) = \left. \frac{dG(u)}{du} \right|_{u=1} = \sum_{k=1}^n k p_k u^{k-1} \Big|_{u=1} = \sum_{k=1}^n k p_k.$$

Следовательно,

$$M[X] = G'(1).$$

Пример 10.3.

Формулировка задачи.

Опыт может быть успешным с вероятностью p и неуспешным с вероятностью $1-p$.

Условная вероятность достижения намеченного результата после m успешных опытов $P(m)$ равна

$$P(m) = 1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^m \quad (\omega > 1).$$

Найти математическое ожидание числа независимых опытов, необходимых для достижения намеченного результата.

Решение.

Обозначим $P_n(A)$ вероятность достижения намеченного результата при n опытах. Если $P_{n,m}$ — вероятность иметь ровно m успешных из общего числа n опытов, то согласно формуле полной вероятности

$$P_n(A) = \sum_{m=0}^n P_{n,m} P(m).$$

Так как опыты независимы и вероятность успешного исхода в каждом из них равна p , то

$$P_{n,m} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Подставляя в формулу для $P_n(A)$ значения $P_{n,m}$ и $P(m)$, получим

$$P_n(A) = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^m \right\} = 1 - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^n.$$

Для достижения намеченного результата потребуется ровно n опытов, если при n -м опыте он будет достигнут. Вероятность последнего события равна $P_n(A) - P_{n-1}(A)$. Следовательно, математическое ожидание случайного числа опытов, необходимых для достижения намеченного результата,

$$M[X] = \sum_{n=1}^{\infty} n [P_n(A) - P_{n-1}(A)] = \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^n \right\} = \frac{p}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^{n-1}.$$

Для вычисления последней суммы воспользуемся равенством

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{1-x} \right] = \frac{1}{(1-x)^2},$$

справедливым при $|x| < 1$. Полагая в данном случае $x = 1 - \frac{p}{\omega}$, получим

$$M[X] = \frac{p}{\omega} \frac{1}{\left[1 - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)\right]^2} = \frac{\omega}{p}.$$

Пример 10.4.

Формулировка задачи.

Прибор имеет n предохранителей. В случае перегрузки сгорает один из предохранителей, который заменяется новым. Каково математическое ожидание $M[N]$ числа перегрузок N , после которых в приборе окажутся замененными все первоначально установленные предохранители, если выход из строя в момент перегрузки любого из n предохранителей (как незамененного, так и нового) равновероятен?

Решение.

Обозначим $M[N|k]$ математическое ожидание числа перегрузок, после которых все первоначально установленные n предохранителей окажутся замененными, если остались незамененными k предохранителей.

Для вычисления $M[N|k]$ воспользуемся формулой полного математического ожидания. Если остались незамененными k предохранителей ($k \geq 1$), то для повреждения одного из них потребуется очередная перегрузка. В зависимости от результатов очередной перегрузки будут различными средние числа перегрузок, необходимых для сгорания предохранителей, оставшихся из числа первоначально установленных.

При очередной перегрузке могут произойти два события:

A_1 — сгорел один из первоначально установленных предохранителей, вероятность чего $P(A_1) = \frac{k}{n}$;

A_2 — сгорел замененный предохранитель, вероятность чего $P(A_2) = 1 - \frac{k}{n}$.

Если при очередной перегрузке произойдет событие A_1 , то математическое ожидание числа перегрузок для замены всех k предохранителей, не замененных до очередной перегрузки, будет равно $1 + M[N|k-1]$. Если же при очередной перегрузке произойдет событие A_2 , то это математическое ожидание будет равно $1 + M[N|k]$. На основании формулы полного математического ожидания имеем

$$M[N|k] = \frac{k}{n} \{1 + M[N|k-1]\} + \left(1 - \frac{k}{n}\right) \{1 + M[N|k]\} = 1 + \frac{k}{n} M[N|k-1] + \frac{n-k}{n} M[N|k]$$

или, после несложных преобразований,

$$M[N|k] - M[N|k-1] = \frac{n}{k}.$$

Если $k=1$, т. е. остался лишь один незамененный предохранитель, то вероятность его замены равна $\frac{1}{n}$. Следовательно, на основании примера 9.3 будем иметь

$$M[N | 1] = n.$$

Итак, имеем цепь равенств:

$$M[N | n] - M[N | n-1] = \frac{n}{n},$$

$$M[N | n-1] - M[N | n-2] = \frac{n}{n-1},$$

.....

$$M[N | 3] - M[N | 2] = \frac{n}{3},$$

$$M[N | 2] - M[N | 1] = \frac{n}{2},$$

$$M[N | 1] = n,$$

суммируя которые, получим

$$M[N | n] = \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + \frac{n}{3} + \frac{n}{2} + n$$

или

$$M[N] = M[N | n] = n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right).$$

Пример 10.5.

Формулировка задачи.

В результате испытаний двух приборов (А и В) установлена вероятность появления помех, оцениваемых по трехбалльной системе (табл. 1). (В случае отсутствия помех их уровень принимается равным нулю).

Таблица 1.

Уровень помех	1	2	3
Вероятность появления помех данного уровня для прибора А	0,20	0,06	0,04
Вероятность появления помех данного уровня для прибора В	0,06	0,04	0,10

По приведенным данным выбрать лучший прибор, если лучшим является тот, который в среднем имеет меньший уровень помех.

Решение.

Обозначим через X случайный уровень помех. Средний уровень помех для прибора A

$$M_A[X] = 0,20 \cdot 1 + 0,06 \cdot 2 + 0,04 \cdot 3 = 0,44 \text{ балла.}$$

Для прибора B

$$M_B[X] = 0,06 \cdot 1 + 0,04 \cdot 2 + 0,10 \cdot 3 = 0,44 \text{ балла.}$$

Итак, по среднему баллу оба прибора равноценны. В качестве дополнительного критерия сравнения используем среднее квадратическое отклонение уровня помех:

$$\sigma_A = \sqrt{D_A[X]} = \sqrt{M_A[X^2] - (\bar{x}_A)^2} = \sqrt{0,80 - 0,44^2} \approx 0,78 \text{ балла,}$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B[X]} = \sqrt{M_B[X^2] - (\bar{x}_B)^2} = \sqrt{1,12 - 0,44^2} \approx 0,96 \text{ балла.}$$

Таким образом, прибор A дает более устойчивые показания относительно средних, и, следовательно, он лучше прибора B .

Задачи для самостоятельной работы.

10.1

Определить математическое ожидание числа приборов, давших отказ за время испытаний на надежность, если испытанию подвергается один прибор, а вероятность его отказа p .

(Ответ: $m_x = p$)

10.2

Считая, что вес тела с одинаковой вероятностью может быть равен любому целому числу граммов от 1 до 10, определить, при какой из трех систем разновесов:

а) 1, 2, 2, 5, 10;

б) 1, 2, 3, 4, 10;

в) 1, 1, 2, 5, 10

среднее число необходимых для взвешивания гирь будет наименьшим, если при взвешивании разрешается гири ставить только на одну чашку, а подбор гирь при взвешивании осуществляется так, чтобы использовать наименьшее возможное число гирь.

(Ответ: а) $m_x = 1,8$; б) $m_x = 1,7$; в) $m_x = 2,0$)

10.3

Испытуемый прибор состоит из пяти элементов. Вероятность отказа для элемента с номером i равна

$$p_i = 0,2 + 0,1(i - 1).$$

Определить математическое ожидание и дисперсию числа отказавших элементов, если отказы элементов независимы.

(Ответ: $M[X] = 2$; $D[X] = 1,1$)

10.4

Производятся независимые испытания трех приборов. Вероятность отказа каждого прибора соответственно равна p_1 , p_2 и p_3 . Доказать, что математическое ожидание числа отказавших приборов равно $p_1 + p_2 + p_3$.

(Указание: Для доказательства достаточно вычислить $M[X] = \frac{dG(u)}{du} \Big|_{u=1}$, где $G(u) = (q_1 + p_1 u)(q_2 + p_2 u)(q_3 + p_3 u)$)

10.5

Определить математическое ожидание числа приборов, отказавших в работе за время испытаний, если вероятность отказа для всех приборов одна и та же и равна p , а число испытываемых приборов n .

(Указание: Составить производящую функцию $G(u) = (q + pu)^n$; $M[X] = G'(1) = np$)

10.6

В лотерее имеется m_1 выигрышей стоимостью k_1 , m_2 — стоимостью k_2 , ..., m_n — стоимостью k_n . Всего билетов N . Какую стоимость билета следует установить, чтобы математическое ожидание выигрыша на один билет равнялось половине его стоимости?

(Ответ: $\frac{2}{N} \sum_{i=1}^n m_i k_i$)

10.7

Первый игрок бросает 3, а второй 2 одинаковых монеты. Выигрывает и получает всё 5 монет тот, у которого выпадает большее число гербов. В случае ничьей игра повторяется до получения определенного результата. Каково математическое ожидание выигрыша для каждого из игроков?

(Ответ: Для первого $\frac{7}{11}$, для второго $-\frac{7}{11}$, то есть игра проигрышная для второго игрока)

10.8

Три игрока A , B , C играют на следующих условиях: в каждой партии участвуют двое; проигравший уступает место третьему; первую партию играют A с B . Вероятность выигрыша в каждой партии для каждого игрока равна $\frac{1}{2}$. Игра продолжается до тех пор, пока один из игроков не выиграет подряд 2 раза. При этом он получает m рублей. Каково математическое ожидание выигрыша для каждого игрока:

а) после первой партии при условии, что A ее выиграл;

б) в начале игры?

(Ответ: а) $a = \frac{4}{7}m$, $b = \frac{1}{7}m$, $c = \frac{2}{7}m$; б) $a = \frac{5}{14}m$, $b = \frac{5}{14}m$, $c = \frac{2}{7}m$

Указание: Ввести в рассмотрение величины a, b, c - математические ожидания выигрышей игроков A, B, C соответственно при условии, что игрок A выиграл у B . Для этих величин справедливы равенства $a = \frac{m}{2} + \frac{b}{2}$, $c = \frac{a}{2}$, $b = \frac{c}{2}$, которые составляют систему уравнений для нахождения неизвестных a, b, c .)

10.9

Три игрока A, B, C играют на следующих условиях: в каждой партии участвуют двое; проигравший уступает место третьему; первую партию играют A с B . Вероятность выигрыша в каждой партии для каждого игрока равна $\frac{1}{2}$. Игра продолжается до тех пор, пока один из игроков не выиграет подряд 2 раза; при этом он получает сумму выигрыша, равную числу всех сыгранных партий. Каково математическое ожидание выигрыша для игроков A и C до начала игры?

(Ответ:

$$M[A] = \frac{2}{2^2} + \left(\frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5}\right) + \left(\frac{7}{2^7} + \frac{8}{2^8}\right) + \dots = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m}{2^m} - 3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{2^{3m}} = \frac{3}{2} - \frac{24}{49} = 1\frac{1}{98};$$

$$M[C] = \frac{3}{2^2} + \frac{6}{2^5} + \frac{9}{2^8} + \dots = \frac{3}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m+1}{8^m} = \frac{3}{4} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{8}\right)^2} = \frac{48}{49} \quad)$$

10.10

Автоматическая линия при нормальной настройке может выпускать бракованное изделие с вероятностью p . Переналадка линии производится после первого же бракованного изделия. Найти среднее число всех изделий, изготовленных между двумя переналадками линии.

(Ответ: $M[X] = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}$)

10.11

Вероятность приема позывного сигнала одной радиостанцией другой радиостанцией равна 0,2 при каждой посылке. Позывные подаются каждые 5 сек. до тех пор, пока не будет получен ответный сигнал, принимаемый достоверно. Общее время прохождения позывного и ответного сигналов равно 16 сек. Найти среднее число подаваемых позывных сигналов до установления двусторонней связи.

(Ответ: $M[X] = \sum_{m=4}^{\infty} m(1-p)^{m-4} = 4 + \frac{1-p}{p} = 3 + \frac{1}{p} = 8$)

10.12

Найти математическое ожидание и дисперсию числа изделий, изготавливаемых на поточной линии при нормальной настройке за период между двумя переналадками, если при нормальной настройке вероятность изготовления бракованного изделия равна p , а переналадка производится после изготовления k -го бракованного изделия.

$$(\text{Ответ: } M[X] = \frac{k}{p}; D[X] = \frac{k(1-p)}{p^2})$$

Указание: Ряд $S = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{m!}{(m-k)!} q^{m-k}$ суммируется с помощью формулы

$$S = \frac{d^k}{dq^k} \sum_{m=0}^{\infty} q^m = \frac{k}{(1-q)^{k+1}}, \text{ где } q = 1-p$$

Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическое ожидание $\bar{x} = M[X]$ и дисперсия $D[X]$ случайной величины X , имеющей плотность вероятности $f(x)$, вычисляются по формулам

$$\bar{x} = M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx.$$

Математические ожидания и дисперсии непрерывных случайных величин обладают такими же свойствами, что и аналогичные вероятностные характеристики дискретных случайных величин. Среднее квадратическое отклонение σ определяется формулой

$$\sigma = +\sqrt{D[X]}.$$

Для симметричного закона распределения характеристикой рассеивания случайной величины может служить срединное отклонение E , определяемое из условия

$$P(|X - \bar{x}| < E) = \frac{1}{2}.$$

Начальный момент k -го порядка m_k и центральный момент k -го порядка μ_k вычисляются по формулам

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^k f(x) dx,$$

Для существования моментов нечетного порядка необходима абсолютная сходимость соответствующих интегралов.

Решение типовых задач

Пример 11.1.

Формулировка задачи.

Плотность вероятности случайных амплитуд боковой качки корабля имеет вид (закон Рэлея)

$$f(x) = \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \quad (x \geq 0).$$

Определить:

- а) математическое ожидание $M[X]$;
- б) дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение σ_x ;
- в) центральные моменты третьего и четвертого порядков μ_3 и μ_4 .

Решение.

Вычисление моментов сводится к вычислению интегралов вида

$$J_n = \int_0^{\infty} t^n e^{-t^2} dt \quad (n > 0 \text{ целое}),$$

которые равны: при n четном

$$J_{2k} = \frac{1}{2} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}} \sqrt{\pi},$$

где

$$(2k-1)!! = (2k-1)(2k-3)(2k-5)\dots 3 \cdot 1,$$

и при n нечетном

$$J_{2k+1} = \frac{1}{2} \Gamma(k+1) = \frac{k!}{2}.$$

- а) Математическое ожидание случайной амплитуды боковой качки равно

$$\bar{x} = M[X] = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{a^2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx.$$

Произведя замену переменных $\frac{x}{a\sqrt{2}} = t$, получим

$$M[X] = 2\sqrt{2}a \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = 2\sqrt{2}a J_2 = 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{\pi}}{4} a = a \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

- б) Так как

$$\sigma_x^2 = D[X] = M[X^2] - (\bar{x})^2 = 4a^2 J_3 - \frac{\pi}{2} a^2 = a^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right), \text{ то}$$

$$\sigma_x = a \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}.$$

- в) $\mu_2 = M[(X - \bar{x})^3] = m_3 - 3\bar{x}m_2 + 2(\bar{x})^3,$

где $m_3 = 4\sqrt{2}a^3 J_4 = 3a^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

Следовательно,

$$\mu_3 = a^3(\pi - 3)\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\mu_4 = M[(X - \bar{x})^4] = m_4 - 4\bar{x}m_3 + 6\bar{x}^2m_2 - 3\bar{x}^4, \text{ где } m_4 = 8a^4J_5 = 8a^4$$

$$\text{Следовательно, } \mu_4 = a^4\left(8 - \frac{3}{4}\pi^2\right).$$

Пример 11.2.

Формулировка задачи.

Найти срединное отклонение случайной величины, плотность вероятности которой имеет вид (распределение Лапласа)

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

Решение.

Так как плотность вероятности симметрична относительно нуля, то $\bar{x} = 0$. Срединное отклонение E вычисляется по формуле

$$\frac{1}{2} = P(|X - \bar{x}| < E) = \int_{-E}^E \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \int_0^E e^{-x}dx = 1 - e^{-E}.$$

Отсюда $E = \ln 2 = 0,6931$.

Задачи для самостоятельной работы.

11.1

Плотность вероятности случайной величины X имеет вид (закон равномерного распределения)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2l} & \text{при } |x - a| \leq l, \\ 0 & \text{при } |x - a| > l. \end{cases}$$

Определить:

а) $M[X];$

б) $D[X];$

в) найти связь между средним квадратическим и срединным отклонениями случайной величины X .

$$(\text{Ответ: а) } M[X] = a; \quad \text{б) } D[X] = \frac{l^2}{3}; \quad \text{в) } E = \sigma \frac{\sqrt{3}}{2})$$

11.2

Функция распределения случайной величины X имеет вид (закон арксинуса)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1, \\ a + b \arcsin x & \text{при } -1 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{при } 1 \leq x. \end{cases}$$

Определить постоянные a и b . Найти $M[X]$ и $D[X]$.

(Ответ: $M[X]=0$; $D[X]=\frac{1}{2}$)

11.3

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины X , если плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\rho}{E\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 \frac{x^2}{E^2}} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

(Ответ: $M[X] = \frac{E}{\rho\sqrt{\pi}}$; $D[X] = \frac{E^2}{\rho^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right)$)

11.4

Плотность вероятности случайной величины X имеет вид (закон арксинуса)

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (-a < x < a).$$

Определить дисперсию и среднее отклонение.

(Ответ: $D[X] = \frac{a^2}{2}$; $E = \frac{a}{\sqrt{2}}$)

11.5

Плотность вероятности случайных амплитуд A боковой качки корабля определяется формулой (закон Рэлея)

$$f(a) = \frac{a}{\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \quad (a \geq 0),$$

где σ^2 - дисперсия угла крена.

Одинаково ли часто встречаются амплитуды, меньшие и большие средней?

(Ответ: $P(a < \bar{a}) = 1 - e^{-\frac{\pi}{4}}$; $P(a > \bar{a}) = e^{-\frac{\pi}{4}}$; $\frac{P(a < \bar{a})}{P(a > \bar{a})} = \frac{0,544}{0,456} = 1,19$)

11.6

Скорость молекул газа имеет плотность вероятности (закон Максвелла)

$$f(v) = Av^2 e^{-h^2 v^2} \quad (v \geq 0).$$

Найти математическое ожидание и дисперсию скорости молекул, а также величину A при заданном h .

(Ответ: $A = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}$; $M[V] = \frac{2}{h\sqrt{\pi}}$; $D[V] = \frac{1}{h^2} \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right)$)

11.7

Плотность вероятности случайной величины X задана в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{x^m}{m!} e^{-x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Определить $M[X]$ и $D[X]$.

(Ответ: $M[X] = D[X] = m + 1$)

11.8

Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x_0^3}{x^3} & \text{при } x \geq x_0, \\ 0 & \text{при } x < x_0, \end{cases} \quad (x_0 > 0).$$

Найти $M[X]$ и $D[X]$.

(Ответ: $M[X] = \frac{3}{2} x_0$; $D[X] = \frac{3}{4} x_0^2$)

11.9

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, плотность вероятности которой имеет вид (распределение Лапласа):

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

(Ответ: $M[X] = 0$; $D[X] = 2$)

11.10

Случайная величина X имеет плотность вероятности (гамма-распределение)

$$f(x) = \begin{cases} Ax^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (\alpha > -1; \beta > 0).$$

Определить параметр A , математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

(Ответ: $A = \frac{1}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)}$; $M[X] = (\alpha+1)\beta$; $D[X] = (\alpha+1)\beta^2$)

11.11

Случайная величина X имеет плотность вероятности (бета-распределение)

$$f(x) = \begin{cases} Ax^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ и } x > 1, \end{cases} \quad (a > 0; b > 0).$$

Определить параметр A , математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

(Ответ: $A = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$; $M[X] = \frac{a}{a+b}$; $D[X] = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$)

11.12

Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$f(x) = A(1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}},$$

где n — целое положительное число, большее 1. Определить постоянную A , математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

$$(\text{Ответ: } A = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}; M[X]=0; D[X]=\frac{1}{n-2}, n>2)$$

Указание: Для вычисления интеграла $\int_0^{\infty} (1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}} dx$ следует воспользоваться подстановкой $x = \sqrt{\frac{y}{1-y}}$, приводящей к бета-функции, а последнюю выразить через гамма-функцию)

Дополнительные задачи для самостоятельного решения: Сборник задач [7] Ч.2 гл.4 §§ 1,2,3 стр.52-78; гл.5 §1 стр.82-84; гл.6 §§ 1-6 стр.87-115.

Дополнительные задачи для домашнего задания: учебное пособие [4] стр. 53 № 1-5.

Дополнительные вопросы для самопроверки: Учебное пособие [4] стр. 54.

Вопросы для самопроверки.

1. Сформировать определение дискретной и непрерывной случайной величины и привести примеры той и другой величины.
2. Какие формы представления законы распределения у дискретной величины?
3. Дать определение функции распределения непрерывной случайной величины и привести основные свойства.
4. Дать определение плотности вероятностей непрерывной случайной величины и указать основные свойства этой функции.
5. Как определяется вероятность попадания в заданный интервал случайной величины (дискретной и непрерывной)?
6. Указать связь, которая существует между функцией распределения и плотностью вероятностей.
7. Дать определение числовой характеристики — математического ожидания дискретной и непрерывной случайной величины.
8. Каков геометрический и вероятностный смысл математического ожидания?

9. Привести свойства математического ожидания.
10. Дать определение числовой характеристики – дисперсии дискретной и непрерывной случайной величины.
11. Для характеристики какого свойства случайной величины используется дисперсия (среднее квадратичное отклонение)?
12. Привести свойства дисперсии.
13. Что такое мода и медиана случайной величины?
14. Что называется начальным моментом и центральным моментом случайной величины?
15. Дать определение коэффициента асимметрии и эксцесса.
16. Охарактеризовать непрерывную случайную величину с равномерным распределением.
17. Дать определение зависимых и независимых случайных величин.

Закон нормального распределения

Плотность вероятности нормально распределенной случайной величины имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

или

$$f(x) = \frac{1}{E\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 \frac{(x-m)^2}{E^2}},$$

где σ - среднее квадратическое отклонение, $E = \rho\sqrt{2}\sigma$ - срединное отклонение (иногда называемое и «вероятным отклонением»), $\rho = 0,476936..$

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал (x_1, x_2) вычисляется по одной из следующих формул:

$$1) \quad P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{x_2 - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - m}{\sigma}\right) \right],$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функция Лапласа (интеграл вероятности);

$$2) \quad P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{2} \left[\hat{\Phi}\left(\frac{x_2 - m}{E}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{x_1 - m}{E}\right) \right],$$

где $\hat{\Phi}(x) = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\rho^2 t^2} dt$ - приведенная функция Лапласа.

Значения функций $\Phi(x)$ и $\hat{\Phi}(x)$ даны в специальных таблицах.

Во всех задачах данной главы ошибки измерения считаются нормальными величинами.

Решение типовых задач

Пример 12.1

Формулировка задачи

Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим-отклонением $\sigma = 100$ м. Найти:

- 1) вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 м,
- 2) вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной.

Решение

Обозначим через X суммарную ошибку измерения дальности. Ее систематическая составляющая $\bar{x} = 50$ м. Следовательно, плотность вероятности суммарной ошибки имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{100\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+50)^2}{20000}}.$$

Согласно общей формуле имеем

$$P(|X| < 150) = P(-150 < X < 150) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{150+50}{100}\right) - \Phi\left(\frac{-150+50}{100}\right) \right] = \frac{1}{2} [\Phi(2) - \Phi(-1)]$$

Интеграл вероятности является функцией нечетной, поэтому

$$\Phi(-1) = -\Phi(1)$$

Отсюда

$$P(|X| < 150) = \frac{1}{2} [\Phi(2) + \Phi(1)].$$

Из таблицы находим

$$\Phi(2) = 0,9545, \quad \Phi(1) = 0,6827;$$

окончательно

$$P(|X| < 150) = 0,8186.$$

Вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной,

$$P(-\infty < X < 0) = \frac{1}{2} [\Phi(0,5) + \Phi(\infty)].$$

Так как $\Phi(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 1$, а из таблицы находим $\Phi(0,5) = 0,3829$, то

$$P(-\infty < X < 0) = 0,6914.$$

Пример 12.2

Формулировка задачи

Определить срединную ошибку прибора, если систематических ошибок он не имеет, а случайные распределены по нормальному закону и с вероятностью 0,8 не выходят за пределы ± 20 м.

Решение

Из условия задачи следует, что

$$P(|X| \leq 20) = \frac{1}{2} \left[\hat{\Phi}\left(\frac{20}{E}\right) - \hat{\Phi}\left(-\frac{20}{E}\right) \right] = \hat{\Phi}\left(\frac{20}{E}\right).$$

Неизвестное значение срединной ошибки находим как решение уравнения

$$\hat{\Phi}\left(\frac{20}{E}\right) = 0,8.$$

С помощью таблицы получим

$$\frac{20}{E} = 1,90,$$

откуда

$$E = \frac{20}{1,90} = 10,5 \text{ м.}$$

Задачи для самостоятельной работы

12.1

Измерительный прибор имеет систематическую ошибку 5 м и среднюю квадратическую ошибку 75 м. Какова вероятность того, что ошибка измерения не превзойдет по абсолютной величине 5 м?

(Ответ: $p = 0.053$)

12.2

Систематическая ошибка удержания высоты самолетом +20 м, а случайная ошибка имеет среднее квадратическое отклонение 75 м. Для полета самолета отведен коридор высотой 100 м. Какова вероятность, что самолет будет лететь ниже, внутри и выше коридора, если самолету задана высота, соответствующая середине коридора?

(Ответ: $p_{\text{ниже}}=0,18$; $p_{\text{внутри}}=0,48$; $p_{\text{выше}}=0,34$)

12.3

Срединная ошибка измерения дальности радиолокатором равна 25 м, а систематическая ошибка отсутствует. Определить:

а) дисперсию ошибок измерения дальности;

б) вероятность получения ошибки измерения дальности, по абсолютной величине не превосходящей 20 м.

(Ответ: а) 1372 м^2 ; б) $0,4105$)

12.4

Случайное отклонение размера детали от номинала при изготовлении ее на данном станке имеет нулевое математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение, равное 5 мк . Сколько необходимо изготовить деталей, чтобы с вероятностью не менее $0,9$ среди них была хотя бы одна годная, если для годной детали допустимо отклонение размера от номинала не более, чем на 2 мк ?

(Ответ: $n \geq 7$)

12.5

Даны две случайные величины X и Y , имеющие одинаковые дисперсии, но первая распределена нормально, а вторая равномерно. Определить соотношение между их средними отклонениями.

(Ответ: $E_x = 2\rho\sqrt{\frac{2}{3}}E_y \approx 0.78E_y$)

12.6

Нормально распределенная случайная величина X имеет математическое ожидание $m_x = -15 \text{ м}$ и среднее отклонение 10 м . Вычислить таблицу функции распределения для значений аргумента через каждые 10 м и построить график.

(Ответ: См. таблицу)

x	-65	-55	-45	-35	-25	-15	-5	+5	+15	+25	+35
$10^8 F(x)$	35	350	2150	8865	25000	50000	75000	91135	97850	99650	99965

)

12.7

Систематическая ошибка высотомера равна $+20 \text{ м}$, а случайные ошибки распределены по нормальному закону. Какую среднюю квадратическую ошибку должен иметь высотомер, чтобы с вероятностью $0,9$ ошибка измерения высоты по абсолютной величине была меньше 100 м ?

(Ответ: $\sigma \approx 58 \text{ м}$. Получающееся трансцендентное уравнение проще решить графически)

12.8

Найти связь между средним арифметическим отклонением

$$E_1 = M[|X - m_x|]$$

нормально распределенной случайной величины и ее средним квадратическим отклонением.

(Ответ: $E_1 = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$)

12.9

Определить для нормально распределенной случайной величины X , имеющей $M[X] = 0$,

- 1) $P(X \geq k\sigma)$
- 2) $P(X \geq k\sigma)$ (при $k = 1, 2, 3$).

(Ответ: 1) 0,1587; 0,0228; 0,00135; 2) 0,3173; 0,0455; 0,0027)

12.10

Заряд охотничьего пороха отвешивается на весах, имеющих среднюю квадратическую ошибку взвешивания 150 мг. Номинальный вес порохового заряда 2,3 г. Определить вероятность повреждения ружья, если максимально допустимый вес порохового заряда 2,5 г.

(Ответ: $p \approx 0,091$)

12.11

Производятся два независимых измерения прибором, имеющим среднюю квадратическую ошибку 30 м и систематическую ошибку +10 м. Какова вероятность того, что обе ошибки измерений, имея разные знаки, по абсолютной величине превзойдут 10 м?

(Ответ: $p = 0,25$)

12.12

На плоскости проведены две параллельные прямые, расстояние между ними L . На эту же плоскость бросается круг радиуса R . Центр рассеивания расположен на расстоянии b от одной из линий во внешнюю сторону. Срединное отклонение центра круга в направлении, перпендикулярном линии, равно E .

Определить при одном бросании:

- а) вероятность накрытия кругом хотя бы одной прямой;
- б) вероятность накрытия обеих прямых, если $L = 10$ м, $R = 8$ м, $b = 5$ м, $E = 10$ м.

(Ответ: а) 0,5196; б) 0,1281)

Дополнительные задачи для самостоятельного решения: сборник задач [7] Ч.2 гл.6 стр.109-114.

Дополнительные вопросы для самопроверки: Учебное пособие [4] стр. 70.

Вопросы для самопроверки.

1. Какое распределение непрерывной случайной величины называется нормальным распределением?

2. Изобразить график плотности распределения вероятности нормального распределения и пояснить: как будет изменяться форма этого графика при изменении математического ожидания и среднего квадратичного отклонения?
3. Написать и пояснить формулу для определения вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал. Что называется функцией Лапласа или интегралом вероятности, и каковы ее свойства?
4. Записать формулу для вероятности отклонения нормально распределенной случайной величины от своего математического ожидания, по абсолютной величине не превышающего заданного значения.
5. В чем заключается правило «трех сигм»?
6. Чем объясняется широкое распространение на практике нормального распределения?

Часть 3. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Занятие 7. Закон распределения и числовые характеристики системы двух случайных величин

Функцией распределения системы двух случайных величин (X, Y) называется вероятность совместного выполнения двух неравенств $X < x$ и $Y < y$:

$$F(x, y) = P((X < x)(Y < y))$$

Плотностью распределения системы двух случайных величин (X, Y) называется функция $f(x, y)$, которая удовлетворяет соотношению:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy$$

в точках непрерывности функции распределения $F(x, y)$

формулы для непосредственного подсчета моментов. Для системы дискретных случайных величин X и Y :

$$\alpha_{k,s}(X, Y) = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s p_{ij}$$

$$\mu_{k,s}(X, Y) = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s p_{ij}$$

где $p_{ij} = P((X = x_i)(Y = y_i))$ — вероятность того, что система (X, Y) примет значения (x_i, y_i) , а суммирование распространяется по всем возможным значениям случайных величин X, Y .

Для непрерывных случайных величин:

$$\alpha_{k,s}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x, y) dx dy$$

$$\mu_{k,s}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^s f(x, y) dx dy$$

где $f(x, y)$ — плотность распределения системы.

Первые начальные моменты представляют собой уже известные нам [математические ожидания](#) величин X и Y , входящих в систему:

$$m_x = \alpha_{1,0} = M[X^1 Y^0] = M[X]$$

$$m_y = \alpha_{0,1} = M[X^0 Y^1] = M[Y]$$

Совокупность математических ожиданий m_x, m_y представляет собой *характеристику положения* системы. Геометрически это координаты точки на плоскости, вокруг которой происходит рассеивание случайных точек (X, Y) $M = (m_x, m_y)$ будем называть *вектором математических ожиданий*.

Кроме первых начальных моментов, на практике широко применяются еще *вторые центральные моменты* системы. Два из них представляют собой уже известные нам дисперсии, величин X и Y .

$$D_x = \mu_{2,0}(X, Y) = M \begin{bmatrix} \overset{\circ}{X}^2 & \overset{\circ}{Y}^0 \end{bmatrix} = D[X]$$

$$D_y = \mu_{0,2}(X, Y) = M \begin{bmatrix} \overset{\circ}{X}^0 & \overset{\circ}{Y}^2 \end{bmatrix} = D[Y]$$

характеризующие *рассеивание* случайной точки в направлении осей Ox и Oy , относительно вектора математических ожиданий.

Особую роль как характеристика системы играет *второй смешанный центральный момент*:

$$\mu_{1,1}(X, Y) = M \begin{bmatrix} \overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{Y} \end{bmatrix}$$

Математическое ожидание произведения центрированных случайных величин:

$$K_{x,y} = M \left[\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{Y} \right] = M \left[(X - m_x)(Y - m_y) \right]$$

Характеристика K_{xy} называется **корреляционным моментом** (иначе — «моментом связи») случайных величин X, Y .

Для дискретных случайных величин корреляционный момент выражается формулой

$$K_{x,y} = \sum_i \sum_j (x - m_x)(y - m_y) p_{ij}$$

а для непрерывных — формулой

$$K_{x,y} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy$$

Доказано, что для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю.

Для характеристики связи между величинами (X, Y) переходят от момента K_{xy} к безразмерной характеристике

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

где σ_x, σ_y — среднеквадратические отклонения величин X, Y . Эта характеристика называется **коэффициентом корреляции** величин X и Y . Очевидно, коэффициент корреляции обращается в нуль одновременно с корреляционным моментом; следовательно, для независимых случайных величин, коэффициент корреляции равен нулю.

Решение типовых задач

Пример 13.1

Формулировка задачи

Система двух дискретных случайных величин (X, Y) задана двумерной таблицей распределения

$y \backslash x$	$x_1 = -0,2$	$x_2 = 0,1$	$x_3 = 0,5$
$y_1 = 2$	$p_{11} = 0,1$	$p_{21} = 0,2$	$p_{31} = 0,25$
$y_2 = 1$	$p_{12} = 0,05$	$p_{22} = 0,25$	$p_{32} = 0,15$

Определить законы распределения дискретных случайных величин X и Y - составляющих системы (X, Y) .

Найти математическое ожидание, дисперсию случайных величин X и Y и корреляционный момент системы (X, Y) .

Решение

Законы распределения дискретных случайных величин X и Y - составляющих системы (X, Y) можно задать в таблице, при условии, что сумма вероятностей p_{ij} равна 1:

$x \backslash y$	$x_1 = -0,2$	$x_2 = 0,1$	$x_3 = 0,5$	$P(Y = y_j)$
$y_1 = 2$	$p_{11} = 0,1$	$p_{21} = 0,2$	$p_{31} = 0,25$	$p_{11} + p_{21} + p_{31} = 0,55$
$y_2 = 1$	$p_{12} = 0,05$	$p_{22} = 0,25$	$p_{32} = 0,15$	$p_{12} + p_{22} + p_{32} = 0,45$
$P(X = x_i)$	$p_{11} + p_{12} = 0,15$	$p_{21} + p_{22} = 0,45$	$p_{31} + p_{32} = 0,4$	1

Таким образом, закон распределения случайной величины X :

x	$x_1 = -0,2$	$x_2 = 0,1$	$x_3 = 0,5$
$P(X = x_i)$	0,15	0,45	0,4

Закон распределения случайной величины Y :

y	$y_1 = 2$	$y_2 = 1$
$P(Y = y_j)$	0,55	0,45

Найдем математическое ожидание случайной величины X :

$$M[X] = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) = -0,2 \cdot 0,15 + 0,1 \cdot 0,45 + 0,5 \cdot 0,4 = 0,215$$

Найдем математическое ожидание случайной величины Y :

$$M[Y] = \sum_{j=1}^m y_j P(Y = y_j) = 1 \cdot 0,55 + 2 \cdot 0,45 = 1,45$$

Математическое ожидание

$$M[XY] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j) = (-0,2) \cdot 1 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,1 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,5 \cdot 0,25 + 2 \cdot (-0,2) \cdot 0,05 + 2 \cdot (0,1) \cdot 0,25 + 2 \cdot (0,5) \cdot 0,15 = 0,305$$

Корреляционный момент системы:

$$K_{XY} = M[XY] - M[X]M[Y] = 0,305 - 0,215 \cdot 1,45 = -0,0067$$

Таким образом:

1) Закон распределения случайной величины X :

x	$x_1 = -0,2$	$x_2 = 0,1$	$x_3 = 0,5$
$P(X = x_i)$	0,15	0,45	0,4

2) Закон распределения случайной величины Y :

y	$y_1 = 2$	$y_2 = 1$
$P(Y = y_j)$	0,15	0,45

3) Математическое ожидание случайной величины X :
 $M[X] = 0,215$

4) Математическое ожидание случайной величины Y :
 $M[Y] = 1,45$

5) Корреляционный момент системы:

$$K_{XY} = -0,0067$$

Задачи для самостоятельной работы

13.1

Система двух дискретных случайных величин (X, Y) задана двумерной таблицей распределения:

Y \ X	x_1	x_2	x_3
y_1	p_{11}	p_{21}	p_{31}
y_2	p_{12}	p_{22}	p_{32}

Определить законы распределения дискретных случайных величин X, Y системы (X, Y) .
Найти математическое ожидание, дисперсию случайных величин X, Y и корреляционный момент системы (X, Y) .

Исходные данные к задачам:

№№ задачи	p_{11}	p_{21}	p_{31}	p_{12}	p_{22}	p_{32}
1	0,1	0,2	0,3	0,15	0,2	0,05
2	0,25	0,1	0,2	0,25	0,15	0,05
3	0,1	0,3	0,05	0,2	0,05	0,3
4	0,3	0,005	0,3	0,15	0,1	0,1
5	0,1	0,2	0,25	0,05	0,25	0,15

13.2

6-10. Система двух дискретных случайных величин (X, Y) задана двумерной таблицей распределения:

Y \ X	x_1	x_2
y_1	p_{11}	p_{21}
y_2	p_{12}	p_{22}
y_3	p_{13}	p_{23}

Определить законы распределения дискретных случайных величин X, Y системы (X, Y) .
Найти математическое ожидание, дисперсию случайных величин X, Y и корреляционный момент системы (X, Y) .

Исходные данные к задачам:

№№ задачи	p_{11}	p_{21}	p_{12}	p_{22}	p_{13}	p_{23}
6	0.1	0.15	0.2	0.25	0.25	0.05
7	0.25	0.25	0.1	0.15	0.2	0.05
8	0.1	0.2	0.3	0.05	0.05	0.3
9	0.3	0.05	0.3	0.15	0.1	0.1

10	0.2	0.1	0.05	0.25	0.25	0.15
----	-----	-----	------	------	------	------

Занятие 8. Условные случайные величины, их законы распределения и числовые характеристики

Условным законом распределения величины X , входящей в систему (X, Y) , называется ее закон распределения, определенный при условии, что другая случайная величина Y приняла значение y .

Условная функция распределения, обозначается $F(x|y)$, условная плотность распределения $f(x|y)$.

Выражения условных законов распределения через безусловные:

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}; \quad f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

или

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx}; \quad f(y|x) = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy}$$

Решение типовых задач

Пример 14.1.

Формулировка задачи.

Система двух случайных величин (X, Y) задана двумерной таблицей распределения

$x \backslash y$	x_1	x_2
y_1	$P_{11} = 0,15$	$P_{21} = 0,25$
y_2	$P_{12} = 0,1$	$P_{22} = 0,2$
y_3	$P_{13} = 0,25$	$P_{23} = 0,05$

- 1) Определить условный закон распределения дискретной случайной

величины X при условии, что дискретная случайная величина Y приняла значение y_1 .

2) Найти условное математическое ожидание $M[X | Y = y_2]$ и дисперсию $D[X | Y = y_2]$.

Решение.

Складывая вероятности по второй строке таблицы, определим вероятность того, что случайная величина приняла значение y_2 :

$$P(Y = y_2) = p_{12} + p_{22} = 0,1 + 0,2 = 0,3$$

Найдем условную вероятность того, что случайная величина X примет значение x_1 при условии, что случайная величина Y приняла значение y_2 :

$$P(X = x_1 | Y = y_2) = \frac{P(x_1, y_2)}{P(y_2)} = 0,1/0,3 = \frac{1}{3}.$$

Найдем условную вероятность того, что случайная величина X примет значение x_2 при условии, что случайная величина Y приняла значение y_2 :

$$P(X = x_2 | Y = y_2) = \frac{P(x_2, y_2)}{P(y_2)} = 0,2/0,3 = \frac{2}{3}.$$

Запишем условный закон распределения дискретной случайной величины X при условии, что дискретная случайная величина Y приняла значение y_2 в виде таблицы:

$X Y = y_2$	x_1	x_2
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Найдем условное математическое ожидание $M[X | Y = y_2] = x_1 \frac{1}{3} + x_2 \frac{2}{3}$.

Таким образом, условное математическое ожидание

$$M[X | Y = y_2] = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2$$

Найдем условную дисперсию дискретной случайной величины X при условии, что дискретная случайная величина Y приняла значение y_2 :

$$\begin{aligned} D[X | Y = y_2] &= \\ &= M[(X | Y = y_2)]^2 - M^2[X | Y = y_2] = x_1^2 \frac{1}{3} + x_2^2 \frac{2}{3} - [x_1 \frac{1}{3} + x_2 \frac{2}{3}]^2 = \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{2}{3}x_2^2 - [\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2]^2 \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельной работы

14.1

1-5. Система двух дискретных случайных величин (X, Y) задана двумерной таблицей распределения:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3
y_1	p_{11}	p_{21}	p_{31}
y_2	p_{12}	p_{22}	p_{32}

Определить законы распределения дискретных случайных величин X, Y системы (X, Y) . Найти математическое ожидание, дисперсию случайных величин X, Y и корреляционный момент системы (X, Y) .

Исходные данные к задачам:

№№ задачи	p_{11}	p_{21}	p_{31}	p_{12}	p_{22}	p_{32}
1	0,1	0,2	0,3	0,15	0,2	0,05
2	0,25	0,1	0,2	0,25	0,15	0,05
3	0,1	0,3	0,05	0,2	0,05	0,3
4	0,3	0,005	0,3	0,15	0,1	0,1
5	0,1	0,2	0,25	0,05	0,25	0,15

14.2

6-10. Система двух дискретных случайных величин (X, Y) задана двумерной таблицей распределения:

$X \backslash Y$	x_1	x_2
y_1	p_{11}	p_{21}
y_2	p_{12}	p_{22}
y_3	p_{13}	p_{23}

Определить законы распределения дискретных случайных величин X, Y системы (X, Y) . Найти математическое ожидание, дисперсию случайных величин X, Y и корреляционный момент системы (X, Y) .

Исходные данные к задачам:

№задачи	p_{11}	p_{21}	p_{12}	p_{22}	p_{13}	p_{23}
6	0.1	0.15	0.2	0.25	0.25	0.05
7	0.25	0.25	0.1	0.15	0.2	0.05
8	0.1	0.2	0.3	0.05	0.05	0.3
9	0.3	0.05	0.3	0.15	0.1	0.1
10	0.2	0.1	0.05	0.25	0.25	0.15

14.3

11-15. Система двух дискретных случайных величин (X, Y) задана двумерной таблицей распределения:

$X \backslash Y$	x_1	x_2	x_3
y_1	p_{11}	p_{21}	p_{31}
y_2	p_{12}	p_{22}	p_{32}

Определить условный закон распределения дискретной случайной величины X при условии, что дискретная случайная величина Y приняла значения y_1 . Найти условные математическое ожидание $M[X/Y=y_1]$ и дисперсию $D[X/Y=y_1]$.

Исходные данные к задачам:

№задачи	p_{11}	p_{21}	p_{31}	p_{12}	p_{22}	p_{32}
11	0.1	0.2	0.3	0.15	0.2	0.05
12	0.25	0.1	0.2	0.25	0.15	0.05
13	0.1	0.3	0.05	0.2	0.05	0.3
14	0.3	0.05	0.3	0.15	0.1	0.1
15	0.1	0.2	0.25	0.05	0.25	0.15

14.4

16-20. Система двух дискретных случайных величин (X, Y) задана двумерной таблицей распределения

$Y \backslash X$	x_1	x_2
y_1	p_{11}	p_{21}
y_2	p_{12}	p_{22}
y_3	p_{13}	p_{23}

Определить условный закон распределения дискретной случайной величины X при условии, что дискретная случайная величина Y приняла значение y_2 . Найти условные математическое ожидание $M[X/Y = y_2]$ и дисперсию $D[X/Y = y_2]$.

Исходные данные к задачам:

№№ задачи	P_{11}	P_{21}	P_{12}	P_{22}	P_{13}	P_{23}
16	0,1	0,15	0,2	0,25	0,25	0,05
17	0,25	0,25	0,1	0,2	0,2	0,05
18	0,1	0,2	0,3	0,05	0,05	0,3
19	0,3	0,05	0,3	0,15	0,1	0,1
20	0,2	0,1	0,05	0,25	0,25	0,15

Дополнительные задачи для самостоятельного решения: сборник задач [7] Ч.2, стр.137-150.

Вопросы для самопроверки.

1. Что называется системой случайных величин? Привести примеры системы случайных величин.
2. Дать определение функции распределения системы двух случайных величин и указать её свойства.
3. Дать определение плотности вероятностей системы двух случайных величин и перечислить свойства этой функции.
4. Как находится вероятность попадания системы случайных величин в заданную область?
5. Как выражается плотность вероятностей каждой случайной величины, входящей в систему через плотность вероятностей системы?
6. Дать определение условных плотностей вероятностей системы случайных величин и указать, как они связаны с плотностями распределения системы и каждой случайной величины, входящей в систему.
7. Какие две величины называются независимыми? зависимыми?
8. Запишите необходимое и достаточное условие независимости двух случайных величин.

9. Что называется корреляционным моментом? коэффициентом корреляции двух случайных величин? Указать область изменения значений коэффициентов корреляции.
10. Определить понятия условных математических ожиданий и дисперсии системы двух случайных величин.
11. Что такое линии регрессии системы двух случайных величин?
12. Чему равен коэффициент корреляции системы двух случайных величин?
13. Какие случайные величины называются некоррелированными?
14. Следует ли в общем случае из некоррелированности независимость случайных величин?
15. Какие числовые характеристики могут охарактеризовать систему нескольких случайных величин.
16. Что называют корреляционной и нормированной корреляционной матрицей системы нескольких случайных величин?
17. Записать выражение плотности вероятностей нормально распределенной системы двух непрерывных случайных величин..
18. Какое простое условие независимости двух случайных величин будет у нормально распределенной системы?
19. Привести формулу для вероятности попадания в заданный прямоугольник со сторонами, параллельным осям координат, для нормально распределенной системы.

Тема 15. Регрессионный анализ

1.

Предположение о линейной модели записывается формулой:

- $y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$
- $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_{n+1}x_1x_2 + a_{n+2}x_1x_3 + \dots + a_{2n-1}x_1x_n + \dots + a_mx_{n-1}x_n$
- $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_{n+1}x_1^2 + a_{n+2}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_n^2 + a_{2n+1}x_1x_2 + a_{2n+2}x_1x_3 + \dots + a_{3n-1}x_1x_n + \dots + a_mx_{n-1}x_n,$

2.

В соответствии с методом наименьших квадратов в качестве оценки параметров a_i модели $y = \sum_{i=0}^m a_i f_i(x)$ выбираются эффективные оценки \bar{a}_i , которые удовлетворяют условию:

- $S^2(a) = \sum_{j=1}^N \left(\bar{y}^j - \sum_{i=0}^m \bar{a}_i f_i(x^j) \right) \rightarrow \min$
- $S^2(a) = \sum_{j=1}^N \left(\bar{y}^j - \sum_{i=0}^m \bar{a}_i f_i(x^j) \right)^2 \rightarrow \min$
- $S^2(a) = \sum_{j=1}^N \left(\bar{y}^j - \sum_{i=0}^m \bar{a}_i f_i(x^j) \right)^2 \rightarrow \max$

Список литературы

а) основная литература

1. Кожевников Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика. М., Машиностроение, 2002.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., Высшая школа, 2005.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М., Высшая школа, 2005.
4. Роднищев Н.Е. Курс теории вероятностей и математической статистики. Казань, КГТУ, 2007.
5. Кожевников Ю.В. Введение в математическую статистику. Компьютерный учебник. Казань, КГТУ, 2007.
6. Медведева С.Н. Методы статистических решений в компьютерных технологиях. Учебное пособие. Казань, КГТУ, 2004.
7. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей, математической статистике. М., Высшая школа, 2005.

б) дополнительная литература

1. Ватутин В.А., Ивченко Г.И., Медведев В.П. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах. Учебное пособие для вузов. М., Дрофа, 2003.
2. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. М., Наука, 1983.