I Городская молодёжная научная конференция

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ, ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНЫЕ И СОЦИАЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ СОВРЕМЕННОГО РАЗВИТИЯ НАУКИ, ТЕХНИКИ И ОБЩЕСТВА

МАТЕРИАЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ

Казань, 27 мая 2021 г.

Казань 2021

Министерство науки и высшего образования РФ

Казанский национальный исследовательский технический
университет им. А.Н. Туполева-КАИ (КНИТУ-КАИ)

I Городская молодёжная научная конференция

«Физико-математические, естественно-научные и социальные аспекты современного развития науки, техники и общества»

МАТЕРИАЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ

Казань, 27 мая 2021 г.

Казань 2021

УДК 004:621.3:51
ББК 32.81:31.2:22.1
Ф 50

Ф50 Физико-математические, естественно-научные и социальные аспекты современного развития науки, техники и общества: материалы I Городской молодёжной научной конференции. Казань, 27 мая 2021 г. – Казань: изд-во ИП Сагиева А.Р., 2021. – 79 с.

ISBN 978-5-6045150-5-1

В сборнике приведены доклады, представленные на I Городской молодежной научной конференции "Физико-математические, естественно-научные и социальные аспекты современного развития науки, техники и общества", посвященные задачам математики в инженерных расчетах, социальным аспектам математики, истории математики.

Материалы докладов публикуются в авторской редакции.

Ответственность за аутентичность и точность имен, названий и иных сведений, а также за соблюдение законов об интеллектуальной собственности несут авторы публикуемых материалов.

Мнение редакционной коллегии может не совпадать как с точкой зрения авторов на проблему, так и в отношении стилистики излагаемых материалов.

УДК 004:621.3:51
ББК 32.81:31.2:22.1

ISBN 978-5-6045150-5-1

УДК 004.932

РОБОТИЗИРОВАННЫЙ ЗАХВАТ ОБЪЕКТОВ ИЗВЕСТНОЙ ФОРМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОНОКУЛЯРНОЙ КАМЕРЫ

Абдуллов Т.С., Мухаметов А.Н.

abdullov.1996@mail.ru

Научный руководитель: З.Я. Якупов, канд. физ.-мат. наук., доц.

(Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева –КАИ, Казань)

Аннотация

В работе рассмотрен один из способов решения задачи захвата роботом объектов с использованием монокулярной камеры. Поднимается вопрос перспективности подхода и описываются его преимущества и недостатки. Приведены результаты работы алгоритма.

Введение

Роботизированный захват объектов из неотсортированной кучи – это одна из основных задач робототехники. Классический подход к решению задачи является построение облака точек с использованием 3D сенсоров и последующий его анализ. Очевидным преимуществом такого метода решения является его универсальность, но ключевыми недостатками подхода - это большое время обработки облака точек, требовательность к ресурсам и крайне высокая цена на 3D сенсоры. Специализируя и подтачивая решение к конкретной задачи иногда удаётся лишь побороть проблемы со временем обработки данных и требовательностью к вычислительным ресурсам.

В работе рассматривается решение задачи по захвату маленьких объектов известной геометрической формы и текстуры. Данный метод требует небольших вычислительных мощностей, недорогого и доступного оборудования. Рассматриваемый подход даёт высокую точность, но требует небольших модификации в целой системе и ограничений на форму и поверхность объектов. Объекты имеют прямоугольную форму с высотой 10 мм и шириной 20 мм, а толщина -3 мм. В проведённом исследовании было использовано следующее оборудование: камера Basler, робот-манипулятор A12 компании Eidos-Robotics, компьютер с процессором Intel Core i3, ArUco-маркеры.

Описание подхода

Для реализации системы необходимо: параллельное расположение рабочей плоскости и камеры, обозначение границ рабочей области с помощью ArUco маркеров, равномерное нанесение объектов на данную поверхность в один слой. Для рассматриваемого случая необходимо что бы объект имел прямоугольную форму и известную текстуру. Процесс захвата объектов роботом состоит из следующих этапов:

1. Поиск рабочей области, соотнести систему координат робота-манипулятора с системой координат рабочей области;
2. поиск объектов и определение координат точек захвата;
3. перевод координат точек захвата из системы координат изображения в физическую систему координат рабочей области;
4. повтор пунктов 2 и 3 пока не закончатся объекты.

Выделение рабочей области и связь с роботом

Границы рабочей области определяются прямоугольным расположением ArUco маркеров (рис. 1). Рабочая область представляет собой прямоугольник, который образован внутренними углами соответствующего ArUco маркера (рис. 2).

Связь систем координат робота и рабочей области осуществляется с помощью калибровки робота по трём точкам.

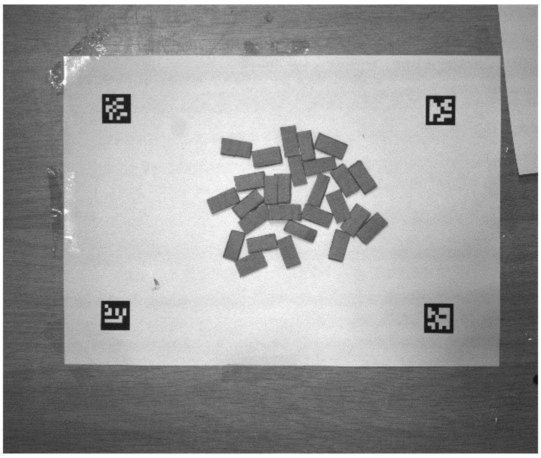


Рис. 1. Прямоугольное расположение маркеров

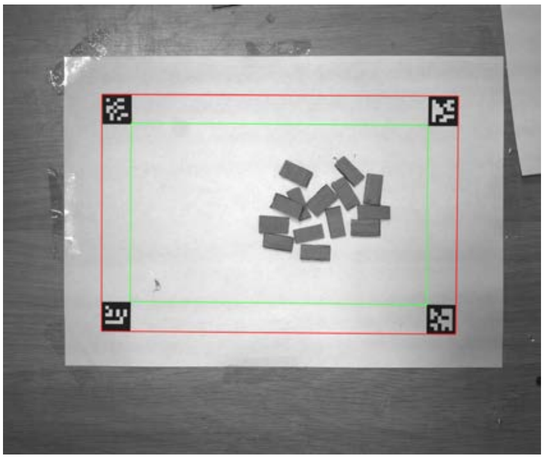


Рис. 2. Рабочая область – внутренний прямоугольник

Выделение и захват объектов

Для захвата объектов необходимо выделить их из общей кучи. Для этого используется алгоритм водораздела [1] для осуществления сегментации. Для работы алгоритма водораздела необходимо исходное изображение и метки на этом изображении откуда необходимо начать "заливку". Процесс вычисления меток начинается с фильтрации изображения медианным и билатеральным фильтрами. Сглаженное изображение бинаризируется по Брэдли [2] и на нём вычисляются границы с использованием детектора границ Кани [3]. Полученные изображения подвергается морфологическому открытию с ядром 2 на 2 (рис 3-4).

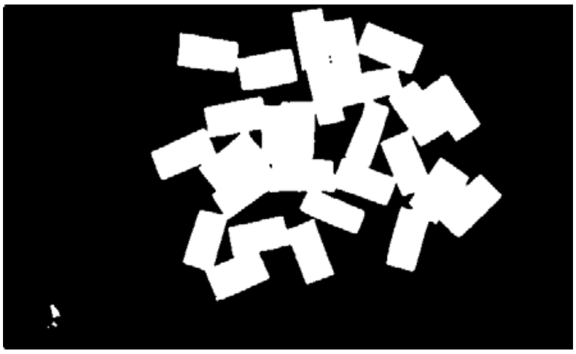


Рис. 3. Бинаризация и морфологическая операция

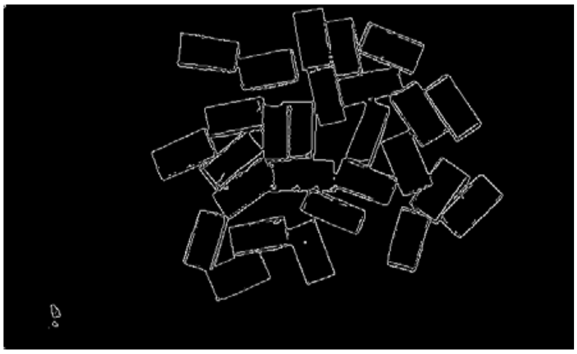


Рис. 4. Выделение границ детектором границ Кани

Далее вычисляется выражение вида (1)

$$Out = A \& (!B)$$

где A-бинарная маска исходного изображения, B - найденные границы на исходном изображении.

На вычисленному изображении Out осуществляется поиск всех связные компоненты [4]. Найденные компоненты будут являться метками для алгоритма водораздела.

Далее проводиться анализ карты сегментации. Для каждого найденного объекта находиться соответствующий контур и аппроксимируется многоугольником с использованием алгоритма Рамера – Дугласа – Пекера [5] с параметром $epsilon = 0.05 * LengthContour$. Затем исключаются объекты, многоугольник которых не имеет четырёх углов. Для оставшихся объектов вычисляется метрика IoU (2) между многоугольником и контуром соответствующего объекта и фильтруется с порогом 0.9.

$$IoU = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$$

Для оставшихся объектов находятся прямоугольники с минимальной площадью и вычисляются соотношения их больших сторон к меньшим для проверки отклонения от истинного значения соотношения сторон объекта.

После такой фильтрации остаются объекты-претенденты на захват. Выбирается такой объект, у которого значение IoU максимальное. Что бы верно определить ориентацию вакуумного захвата и места захвата вычисляется центр массы и главные компоненты контура (рис. 5 г).

Перевод координат точек захвата из системы координат изображения в систему координат рабочей области.

Центр тяжести, который был вычислен на предыдущем этапе, является точкой захвата объекта, но представлен в системы координат изображения. Для перевода в систему координат рабочей области вычисляем отношение физических сторон ArUco маркеров к сторонам соответствующих маркеров на изображении. Вычисленные значения усредняются и получаем коэффициент для перевода из системы координат изображения в систему координат рабочей области.

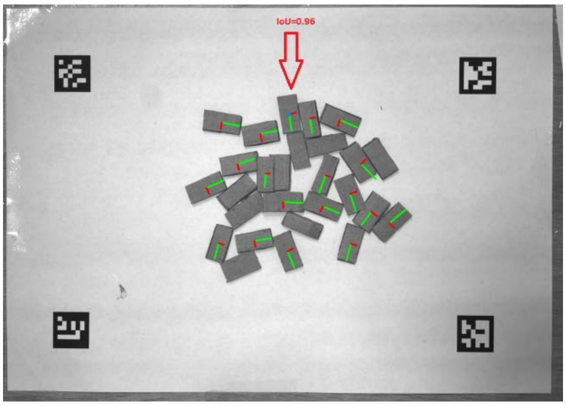
Результаты экспериментов

Для проверки точности использовался шаблон с напечатанными объектами и известными координатами объектов в системе координат рабочей области. Результаты измерений приведены в таблице 1.

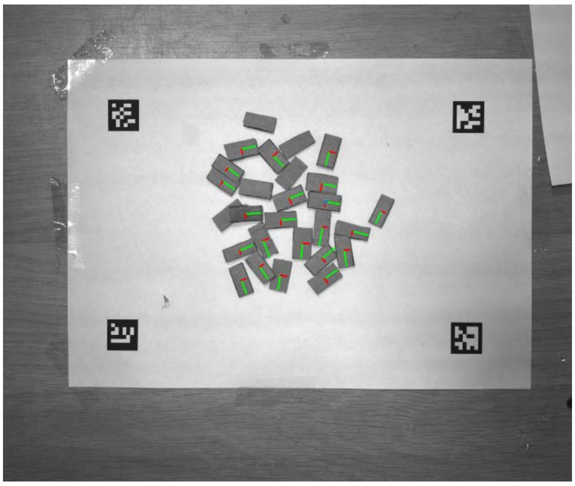
Таблица 1

	Координаты объектов, мм	Вычисленные координаты, мм	Расстояние, мм
1	14.2404, 15.9246	14.5066, 16.0499	0.2942
2	94.91, 31.9565	94.3508, 32.1268	0,5845
3	166.163,101.1371	165.503, 101.162	0,6605

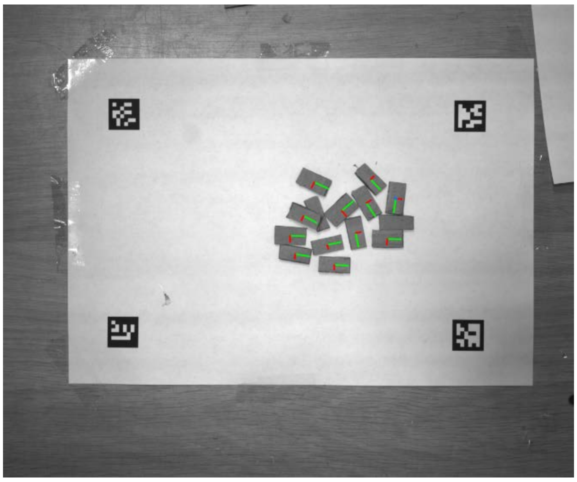
На рисунках 5 а-г демонстрируются результаты работы алгоритма.



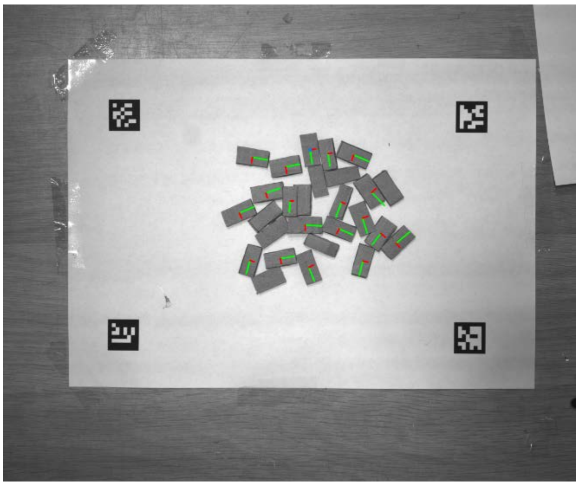
(а)



(б)



(в)



(г)

Рис. 5. Результаты работы алгоритма

Заключение

В работе исследовался один из подходов к решению классической задачи робототехники – захвату объекта. В процессе исследования был реализован алгоритм, который осуществлял поиск и захват объектов. Точность алгоритма составляет 0,6604 мм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Fernand Meyer. Color image segmentation. In *Image Processing and its Applications, 1992., International Conference on*, pages 303–306. IET, 1992.

2. Derek Bradley, Gerhard Roth. Journal of Graphics Tools. *Adaptive thresholding using the integral image*, 2007

3. John Canny. A computational approach to edge detection. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, (6):679–698, 198

4. Kesheng Wu, Ekow Otoo, and Kenji Suzuki. Optimizing two-pass connected-component labeling algorithms. *Pattern Analysis and Applications*, 12(2):117–135, Jun 2009.

5. David Douglas and Thomas Peucker, «Algorithms for the reduction of the number of points required to represent a digitized line or its caricature», The Canadian Cartographer 10(2), 112—122 (1973)

GRASP DETECTION OF OBJECTS OF KNOW SHAPE USING MONOCULAR CAMERA

Abdullov T., Mukhametov A.

abdullov.1996@mail.ru

Supervisor: Zufar Yakupov, candidate of Physico-Mathematical Sciences, associate professor

(*Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev – KAI, Kazan*)

Abstract

The paper considers one of the ways to solve the problem of grasping objects by a robot using a monocular camera. The question of the perspective of the approach is raised and its advantages and disadvantages are described. The results of the algorithm are presented.

УДК 004

ПРИЕМНОЕ УСТРОЙСТВО НА ПЛИС

А.Р. Акмалова, Д.П. Данилаев

kvadratischka@gmail.com, d.danilaev@mail.ru

Научный руководитель: Данилаев Д.П., д.т.н., доцент.

(Казанский национальный исследовательский технический университет им.А.Н.Туполева – КНИТУ-КАИ, г.Казань)

Аннотация

В настоящее время радиоприемные устройства и модули выполняются в интегральном исполнении, и являются компактными и относительно простыми для применения. Тем не менее, возникает задача проектирования радиоприемных устройств на ПЛИС для реализации. Такая задача связана с созданием либо мультифункциональных устройств на одной платформе, либо устройств, в которых основные технические параметры могут быть программно настроены и/или изменены. При этом возникает проблема обработки высокочастотных принятых сигналов, что ведет к росту требований к техническим характеристикам ПЛИС, а значит и стоимости таких устройств. В большинстве примеров практической реализации рассматриваются низкочастотные приемные устройства. В докладе рассмотрен общий, инженерный подход проектирования радиоприемного устройства на ПЛИС.

Научные исследования проведены при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках исполнения обязательств по Соглашению номер 075-03-2020-051/3 от 09.06.2020 (номер темы fzsu-2020-0021)

1. Введение

Программируемые логические интегральные схемы (ПЛИС) формируют основу современной элементной базы электроники и постепенно вытесняют другие блоки. В настоящее время существует возможность реализации на основе ПЛИС микропроцессорных ядер, цифровых сигнальных процессоров, портов ввода/вывода и много другого. Одним из достоинств такого подхода является объединение на одной платформе устройств с разным функционалом при наиболее рациональном распределении программно-аппаратных ресурсов между ними. Главным достоинством таких устройств является то, что схему легко перепрограммировать, если на этапе ее апробации и эксплуатации будет выявлена ошибка. Задать необходимую структуру устройства можно в отладочной среде в виде принципиальной схемы, или в текстовом формате на специальных языках программирования: Verilog, VHDL, AHDL и др.

Основное внимание различных авторов уделяется либо разработке отдельных устройств цифровой обработки сигналов [1, 2], либо практической реализации относительно простых, низкочастотных радиоприёмных устройств [3]. Проектирование радиоприемника ВЧ сигналов на ПЛИС полезно для создания мультифункционального, мультистандартного устройства, например, приемника SDR. Цель работы – анализ возможности создания устройства приема высокочастотных сигналов на ПЛИС, без ограничений на требования стандартов.

2. Обоснование структурной схемы

В структуре радиоприемного устройства, на ПЛИС может быть реализован блок цифровой обработки сигналов (включая операции декодирования, демодуляции, демультиплексирования и пр.). Тогда от первых узлов приемника требуется принять, усилить и преобразовать радиосигнал в форму удобную для дальнейшей оцифровки и цифровой обработке. Аналого-цифровой преобразователь (АЦП) также может быть реализован на ПЛИС. Однако такая реализация требует существенных аппаратных ресурсов, например, регистров памяти, портов ввода/вывода и прочее. В структуре радиоприемника к АЦП должны быть предъявлены жесткие требования по шумам, частоте дискретизации, разрядности и пр. [1, 4]. Эти требования естественно транслируются на ПЛИС. Как правило это требует больших финансовых и временных затрат, поэтому для облегчения задачи оцифровку сигнала предлагается выполнять на внешней АЦП. Однако именно параметры радиосигнала будут определять технические характеристики выбираемой ПЛИС.

Анализ структурных схем [5], позволяет нам предложить свою схему, в которую для увеличения частоты приема включен малошумящий усилитель. Структурная схема может включать квадратурный или комплексный смеситель, обеспечивающий подавление зеркального канала приема. Это позволяет избавиться от входной цепи приемника. В предложенной структуре в качестве примера приведена схема квадратурного смесителя с ненулевой промежуточной частотой.

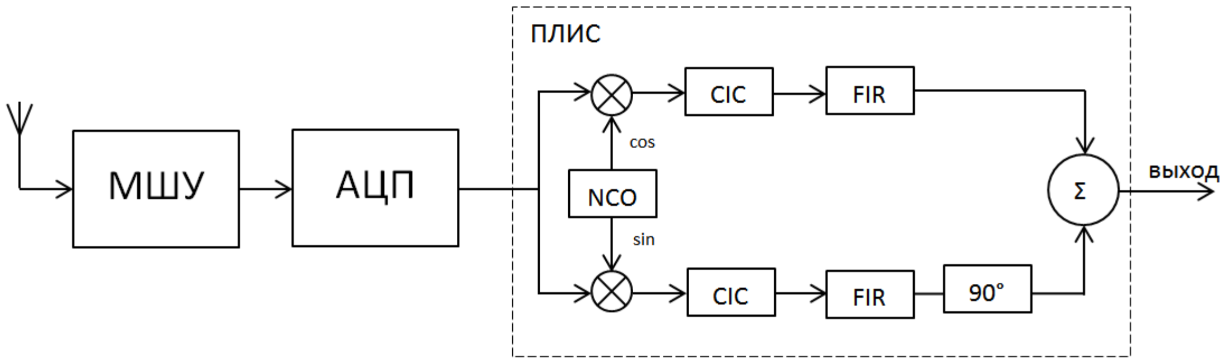


Рис.1. Общая структура приемного устройства на ПЛИС

Представленная структура позволяет на основе известных подходов к проектированию фильтров, демодуляторов и других блоков перейти к формированию программно-аппаратной реализации приемника [1, 2].

3. Заключение

На основе проведенного анализа приведена перспективная структура приемника высокочастотных сигналов на ПЛИС, в которую включен квадратурный смеситель, настроенный на ненулевую промежуточную частоту. Он обеспечивает подавление зеркального канала приема, благодаря чему из структуры исключена входная цепь [1]. Также это позволяет обеспечить перестройку такого приемника по диапазону частот, что важно для реализации мультистандартного режима работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Потехин Д.С., Тарасов И.Е.* Разработка систем цифровой обработки сигналов на базе ПЛИС. – М.: Горячая линия – Телеком, 2017. – 248 с.

2. *Тарасов И.Е.* Разработка цифровых устройств на основе ПЛИС Xilinx с применением языка VHDL. – М.: Горячая линия – Телеком, 2018. – 252 с.

3. Простой SDR приёмник на ПЛИС [Электронный ресурс] // Портал «Хабр». URL: https://habr.com/ru/post/204310/ (Доступ свободный)

4. *Danilaev D.P.* Analog-to-Digital converter selection for digital receiver // Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications, SYNCHROINFO 2019. 2019. С. 8813931.

5. *Галкин В.А.* Основы программно-конфигурируемого радио. – М.: Горячая линия – Телеком, 2016. – 372 с.

УДК 621.373.9

АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНОСТИ СИГНАЛОВ ГЕНЕРАТОРА КИЯШКО-ПИКОВСКОГО В ХАОТИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ

Бизанов В.А. – студент,
Казанский Национальный Исследовательский Технический Университет имени А.Н. Туполева - КАИ
Логинов С.С., д.т.н
КНИТУ-КАИ им. А.Н. Туполева
Россия, г. Казань

Аннотация. В данной работе анализируется стационарность процесса, сформированном генератором Кияшко-Пиковского при внешнем воздействии в хаотическом режиме.

Ключевые слова. Хаотические колебания, стационарность, двумерная плотность вероятности, генератор Кияшко-Пиковского.

KIYASHKO PIKOVSKY GENERATOR CHAOTIC SIGNALS STATIONARITY ANALYSIS

V. Bizanov - student,
Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev - KAI
S. Loginov, Dr.Tech.Sc.
KNRTU-KAI named after A.N. Tupolev
Russia, Kazan

Abstract. In this work analysis of the stationarity of the process formed by the Duffing oscillator under external influence in a chaotic mode was done.

Keywords. Generator Kiyashko Pikovsky, stationarity, two-dimensional probability density.

1. Генератор Кияшко Пиковского

Генератор Кияшко-Пиковского или генератор случайных процессов - по-видимому, исторически первый пример простой электронной схемы, в которой целенаправленно был реализован режим хаотических автоколебаний, предложен сотрудниками Института прикладной физики РАН в Нижнем Новгороде в 1978 г.

Генератор описывается следующей системой уравнений

$$\begin{cases} x = 2*H*x + y - G*z \\ y = -x \\ E*z = x - f(z) \end{cases}$$
(1)

$f(z)=8.952*z - 22*z^2 + 14.408*z^3$

В проделанной работе были выбраны следующие коэффициенты:

$$\begin{cases} x = 2*0.1*x + y - 0.85*z \\ y = -x \\ 0.2*z = x - 8.952*z - 22*z2 + 14.408*z3 \end{cases}$$
(2)

$f(z)=8.952*z - 22*z^2 + 14.408*z^3$

2. Моделирование.

Моделирование уравнения (1) было проведено с помощью численного решения уравнения Кияшко-Пиковского методом Эйлера в программной среде Matlab. Ограничениями такого решения являются: накопление ошибки, связанного принципом работы самого метода, точность расчётов на компьютере.

Для исследования было взято 5000 реализаций на отрезке [0:500] с шагом 0.01 с начальными условиями $H = 0.1$ $G = 0.85$ $E = 0.2$. Реализации были сгенерированы варьированием начальными условиями в пределах ± [0.05:0.3].

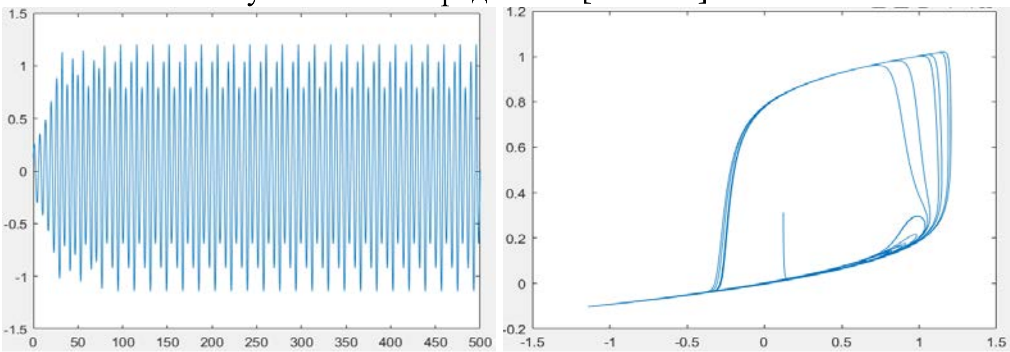


Рис.1 Временна реализация, фазовый портрет

3. Анализ на стационарность.

Процесс является стационарным в узком смысле, если его статистические свойства не меняются со временем. Поэтому в работе получены двумерные плотности вероятности с разными фиксированными сдвигами $\Delta t = t2 - t1$. Пример схожих распределений приведён на Рис 2.

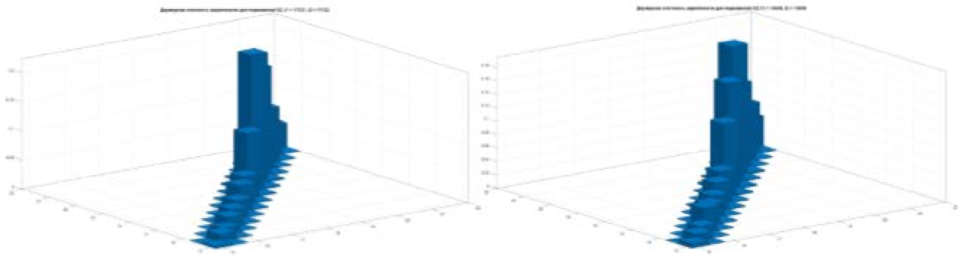


Рис.2 Двумерные плотности вероятности для сдвига $\Delta t = 13$

При небольших Δt плотности распределения крайне схожи, что говорит о возможности считать процесса стационарным в узком смысле.

Выводы.

В ходе проведённых исследований была определена стационарность процессов, порождаемых генератором Кияшко-Пиковского при заданных в данной работе коэффициентах и начальных условиях. Это позволяет применять все преимущества методов статистического анализа для стационарных процессов в пределах рассмотренных параметров системы Кияшко-Пиковского.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника – 1-е изд., – Москва: Советское радио, 1966. – 219с
2. Кияшко С.В., Пиковский А.С., Рабинович М.И. Патент Генератор случайных сигналов -СССР: 1979 год.
3. Солдатов О.Ф. Исследование генератора Кияшко-Пиковского-Рабиновича-Саратов 2016 год.

УДК 517.957

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТВО ПРИМЕНЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ПОРЯКОВ

Бирюков Н.Б.

nik.biryukov@bk.ru

Научный руководитель: А. И. Федотов, доктор физико-математических наук

(Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, - КАИ» (КНИТУ-КАИ),Казань)

Аннотация: в данной работе предполагается определение оператора дробного дифференцирования функций, позволяющее, в частности, сделать порядок производной переменным.

1. Постановка задачи

Задача обобщения понятия производной на случай производной дробного порядка ставились с самого начала существования дифференциального исчисления. Исчерпывающую информацию о различных определениях можно найти в монографии [1] и обзорной работе [2]. В каждом определении имеются, при наличии положительных свойств, недостатки. Именно для их преодоления и вводятся новые определения. Так в 2014 году в работе [3] определена «удобная производная", которая нашла уже много поклонников и последователей

Оператор дробного дифференцирования должен считаться корректно определенным, если при натуральных значениях порядка дифференцирования он совпадает с оператором обычного целочисленного дифференцирования. Имеется система операторов целочисленного дифференцирования, требуется связать эти «точки» оператором, допускающим дифференцирование дробного действительного порядка. И, так же как в случае интерполирования, когда имеется сколь угодно много кривых, соединяющих заданные точки, имеется бесконечно много способов определить оператор дробного дифференцирования, совпадающий при целых значениях порядка дифференцирования с обычным оператором дифференцирования.

2. Оператор дифференцирования дробного порядка

Будем, как обычно, обозначать $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0$ множество натуральных чисел, дополненных нулем, $\mathbb{Z}$ множество целых чисел, $\mathbb{R}$ множество действительных чисел, а $\mathbb{R}_+$ множество неотрицательных действительных чисел.

Обозначим C множество непрерывных на [0,1] функций, а C^m, $m \in \mathbb{N}$, множество m раз непрерывно дифференцируемых на [0,1] функций. Оператор дифференцирования порядка $\nu \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq \nu \leq m$, определенный на C^m обозначим D^ν. При $\nu = 0$ оператор D^ν будет совпадать с тождественным оператором $I = D^0$.

Зафиксируем $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha < m$, и определим на X оператор дробного дифференцирования порядка α

$$D^\alpha = (1 - \{\alpha\})D^{[\alpha]} + \{\alpha\}D^{[\alpha]+1} \qquad (1)$$

Здесь $[\alpha]$ обозначает целую часть, а $\{\alpha\}$ дробную часть числа α. При таком определении оператор (1) будет совпадать с обычным оператором дифференцирования при $\alpha \in \mathbb{N}_0$, $\alpha < m$, поэтому это определение должно считаться корректным.

3. Оператор дифференцирования переменного порядка

Обозначим теперь $\alpha(t), t \in [0,1]$, непрерывную функцию такую, что для некоторого числа $\nu \in \mathbb{N}_0$, $\alpha(t) < m$

$$\nu \leq \alpha(t) < \nu + 1, t \in [0,1].$$

Оператором дифференцирования переменного порядка $\alpha(t)$ назовем оператор

$$D^{\alpha(t)} = (1 - \{\alpha(t)\})D^\nu + \{\alpha(t)\}D^{\nu+1} \qquad (2)$$

И вновь, при $\alpha(t) = \nu \in \mathbb{N}_0$ оператор (2) будет совпадать с обычным оператором дифференцирования D^{ν}, поэтому и это определение должно считаться корректным.

Возьмем функцию

$$x(t) = t^2 + sin^2(t), \qquad t \in [0,1],$$

и построим графики (рисунок 1) этой функции и ее производных дробей и переменных

$\alpha_0(t) = \frac{1}{2}t^2, \qquad 0 \le \alpha_0(t) < 1, \qquad \alpha_1(t) = \frac{3}{2}, \qquad 1 \le \alpha_1(t) < 2.$

По определениям (1), (2), учитывая, что

$$x'(t) = 2t + \sin(2t), \quad x''(t) = 2 + 2\cos(2t),$$

выразим явно производные переменных и дробных порядков

$$x^{(\alpha_1(t))}(t) = \frac{1}{2}(2 + 2\cos(2t)) + \frac{1}{2}(2t + \sin(2t)),$$

$$x^{(\alpha_0(t))}(t) = \frac{1}{2}t^2(2t + \sin(2t)) + (1 - \frac{1}{2}t^2)(t^2 + sin^2(t)),$$

Обозначим Y множество непрерывных на [0,1] функций. С нормой

$$\|y\|\mathrm{Y} = \max_{0\le t\le 1}|y(t)|, y \in Y,$$

множество Y становится банаховым пространством.

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}_0$ и обозначим X множество m раз непрерывно дифференцируемых на [0,1] функций, удовлетворяющих условиям

$x^{(\nu)}(0) = 0, \quad 0 \le \nu \le \mathrm{m} - 1.$

С нормой

$\|x\|X = \max_{0\le t\le 1}\left|x^{(m)}(t)\right|, x \in X,$

множество X также становится банаховым пространством.

Оператор дифференцирования порядка $\nu \in \mathbb{N}_0$, $0 \le \nu \le m$, определенный на X обозначим D^{ν}. При $\nu = 0$ оператор D^{ν} будет совпадать с тождественным оператором

$I = D^0$.

4. Задача Коши

Рассмотрим задачу Коши:

$$(t^2+1)x^{\alpha_1(t)}(t) + t^3 x^{\alpha_0(t)}(t) + \int_0^1 (t-\tau)x^{\beta_1(\tau)}(\tau)d\tau + \int_0^1 (t-\tau^2)x^{\beta_0(\tau)}(\tau)d\tau = y(t), \tag{3}$$

$t = [0,1].$

$$x(0) = 0, x'(0) = 0, \tag{4}$$

с производными искомой функции переменных и дробных порядков

$\alpha_0(t) = \dfrac{1}{2}t^2, \qquad 0 \le \alpha_0(t) < 1, \qquad \alpha_1(t) = \dfrac{3}{2}, \qquad 1 \le \alpha_1(t) < 2,$

По определениям (1), (2) производных переменных и дробных порядков найдем

$$x^{\alpha_1(t)}(t) = \frac{1}{2}x''(t) + \frac{1}{2}x'(t), \qquad x^{\alpha_1(t)}(t) = \frac{1}{2}t^2 x'(t) + (1 - \frac{1}{2}t^2)x(t), \qquad t \in [0,1], \tag{5}$$

Заменяя производные переменных и дробных порядков их выражениями (5), перейдем от уравнения (3) к равносильному ему уравнению

$$(t^2+1)x''(t) + (1+t^5)x'(t) + (2t^3 - t^5)x(t) + \int_0^1 (t-\tau)(\tau+1)x''(\tau)d\tau + \int_0^1 (2t - (t+1)\tau)x'(\tau)d\tau + \int_0^1 (t-\tau^2)x(\tau)d\tau = 2\,y(t), \tag{6}$$

$$t \in [0,1].$$

Подставляя в уравнение (6) функцию $x(t) = t^2 + sin^2(t)$, получим

$$2y(t) = \frac{7}{15} + 5\frac{17}{30}t + 2t^5 + 2t^6 - t^7 + \left(1\frac{1}{2} - 1\frac{5}{8}\right)\sin 2 - \frac{3}{4}\cos 2 + (4t^2 + 2t^3 - t^5)\sin^2 t + 2\cos 2t + (1 + t^5)\sin 2t. \quad (7)$$

Для уравнения (3) с правой частью (7) функция $x(t) = t^2 + sin^2(t)$ будет точным решением.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Приближенное решение уравнения (3) будем искать в виде вектора значений $X_n = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ искомой функции в узлах сетки $t_k = k/n, k = 0,1, \dots, n$. Значения производных искомой функции в узлах сетки будем приближать простейшими разностями

$x''(t_k) \sim n^2(x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}),\ k = 1,2 \dots$

Интегралы аппроксимируем квадратурными формулами трапеций

$$\int_0^1 (t_k - \tau)(\tau + 1)x''(\tau)d\tau \sim n\sum_{l=1}^{n-1}(t_k - t_l)(t_l + 1)(x_l - 2x_{l-1} + x_{l-2}) + \frac{n}{2}(x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}),$$

$$\int_0^1 (2\,t_k - (t_k + 1)\tau)x'(\tau)d\tau \sim n\sum_{l=1}^{n-1}(2t_k - (t_k + 1)t_l)(t_l + 1)(x_l - x_{l-1}) + \frac{1}{2}(t_k - 1)(x_n - x_{n-1}),$$

$$\int_0^1 (T_k - \tau^2)x(\tau)d\tau \sim n\sum_{l=1}^{n-1}(t_k - t_l{}^2)x_l + \frac{1}{2n}(t_k - 1)x_n.$$

Заменяя в уравнении (6) производные искомой функции конечными разностями, а интегралы квадратурными суммами, получим систему уравнений

$$(t_k^2 + 1)n^2(x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}) + (1 + t_k^2)n(x_k - x_{k-1}) + \left(2t_k^2 - t_k^5\right)x_k + n\sum_{l=1}^{n-1}(t_k - t_l)(x_l - 2x_{l-1} + x_{l-2}) + \frac{n}{2}(x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}) + \sum_{l=1}^{n-1}(2t_k - (t_k + 1)t_l)(x_l - x_{l-1}) + \frac{1}{2}(t_k - 1)(x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n-1}(t_k - t_l^2)x_l + \frac{1}{2n}(t_k - 1)x_n = \frac{7}{15} + 5\frac{17}{30}t_k + 2t_k^5 + 2t_k^6 - t_k^7 + \left(1\frac{1}{2} - 1\frac{5}{8}\right)\sin 2 - \frac{3}{4}\cos 2 + \left(4t_k^2 + 2t_k^3 - t_k^5\right)\sin^2 t_k + 2\cos 2t_k + (1 + t_k^5)\sin 2t_k, \quad (8)$$

$$k = 1,2, \dots, n, \qquad x_{-1} = x_0 = 0,$$

квадратурно-разностного метода решения задачи (3), (4).

В таблице 1 приведены результаты решений системы уравнений (8). В первой графе указано число узлов n, во второй – погрешность приближенного решения $\|x_n^* - p_n x^*\|x_n$, в третьей и четвертой – погрешности разностей ε_n и квадратур δ_n соответственно.

n	$\|x_n^* - p_n x^*\|x_n$	ε_n	δ_n
10	0.3424108	0.3972079	0.393998
20	0.16654387	0.1997317	0.199488
30	0.1065912	0.1333025	0.133253
40	0.0788687	0.1004065	0.999968
50	0.0666081	0.0804866	0.080014
60	0.1613689	0.0674291	0.066683
70	0.0549078	0.0580792	0.057159

Таб. 1: Оценки погрешностей приближенного решения задачи (1), (2) разностей и квадратур.

Результаты расчетов показывают, что метод сходится и погрешность приближенного решения зависит от погрешностей используемых формул приближения производных и интегралов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Самко С. Г.*, Калбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

2. *Ross B.* The developmrnt of fraction calculus 1695-1900 // Historia mathematics. 4. 1977. P. 75-89.

3. *Khalil R.*, Al Horani M., Yousef A., Sababhehb M. A new definition of fractional derivative // Journal of Computational and Applied Mathematics. 264. 2014. P. 65-70.

ПРИЛОЖЕНИЕ:

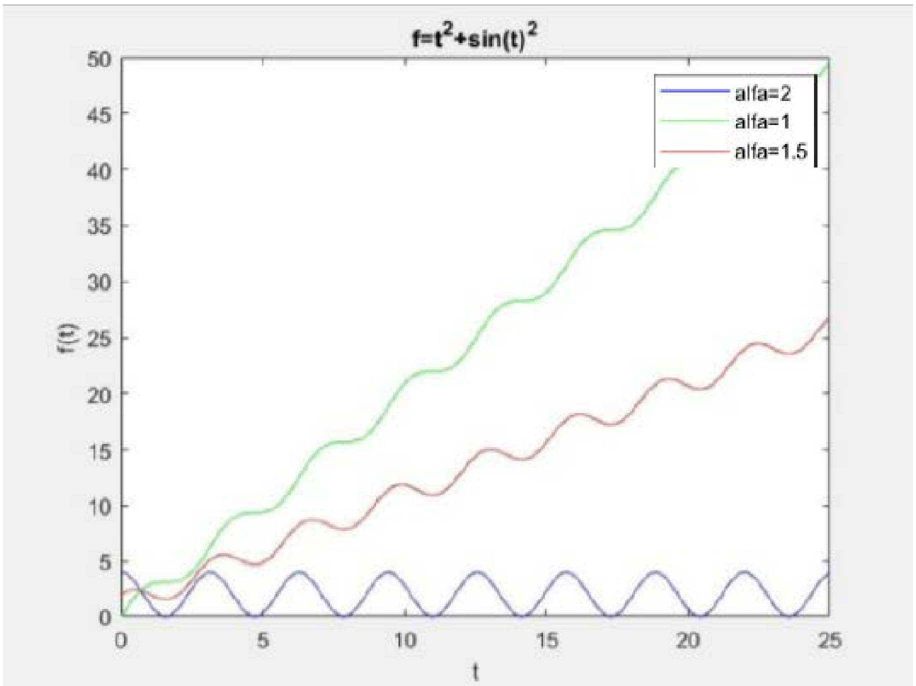


Рис. 1 Пример производной дробного порядка, alfa – порядок производной

VISUALIZATION OF THE RESULTS OF THE APPLICATION OF VARIABLE ORDER DIFFERENTIATION OPERATORSPIPES

Biryukov N.B.

nik.biryukov@bk.ru

Scientific supervisor: A. I. Fedotov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

(Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev - KAI, Kazan)

Abstract: In this paper, we propose a definition of the operator of fractional diferentiation of functions, which allows, in particular, to make the order of the derivative variable.

УДК 517.957

РЕШЕНИЕ ОДНОГО СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Волков И.А.
io-kallisto-v@mail.ru
Научный руководитель: Н.Т. Валишин, кандидат физико-математических наук, доцент
(Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ, г. Казань)

Рассматривается решение уравнения второго порядка в частных производных с краевыми условиями. Метод разделения переменных позволяет получить стационарное уравнение, которое имеет решение при определенных дискретных собственных значениях краевой задачи.

Рассмотрим уравнение второго порядка в частных производных:

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = 0, \qquad (1)$$

(где m принимает постоянные значения)
с заданными начальными

$$, V(x,t)\big|_{t=0} = V(x,0) = 0, \qquad (1а)$$

$$\left.\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{\partial V(x,0)}{\partial t} = \tilde{C}_1, \qquad (1б)$$

и граничными условиями

$$V(x,t)\big|_{x=0} = V(0,t) = 0, \qquad (1в)$$

$$\left.\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{\partial V(0,t)}{\partial x} = \tilde{C}_2. \qquad (1г)$$

Рассмотрим случай, при котором $\frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial x} = \vartheta$:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \vartheta^2 \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = 0, \qquad (2)$$

При подстановке в уравнение (2) заданных условий (1а)-(1г) получим:

$$V(x,t) = \frac{\vartheta \overline{C}_2 \overline{C}_1}{\omega^2} e^{\pm i(\frac{\omega}{\vartheta}x - \omega t)} = Ae^{\pm i(\frac{\omega}{\vartheta}x - \omega t)}. \qquad (3)$$

$$A = \frac{\vartheta\, \overline{C_1}\, \overline{C_2}}{\omega^2}.$$

Введём дополнительное ограничивающее условие:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = const\,. \qquad (4)$$

Тогда

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = \mp i A\omega e^{\pm i(\frac{\omega}{\vartheta}x - \omega t)} = const\,. \qquad (5)$$

Из уравнения (5) следует, что фаза может принимать только дискретные значения

$$\omega(\frac{x}{\vartheta}-t)=\frac{\pi}{2}+\pi n. \qquad (6)$$

Так как $\frac{x}{\vartheta}-t=C$, то равенство (6) принимает вид:

$\omega C=\frac{\pi}{2}+\pi n\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{2C}(1+2n)=\omega_0(1+2n)$, т.е. в уравнении (3) собственные частоты могут принять только определенные дискретные значения или

$$\omega_{n+1}-\omega_n=\Delta\omega_n=2\omega_0 \qquad (7)$$

Чтобы решить уравнение (1), воспользуемся методом разделения переменных. В результате волновая функция может быть представлена в виде произведения функций от одной переменной: $V(x,t)=\varphi(t)\psi(x)$.

Выражая собственную частоту через функции разделённых переменных, получим:

$$\frac{\ddot{\varphi}(t)}{\varphi^3(t)}=\frac{(\psi'(x))^2\psi''(x)}{m^2\psi(x)}=\omega^2 \qquad (8)$$

Стационарное уравнение в (8) принимает вид

$$\psi''(x)(\psi'(x))^2+\omega^2m^2\psi(x)=0 \qquad (9)$$

Введем новую переменную $\theta=\theta(\psi)$, такую, что $\psi'=\theta(\psi)$.

Тогда $\psi''=\theta'(\psi)\theta(\psi)$

В результате уравнение (9) принимает вид:

$$\theta^3\frac{d\theta}{d\psi}+\omega^2m^2\psi=0 \qquad (10)$$

Проинтегрировав уравнение (10), получим

$$\int\theta^3d\theta=\int-\omega^2m^2\psi d\psi \quad\Rightarrow\quad \theta^4=-2\omega^2m^2\psi^2+c_1\cdots\Rightarrow\theta=\sqrt[4]{-2\omega^2m^2\psi^2+c_1}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{d\psi}{dx}=\sqrt[4]{-2\omega^2m^2\psi^2+c_1}\Rightarrow\int\frac{d\psi}{\sqrt[4]{c_1-2\omega^2m^2\psi^2}}=x+c_2 \qquad (11)$$

Исходя из выражения (7), собственные частоты принимают отдельные дискретные значения. Надо отметить, что уравнение типа (1) появляется при моделировании траекторно-волнового движения объекта методом *V*-функции [1-9] для одномерного случая.

Из метода *V*-функции следует, что траекторное движение объекта, которое описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(x), \qquad (12)$$

где $x(t)=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ - вектор фазовых координат, $x\in R^n$, сопряжено волновым движением, удовлетворяющим уравнению

$$\frac{\partial^2V}{\partial t^2}-\dot{x}^TW\dot{x}=0,\quad W=\left[\frac{\partial^2V(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}\right] \qquad (13)$$

где $V(x,t)$ - однозначная, конечная, непрерывная, дважды непрерывно дифференцируемая по своим аргументам волновая функция (*V*-функция) ($x\in R^n, t\in T$).

Исходя из метода *V*-функции [10], начальные и граничные условия для уравнения (13), принимают следующий вид:

$$V(x,t)\big|_{t=0} = V(x,0) = 0 \quad (14)$$

$$V(x,t)\big|_{x=0} = V(0,t) = 0 \quad (15)$$

$$\left.\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{\partial V(x,0)}{\partial t} = const \quad (16)$$

$$\left.\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{\partial V(0,t)}{\partial x} = k^{-1}\dot{x}(t) = k^{-1} f(x=0). \quad (17)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Valishin N. T., Valishin F.T.* *V*-function method: some solutions of direct and inverse dynamics problems in a new statement// Latvian Journal of Physics and Technical Sciences 2019, N 1, pp.70-81.

2.*Valishin N. T.* To Physical Statement of a Controllability Problem. // Jour of Adv Research in Dynamical & Control Systems, Vol. 11, Special Issue-05, 2019, pp.1708-1713.

3.Valishin N., Moiseev S. A method of V-function: ultimate solution to the direct and inverse problems of dynamics for a hydrogen-like atom // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Vol 4, №5(88) (2017) pp.23-32

4. N T Valishin, A I Volkov, Z F Bildanova and V A Selivanova To continue the optical-mechanical analogy //Journal of Physics: Conference Series 1679 (2020) 022016

5. *Валишин Н.Т. Валишин Ф.Т., Моисеев С.А.* Траекторно-волновой подход к динамике электрона в атоме водорода. // Бутлеровские сообщения. Т.25.№5,2011г С.1-12

6. *Валишин Ф.Т., Валишин Н.Т.* Методологические горизонты казанской программы Н.Г.Четаева и продолжение оптико-механической аналогии. // Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева №1, 2008.

7. *Валишин Н.Т., Давыдов Н.В.* Метод V-функции: некоторые решения прямой задачи динамики в новой постановке. //Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева №1, 2008.

8. *Валишин Н.Т., Павлова К.Е., Давыдов Н.В.* Метод V-функции: к моделированию движения объекта в потенциальном поле сил. //Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева №3, 2009.

9. *Валишин Н.Т., Павлова К.Е., Халилова А.И.* Метод V-функции: решение прямой и обратной задачи динамики при движении объекта в центральном поле сил. //Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева №3, 2010.

10. *Валишин Н.Т.* Вариационный принцип и задачи траекторно-волновой динамики. // Вестник КНИТУ-КАИ – 2014. №2. С.181-190.

11. *Валишин Н.Т.* Метод V-функции и оптико-механическая аналогия // Научно-технический вестник Поволжья №5, 2015. С.18-21.

12. *Валишин Н.Т. Ефимов А.А., Макшакова В.А.* Решения уравнения типа волнового для гармонического осциллятора// Научно-технический вестник Поволжья №12, Казань, 2018

SOLUTION OF ONE STATIONARY EQUATION IN PRIVATE DEVIRATIVES

Volkov I.A.

io-kallisto-v@mail.ru

Scientific supervisor: N.T. Valishin, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent

(Kazan National Research Technical University named after A.N.Tupolev

(KNRTU-KAI), Kazan)

The solution of the second-order partial differential equation with boundary conditions is considered. The method of separation of variables allows us to obtain a stationary equation that has a solution for certain discrete eigenvalues of the boundary value problem.

УДК 510

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Гайсин А.С.

biul130.1@mail.

Научный руководитель: Е.Ю. Никитина, старший преподаватель кафедры СМ.

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ. г. Казань.

В данной статье рассматривается история возникновения дифференциального исчисления, вопросы проведения касательной к кривой, исследования функции с помощью методов дифференциального исчисления. Появление основных обозначений терминов и понятий дифференциального исчисления.

Курс дифференциального исчисления является основополагающим курсом математического анализа и изучается в числе базовых предметов в технических вузах. Например, в нашем вузе, на факультете радиотехники и телекоммуникаций в рабочей программе по дисциплине "Математика" изучению этого раздела посвящено немало учебного времени, в том числе и часов на самостоятельное изучение. Действительно, без прочных знаний и умений в этой области невозможно успешное изучение специальных предметов, связанных с радиотехникой, авиастроением, электронными системами. Как известно, с помощью производных решаются многие прикладные задачи. Это всевозможные приложения: нахождение Экстремумов, наибольших и наименьших значений функций. Очень широк спектр применения этой темы и в области электроники, конструирования и приборостроения. Простейшие понятия и определения этого раздела нам известны ещё из школы. Нахождение производной, применение её к исследованию функции, составление уравнения касательной к графику изучаются ещё в старших классах. Возникает вопрос, а откуда же появились эти основополагающие понятия, с чем было связано их появление, и в какие времена учёные заинтересовались такими вопросами?

Математический анализ — совокупность разделов математики, который объединяет дифференциальное и интегральное исчисления. Понятия математического анализа - функции, границы, производная и интеграл - являются базовыми, которые изучаются в курсе средней школы. Само понятие производной неразрывно связано с понятием функции. Сформировали основные положения и указали на взаимообратный характер дифференцирования и интегрирования такие известные ученые как Исаак Ньютон и Готфрид Лейбниц (в конце 17 столетия). Ньютон в 1666 году и, чуть позднее, Лейбниц независимо друг от друга построили теорию дифференциального исчисления. Ньютон пришел к понятию производной, решая задачи о мгновенной скорости, а Лейбниц, - рассматривая геометрическую задачу о проведении касательной к кривой. Вместе они исследовали вопрос максимумов и минимумов функций.

Термин «производная» – это результат дифференцирования, поэтому ее назвали «Производной», как бы «то, что произвели». Дифференцирование в математике —есть процесс, при котором функция f превращается в другую функцию f’ ("производная от f"). Изначально понятие производной возникло из большого числа задач естествознания и математики, важнейшая из которых была физическая задача определения скорости неравномерного движения и геометрическая задача построения касательной к кривой (задачи, которые решали Ньютон и Лейбниц).

Одну из таких задач рассмотрим на примере исследований Г. Галилея, который изучал закон свободного падения тел, «роняя» их с Пизанской башни. Сначала поднимем камень на некоторую высоту, затем отпустим его так, чтобы он двигался в «свободном падении». Галилей нашел зависимость эмпирическим путем:

$$S(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

где t – это время, отсчитываемое от начала падения в секундах, а s(t) – это пройденный путь к моменту t, а g –физическая постоянная, равная примерно 9,8 м/с^2. Камень двигается явно неравномерно. Его скорость свободного падения v постоянно увеличивается. Как же выглядит зависимость v(t)? Зная зависимость s(t), т.е. закон движения падающего тела, можно получить отсюда и выражение для скорости v(t) как функцию времени.

Найдем же зависимость v(t). Зафиксируем некий момент t, в который мы хотим знать значение скорости v(t). Пусть h – небольшой промежуток времени, прошедший от момента t. За это время падающее тело пройдет путь s(t + h) - s(t). Если h очень маленький, то скорость v тела за время h не успеет заметно измениться, и можно считать, что v(t) приближенно будет равно:

$$\frac{s(t+h)-s(t)}{h} \approx v(t) \tag{1}$$

Чем меньше h, тем точнее последнее приближенное равенство. Значит, величина v(t) скорости в момент t – это предел, к которому стремится стоящее в левой части приближенного равенства (1) отношение, которое выражает среднюю скорость на интервале времени от момента t до момента t + h, при стремлении величины h к нулю.

Все вышесказанное записывается в виде:

$$v(t) = \lim_{h\to\infty} \frac{s(t+h)-s(t)}{h} \tag{2}$$

Формула (2) одновременно дает и определение, и правило вычисления значений v(t) мгновенной скорости изменения функции s(t). Проведем указанные в соотношении (2) вычисления, исходя из найденной Галилеем зависимости:

$$S(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

Сделаем для начала элементарные вычисления:

$$s(t+h)-s(t) = \frac{1}{2} g(t+h)^2 - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g(t^2+2th+h^2) - \frac{1}{2} g^2 = gth + \frac{1}{2} g h^2;$$

разделим на h и получим:

$$\frac{s(t+h)-s(t)}{h} = gt + \frac{1}{2} gh.$$

При стремлении h к нулю, второе слагаемое записанной справа суммы тоже стремится к нулю. Первое остается постоянным, не зависящим от h, поэтому:

$$v(t) = \lim_{h\to\infty} \frac{\frac{1}{2} g(t+h)^2 - \frac{1}{2} g t^2}{h} = gt.$$

Мы нашли закон $v(t) = gt$ изменения скорости тела, падающего «свободно» (в свободном падении).

Рассмотрим скорость изменения v(t), (v(t) - функция от времени), которая в физике называется ускорением. Мгновенное ускорение a(t) в момент времени t выражается:

$$a(t) = \lim_{h\to\infty} \frac{v(t+h)-v(t)}{h} \tag{3}$$

Что дает эта формула для случая свободного падения, в котором v(t)= gt? Посмотрим на следующие выражения:

$$v(t+h)-v(t) = g(t+h) - gt = gh,$$

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = g$$

поскольку g – постоянная, то из (3) получается, что a(t)=g, т.е. ускорение свободно падающего тела постоянно, а величина g - та самая физическая постоянная. Она выражает ускорение свободного падения у поверхности Земли.

Мы нашли общее математическое выражение для мгновенной скорости изменения переменной величины. Сходство выражений (2) и (3) очевидно! Результат вычислений по ним зависит от конкретного вида функций S(t) или v(t). Сами же операции над этими функциями, которые определяются правыми частями формул (2) и (3), одни и те же.

В математическом анализе уже для любой функции y = f(x) рассматривают важную величину - производную функции f:

$$f'(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{4}$$

Производная – это скорости изменения зависимой переменной y по отношению к изменению независимой переменной x. И теперь она не обязательно имеет физический смысл времени. Значение производной f'(x) зависит от значения аргумента x, поэтому производная f'(x) некоторой функции f(x) сама является функцией переменной x.

Огромный вклад внесли и работы Эйлера (1707—1783). Впервые сам же термин "функция" был предложен в 1692 г. Лейбницем для характеристики разных отрезков, которые соединяют точки некоторой кривой. Леонард Эйлер в 1748 г. уточнил определение функции. Он ввел для обозначения функции символ f(x). Эйлер различал локальный экстремум и наибольшие и наименьшие значения функции на определенном отрезке в своей работе "Дифференциальное исчисление". Он первый начал использовать греческую букву Δ для обозначения прироста аргумента $\Delta x = x_2 - x_1$ и прироста функции $\Delta y = y_2 - y_1$.

Немалый вклад в развитии такого понятия как «производная», и «дифференциальное исчисление» внесли и многие другие ученые, математики и физики. Среди них профессор математики Иоганн Бернулли, младший брат Якоба Бернулли, который тоже был профессором математики Базельского университета с 1687, Жозеф Луи Лагранж, Пьер Ферма а также и выше перечисленные Ньютон и Лейбниц.

Иоганн Бернулли помогал Лейбницу в разработке дифференциального и интегрального исчислений. Он сделал ряд открытий в этих областях: учение о показательных функциях; правило раскрытия неопределённостей вида 0/0, которое несправедливо носит имя Лопиталя; квадратура различных кривых.

Иоганн систематически изложил первое дифференциальное исчисление. В основу «Анализа бесконечно малых», опубликованного им в 1687 году, лёг конспект лекций, прочитанных им Лопиталю по дифференциальному исчислению. А курс интегрального исчисления Иоганна был издан в 1742 г. Бернулли опубликовал 9 работ в Петербургской Академии наук.

Внёс огромный вклад в анализ, алгебру, разработал фундамент математического анализа, математическую физику и многие другие области математики французский математик и механик, который был один из основоположников механики сплошных сред, членом Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и других академий - Огюстен Луи Коши **(**21 августа 1789, Париж — 23 мая 1857, Со, Франция). Его имя внесено в список величайших учёных Франции, помещённый на первом этаже Эйфелевой башни. Он написал свыше 800 работ, собрание его сочинений в полном объеме содержит 27 томов. Работы Коши относятся к различным областям математики (преимущественно к математическому анализу) и математической физики. Он впервые дал строгое определение основным понятиям математического анализа —пределу, непрерывности, дифференциалу, производной и т. д. Его определение непрерывности опиралось на понятие бесконечно малой. Коши считал, что бесконечно малая — переменная величина, которая стремится к нулю. Его курсы анализа послужили образцом для большинства курсов позднейшего времени. Они основаны на систематическом использовании понятия предела.

Пьер Ферма - французский математик и юрист, работы которого предшествовали открытию подходов и основ дифференциального исчисления. В 1629 г. он предложил способы нахождения наибольших и наименьших значений функций, проведение касательных к произвольным кривым, фактически опирались на применение производных.

Работы Рене Декарта способствовали этому. Он разработал метод координат и основы аналитической геометрии. Ходят слухи, что он ее создал лежа на кровати, просто наблюдая за движением мухи. Он пытался представить, как можно описать положение мухи в воздухе, чтобы попасть по ней с наибольшей вероятностью.

Ньютон изучал не только законы физики, но, чтобы ему удавалось выражать их, изучал и математику. Решая задачи на проведение касательных к кривым в Вулсторпе, Ньютон создает общий метод решения таких задач (метод флюксий, производных) и флюент, которые у Лейбница назывались дифференциалами.

Ньютон называл систему величин x,y,z,…, которые одновременно изменяются непрерывно в зависимости от времени, флюентами, от латинского fluens – текущий, от fluo – теку; скорости, с которыми изменяются эти флюенты, – флюксиями, от латинского fluxio – истечение: $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$,… флюксии - производные флюент по времени. Общим аргументом текущих величин – флюент – является у Ньютона «Абсолютное время», к которому отнесены прочие, зависимые переменные. Бесконечно малые изменения флюент Ньютон называл моментами (момент в исчислении флюксий - это дифференциал). Момент независимой переменной он обозначал знаком о, момент флюенты x – знаком xo. В понятиях и терминологии метода флюксий отразилась глубокая связь математических и механических исследований Ньютона.

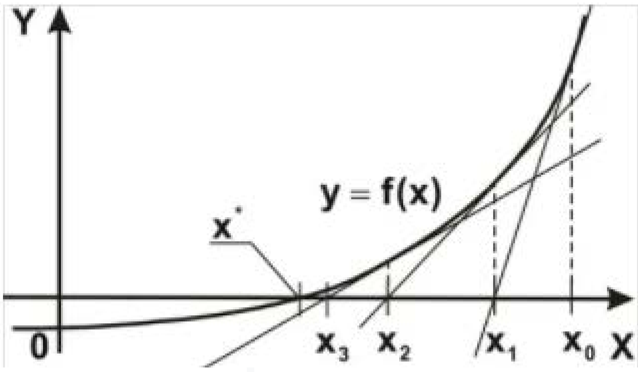


Рис.1. Метод флюксий

Задачи исчисления флюксий Ньютон формулировал так: «1. Длина проходимого пути постоянно дана; требуется найти скорость движения в предложенное время. 2. Скорость движения постоянно дана; требуется найти длину пройденного в предложенное время пути»

Исчисления флюксий развивалось только в работах английских математиков как особый вид дифференциального исчисления со своеобразной символикой. В конце 17 – начале 18 вв. оно было вытеснено дифференциальным исчислением с более удобной символикой. Символы, которые были приняты в исчислении флюксий, частично сохранились в механике и векторном анализе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Граве Д. А.*, Дифференциальное исчисление // Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона : в 86 т. (82 т. и 4 доп.). — СПб., 1890—1907.

2. Виноградов И.М. (ред.) Математическая энциклопедия. Том 2. Москва: Советская энциклопедия, 1977 г.

3. *Г. М. Фихтенгольц* «Курс дифференциального и интегрального исчисления», том 1, Физматлит 2001 г., 616 стр.

4.Энциклопедический словарь юного математика/Сост. Э-68 *А. П. Савин*. – М.: Педагогика, 1989. – 352 с.: ил.

4.*Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.*, Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1981 год.

5. *В.Г. Болтянский*, Что такое дифференцирование? «Популярные лекции по математике», Выпуск 17, Гостехиздат 1955 г., 64 стр.

6. *И. Ф. Суворов* "Курс высшей математики". М.: Просвещение, 1964., 128 стр.

7. *В. А. Гусев, А. Г. Мордкович* «Математика», 1997 г., 145 стр.

8. *Кравец С. Л//* Большая российская энциклопедия 2005–2019.

HISTORY OF DIFFERENTIATION DEVELOPMENT

Gaisin A. S.
biul130.1@mail.
Supervisor: E. Y. Nikitina, senior lecturer of the department SEE.
Kazan National Research Technical
University named after A. N. Tupolev-KAI, Kazan.

This article discusses the history of the emergence of differential calculus, the issues of the tangent to the curve, the study of the function using the methods of differential calculus. The appearance of the basic designations of terms and concepts of differential calculus.

УДК 510

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Гайсин А.С.
eliteroy2017@gmail.com
Научный руководитель: Е.Ю. Никитина, старший преподаватель кафедры СМ.
(«Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ»(КНИТУ-КАИ),Казань)

В данной статье рассматривается история возникновения и развития интегрального исчисления. Рассматриваются различные математические методы, являющиеся предпосылками к интегрированию, основной вклад некоторых учёных в развитие интегрального исчисления.

Курс интегрального исчисления является основополагающим курсом математического анализа и изучается в числе базовых предметов в технических вузах. Например, в нашем вузе, на факультете радиотехники и телекоммуникаций в рабочей программе по дисциплине "Математика" изучению этого раздела посвящено немало учебного времени, в том числе и часов на самостоятельное изучение. Действительно, без прочных знаний и умений в этой области невозможно успешное изучение специальных предметов, связанных с радиотехникой, авиастроением, электронными системами. Как известно, с помощью первообразных решаются многие прикладные задачи. Это всевозможные приложения: нахождение площадей, длин дуг, объёмов тел и т.д. Очень широк спектр применения этой темы и в области электроники, конструирования и приборостроения. Простейшие понятия и определения этого раздела нам известны ещё из школы, нахождение первообразной, применение её к исследованию функции изучаются ещё в старших классах. Возникает вопрос, а откуда же появились эти основополагающие понятия, с чем было связано их возникновение, и в какие времена учёные заинтересовались такими вопросами?

История понятия интегрального исчисления связана с задачами проведения квадратур, то есть придания плоской фигуре, к примеру кругу, квадратной формы с той же площадью, и нахождении этой площади. При этом строился квадрат, площадь которого была известна и равна площади данной фигуры. Такими задачами занимались математики древней Греции и Рима. Но в античное время не были развиты представления о действительных числах, поэтому математики оперировали с их геометрическими аналогами или скалярными величинами.

Предвидел понятие интеграла древнегреческий учёный Евдокс Книдский (около 400 гг. до нашей эры). Он доказал теорему о том, что площади двух кругов относятся как квадраты их радиусов. Его знаменитый метод «исчерпывания», который он применил для доказательства этой теоремы, заключается в следующем: для нахождения площади или объёма некоторой фигуры, в эту фигуру вписывалась монотонная последовательность других фигур, после чего доказывалось, что их площади или объёмы, в зависимости от задачи, приближаются к площади или объёму данной фигуры. На рис.1 показано, как вычислялась площадь круга методом «исчерпывания».

Рис.1. Вычисление площади круга методом «исчерпывания».

После этого вычислялся предел последовательности площадей (или объёмов), и выдвигалось утверждение, что он равен некоторому значению А и доказывалось, что обратное утверждение приводит к противоречию. Все эти шаги, включая обоснование единственности предела, повторялись для каждой задачи. Это связано с тем, что в то время не было общей теории пределов.

В такой форме данный метод хорошо вписывался в строго дедуктивное построение античной математики, но имел существенные недостатки:

1. Он был громоздким;
2. Не было никакого общего метода для вычисления предельного значения А
3. Этот метод не пригоден для нахождения площадей бесконечных фигур.

После Евдокса метод «исчерпывания» для вычисления объёмов и площадей применял другой древний ученый Архимед. Опираясь и совершенствуя идеи своих предшественников, он определил длину окружности, площадь круга, объём и поверхность шара. Учёный показал, что определение объёмов шара, параболоида, эллипсоида и гиперболоида вращения сводится к определению объёма цилиндра [1]. Аналогичными методами пользовались китайские математики, такие, как Лю Хуэй (около 220 – 280 гг. до нашей эры), который с их помощью находил площадь круга, и Цзу Чунчжи(429 – 500 гг. до н.э.) со своим сыном Цзу Гэном, пользующиеся ими для нахождения объёма шара.

Следующий большой в шаг в развитии интегрального исчисления сделал в XI веке в Ираке арабский учёный, математик, механик, физик и астроном Абу Али аль-Хайсам ибн аль-Хайсам ибн аль-Хайсам аль-Барси(около 965-1039 гг. н.э.). В своей работе «Об измерении параболического тела» он приводит формулы для суммы последовательных квадратов, кубов и четвертых степеней, а также множество других формул для сумм рядов.

С помощью этих формул он проводил вычисление, которое оказалось равносильным вычислению определённого интеграла:

$$\int_0^a \sqrt{x}dx\,. \tag{1}$$

С использованием математической индукции обобщил свои результаты для интегралов от многочленов до четвёртой степени. Проведя вышеупомянутые вычисления и выводы, он оказался близок к поиску общей формулы для интегралов от многочленов, но не выше четвёртой степени.

Следующим значительным толчком в развитии интегрального исчисления были работы в XVI – XVII вв. итальянского математика Бонавентура Франческо Кавальери(1598-1647). В них он описывал свой знаменитый метод «неделимых»[2]. Суть этого метода заключается в следующем: разделение геометрических фигур, площадь которых нужно вычислить, на фигуры нулевой ширины, которые потом соединяются без изменения их длины, и образование длинной фигуры, площадь которой уже известна. Вычисление объёма трёхмерных тел, поверхностей происходит аналогично, но они делятся уже не на отрезки, а на «неделимые» плоские фигуры [3].

Например, вычисление площади круга радиуса R. Формула длины окружности:

$$L = 2\pi R\,.$$

Сначала разбиваем круг на бесконечно малые кольца. Далее, рассматривая треугольник с длиной основания L и высотой R, также разбиваем его сечениями параллельно основанию(рис.2). Теперь каждому кольцу радиуса r и длины $L = 2\pi r$ можно сопоставить одно из сечений треугольника той же длины L. Тогда по принципу Кавальери, площадь треугольника и круга равны, причем площадь треугольника находится как произведение длины его основания на половину высоты:

$$2\pi R \cdot \frac{R}{2} = \pi R^2\,. \tag{2}$$

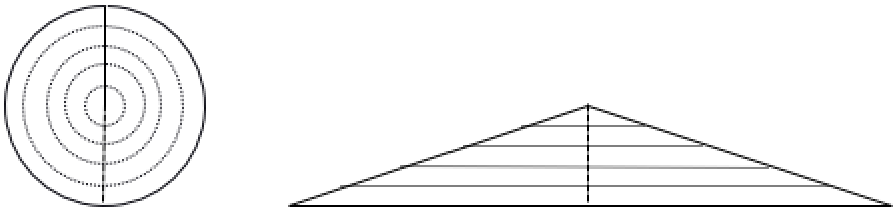


Рис.2.Вычисление площади круга.

Принцип Кавальери:

Теоретические основы метода неделимых, сформулированных Кавальери в своем трактате под названием «Геометрия неделимых непрерывных, выведенная новым способом» имели следующие формулировки:

- Фигуры относятся друг к другу, как все их линии, взятые по любой регуле (Регула в данном случае – линия или плоскость, параллельно которой проводятся секущие линии или плоскости), а тела — как все их плоскости, взятые по любой регуле.

- Если два тела имеют одинаковую высоту, и если сечения тел плоскостью, параллельной плоскости основания этих тел, всегда останутся в заданном отношении, то и объёмы тел останутся в этом отношении.

В современном виде они формулируются так:

Для плоскости:

Площади двух фигур с равными по длине хордами всех их общих секущих, параллельных прямой, по одну сторону от которой они лежат, равны.

Для пространства:

Объёмы двух тел над плоскостью, с равными по площади сечениями всех общих секущих их плоскостей, параллельных данной плоскости, равны.

В частности, используя обозначения бесконечно малых, Кавальери доказал теорему, которая оказалась эквивалентной современной формуле [4]:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}. \qquad (3)$$

Также вклад внесли работы французского математика Пьера де Ферма(1601-1655).

Эти учёные заложили основы современного интегрального исчисления. Дальнейшее развитие этого раздела математического анализа связано с деятельностью английского математика, физика и богослова Исаака Барроу(1630-1677), который в 1659 году установил взаимосвязь между задачей нахождения площади и задачей о нахождении касательной и итальянского математика и физика, ученика Галилея - Эванджелиста Торричелли(1608-1647), которые представили первые отсылки к связи между интегральным и дифференциальным исчислением.

Основы интегрального исчисления и связь интегрирования с дифференцированием, применение интегрального исчисления к решению прикладных задач, заложили известные учёные Исаак Ньютон(1643-1727) и Готфрид Лейбниц(1646-1716) в 70-х годах XVII века.

Сформулировали теорему, которая сейчас называется теоремой Ньютона-Лейбница[5].

Ньютон в своих сочинениях развивал исчисление, называемое *Исчисление флюксий*. Основные факты этого исчисления он получил в 1665 – 1666 гг. Свои задачи учёный формулировал так:

1. Длина проходимого пути в любой момент времени дана; в задаче требуется найти скорость движения в определённое рассматриваемое время.

2. Скорость движения в любой момент времени дана; в задаче нужно найти длину пройденного в предложенное время пути.

Время Ньютон понимал как общий аргумент, к которому относятся все переменные величины. Систему величин x,y,z, которые одновременно изменяются непрерывно в зависимости от времени, он называл *флюентами* (от лат. fluentus – текущий, от fluo - теку); скорости, с которыми изменяются флюенты назывались – флюксиями (от лат. fluxio - истечение): $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$,… . Таким образом, получается, что флюксии являются производными флюент по времени. Бесконечно малыми флюентами Ньютон называл моментами, которые в исчислении флюксий соответствует дифференциалу, момент независимой переменной он обозначал знаком *o*, моменты флюенты x – знаком *xo* [6].

Понятие интеграла и его обозначений было введено в 1675 г Г. Лейбницем. Знак интеграла Лейбниц в своей статье опубликовал в 1686 г. Он ввёл современное обозначение неопределённого интеграла: взял длинную букву "S", стоящую в слове Summa – сумма. Термин же «интеграл» впервые употребил в своей печати швейцарский учёный Я. Бернулли в 1690 г. После этого повседневную жизнь вошло в понятие и выражение «интегральное исчисление» (Лейбниц сначала говорил о «суммирующем исчислении»). Вычисление интегралов производили Г. Лейбниц и его ученики, первыми из которых стали братья Я. и И. Бернулли. Они сводили вычисления к обращению операции дифференцирования, т. е. к отысканию первообразных (постоянная интегрирования в печати появилась в статье Лейбница в 1694 г.).

Среди способов интегрирования, которые использовал Г. Лейбниц, были: замена переменной, интегрирование по частям, а также дифференцирование по параметру под знаком интеграла (1697). Г. Лейбницу так же принадлежит идея интегрирования рациональных дробей при помощи разложения на простейшие дроби (1702–1703), которая впоследствии была усовершенствована другими учеными.

В 1819-20 годах французским математиком и физиком Жаном-Батистом Жозефом Фурье (1768 - 1830) было предложено современное обозначение определённого интеграла, с указанием границ интегрирования. В XIX в появляется понятие предела, и благодаря этому интегральное исчисление приобрело логически завершённую форму. Этому также способствовали работы таких учёных, как О.Коши(1789-1857), Б.Риман(1826-1866) и многих других. Своего нынешнего вида и состояния методы интегрирования были достигнуты в основном в работах Л. Эйлера (1707-1783). Ж.Л. Лагранж(1736 - 1813) в 1797 году ввел употребляемое сейчас слово «*первообразная*», которое заменило более ранее «*примитивная функция*». Развитие методов завершили труды других учёных, таких, как М. В. Остроградский (1801-1861) и П. Л. Чебышёв (1821-1894).[7]

Сегодня интегральное исчисление находит очень широкое применение в различных областях науки, техники, социальных аспектах. С помощью интегрирования решают задачи различной сложности и назначения. Методы интегрального исчисления позволяют упрощать решение многих задач, которые сами по себе решаются трудно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Рыбников К. А. История математики

2. Интегральное исчисление, пер. с латин., тт. 1-3, М., 1956-58; Коши О. Л.

3. Казахстан. Национальная энциклопедия. — Алматы: Қазақ энциклопедиясы, 2005. — Т. III. — ISBN 9965-9746-4-0.

4. Хрестоматия по истории математики. Математический анализ. Теория вероятностей / Под ред. А. П. Юшкевича. — М.: Просвещение, 1977.

5. Камынин Л. И. Математический анализ. Т. 1, 2. — 2001.

6. Ньютон И. Математические работы. М.; Л., 1937. С. 45

7. Эйлер Л., Интегральное , пер. с латин., т. 1 - 3, М., 1956-58.

THE HISTORY OF THE INTEGRAL CALCULUS DEVELOPMENT

Gaisin A.S.
eliteroy2017@gmail.com
Supervisor: E.Yu.Nikitina, Senior Lecturer of the Department of SM
(*«Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev-KAI(KNRTU-KAI)», Kazan)*

This article examines the history of the emergence and development of integral calculus. Various mathematical methods are considered, which are prerequisites for integration, the main contribution of some scientists to the development of integral calculus.

УДК: 519.6, 532.5

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

Гарифуллина Р.И.
railya995@gmail.com
Научный руководитель: Анисимова И. В., д.ф.-м.н., профессор
Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева – КАИ, Казань

Аннотация: в статье рассмотрено стационарное движения вязкой жидкости между параллельными плоскими стенками, численная реализация 1-й краевой задачи осуществлена методом прогонки в системе Mathcad, произведено сравнение численного и точного решений.

1. Постановка задачи, точное решение

Рассмотрим течение несжимаемой жидкости между двумя параллельными плоскими стенками. Пусть уравнения этих плоскостей будет соответственно $z = -h, z = h.$

Допустим, что внешних сил нет, что движение стационарно и происходит параллельно оси Ox, поэтому $X = Y = Z = 0, v_y = v_z = 0, v_x = v(x, y, z)$.

Основные уравнения гидромеханики сильно упрощаются при сделанных допущениях и принимают вид [1]:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

Последнее из этих уравнений показывает, что v может зависеть только от y и z; средние уравнения показывают, что p может зависеть только от x; но тогда первое уравнение, в левой части которого стоит функция от одного только x, а в правой части функция от y и z, может выполняться только в том случает, если левая и правая части этого уравнения являются постоянными величинами. Итак, должно быть: $\frac{\partial p}{\partial x} = const$.

Для определения v имеем уравнение:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{2}$$

Для построения распределения скоростей течения вдоль оси *Ox* будем рассматривать обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{3}$$

или

$$\mu\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{\partial p}{\partial x} \tag{3*}$$

с граничными условиями прилипания

$$\begin{matrix} v(-h) = 0 \\ v(h) = 0 \end{matrix}\quad ; \tag{4}$$

Здесь

$$\frac{\partial p}{\partial x} = const,$$

$$const = \frac{p_0 - p_1}{l}$$

Интегрирование уравнения (3) даёт нам [2]:

$v=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}z^2+Az+B,$ где A и B- две произвольные постоянные, для определения которых служат граничные условия. Выведем из этих последних уравнений, что

$$\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}h^2+Ah+B=0;\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}h^2-Ah+B=0,$$

откуда $A=0,B=-\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}h^2$,

и, следовательно, течение жидкости определяется следующей зависимостью:

$$v=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(z^2-h^2\right). \qquad (5)$$

Важно отметить, что уравнение (3*) является уравнением с малым параметром при старшей производной ($0<\mu<1$). Разностные схемы для таких уравнений имеют большую аппроксимационную вязкость, которая может быть соизмерима с величиной малого параметра, решение разностной задачи не сходится к решению дифференциальной задачи при равенстве величины малого параметра μ $(0<\mu<1)$ и шага сетки. Поэтому важно использование регуляризации разностной схемы для точности численного решения [3-5].

2. Численная реализация краевой задачи.

Для первой краевой задачи (3)-(4) была использована разностная схема

$$\frac{v_{i-1}-2v_i+v_{i+1}}{\tilde{h}^2}=\frac{const}{\mu_k},\text{ где } \tilde{h}=\frac{2h}{n}, \qquad (6)$$

$$v_0=v_n=0,\ i=1,2,\ldots,n-1. \qquad (7)$$

Разностная схема (6) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных v_i, которая имеет трехдиагональный вид:

$$A_i v_{i-1}+B_i v_i+C_i v_{i+1}=F_i,\ i=1,2,\ldots,n-1,$$
$$v_0=v_n=0,$$

где коэффициенты:

$$A_i=1,B_i=-2,C_i=1,F_i=-\frac{\tilde{h}^2\cdot const}{\mu_k}.$$

Такой вид СЛАУ удобно решать методом прогонки, который является модицификацией метода Гаусса [6]. Для решения данной задачи была использован метод правой прогонки. Полагаем $\alpha_1=0,\beta_1=0$. Вычисляем прогоночные коэффициенты:

$$\alpha_{i+1}=\frac{-C_i}{B_i+\alpha_i A_i},$$

$$\beta_{i+1}=\frac{F_i-A_i\beta_i}{B_i+\alpha_i A_i},i=1,2,\ldots,n-1.$$

Затем находим численное решение:

$$v_i=\alpha_{i+1}v_{i+1}+\beta_{i+1},i=n-1,n-2,\ldots,1.$$

3. Результаты расчетов

Численная реализация разностной задачи (6)-(7) была произведена в системе Mathcad при условиях: давление $p_1=1$ гПа, давление $p_0=2$ гПа расстояние $l=1$, расстояние между стенками $2h=2$, вязкость воды $\mu=8,9\cdot10^{-4}$ Па•с. Результаты вычислений приведены в таблице 1 и на рисунке 1:

Таблица 1. Результаты решения

z_i	Значение v_i (точное решение)	Значение v_i (метод прогонки)
-1	16.854	0
-0.8	18.876	2.022
-0.6	20.449	3.596
-0.4	21.573	4.719
-0.2	22.247	5.393
0	22.472	5.618
0.2	22.247	5.393
0.4	21.573	4.719
0.6	20.449	3.596
0.8	18.876	2.022
1	16.854	0

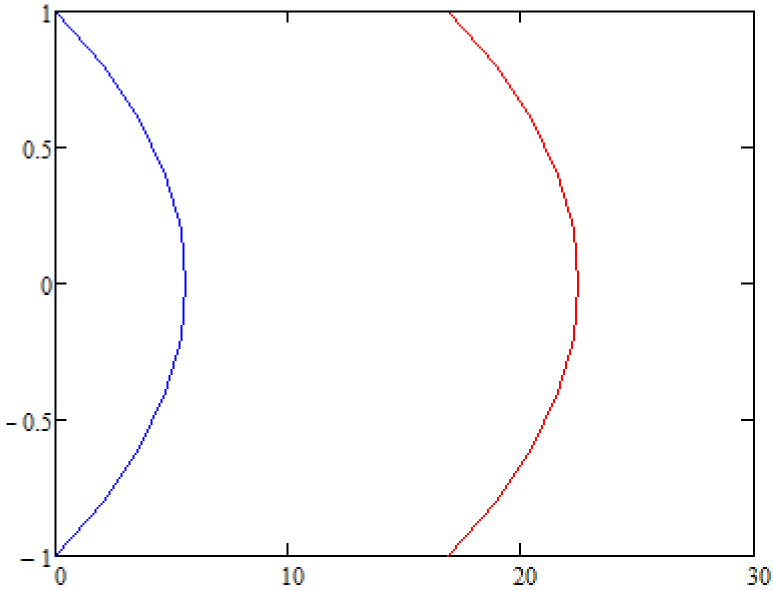


Рисунок 1. Распределения скоростей течения вязкой жидкости.

На рисунке 1 представлены распределения скоростей течения вязкой жидкости (воды) между двумя параллельными стенками. Красным цветом изображено распределение точного решения, синим – приближенного. Сравнение распределений показывает, что движение воды между двумя параллельными стенками в обоих случаях происходит по закону параболы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Кочин, Н. Е.* Теоретическая гидромеханика: учебник для университетов. Ч. 2 / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. — Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – с. 420-423.

2. *Анисимова И.В., Игнатьев В.Н., Цветков Л.Г.* Интегрирование дифференциальных уравнений высшего порядка и систем дифференциальных уравнений. учебное пособие / КГТУ им. А.Н. Туполева. Казань, 2018.

3. *Игнатьева И.В.* О некоторых численных алгоритмах решения приближенных и полных уравнений Навье-Стокса. Автореферат дисс. кандидата физико-математических наук / Казанский гос. технич. ун-т им. А. Н. Туполева. Чебоксары, 1998

4. *Задорин А.И., Игнатьев В.И.* О численном решении уравнения с малым параметром при старшей производной// Журнал вычислительной математики и математической физики. 1983. Т. 23. № 3. С. 620

5. *Хизбуллина А.Ф., Гарифуллина Р.И.* О регуляризации разностных схем при решений дифференциальных уравнений с малым параметром. В сборнике: Прикладная математик и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук.. Материалы VI Международной научно-практической конференции

(школы-семинара) молодых ученых. 2020. С. 452-456.
6. *Заботина, Л. Ш.* Дифференциальные уравнения. Ч. 1 / Л. Ш. Заботина, И. В. Игнатьева – Казань: Изд-во Казанского государственного технического университета, 1999. – с. 17-18.

FINITE-DIFFERENCE SOLUTIONS OF THE EQUATIONS OF A VISCOUS FLUID TAKING INTO ACCOUNT THE APPROXIMATE VISCOSITY

Garifullina R. I.
railya995@gmail.com
Scientific adviser: Anisimova I.V., Dr. Sc. (Phys.-Math.), professor
Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev - KAI, Kazan

Abstract: The article deals with the stationary motion of a viscous fluid between parallel flat walls. The numerical implementation of the 1st boundary value problem is carried out by the sweep method in the Mathcad system, a comparison of the numerical and exact solutions is made.

УДК 519.2

КАК ИГРАТЬ И НЕ ПРОИГРЫВАТЬ

Журавлев Д.В.
danil_integral@bk.ru
Научный руководитель: С.В. Никифорова, к.ф.-м.н.
(Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ, Казань)

Аннотация. В работе рассматриваются различные виды событий теории вероятностей. Приведены примеры подсчета вероятности этих событий. Описаны математические приемы, используемые в азартных играх.

В 1526 году итальянский математик Джероламо Кардано в своей работе «Книга об игре случая» впервые попытался описать игру в кости языком математики. Основываясь на собственной игровой практике, он пытался разработать и теоретически обосновать систему рекомендаций по управлению ставками. Им фактически было сформулировано определение вероятности: «Имеется одно общее правило для расчета вероятности: нужно попробовать учесть число возможных выпадений и число способов, которыми могут появиться данные выпадения, а затем найти отношение последнего числа к числу оставшихся возможных выпадений» [1]. Следует признать, что наука о вероятности, согласно истории, выросла из меркантильных проблем любителей азарта. Разберемся, как же работает математика азартных игр.

При подбрасывании монеты, имеющей две стороны («орел» и «решка»), может выпасть любая из сторон с общей долей вероятности p=1/2=0,5. Если же подбрасывать две монеты, то в таком случае выходит иная картина: вероятность выпадения 2 «орлов» или 2 «решек» подряд равна p=1/4=0,25. А если взять три монеты, то произойдет в корне другая ситуация: вероятность выпадения подряд 3 «орлов» или 3 «решек» составит лишь p=1/8=0,125.

Проведем аналогичный эксперимент с игральным кубиком, имеющим 6 граней, на каждой из которых указывается количество условных очков от 1 до 6. Вероятность того, что при однократном подбрасывании кубика выпадет очко «4», составит p=1/6. Теперь рассмотрим вероятность получения числа, равного в сумме 5, при броске двух игральных кубиков. В этом случае общее количество возможных вариантов равно 6*6=36 и число, дающее в сумме 5, может выпасть в 4 случаях: «1 и 4», «2 и 3», «3 и 2», «4 и 1». Тогда вероятность равна p=4/36=1/9.

Рассмотрим игральную колоду в 52 карты, которая содержит 4 дамы. Вероятность вытаскивания из колоды одной из дам составляет p=4/52. А на колесе европейской рулетки есть 37 ячеек: 18 – «красных» цифр, 18 – «черных» цифр и 1 зеленая отметка «зеро». В данном случае вероятность выпадения любого числа равняется p=1/37, а вероятность выпадения любого «красного» или «черного» числа p=18/37.

В приведенных примерах в силу симметрии событий применяется классическая формула вероятности p=m/n, где n – общее количество событий, m – благоприятное количество событий. Такие события называют равновозможными.

Или же возьмем знакомую всем нам лотерею: в тираже участвую 90 чисел – от 1 до 90 включительно. Лотерейный билет представляет собой случайную последовательности 30 чисел из этого диапазона. Для того чтобы выиграть в лотерею, необходимо чтобы все 30 чисел, имеющихся в билете, выпали. Но с другой стороны, в тираже участвуют лишь 86 бочонков с числами, то есть четырем числам из этого диапазона вообще не суждено выпасть. Таким образом, шанс выиграть хотя бы минимальный выигрыш равен p=30/86, что в реальности составляет 1-10 рублей. Стоит задуматься: надо ли так рисковать для извлечения столь маленькой прибыли?

События называют взаимоисключающими (несовместными), если ни при каких условиях они не могут произойти одновременно, то есть появление одного из них исключает появление других при одном и том же испытании. Противоположность события – это его дополнение. Так, дополнением «орла» является «решка», дополнением «красного» цвета в европейской рулетке служит «черный цвет», дополнением четного числа – нечетное. Причем суммарная вероятность всех потенциальных исходов равна 100%, то есть эти события образуют полную группу и являются попарно несовместными событиями. Например, при вытаскивании из игральной колоды в 52 карты произвольной карты будет выбрана карта либо «червовой» масти p=13/52, либо карта другой масти p=39/52. Как можно убедиться, в сумме эти вероятности также дадут 100%.

Пусть у студента шанс сдать с первого раза экзамен по математике составляет 60%, а по философии – 80%. Тогда оба экзамена он сдаст с вероятностью p=3/5*4/5=12/25, что составляет 48%, а провалит оба экзамена с вероятностью p=2/5*1/5=2/25, что составляет 8%. Рассмотрим иную ситуацию: вероятность сдать математику, но провалить философию равна p=3/5*1/5=3/25, то есть 12% и, наоборот, сдать философию, но провалить математику – p=2/5*4/5=8/25, то есть 32%. И в сумме все полученные вероятности снова дадут 100%.

В детстве все играли в кубики, из которых можно составлять слова. Возьмем четыре кубика с буквами «М», «М», «А», «А». Давайте рассчитаем вероятность того, что ребенок составит из них слово «МАМА». Всего имеем 4 буквы, и так как все они участвуют в образовании слова, то общее количество исходов 4!, что соответствует перестановке этих кубиков. Количество благоприятных исходов равно количеству способов, которыми можно переставить повторяющиеся буквы «М» и «А», то есть 2!*2!. Значит, вероятность будет равна p=2!*2!/4!=2*2/2*3*4=1/6.

Определим вероятность того, что при вытаскивании из игральной колоды в 52 карты одну за другой трех случайных карт они окажутся тремя «дамами». Шанс вытащить «даму» с первого раза составляет 4/52. Если первая извлеченная нами карта – «дама», то количество «дам» в колоде останется 3, а количество карт в колоде 51; в этом случае вероятность вытаскивания следующей «дамы» будет 3/51. При выполнении первых двух условий вероятность появления третьей «дамы» равна 2/50. Таким образом, математический расчет положительного исхода равен p=4/52*3/51*2/50=1/5525. В данной задаче использовалось понятие условной вероятности: появление следующего события при условии, что предыдущее уже произошло.

Возвращаясь к лотерее, можно пояснить, что сама игра состоит из четырех этапов. К примеру, в первом этапе победителем является тот, чьи 5 чисел в билете, лежащие на одной горизонтали, выпадут. Дело в том, что во всех горизонтальных рядах отсутствуют 4 числа из разных десятков. Так, шанс того, что участник победит в первом этапе составит $\frac{1}{7324878}*100\%=1{,}37*10^{-6}\%$. Аналогично на 6-ом и 7-ом ходу $82*10^{-6}\%$ и $287*10^{-6}\%$. Исходя из того, что тираж лотереи составляет примерно 2 миллиона экземпляров, число победителей первого этапа всего лишь 2-3 человека.

Немного отвлечемся от сухой математики и обратимся к удивительным фактам: новозеландские ученые из Оклендского университета доказали, что попугаи кеа умеют пользоваться азами статистики. До недавнего времени лишь ближайшие к людям приматы показывали понимание концепции вероятности и возможности делать оценки на базе статистических выкладок. Так, в ходе эксперимента прозрачную коробку наполняли «черными» и «разноцветными» палочками; и пернатым необходимо было угадать в какой руке лежит «черная» палочка – именно за нее попугаи получали лакомство. Каким-то образом пернатые подсчитывали количество нужных палочек в коробке и оценивали шансы именно на то, что вытащат «черную» палочку. Даже когда ученые закрывали ширмой и не показывали количество палочек, а так же жульничали – постоянно вытягивали разноцветные, попугаи изменяли свою стратегию и, даже понимая весь подвох ситуации, отказывались участвовать дальше в эксперименте. Удивительно, ведь мозг попугаев в процентом соотношении гораздо меньше, чем человеческий [3].

Но все же должна быть какая-то закономерность и формула для расчета того или иного случая. Так, в математике появился новый термин «математическое ожидание». Математическое ожидание – это та сумма денег, которую вы можете проиграть или выиграть за достаточно долгий промежуток времени при условии, что будете делать одну и ту же ставку. Для этого существует специальная формула: $\vartheta = \left(\frac{N_в}{N} * S_в \right) + \left(\frac{N_п}{N} * S \right)$, где ϑ – математическое ожидание, N – число возможных исходов, $N_в$ – число благоприятных исходов (выигрышей), $N_п$ – число неблагоприятных исходов (проигрышей), $S_в$ – сумма выигрыша с одного исхода, S – сумма ставки (берется с противоположным знаком, так как мы будто сразу отдаем деньги) [2]. Эта формула исходит из общей формулы для математического ожидания: $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$.

Рассмотрим на примере европейской рулетки. Вы ставите 100 рублей 37 раз на цвет – «черное». Всего исходов – 37. При благоприятном исходе (таковых будет 18) сумма выигрыша составит 100 рублей, неблагоприятных исходов ожидается 19. Соответственно математическое ожидание в данном случае равно $\vartheta = \left(\frac{18}{37} * 100 \right) + \left(\frac{19}{37} * (-100) \right) = -2,7$ рублей. Отрицательное математическое ожидание на практике означает, что чем дольше длится игра, тем больше вероятность проигрыша для игрока.

Проведем аналогичный расчет для лотереи. Если мы купим 100 билетов из тиража стоимостью 100 рублей каждый, из которых 35 выигрышных, и будем рассчитывать на минимальный выигрыш (например, 5 рублей), то получим $\vartheta = \left(\frac{35}{100} * 5 \right) + \left(\frac{65}{100} * (-100) \right) = -63$ рубля.

Преимущество игрального дома – величина, противоположная математическому ожиданию. Оно показывает какой процент от ставок удерживается в пользу игрального дома. Это значит, что если в сумме в европейской рулетке поставить 1 миллион рублей, велика вероятность проигрыша 27000 рублей. То есть с каждого поставленного вами рубля контора надеется заработать 2,7 копейки. А если потратить 1 миллион рублей в лотерею, то велика возможность проиграть аж целых 630000 рублей!

Но не все так плохо, ведь на примере той же самой лотереи имеется шанс победить в первом или втором этапе, где суммы выигрышей составляют по 1-2 миллионам рублей. Все же есть некая вещь, которая особо мало подвергается математическому расчету, но исходит из математического ожидания. В математике ее назвали «дисперсией» (от лат. dispersio «рассеяние»). Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания, то есть $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$. В математике дисперсией называют величину отклонения какой-либо величины от ее среднего значения [2]. В нашем случае это степень риска. Дисперсия вносит в азартные игры элементы непредсказуемости, обеспечивая возможность случайных выигрышей и проигрышей. Без дисперсии любой исход просчитывался бы математически. Дисперсию нельзя отнести ни к положительному, ни к отрицательному фактору, она существует как объективная реальность. В какой-то степени она компенсирует отрицательное математическое ожидание игрока, позволяя ему выиграть, но в то же время она не позволяет создать достаточно результативную систему, гарантирующую выигрыш на длительной дистанции.

Не надо быть великим математиком, чтобы играть в азартные игры. Можно даже не считать математическое ожидание и дисперсию – это все сделано заранее владельцами контор. Главное понимать, что игры с высоким значением математического ожидания более выгодны для игрока. Но в любом случае нельзя забывать о дисперсии. И чем она выше, тем больше вас будет «лихорадить» в игре. Помните, что вся математика азартных игр корректно работает только в случае большого количество попыток; так что достигнуть на практике расчетных ожидаемых величин достаточно сложно из-за ограниченности бюджета игрока, величины ставок или времени игры. Как говорил Максим Горький: «… чтобы хорошо писать, надо хорошо знать свой родной язык» [4] .

А вообще в современном мире для любителей азартных игр существует специальный термин – «лудоман», то есть человек, склонный к азартным играм, которые доминируют в его жизни над социальными, профессиональными и семейными ценностями. Так в истории существует много случаев того, как люди проигрывали свои последние деньги в специальных заведениях и дальше от безвыходности либо искали новые деньги, дабы отбить те или же, что страшнее, накладывали на себя руки. Но также имеются случаи, когда человек все-так что-то выигрывал. Например, мой отец в далеком 2001 году купил лотерейный билет на сдачу в магазине и выиграл по тем временам огромную сумму 6400 рублей при его средней зарплате 1000 рублей и смог купить новенький импортный телевизор, который прослужил верой и правдой до 2018 года.

Как видно из вышеизложенного, если и играть в азартные игры, то нужно всегда уметь вовремя остановиться. А лучший вариант: не играть в них, ведь фортуна не всегда может повернуться к вам лицом…

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Мазур, Дж.* Игра случая. Математика и мифология совпадения / Джозеф Мазур; Пер. с англ. – М.: Альпина нон-фикшн, 2017. – 292 с.
2. https://scorcher.ru/adaptologiya/evristika_vyeroyatnosti/evristika_vyeroyatnosti1.php
3. https://allpozitive.ru/novozelandskie-uchenye-dokazali-znanie-popugayami-azov-statistiki
4. *Пешков, А. А. (Максим Горький)*. О том, как я учился писать / А. А. Пешков (Максим Горький). – Санкт-Петербург: Лань, 2013. – 18 с.

HOW TO PLAY AND NOT LOSE

Zhuravlev D.V.
danil_integral@bk.ru
Supervisor: S.V. Nikiforova, Candidate of Physical and Mahtematical Sciences
(Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev-KAI, Kazan)

Abstract. The paper considers various types of events in probability theory. Examples of calculating the probability of these events are given. The mathematical techniques used in gambling are described.

УДК 51

МАТЕМАТИКА У ИСТОКОВ КРИПТОГРАФИЧЕСКОГО ИСКУССТВА

Ивукова Н. К.
ivukovanadya@gmai.com
Научный руководитель: Дорофеева С. И.
(Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева, Казань)

Союз искусств и науки в области компьютерных технологий отражают время, в котором мы живем.

Аннотация Рассматриваются первые шаги в создании графических изображений с использованием математических функций и компьютерных алгоритмов, что открывает новую творческую среду-цифровое искусство, одним из первых видов которого было алгоритмическое искусство, включающее создание фракталов. Фрактальная математика стала "базой" для современной цифровой иллюстрации: создание абстрактной анимации и фрактальных изображений (от крипто-картин до видеоигр и кино). Все это отражается сегодня в стремительном скачке популярности рынка цифрового искусства.

Актуальность

Киберискусство сегодня является наиболее развивающейся областью в искусстве. Музеи по всему миру наполнены цифровыми произведениями, электронные картины пользуются спросом как никогда, а крипто-искусство уже продается в интернет-пространстве. Но этот бум цифрового творчества закономерен не случайно. Чтобы проверить это, достаточно заглянуть в прошлое. Перематывая историю назад, вы можете увидеть, что именно математика стояла у истоков.

Новая творческая среда

Все началось в 1948 году, когда художник и теоретик Джозеф Шиленгер написал в статье "Математические основы технического искусства", что машина может создать произведение искусства, если этапы создания изображения написаны на языке математики. Действительно, многие математические функции обладают высокими эстетическими свойствами, и с помощью формул можно получить новые художественные формы, обладающие математической точностью и рациональностью.

Цифровое творчество основывалось на алгоритмах чередования чисел и геометрических фигур, из которых художник создавал сложные геометрические и природные формы, формируя новые образы и стили.

Американский математик и художник Бен Лапоски первым получил графическое изображение с помощью аналогового компьютера. В 1952 году Бен Лопоски создал первые композиции "Электронные абстракции". В его работах нет случайных элементов, каждый объект, каждая форма продуманы, просчитаны и дан правильный алгоритм для создания абстрактной композиции.

Бен Лапоски заложил основу для работы на компьютере, осциллографическое (графическое в буквальном смысле) искусство было связующим звеном между абстрактной анимацией и компьютерной графикой.

В 1951 году Иван Москович экспериментировал с различными механизмами для создания рисунка с использованием математических кривых.

В 50-е годы XX века появилась новая творческая среда для художников, которая в 21 веке набирает обороты с невероятной скоростью. [1]

Цифровое искусство

Цифровое искусство или Digital Art, основанное на цифровых технологиях, стремительно развивается. Самым первым из всех существующих видов цифрового искусства было так называемое алгоритмическое искусство или математическое искусство. Это изображения или звуки, которые генерируются самим компьютером на основе письменного алгоритма. Особенностью такого изображения или звука является его неполная предсказуемость. То есть вы можете задать тип изображения или мелодии, но полностью исключить влияние случайных изменений невозможно. Алгоритмическое искусство, особенно искусство создания фракталов, способно представить зрителю картины необычайной сложности и красоты.

Фракталы на языке математики

Фрактальное искусство основано на специальной области математики — фрактальной геометрии, разработанной французско-американским математиком Бенуа Мандельбротом в 1970-х и 1980-х годах. Оно связана с описанием бесконечных самоподобных структур, возникающих в результате последовательного повторения геометрических и алгебраических преобразований, и их промежуточные реализации часто необычайно красивы. [2]

При создании фрактальных изображений бесконечность выступает в качестве математического критерия. Таким образом, относительно простые формулы и различные алгоритмы выбора цвета и самой цветовой палитры приводят к появлению сложных фрактальных структур, в которых замысловатые узоры, повторяясь и изменяясь, разворачиваются до "бесконечности" друг в друге.[3] Ярким примером построенных таким образом фрактальных картин являются множества Жюлиа и знаменитое множество Мандельброта.

“Пыль” Кантора (1883)

Если отрезок прямой линии разделить на 3 равные части и удалить средний сегмент, то полученная фигура представляет собой первый шаг в построении канторианской "пыли" (рис. 1). Аналогичные действия выполняются с каждым из полученных сегментов до бесконечности. В результате бесконечной последовательности итераций(1) вся длина исходного сегмента будет удалена:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\frac{8}{81}+\ldots=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots\right)=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1\,. \qquad (1)$$

Канторовская “пыль” представляет собой несчётное множество бесконечного числа точек, которое обладает мощностью континуума.

Рис. 1 «Пыль» Кантора

Кривая и “снежинка” Коха (1904)

Давайте возьмем отрезок прямой линии и построим равносторонний треугольник в его средней части; мы сделаем аналогичные конструкции на каждом прямолинейном участке.(рис.2)

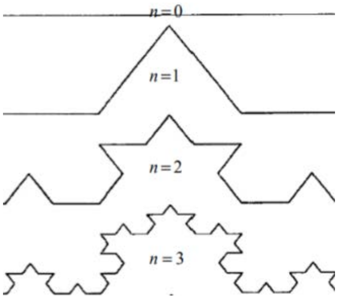


Рис. 2 Кривая Коха

“Салфетка” и “ковёр” Серпинского (1915)

Фракталы Серпинского являются плоским аналогом "пыли" Кантора. "Салфетка” Серпинского может быть определена различными способами, например, удалением центрального равностороннего треугольника из исходного треугольника или использованием треугольника Паскаля в системе двоичного исчисления (необходимо учитывать правила сложения, принятые в двоичном исчислении: 0+0=1, 0+1=1, 1+ +0=1 и 1+1=0). Давайте воспользуемся последним методом, для которого вспомним, как строится треугольник Паскаля. Возведение в степень n суммы двух чисел приводит к следующим выражениям:

1 2 1	$n=2$:	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;
1 3 3 1	$n=3$:	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
1 4 6 4 1	$n=4$:	$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$;

Аналогичные действия с равносторонним треугольником, выполняемые по отношению к квадрату, порождают " ковёр” Серпинского. Исходный единичный квадрат разбивается на девять квадратов, а затем вырезается центральный квадрат. В дальнейшем эта процедура выполняется с каждым из восьми оставшихся квадратов и продолжается бесконечно.

Пространственным аналогом “ковра” Серпинского (рис. 3) является “Губка” (рис. 4) Менгера.[4]

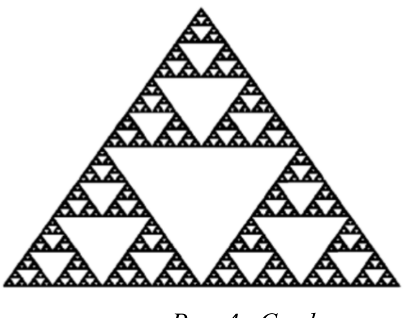


Рис. 4 «Салфетка» Серпинского

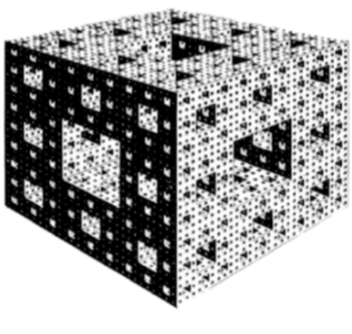


Рис. 3 «Губка» Менгера

Создание цифровой иллюстрации

В настоящее время для того, чтобы создать собственную абстрактную композицию или собственный фрактал, достаточно иметь доступ к компьютеру. Обладая базовыми знаниями об использовании графических редакторов и пониманием того, как формируется фрактал, вы можете самостоятельно создать цифровую картинку.

Цифровая иллюстрация-одна из областей криптографического искусства. Здесь компьютер перестает активно участвовать в создании образа и становится именно тем инструментом, с помощью которого художник выполняет работу, так сказать, "вручную".

Кульминацией возможностей цифрового искусства, которые были совершенно недоступны до появления цифровых технологий, включая интернет-технологии, стали видеоигры (Искусство видеоигр) и цифровая художественная анимация в кино.

Таким образом, именно математика стала основой столь стремительного развития IT-сферы и того самого бума, который сейчас происходит на всех просторах интернет-пространства-Цифрового искусства или Киберискусства.

Сегодня криптоискусство очень популярно на рынках цифрового искусства. Каждый имеет доступ к необходимым знаниям и возможность создавать собственные ИТ-работы, и теперь любой желающий может как продать, так и купить не только картину, написанную "на холстах", но и электронную. И вы можете быть уверены в безопасности транзакции, потому что подлинность работ подтверждается NFT (Невзаимозаменяемым токеном), уникальными в своем роде специальными крипто-токенами, которые могут быть присвоены любому цифровому произведению искусства, от текста до изображений или видео, а технология блокчейн позволяет совершать покупки максимально безопасно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Статья *Турлюн Л.Н.* «МАТЕМАТИКА У ИСТОКОВ КОМПЬЮТЕРНОГО ИСКУССТВА» от 20.11.11. https://cyberleninka.ru/article/n/matematika-u-istokov-kompyuternogo-iskusstva
2. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. Ижевск: «Институт компьютерных исследований», 2010.
3. *Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х.* красота фракталов. Образцы комплексных динамических систем. — М.: Либроком, 1993.
4. *Терехов С. В.* Фракталы и физика подобия. – Донецк: “Цифровая типография”, 2011. С. 32-49.

MATHEMATICS AT THE ORIGINS OF THE CRYPTOGRAPHIC ART.

N. K. Ivukova
ivukovanadya@gmai.com
Supervisor: Dorofeeva S. I.
(Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev, Kazan)

The Union of Arts and Sciences in the field of computer technology
reflects the time in which we live.

Abstract The first steps in creating graphic images using mathematical functions and computer algorithms are considered, which opens up a new creative environment-digital art, one of the first types of which was algorithmic art, including the creation of fractals. Fractal mathematics has become the "base" for modern digital illustration: the creation of abstract animation and fractal images (from crypto-paintings to video games and movies). All this is reflected today in the rapid jump in the popularity of the digital art market.

УДК 51-78

МАТЕМАТИКА И МУЗЫКА

Капен Т.А.
tlegen.kapen@mail.ru
Научный руководитель: С.В. Никифорова, к.ф.-м.н.
(Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ, Казань)

Аннотация. В данном исследовании изучается связь между математикой и музыкой. Проводится небольшой экскурс в историю изучения этого вопроса, а также объясняется причина созвучности нот и методов получения звуковых рядов на математическом языке. Кроме того приводятся способы вычисления консонанса для пары звуков.

Абсолютно каждый человек любит музыку: кто-то поп-музыку, кто-то джаз, кому-то по душе рок. На первый взгляд кажется, что научная математика и творческая музыка – это две совершенно несовместимые вещи. Однако, они очень тесно связаны между собой. Люди узнали об этой связи довольно давно. Так с V-XV в.в. музыка изучалась вместе с математикой, а в эпоху Ренессанса музыка уже являлась одним из разделов математики [1]. Это подтверждается высказываниями великих людей, а именно древнегреческого писателя, философа и общественного деятеля Плутарха: «Почтенный Пифагор отвергал оценку музыки, основанную на свидетельстве чувств. Он утверждал, что достоинства её должны восприниматься умом, и потому судил о музыке не по слуху, а на основании математической гармонии и находил достаточным ограничить изучение музыки пределами одной октавы» и физика-теоретика, лауреата Нобелевской премии Альберта Эйнштейна: «Настоящая наука и настоящая музыка требуют однородного мыслительного процесса» [2]. Математика присутствует практически в каждом произведении искусства, и музыка является музыкой именно благодаря ей. В Большой Российской энциклопедии (2013 г.) музыка определяется как «искусство звуков, организованных главным образом по высоте и во времени» [3]. Действительно, музыка – это закономерность.

Начнем с того, что воздух состоит из молекул. Молекулы летают довольно хаотично, но при этом довольно равномерно. Допустим, у нас есть какой-нибудь поршень (динамик колонки), и мы этот поршень резко сдвинем. Поршень сдвинет и молекулы воздуха тоже, и в движении воздуха появятся области повышенной плотности. Влететь в эту зону сложнее, чем вылететь, поэтому из нее будет вылетать больше молекул, чем влетать, и это создаст еще зону повышенной плотности подальше по направлению от нее. В итоге зона повышенной плотности будет двигаться по всему объему воздуха, а за ней будет зона пониженной плотности. Это и есть звуковая волна. Предположим, что на пути волны есть платформа на пружине (барабанная перепонка). Из-за волны поршень-приемник тоже начнет колебания и будет примерно вторить движения первого поршня. Если приделать к поршням ручки или карандаши, которые оставляют на какой-то ленте следы, то на этой ленте будут рисоваться графики отклонения поршней от точки равновесия. Этот график – это звук. Самый чистый тон – это синусоида ($y=A*\sin(2\Pi*V*t)$, где y – отклонение от точки равновесия, A – амплитуда, V - частота, t - время). Частота – это количество колебаний, которое совершается за единицу времени, а обратная ей величина показывает, за какое минимальное время процесс начнет в точности повторяться. Барабанная перепонка может складывать несколько одновременно звучащих нот или же расчленять отдельные звуки из суммы нот. Два звука, частоты которых относятся как 2:1, считают одной и той же нотой, только в разных октавах. Звук, частота которого в 2; 4; 8; 16 и т. д. раз больше частоты исходного звука, на слух ему подобен. Для музыки этого мало, так как идеальная гармония хоть и звучит хорошо, но при этом очень скучна. Следующее по простоте рассмотрения частот – отношение 3:1. Разместим эту частоту между базовым тоном и тоном с удвоенной частотой. Для этого ноту с частотой, относящейся к базовой как 3:1, поделим на два и получим ту же ноту, только теперь она имеет соотношение с базовой 3:2. Теперь можно получить полуторную ноту к полуторной, то есть 9:4, и ее тоже поделим на два и получим 9:8. К этой ноте можно построить еще полуторную ноту к предыдущей и разместим ее частоту между 1:1 и 2:1. Получим 27:16, то есть трижды полуторную ноту. Так можно делать снова и снова…

Греки полагали, что такое построение когда-нибудь приведет к соотношению 2:1 и ряд на этом замкнется. Однако, такого быть не может, так как 3/2 в любой целой степени не равняется 2 в любой целой степени. Полуторные ноты можно находить бесконечно, но так и не попасть в базовую ноту или удвоенную. Поэтому придется остановиться, когда нота будет почти как базовая или удвоенная. Греки остановились на седьмом шаге и закрепили такую музыкальную систему [4]. Именно Пифагором впервые была проведена связь между математикой и музыкой. По легенде он, проходя мимо наковальни, заметил разницу в звуках, издаваемых большим и маленьким молотком. Затем он продолжил экспериментировать на струнах и выявил, что издаваемый звук зависит от длины и толщены струны [5]. Пифагор считал, что гармония чисел и гармония звуков упорядочивают образ мышления и дополняют друг друга [6]. Одним из многочисленных достижений Пифагора был разработанный им «Пифагоров строй». Лира была популярным в то время инструментом, и ее можно было настраивать с помощью этой технологии. Однако «Пифагоров строй» был несовершенен: расстояние между соседними звуками этого строя были различны, и чтобы сыграть мелодию от какой- либо другой ноты, лиру каждый раз нужно было перенастраивать [7].

Натуральный звукоряд, обертоновый звукоряд — ряд звуков, состоящий из основного тона и его гармонических обертонов [8]. Каждый член такого ряда называется гармоникой. Колебание струны целиком создает основной тон. А ее колебание по частям создает обертона. Частоты обертонов больше в натуральное число раз частоты основного тона. Отношения частот соседних гармоник называются интервалами: 1/2 – октава, 2/3 – квинта, 3/4 - кварта, 4/5 – терция [9].

Введем понятие «пространство кратностей». В начале координат лежит базовый звук, частота которого равна условной единице. Каждый шаг – это перемножение на число, соответствующее оси. Ось умножающая на 2 (смотрящая на нас) называется октавой, умножающая на 3 – квинтой, а умножающая на 5 – терцией. Рассмотрим плоскость квинты и терции. Если в начале координат расположим ноту «до», то слева от нее перемножением на 3 получим ноту «соль». Если мажоры/миноры будут добавляться сверху и снизу главного мажора/минора, то получим терцовую тональность. Чем ближе звуки друг к другу расположены, тем лучше они звучат. Мажор и минор нужны для централизации, то есть получения главного звука. Тональноть состоит из мажора/минора, отложенных по бокам (субдоминанта, тоника, доминанта). Если центральный уголок – мажор, то тональность мажорная, аналогично и для минора.

Формула для вычисления частоты ноты, где n-количество полутонов от исходной ноты, записывается в виде $f = 27{,}5 \cdot 2^{\frac{n}{12}}$. , где 27,5 –частота ноты «ля» в субконтроктаве[10].

Введем понятие «консонанса». Консонанс – это благозвучное сочетание звуков. Все интервалы делятся на три вида: совершенные консонансы (те, что очень хорошо звучат), несовершенные консонансы, диссонансы (неприятно звучат) [11]. Возьмем интервал в 2 звука. Частота второго звука представлена каким-то соотношением m/n. У верхнего звука m гармоник, а у нижнего n, так как умножили на n. Общее число гармоник получается m+n-1, так как одна у них совпадает. Консонанс вычисляется отношением совпадающего числа гармоник к их общему числу, то есть cons = 1/(m+n-1). Пики – это октава (50%), квинта (25%) и кварта (16,7%), то есть совершенные консонансы, что подтверждается теорией. С помощью этой теории мы можем посчитать соотношение для тех звуков, которые находятся между традиционными звуками, то есть использовать их в микрохроматике – системе, в которой используется больше 12 нот в октаве. Затем взять соотношение и посчитать, чему будет равен консонанс, – и композиторы смогут это использовать в своей работе [12].

Также установим связь между музыкой и физикой. Поразительное сходство между колебаниями мембраны барабана и формами возможных электронных орбиталей атома водорода говорит о волновой природе электрона. Вокруг ядра существует волна вероятности обнаружения электрона, и она имеет разный вид в зависимости от типа орбитали. Иными словами, это сходство говорит о том, что и колебания барабана и электронов являются гармониками.

Как итог, мы можем сказать, что математика в полной мере объясняет причину мелодичности звуков, а также дает возможность исследовать их созвучность в теории. Был показан принцип построения современного звукового ряда, изучен принцип вычисления консонанса и проведена связь между колебаниями электрона и мембраны барабана, что говорит об их волновой природе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. https://zillion.net/ru/blog/241/kak-pisat-muzyku-s-pomoshch-iu-matiematiki
2. https://mathlife.ru/m09
3. http://docroman.com
4. https://www.youtube.com/watch?v=sKo7V1xHcVM&list=WL&index=147
5. https://www.youtube.com/watch?v=spJldqiD4Jg&t=874s
6. https://school-science.ru/6/7/38265
7. https://livescience.ru/Статьи:Музыка-математика-в-цифрах
8. https://ru.wikipedia.org/wiki/Натуральный_звукоряд
9. https://www.youtube.com/watch?v=muIa7SVOtJE
10. https://ru.wikipedia.org/wiki/Равномерно_темперированный_строй
11. https://www.youtube.com/watch?v=K50UTBfYRnw&t=3969s
12. https://www.youtube.com/watch?v=12T0YsxRh18&list=LL&index=4

MATH AND MUSIC

Kapen T.
tlegen.kapen@mail.ru
Supervisor: S.V. Nikiforova, Candidate of Physical and Mahtematical Sciences
(Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev-KAI, Kazan)

Abstract. This study examines the relationship between mathematics and music. A brief history of the subject is given, as well as the reason for the harmony of notes and methods of obtaining sound series in mathematical language. In addition, methods of calculating a consonant for a pair of sounds are given.

УДК 517.1

КТО ПРИДУМАЛ ИМ НАЗВАНИЯ

Козловский Г.В., Козловский Р.В., Гараев А.М.
KozlovskiyGV@stud.kai.ru, KozlovskiyRV@stud.kai.ru, GaraevAyM@stud.kai.ru
Научный руководитель: С. В. Никифорова, к.ф.-м.н.
(Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ, Казань)

Аннотация. Математика бывает не только серьезной и скучной, ведь даже среди сложных законов и теорем есть место простым и необычным названиям. В работе сформулированы некоторые теоремы и происхождение этих названий, а также приведены примеры.

Людям не терпится определить законы для различных физических явлений, происходящих в окружающем нас мире и подчинить их своей власти. В этом им, конечно же, помогает математика, которая усложняется по мере развития человечества и технологий. Отметим, что в настоящее время уже было сформулировано доказательство теоремы о классификации простых конечных групп, занимающее 15 000 страниц, имеются некоторые задачи, гипотезы, теории, которые предположительно верны, но требуют доказательства: они называются открытыми математическими проблемами. И, казалось бы, при существовании таких серьезных задач не может быть и речи о чем-нибудь тривиальном, тем более забавном. Но ведь математики – тоже люди, им так же нужно отдыхать, расслабляться и отвлекаться от строгих формулировок и доказательств. И придумывать что-то необычное, за что цепляется человеческое внимание. Теоремы с интересными названиями и их происхождение – вот о чем пойдет речь в нашей работе.

Теорема о двух милиционерах

Формулировка. Пусть задана функция $y = f(x)$ такая, что для всех x в некоторой окрестности точки a выполняется неравенство $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$, причем при $x \to a$ функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеют конечный и равный между собой предел, то есть $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to a}\psi(x) = A$, тогда при $x \to a$ существует конечный предел функции $y = f(x)$, равный этому же значению, то есть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ [1].

Происхождение названия. Теорема получила своё название благодаря аналогии в реальном мире: если два сотрудника милиции держат между собой нарушителя общественного порядка и ведут его в отдел, то преступник, независимо от выбранного маршрута, должен идти вместе с ними. В каждой стране теорема имеет своё название: теорема сжатия, теорема о промежуточной функции, теорема о двух карабинерах, теорема о сэндвиче или «правило сэндвича», теорема о трех струнах, теорема о двух жандармах, теорема о двух городовых и другие названия [2].

Теорема о причесывании ежа

Формулировка. Не существует непрерывного касательного векторного поля на сфере, которое нигде не обращалось бы в нуль. Говоря другими словами, пусть f – ненулевое непрерывное векторное поле на сфере, тогда существует такая точка, в которой поле будет перпендикулярно данной сфере.

Происхождение названия. Неформально теорема звучит так: «Нельзя причесать ежа, свернувшегося в клубок, так, чтобы не торчала ни одна его иголка», отсюда и упоминание колючего зверька в названии теоремы. Дэвид Ричсон формулирует эту теорему следующим образом: «Вы не можете расчесать волосы на кокосе» [3].

Эта теорема также имеет интересное метеорологическое приложение: если для идеального случая (когда нормальная составляющая поля к поверхности пренебрежимо мала) рассмотреть ветер в качестве непрерывного векторного поля на поверхности планеты. Тогда, согласно теореме, на поверхности планеты в любой момент времени будет какая-то точка, в которой исключены порывы ветра, то есть нуль касательного векторного поля, которая и является центром циклона или антициклона. Таким образом, ветер закручивается вокруг этой самой точки, так как он не может быть направлен к этой точке или из нее. Поэтому если на Земле где-либо дует ветер, то в другом месте обязательно наблюдается циклон [4].

Теорема о бутерброде

Формулировка. Пусть дано k измеримых объектов в k-мерном евклидовом пространстве, тогда их можно разделить пополам (согласно их мере, то есть в объеме) с помощью одной k-1-мерной гиперплоскости.

Происхождение названия. Название теореме было дано для случая $k=3$, а 3-мя объектами различной формы были кусочек колбасы и два кусочка хлеба. В размерности $k=2$ теорема носит название теоремы о блине, поскольку её суть заключается в разрезании бесконечно тонкого блина пополам одним разрезом, то есть по прямой. Данное утверждение высказал Гуго Штейнгауз, а доказал в размерности $k=3$, не предполагая обобщения этой теоремы на n-мерный случай, Стефан Банах. Позднее это утверждение получило название теорема – Стоуна-Тьюки [5].

Лемма о трезубце

Формулировка. Пусть в треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности, точка F – центр вневписанной окружности, противоположной вершине A, а точка L – точка пересечения отрезка IF с дугой описанной окружности. Тогда точка L равноудалена от I, F, B, С.

Происхождение названия. Лемма о трезубце, которая также называется леммой о трилистнике или леммой Мансиона – теорема в геометрии треугольника, связанная со свойствами вписанной, вневписанной и описанной окружностей треугольника. Лемма о трезубце используется как вспомогательное утверждение при доказательстве многих теорем, а именно известной формулы Эйлера, а также при доказательстве существования окружности Эйлера. Название «лемма Мансиона» было дано в честь бельгийского математика Поля Мансьона. Также свое название эта лемма получила благодаря сходству с одноименным оружием ключевой для леммы конструкции [6].

Теорема о дележе пиццы

Формулировка. Пусть точка P будет внутренней точкой диска и пусть n будет кратно 4 и при этом не меньше 8. Разрежем диск на n секторов с равными углами $2\pi/n$ радиан по $n/2$ прямым, проходящим через точку P. Далее последовательно пронумеруем секторы по часовой или против часовой стрелки. Тогда сумма площадей нечётных секторов будет равна сумме площадей чётных секторов.

Происхождение названия. Теорема о дележе пиццы утверждает равенство площадей двух областей, получающихся при разрезании круга определенным образом. Название теоремы отражает классическую технику разрезания пиццы, то есть если два человека разрезают пиццу таким способом и по очереди берут себе куски, то каждый получит равное количество пиццы. Требование, чтобы число секторов было кратно 4, очень существенно, так как деление диска на 4 сектора или на число секторов, не делящееся на 4, как правило, не дает одинаковых площадей. Нечётное число секторов невозможно при прямолинейных разрезах, а разрез через центр делает оба набора секторов равными по площади вне зависимости от числа секторов [7].

Теорема о свадьбах

Формулировка. Если в двудольном графе для любого натурального k любые k вершин одной из долей связаны, по крайней мере, с k вершинами другой, то граф разбивается на пары.

Происхождение названия. Эту теорему также называют «теоремой о мальчиках и девочках». Теорема о свадьбах, доказанная Филиппом Холлом в 1935 г., решает задачу, известную под названием «задача о свадьбах»: рассматривается некоторое конечное множество юношей, каждый из которых знаком с несколькими девушками; спрашивается, при каких условиях можно женить юношей так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке? Отметим, что при решении поставленной задачи полигамия не разрешена.

Пусть имеется четверо юношей (обозначим их b_1, b_2, b_3, b_4) и пять девушек (обозначим их g_1, g_2, g_3, g_4, g_5), а знакомы они следующим образом: юноша b_1 знаком с девушками g_1, g_4, g_5; юноша b_2 знаком с девушкой g_1; юноша b_3 знаком с девушками g_2, g_3, g_4; юноша b_4 знаком с девушками g_2, g_4. Тогда возможны следующие решения: юноша b_1 женится на девушке g_4; юноша b_2 женится на девушке g_1; юноша b_3 женится на девушке g_3; юноша b_4 женится на девушке g_2.

Эту же задачу удобнее представить графически, взяв двудольный граф G со множеством вершин, разделенных на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2, которые представляют собой юношей и девушек соответственно, и соединив ребром каждого юношу со знакомой ему девушкой.

В теории графов такое паросочетание или независимое множество ребер в графе называется набором попарно несмежных ребер. Пусть дан граф $G=(V_1,V_2)$, тогда паросочетание в G – это множество попарно несмежных ребер, то есть ребер, не имеющих общих вершин. При этом максимальным паросочетанием называют такое сочетание в графе G, которое не содержится ни в каком другом паросочетании этого графа; в этом случае к нему невозможно добавить ни одно ребро, которое бы являлось несмежным ко всем другим ребрам паросочетания. Наибольшим паросочетанием называют такое сочетание, которое содержит максимальное количество ребер, при этом у графа может быть множество наибольших паросочетаний. Совершенным паросочетанием называют такое сочетание, в котором участвуют все вершины графа, то есть любая вершина графа аппроксимирует ровно одному ребру, входящему в это паросочетание. [8]

Рассмотренные нами теоремы с интересными названиями охватывают некоторые разделы математического анализа, в том числе описывают различные физические процессы. Мы считаем, что такие необычные названия теорем способствуют росту интереса к ним обучающихся, более качественному изучению материала и эффективному его запоминанию, что необходимо в наш стремительный и быстроразвивающийся XXI век.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Демидович Б. П., Кудрявцев В. А.* Краткий курс высшей математики. – М.: АСТ; Астрель, 2001. – 656 с.
2. https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_о_двух_милиционерах
3. *Richeson, David S.* Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology. – Princeton University Press, 2008. – p. 209.
4. https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_о_причёсывании_ежа
5. https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_о_бутерброде
6. https://ru.wikipedia.org/wiki/Лемма_о_трезубце
7. https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_о_дележе_пиццы
8. https://ru.wikipedia.org/wiki Теорема_о_свадьбах

WHO GAVE THEM NAMES

Kozlovskiy G.V., Kozlovskiy R.V., Garaev A.M.
KozlovskiyGV@stud.kai.ru, KozlovskiyRV@stud.kai.ru, GaraevAyM@stud.kai.ru
Supervisor: S.V. Nikiforova, Candidate of Physical and Mahtematical Sciences
(Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev-KAI, Kazan)

Abstract. Mathematics is not only serious and boring, because even among complex laws and theorems there is a place for simple and unusual names. In this paper, some theorems and the origin of these names are formulated, and examples are given.

УДК 51

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА ИНЖЕНЕРА В.Г. ШУХОВА

Комар К.О.
komarkostya2002@mail.ru
Научный руководитель: старший преподаватель С.И. Дорофеева
(Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева – КАИ, Казань)

Рассматривается применение математики в инженерных проектах В.Г. Шухова, основные сферы его деятельности, увлечения.

Первое учебное заведение России, положившее начало высшему техническому образованию – это Школа математических и навигацких наук, основанная 14(25).01.1701 в Москве по указанию Петра 1. Школа создавалась для подготовки специалистов военно-морского флота, инженеров-судостроителей, геодезистов и других. Название школы – математических и навигацких наук, один из основных предметов – математика. В школе преподавал выдающийся энциклопедист, педагог, математик Леонтий Филиппович Магницкий (1669-1739), автор первого печатного учебника «Арифметика, сиречь наука числительная. С разных диалектов на славянский язык переведенная, и во едино собрана, и на две книги разделена».

Российская инженерная школа со времени основания и по настоящее время отличалась фундаментальной физико-математической подготовкой и умением применять свои знания на практике. Как пример, выпускники первых наборов И.К. Кирилов (1689-1737) – составитель первого атласа России, руководил в 1715-1735гг. всей картографической деятельностью России; А.К. Нартов (1693-1756) построил первый в мире токарно-копировальный и винторезный станок с механизированным суппортом и набором сменных зубчатых колёс, предложил новые способы отливки пушек. [1]

Инженерная, в том числе военно-инженерная школа продолжила традиции фундаментальной подготовки: знаменитый ледокол «Ермак» был построен по чертежам С.О. Макарова (1849-1907), окончившего Мореходное училище в Николаевске-на-Амуре; патент на первый самолёт в 1881 году получил контр-адмирал, изобретатель А.Ф. Можайский (1825-1890); изобретатель радио А.С. Попов (1859-1906) учился в общеобразовательных классах Пермской духовной семинарии, а затем на физико-математическом факультете Петербургского университета.

Владимир Григорьевич Шухов (1853-1939) – инженер, талантливый математик, изобретатель, почётный член Академии наук СССР (1929), Ленинская премия (1929), Герой труда (1923 и 1932), член ВЦИКа (Всероссийский центральный исполнительный комитет – высший, наряду со Всероссийским съездом Советов, законодательный, распорядительный и контролирующий орган государственной власти Российской Советской Республики и РСФСР до 1938 года). [2]

Владимир окончил гимназию в 1871 году с выдающимся аттестатом. Выбор профессии был однозначным. Помимо выдающихся математических способностей, Шухов уже мечтал стать инженером, внести практический вклад в развитие России и благополучие своей страны.

По совету отца Владимир поступает в Императорское Московское техническое училище (ныне Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана). В те годы оно было, как и в настоящее время, учебным заведением, которое давало возможность получить базовую физико-математическую подготовку, получить глубокие знания технических дисциплин, одновременно обучаясь прикладному ремеслу, столь необходимому инженеру-практику. Учебные программы были основаны на учебных и практических курсах в Санкт-Петербургском институте корпуса инженеров путей сообщения – в то время самом передовом учебном заведении в Европе. Сдав вступительные экзамены в училище, Владимир Шухов поступил в "казеннокоштные воспитанники", жил самостоятельно в казённых дортуарах, по возможности навещал родителей.

Учиться было нелегко: студенты должны были овладеть основами физических и математических знаний, необходимых инженеру для реализации проектов, которые существуют только в неясных описаниях. Кроме того, студенты работали в чертежной, столярной, слесарной мастерских. Преподавали в училище известные ученые: доцент на кафедре аналитической механики Николай Егорович Жуковский (1847-1921) – основоположник современной гидро- и аэродинамики; профессор кафедры математики Алексей Васильевич Летников (1837-1888), с 1884 года – член-корреспондент Санкт-Петербургской Академии наук, почетный член педагогического совета академик Пафнутий Львович Чебышёв (1821-1894), прославившийся работами по теории вероятностей, теории чисел, теоретической механике, создавший ряд механизмов («шагающий», «гребной» механизмы), которые используются в настоящее время в робототехнике [3].

Мастерство Шухова привлекло внимание П. Л. Чебышева, который предложил ему совместную научно-педагогическую работу в Санкт-Петербургском университете. Шухов отказался, так как больше научной карьеры, его привлекала инженерная деятельность.

В 1876 году Шухов закончил училище с отличием и золотой медалью. В знак признания его выдающихся способностей он был освобожден от защиты дипломного проекта. В порядке поощрения Совет училища командирует его в мае 1876 года для ознакомления с достижениями промышленности в Америку, на Всемирную выставку [4].

В. Шухов обладал высокой работоспособностью и увлеченностью своими инженерными проектами

В 1896 году В. Шухов принял участие в XVI Всероссийской промышленной и художественной выставке в Нижнем Новгороде.

Самым крупным коммерческим успехом стало строительство башни в виде гиперболоида, которая была представлена в Нижнем Новгороде. Это изобретение было запатентовано Шуховым в 1895 году, незадолго до открытия выставки. Оболочка вращения гиперболоида была совершенно новой формой конструкции, которая никогда не использовалась. Это позволило ему создать пространственно изогнутую сетчатую поверхность из прямых, наклонно установленных стержней. В результате получается легкая, жесткая конструкция башни, которую можно легко и изящно рассчитать и построить. Нижегородская водонапорная башня несла на высоте 25,60м бак вместимостью 114 000л для снабжения водой всей территории выставки.

Основные сферы деятельности В.Г. Шухова.

1) Проектирование и строительство первых нефтепроводов в России, разработка теоретических и практических основ строительства магистральных трубопроводных систем.

2) Изобретение, создание и развитие оборудования и технологий нефтяной отрасли, цилиндрических резервуаров нефтехранилищ, речных танкеров; внедрение нового способа эрлифта нефти.

3) Теоретическая и практическая разработка основ нефтяной гидравлики.

4) Изобретение установки термического крекинга нефти. Проектирование и строительство нефтеперерабатывающего завода с первыми российскими установками крекинга.

5) Изобретение оригинальных конструкций газгольдеров и разработка типовых проектов хранилищ природного газа емкостью до 100 тысяч куб. м.

6) Изобретение и создание новых строительных конструкций и архитектурных форм: первых в мире стальных сетчатых перекрытий-оболочек и гиперболоидных конструкций.

7) Развитие методов проектирования стальных конструкций и строительной механики.

8) Изобретение и создание трубчатых паровых котлов.

9) Проектирование крупных систем водоснабжения городов.

10) Изобретение и создание морских мин и платформ тяжелых артиллерийских систем, батопортов.

Одна из самых известных работ, сделавшая бы знаменитым любого исследователя, – это применение в инженерной практике конструкций, основанных на поверхностях второго порядка однополостным гиперболоидом. В 1896 году Шухов разработал конструкцию стальной башни в форме гиперболоида вращения, отличающаяся прочностью, легкостью и простой построения. Башни Шухова состояли из прямых стержней, что давало большие преимущества при производстве и транспортировке, расположенных по образующим гиперболоида.

Рассмотрим подробнее, на чем основан принцип сетчатых конструкций.

Каноническое уравнение однополостного гиперболоида:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, при a=b имеем однополостный гиперболоид вращения. $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

Исследуем поверхность методом сечений.

При z=h $\quad \frac{x^2+y^2}{a^2}=1-\frac{h^2}{c^2},\quad 1-\frac{h^2}{c^2}=r^2,\quad 1-\frac{h^2}{c^2}>0$

в сечении получим окружности: $x^2+y^2=a^2(1-\frac{h^2}{c^2})$.

Сечение плоскостью, параллельной оси Oz – гипербола, а при $x=\pm a$

$$\begin{cases} x=\pm a \\ \frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm a \\ \frac{a^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1 \end{cases}$$

$\begin{cases} x=\pm a \\ \left(\frac{y}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{a}+\frac{z}{c}\right)=0 \end{cases}$, имеем пару пересекающихся прямых $cy\pm az=0$

$\begin{cases} y=\pm a \\ \frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\pm a \\ \left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{z}{a}+\frac{z}{c}\right)=0 \end{cases}$, имеем пару пересекающихся прямых $cx\pm az=0$

Талантливый увлеченный человек обычно очень многогранен. Фотография занимала в жизни великого русского инженера, конструктора и учёного Владимира Григорьевича Шухова особое, и, пожалуй, одно из главных мест. Постоянный поиск новых путей при решении технических задач был присущ Шухову и при работе с фотокамерой. Его фотографические интересы – документально-жанровая фотография, фотографии инженерных конструкций, городской пейзаж, картины московской жизни и жизни российской провинции и портреты. Самобытный свободный взгляд русского интеллигента и ученого на окружающую действительность России интересен тем, что Владимир Григорьевич делал фотографии не для публикации, не по заказу, а для себя и своего окружения. Шухов прекрасно разбирался в литературе и искусстве, знал пять иностранных языков, был широко образованным человеком и высота его развития отражается в глубине фотографических работ. Об уровне культуры инженеров Шухов выразился так: «Не мыслю инженера вне культуры. Не приобщившись к Пушкину и Лермонтову, он не достигнет ничего» [4].

Чем больше узнаешь о делах и трудах В.Г. Шухова, тем больше поражаешься гению русского инженера и ученого. Кажется, здесь уже столько было перечислено его уникальных изобретений и проектов. Но этот перечень можно продолжать и продолжать. Говоря о В.Г. Шухове и его работах, постоянно приходится повторять слова «первый», «впервые» и добавлять самые яркие эпитеты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. https://gumrf.ru/news/1/news_250121_3.html
2. https://www.bstu.ru/about/meeting/shukhov.

3. Просветов Г.И. История техники: Учебно-практическое пособие. – М.: «Альфа-Пресс», 2017. -168с.
4. Васькин А.А. Шухов: Покоритель пространства /Александр Васькин. –М: Молодая гвардия, 2018. -415с.

MATHEMATICAL TRAINING OF ENGINEER V.G. SHUKHOV

K.O. Komar
komarkostya2002@mail.ru
Supervisor: Senior Letcture S.I. Dorofeyeva
Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev-KAI, Kazan

The application of mathematics in engineering projects of V.G. Shukhov is considered, the main spheres of his activity, hobbies.

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Мастюков К.Ш., Сухих М.Е., Гашигуллин К.А.
olushax231@gmail.com,
Научный руководитель: Якупов З.Я., к.ф.-м.н., доцент.
Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева - КАИ

Аннотация: объяснить, что такое линеаризация функции, как линеаризировать, каким образом помогает в исследованиях.

Теория: Линеаризация (от латинского linearis - линейный) - один из способов аппроксимации представления замкнутых нелинейных систем, при котором изучение нелинейных систем заменяется анализом систем линейных, считая, что она эквивалентна исходной системе. Методы линеаризации по своей сути ограничены, т. е. эквивалент исходной нелинейной системы и ее линейная аппроксимация зарезервированы только для ограниченного пространства или временного масштаба системы, или для определенных процессов, и, если система использует линеаризацию одного, вы можете узнать многие качественные и особенно количественные характеристики нелинейных систем.

Объектами линеаризации могут выступать как функции, так и дифференциальные уравнения и их системы. Рассмотрим методы касающихся линеаризации функций. Многие явления в природе и обществе представляют собой сложные нелинейные зависимости и совокупности таких зависимостей, что затрудняет оценку и изучении данных процессов, а также их прогнозирование. Выгода линеаризации функции заключается в возможности легкого анализа параметров нелинейной зависимости. Один из методов заключается в приведении нелинейной функции к линейной функции по параметрам. Второй способ широко применяется в эконометрике к функциям, относящимся к виду степенных функций, и заключается в логарифмировании таких функций .Результатами второго метода являются линейно-логарифмические модели и в частности полулогарифмические модели.

Пример 1

Разрядка конденсатора

Во время процесса разрядки конденсатора в цепи появляется электрический ток, уравнение (1)

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad (1)$$

Напряжение в цепи вычисляется по формулам, уравнение (2)

$$U = IR = \frac{q}{C}, \qquad (2)$$

Подставляя уравнение 1 в уравнение 2 получаем:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{q}{RC},$$

Интегрируем обе части:

$$\int \frac{dq}{q} = \int \frac{dt}{RC},$$

Получаем:

$$ln\left(\frac{q}{q_0}\right) = -\frac{t}{RC},$$

$$q = q_0 e^{\frac{-t}{RC}}.$$

Теперь строим графики q(t) – рис.1 и ln(q(t)) – рис. 2.

Рис.1

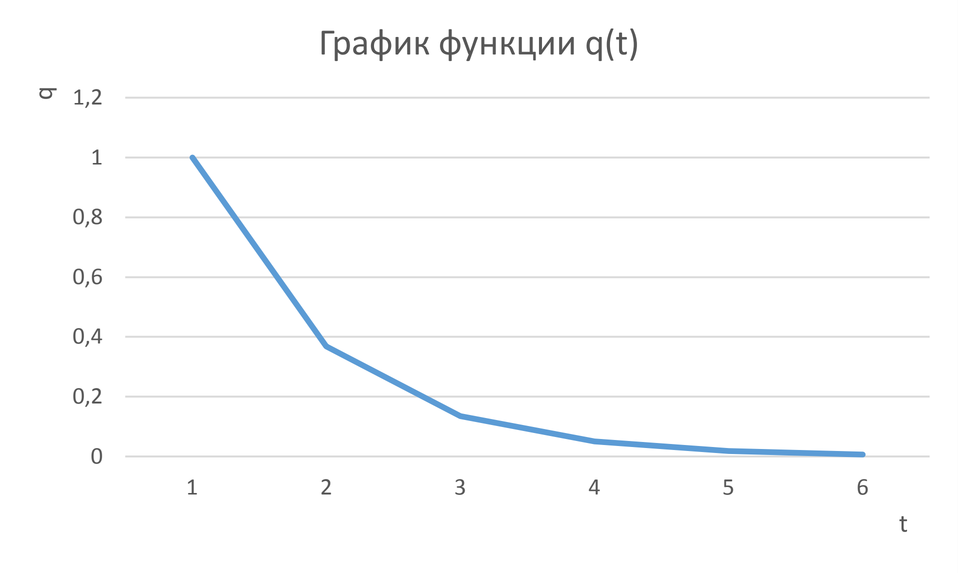
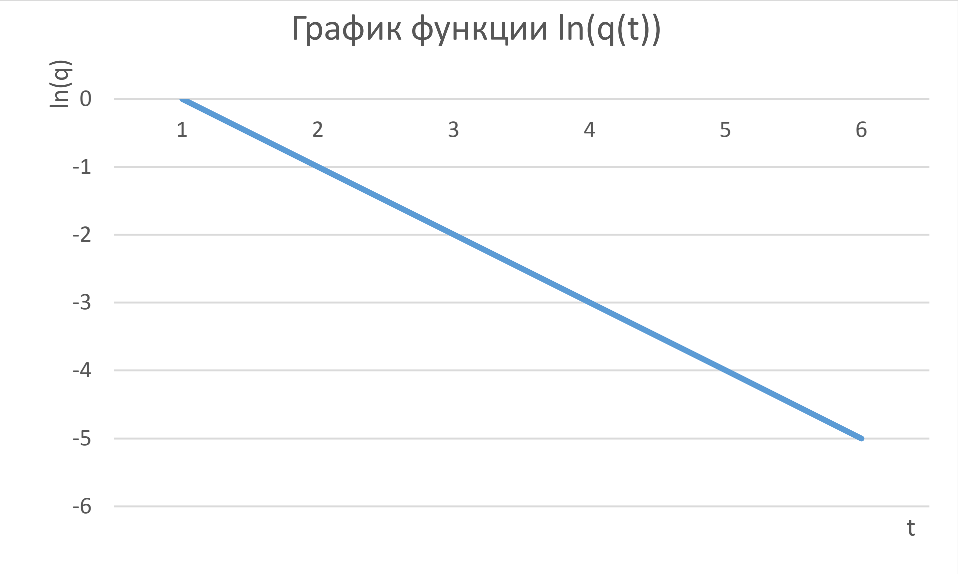


Рис. 2



Благодаря представлению функции в линейном виде, можно с легкостью определить коэффициент 1/RC.

Пример 2

Функция Кобба-Дугласа

Общий вид:

$$Q = A \times L^{\propto} \times K^{\beta}.$$

Функция Кобба —Дугласа — производственная функция (или функция полезности), отражающая зависимость объёма производства Q от создающих его факторов производства — затрат труда L и капитала K[1]

Эта функция легко линеаризируется путем логарифмирования:

$lnQ = lnA + \propto lnL + \beta lnK$.

Q = Q(L, K) – имеет вид степенной функции, посредством логарифмирования получаем:

lnQ(lnL, lnK) – линейную функцию с коэффициентами α и β.

Продифференцируем обе части уравнения:

$\frac{dQ}{Q} = \propto \frac{dL}{L} + \beta \frac{dK}{K},$

При K = const можем найти эластичность Q по L:

$$\propto = \frac{dQ/Q}{dL/L}.$$

При L = const находим эластичность Q по K:

$$\beta = \frac{dQ/Q}{dK/K}.$$

Понятие эластичности широко используется в экономическом анализе. Коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов изменится величина переменной **Q** при изменении переменных **L** или **K** на один процент. Таким образом, в модели параметры α и β - это ни что иное, как коэффициенты эластичности переменной **Q** по **L, K**.[2]

Заменяя lnQ на z, lnL на x, lnK на y, мы можем построить функцию z(x, y):

z = a + αx + βy.

В таком виде функция воспринимается намного легче.

Вывод:

Таким образом, можно сделать вывод, что линеаризация – это такое преобразование функции, которое нелинейное уравнение, либо функцию сводит к линейному. Линеаризовать можно несколькими способами: одни из которых – метод логарифмирования и замена переменных. Данный метод сильно помогает в научных исследованиях, с его помощью можно упрощать математические расчеты, строить более наглядные и понятные графики зависимости величин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. ru.wikipedia.org > Функция Кобба — Дугласа
2. http://sun.tsu.ru/mminfo/2016/Dombrovski/book/chapter-4/chapter-4-9.htm

УДК 519.673

РАСЧЕТ МНОГОКАНАЛЬНОЙ ДИАФРАГМЫ НА ИЗМЕРИТЕЛЬНОМ ТРУБОПРОВОДЕ

Мухаметов А.Н., Абдуллов Т.С.

aidar-10-10@yandex.ru, abdullov.1966@mail.ru

Научный руководитель: З.Я. Якупов, к.ф.-м.н., доцент

(«Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ» (КНИТУ-КАИ), г. Казань)

В данной работе изучены метрологические характеристики потока газа, которые были получены при помощи CFD решателя ANSYS Fluent и коэффициентов, рассчитанных по методике измерений 3416-2013. Установлено, что значения массового расхода газа и коэффициент истечения определяются с высокой точностью.

Введение

Наиболее популярным решением для измерения расхода газов и жидкостей является стандартная диафрагма. Диафрагма преобразует изменение давления в расход среды. Она представляет из себя круглую металлическую пластину с единственным отверстием в центре, расположенную поперек потока газа/жидкости для создания перепада давления. Многоканальная диафрагма (МД) – это просто усовершенствованная и улучшенная конструкция стандартной пластины с отверстиями, которая, как следует из названия, состоит из нескольких отверстий вместо одного.

В данной работе анализируются коэффициент истечения, массовый расход и перепад давления для газа.

Методы решения

Многоканальная диафрагма исследуется при ранее подготовленных граничных условиях. Метрологические характеристики потока исследуются при помощи перепада давления до и после МД. Граничные условия на входе в измерительный трубопровод (далее – ИТ) задавались в виде профиля продольной и радиальной скорости и параметров турбулентности, соответствующих развитому течению. Для получения профиля проводились расчеты в длинной трубе, более 80D, постоянного сечения с однородными граничными условиями на входе. Наиболее метрологически значимой характеристикой является массовый расход, который определяется по формуле:

$$q_m = \frac{\pi}{4} \cdot C \cdot \varepsilon \cdot \left(2 \cdot d\right)^2 \cdot E \cdot \sqrt{2 \cdot \Delta P \cdot \rho}\,.$$

Такие параметры, как коэффициент расширения (ε) и скорости входа (E), определяются по методике измерения 3416-2013. Взаимодействие данных параметров между собой демонстрирует то, как изменение одного параметра влечет изменение другого.

CFD–моделирование выполнено для МД, которая помещена в ИТ круглого сечения с диаметром 100 мм. Толщина МД составляет 5 мм согласно методике. Выбран турбулентный режим потока с числом Рейнольдса более 10^5. Для достижения этого уровня скорость на входе выбрана равной 10 м/с. В качестве рабочей среды выбран воздух с плотностью 1,2 кг/м^3.

CFD–моделирование

В работе использована шестигранно-призматическая неструктурированная сетка. Метод MultiZone позволяет использовать гексаэдрическое расположение ячеек. Для правильного моделирования пристеночного слоя использовался метод Inflation с опцией задания толщины первого слоя.

Основное уравнение турбулентного потока выбрано для усреднения по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS). Процесс решения уравнений требует, чтобы вычислитель решал уравнения Навье-Стокса на каждом конечном элементе, созданном на этапе построения сетки. Основное уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho u_i\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_i\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_i u_j\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho u_i\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\rho\overline{u_i' u'_j}\right).$$

Для решение незамкнутой системы с неизвестными функциями была выбрана модель замыкания переноса напряжений k-ω SST. Данная модель была выбрана из-за надежной и точной схеме расчета пристеночной скорости.

Граничные условия, использованные при CFD–моделировании: начальная скорость 10 м/с на входе. При этом коэффициент интенсивности турбулентности - 3%, и гидравлический диаметр – 0.1 м. Статическое давление на выходе равно 0.

Результаты

Для подтверждения правильного построения сетки и подтверждения независимости решения от размера сетки был использован коэффициент истечения.

Реализованная k-ω SST модель, которая использовалась при CFD–моделировании подтверждена результатами расчетов расхода по ГОСТ 8.586.1-5 и ГСССД МР 242-2015. Массовый расход для угловой диафрагмы с одним отверстием рассчитывается с использованием перепада давления.

Модель турбулентности k-ω SST обеспечивает близкие значения коэффициента истечения для углового, трёхградусного способов отбора в сравнении с рассчитанными по 3416-2013. Это подтверждает, что структура потока за диафрагмой моделируется верно, и эту модель можно использовать для расчета метрологических характеристик. Погрешность смоделированного коэффициента истечения находится в диапазоне $\pm 0,5$ %.

Заключение

Показано, что модель турбулентности k-ω SST позволяет правильно определить структуру потока в области диафрагмы. Анализ рассчитанных параметров турбулентного течения в гладком прямолинейном трубопроводе говорит о снижении прямолинейных участков после диафрагмы за счет стабилизирующего эффекта. На основании параметрического анализа турбулентного течения в ИТ выработаны рекомендации для построения сеток необходимого качества.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. T. Zhao, J. Zhang, L. Ma "A general structural design methodology for multi-hole orifices and its experimental application", Mechanical Science and Technology, vol. 25, no. 9, pp. 2237-2246, 2011.
2. S. Malavasi, G. Messa, U. Fratino, A. Pagano "On the pressure losses through perforated plates", Flow Measurement and Instrumentation, vol. 28, no. 1, pp. 57-66, 2012.
3. H. Shanfang, M. Taiyi, W. Dong, L. Zonghu "Study on discharge coefficient of perforated orifices as a new kind of flowmeter", Experimental Thermal and Fluid Science, vol. 46, pp. 74-83, 2013.
4. Р. А. Тырышкин, А. Н. Сабирзянов, В. А. Фафурин, В. В. Фефелов, В. Б. Явкин, Применение RANS моделей турбулентности для расчета коэффициента расхода в расходомере со стандартной диафрагмой // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2010, выпуск 2, 109–116
5. Ахлямов М. Н. Математическое моделирование течения многокомпонентной газовой смеси в трехмерной постановке задачи. Определение дополнительной погрешности коэффициента истечения от сокращения длин прямых участков: Дис. на соиск. уч. ст. канд. техн. наук: 05.13.18 / КГТУ. — Казань, 2005. — 138 с

6. Ганиев Р. И., Николаев Н. А., Сабирзянов А. Н. и др. Выбор сетки и модели турбулентности для расчета коэффициента расхода стандартной диафрагмы // Изв. Вузов. Авиационная техника, 2008. — № 4. — С. 21–24.

CALCULATION OF MULTI-CHANNEL DIAPHRAGM ON THE MEASURING PIPELINE

Mukhametov A.N., Abdullov T.S.
aidar-10-10@yandex.ru, abdullov.1966@mail.ru
Supervisor: Z.Ya. Yakupov, Ph.D of Physico-mathematical Sciences, Docent
(Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev – KAI, Kazan)

In this study, the metrological characteristics of the gas flow were studied, which were obtained using the ANSYS Fluent CFD solver and the coefficients calculated using the 3416-2013 measurement method. It was found that the values of the gas mass flow rate and the outflow coefficient are determined with high accuracy.

УДК 51:9

О МАТЕМАТИКЕ, ИСТОРИИ И КНИТУ-КАИ

Пионтковская А.А., Сафин А.Д.
apiontkovskaya@mail.ru,
aynursafin@mail.ru
Научный руководитель: Дорофеева С.И.
(Казанский Национальный Исследовательский Технический Институт – Казанский авиационный институт, Казань)

Аннотация. Приводятся факты истории КАИ, радиотехнического факультета, фамилии выдающихся сотрудников и выпускников КНИТУ-КАИ. Обращается внимание на роль математики в инженерной подготовке радиоинженеров.

Мы – студенты КНИТУ-КАИ, вуза, которому в 2022 году исполнится 90 лет. С первых шагов организации Казанского авиационного института в 1932 году активное участие принимали Николай Гурьевич Четаев (1902-1959), в то время аспирант, а в последствии известный механик и математик, член-корреспондент АН СССР, лауреат Ленинской премии.

Несмотря на трудности, институт быстро рос и развился, поддержку оказывал Наркомат тяжёлой промышленности. Заместитель наркома, начальник Глававиапрома Пётр Ионович Баранов (1892-1933) лично посетил КАИ в 1933 году. Совместно с руководством института он наметил основные направления развития и создание современной материальной базы нового вуза. [1] Казанский авиационный институт когда-то, очень недолгое время носил имя П.И. Баранова.

Мы – студенты пятого факультета: радиотехнического, ИРЭТ, а теперь Института радиоэлектроники, фотоники и цифровых технологий, рожденного в марте 1952 года был подписан приказ министра высшего образования СССР об организации в КАИ факультет авиационной радиотехники.

В Казани имелись предпосылки для развития радиотехники и радиотехнического образования: опыты двадцатых годов 2-й Казанской базы радио формирования для Красной Армии под руководством инженера А.Т. Углова, опыты по трансляции на волжских судах музыкальных программ. В майские дни 1921 года на улицах города впервые в стране был задействован усилитель с рупором, через который передавалась «устная газета». Это событие было отмечено в газетах «Правда» и «Известия» от 7 мая 1921 года и уже с 28 мая по 1 июля 1921 года в Москве были организованы опыты по испытаниям усилителя телефонной передачи системы А.Т. Углова. [2]

При подготовке инженеров и в КАИ, и в КНИТУ-КАИ особое внимание уделялось физико-математической подготовке. Для студентов были написаны учебники: В.Е. Григорьев «Основы теории поля и простейшие дифференциальные уравнения математической физики». Казань: Казанский авиационный институт, 1963 год; В.Е. Григорьев, Б.Л. Крылов, А.З. Петров «Основы теории функций комплексного переменного». Это были первые учебники по данным разделам математики, написанные для студентов инженерного вуза. Казань: издание Казанского Авиационного Института, 1945 год. Первый учебник для абитуриентов, изданный Татарским книжным издательством также был написан преподавателями математики: И.И. Вовченко, П.А. Лежниным, М.Л. Щевелёвым «Сборник конкурсных задач по математике», 1967 год.

В 1952 году вновь образованному радиотехническому факультету передано здание на углу улиц Карла Маркса и площади Свободы. Это здание, построенное в начале XIX века, судьбой предназначалось для радиотехнического факультета. В нем когда-то располагалось главная почтовая контора. Приезжие должны были регистрировать свои подорожные в специальном журнале: записи оставили жёны декабристов, направлявшиеся в Сибирь, А.С. Пушкин, А.И. Герцен и другие.

С А.И. Герценом связана следующая история. Революционер-демократ и выдающийся писатель А.И. Герцен был в Казани проездом. В апреле 1835 года на казенных лошадях он направился в Пермь отбывать определенный ему срок ссылки. По пути Герцен чуть не утонул, перенаправляясь через разлившуюся весной Волгу на утлом дощанике. В мемуарах «Былое и думы» Герцен так описывает свой приезд в Казань.

«… Через четверть часа мы были на берегу стен Казанского кремля, пере дрогнувшие и вымоченные. Я вошел в первый кабак, выпил стакан пенного вина, закусил печеным яйцом и отправился в почтамт». Промокший до нитки Александр Иванович, не добившись у начальника номера для ночлега, ночевал в здании почтовой конторы, ныне часть пятого здания КАИ, устроившись на столе в канцелярии, завернувшись в шинель и подложив под голову, вместо подушки, толстую книгу. Здание почтовой конторы помещалось на улице Покровской (современная ул. Карла Маркса). Наутро А. И. Герцену удалось добиться разрешения жандармского генерала Апраксина остановиться в Казани. Случай этот описан в XIII главе самого известного произведения Герцена «Былое и думы».

В 1829г А.И. Герцен поступил на физико-математический факультет

Московского университета, который в то время был центром и общекультурным, общественно – политическим. В те годы в нем учились и Белинский, Тургенев, Огарев, Грановский и другие известные представители русской общественной мысли.

А.И. Герцен был одним из лучших студентов физико-математического факультета. К сожалению, в университетском архиве не удалось, обнаружить документов о студенческих годах А.И. Герцена, но известно, что при окончании обучения его наградили серебряной медалью за работу «Аналитическое изложение солнечной системы Коперника», а также присвоили степень кандидата.

В «Былое и думы » Герцен пишет: «Содержание спрятано в … алгебраических формулах для того, чтобы, раскрывая закон не повторять сто раз одного и того же».[3]

В этом же здании, здании радиотехнического факультета, в 1888 году состоялась официальное открытие первой городской телефонной станции.

Студентам Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева, тем которые учатся сейчас, можно напомнить что первое исполнение симфонической поэмы А.Н. Скрябина «Прометей» со световым сопровождением произошло 6 апреля 1962 года в здании радиотехнического факультета КАИ (Казанский авиационный институт, в настоящее время КНИТУ-КАИ). Световое сопровождение было разработано и изготовлено студентами КАИ и консерватории. Работа в СКБ «Прометей» созданным Булатом Махмудовичем Галеевым (1940-2009), для многих студентов была первым шагом в научно-исследовательской работе, сочетала умение конструировать аппаратуру, необходимую для светового сопровождения и интерес к музыке.

Очень жалко, что нет теперь при КНИТУ-КАИ «Прометея», пользующегося международной известностью. Б.М. Галеев, доктор философских наук (1987 г.), член-корреспондент АН РТ директор научно-исследовательского института экспериментальной эстетики «Прометей» при КАИ (до 1995 года – СКБ-5), сумел создать коллектив увлечённых людей: студентов КАИ, консерватории, «союз физиков и лириков», завоевавший международное признание. [4].

Итак, пятое учебное здание КАИ, связь истории и современности, путь от первой телефонной станции к исследованию современных информационных технологий и средства связи.

Пятый факультет закончили директора крупных Казанских предприятий: Рашид Усманович Апаков, Наиль Гумерович Хайруллин, Шамиль Мидхатович Чабдаров, председатель национального банка РТ Евгений Борисович Богачев, олимпийский чемпион Александр Павлович Курынов, выпускники служат в Российской армии, выступают на сцене и воспитывают студентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Казанский авиационный институт. //*Н.Б. Вахитов, С.В. Дмитриев, Т.К. Сиразетдинов, Я.Ш. Шарапов.* Под общ. Ред. проф. *Ю.В. Кожевникова.* М.: Машиностроение, 1986.-240 с.

2. Казанский авиационный институт. //Сб. статей под ред. проф. *В.И. Локая.* Казань: Татарское кн. изд-в*о.* 1982.-272 с.

3. *Майстров Л.Е. А.И. Герцен* о математике с. 481-488 //Историко-математические исследования Вып. 8.М : Гос. Изд-во технико – теор. литературы 1955. -636с

4. *Дорофеева С.И.* Теорема имени… // Профессиональные коммуникации в научной среде – фактор обеспечения качества исследований: материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Альметьевск: Изд-во ООО «Конверт». – 2020. С. 77-80.

About MATHEMATICS, HISTORY, AND KNITU-KAI

Piontkovskaya A. A., Safin A.D.
apiontkovskaya@mail.ru,
aynursafin@mail.ru
Scientific supervisor: Dorofeeva S. I.
(Kazan National Research Technical Institute – Kazan Aviation Institute, Kazan)

Annotation. The facts of the history of KAI, the Radio Engineering faculty, the names of outstanding employees and graduates of KNITU-KAI are given. Attention is drawn to the role of mathematics in the engineering training of radio engineers.

УДК 517:621

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИКИ В ИНЖЕНЕРНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Слушкин М.А., Дорофеева С.И.
mslushkin17@mail.ru
Научный руководитель С.И. Дорофеева
(Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева-КАИ, Казань)

Аннотация: Рассматривается математика, как основа образования современного инженера, как язык описания происходящих процессов и явлений. В данной статье проводится анализ применения математики в инженерных расчетах в таких предметах, как основы теории цепей, радиотехнические цепи и сигналы и электродинамика и распространение радиоволн. Рассмотрены такие операции как дифференцирование и интегрирование, дифференциальное и интегральное исчисление. Также рассмотрено практическое применение элементов теории поля.

В настоящее время стремительно развиваются новые технологии, и скорость этого развития с каждым годом становиться все больше. Это требует подготовки инженеров в различных развивающихся областях. Если проанализировать подготовку инженеров в университетах по различным техническим специальностям, можно заметить, что для любой специальности большое время подготовки выделено для изучения математики. Исследователи отмечают, что «в инженерных знаниях, как и в математических, применяются одни и те же методы рассуждений, целью которых является осуществление оптимального варианта решения при исследовании конкретной профессиональной проблемы» [1].

Для усвоения основных положений радиотехники, электроники, основ теории цепей, электродинамики и т.д. необходима качественная фундаментальная физико-математическая подготовка, тем более такая подготовка необходима разработчикам новых систем, исследователям, всем тем, кто воплощает идеи в жизнь [2].

Одними из основных направлений применения математики в инженерных расчетах является использование формул и их преобразование, а также составление и решение дифференциальных уравнений. Формулы и их преобразование являются неотъемлемой частью любой специальности. Разберем это на примере учебного пособия «Основы теории цепей и сигналов в радиотехнических и телекоммуникационных системах» [3]. Основными операциями, использующимися для связи одних величин с другими, является дифференцирование и интегрирование. Например, формулы для определения мгновенного значения напряжения:

$$u(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta q} = \frac{dW}{dq} \quad ,$$

где W – энергия электрического поля, q = f(t) – количество электричества.

То есть мгновенное значение напряжения – производной от энергии электрического поля. Для того, чтобы найти энергию электрического поля, необходимо вычислить интеграл:

$$W = \int_0^q u dq = \int_0^t uidt \, .$$

Связь токов и напряжений через производные и интегралы позволяет составлять дифференциальные уравнения. То есть при определения каких-либо параметров электрической цепи инженер сталкивается с необходимостью умения решать дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений. Для определения параметров цепи, передаточных характеристик может использоваться операторное исчисление, основанное на прямом и обратном преобразованиях Лапласа. Например, для определения переходной характеристики цепи необходимо найти ее отклик на единичный скачок. Это можно сделать, используя операторный метод:

$$H(p) = \frac{K(p)}{p} \quad ,$$

H(p) – изображение переходной характеристики, K(p)- операторная передаточная функция цепи, 1/p – изображение единичного скачка по Лапласу. Следовательно, в области электроники инженер должен хорошо разбираться в дифференциальном и операторном исчислении, уметь интегрировать и дифференцировать.

Для области радиоэлектроники важным разделом является теория поля. В этом можно убедиться на примере учебника по предмету «Электродинамика и распространение радиоволн» [4]. Основой науки электродинамики являются уравнения Максвелла, связывающие $\vec{E}(\vec{r},t)$ и $\vec{H}(\vec{r},t)$ – напряженность электрического и магнитного полей – с их индукциями $\vec{D}(\vec{r},t)$ и $\vec{B}(\vec{r},t)$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0.$$

Для характеристики поля используются такие понятия, как ротор, дивергенция и циркуляция. Для их нахождения необходимо уметь вычислять криволинейные и поверхностные интегралы, брать частные производные. Если посмотреть на формулы, используемые в электродинамике, можно заметить, что большая их часть использует интегралы по объему и поверхности, частные производные и их свойства.

Одна из основных формул, связывающая поверхностные и тройные интегралы – формула Остроградского-Гаусса. Поток векторного поля

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

равен:

$$\iint_{\sigma} Pdydx + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz \ .$$

или в терминах теории поля:

$$\Pi = \iint_{\sigma} (\vec{a},\vec{n})\, dS = \iiint_{V} div(\vec{a})dV \ .$$

P, Q, R имеют непрерывные частные производные в области G, V – область, ограниченная кусочно-гладкой замкнутой поверхностью $\sigma \in G$, $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к поверхности σ. Смысл формулы Остроградского-Гаусса проще представить, если вместо электромагнитного поля представить поток жидкости: количество жидкости, протекающей через замкнутую поверхность в единицу времени, равно суммарной мощности источников и стоков, находящихся в области V. Видим, что без знания основ математики и в данной области невозможно обойтись, так как все преобразования и вычисления сводятся к основным математическим операциям, таким, как дифференцирование и интегрирование сложных функций.

Другим важным приложением математики является разложение функции в ряд Фурье. Это разложение обычно используется для анализа негармонических сигналов. Разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$s(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\Omega t - \psi_n)$$

Для определения коэффициентов a_0, A_n используется интегрирование. Такое разложение позволяет определить постоянную составляющую, амплитуды и фазы гармоник, входящих в сигнал. Разложение функции в ряд Фурье делает возможным проводить анализ прохождения негармонических сигналов через электрические цепи.

Таким образом, на примере пособий по основам теории цепей, радиотехническим цепям и сигналам и электродинамике мы убедились, что математика играет важную роль в инженерных расчетах. Любой инженер при разработке или расчете чего-либо будет сталкиваться с той, или иной областью математики, а значит перед тем, как приступить к изучению специальных дисциплин каждый инженер должен разобраться в математике, имеющей большую практическую значимость в разных областях инженерии.

Знание математики и умение применять ее на практике позволит осваивать новые технологии, новые отрасли приложения инженерных знаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Абдухаликова Д.Т. Роль предмета «Высшая математика» при подготовке инженера [Электронный курс]: научная статья. https://cyberleninka.ru/article/n/rol-predmeta-vysshaya-matematika-pri-podgotovke-inzhenera/viewer

2. Анфиногентов В.И., Дараган М.А., Дорофеева С.И. Математика в задачах радиосвязи и телекоммуникаций: Учебное пособие. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2013.- 128с.

3. Козлов В.А. Основы теории цепей и сигналов в радиотехнических и телекоммуникационных системах: Учебное пособие / В. А. Козлов, Е.Ф. Базлов, Д.В. Шахтурин. – Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2018. - 464с.

4. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн: Учебник для вузов. – 2-изд., испр. – М.: Горячая линия – Телеком, 2004.- 558с.

УДК 004

МОБИЛЬНЫЙ ПЯТИОСЕВОЙ РОБОТ-МАНИПУЛЯТОР С ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМОЙ КООРДИНАТ

Столяренко Д.В.

denstol20020308@gmail.com

Научный руководитель: А.Ю. Погодина, доцент, к.ф-м.н.,

(Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева - КАИ, Казань)

Аннотация. В данном исследовании рассматриваются современные промышленные роботы–манипуляторы, которые широко используются для автоматизации и увеличения производительности труда, а также на опасных производствах. Сконструирован оригинальный манипулятор-прототип, для обеспечения его работы был написан оригинальный программный код. Проведенные испытания подтвердили работоспособность прототипа.

Цель проекта – разработка и изготовление макета собственного мобильного 5-осевого робота-манипулятора с декартовой системой координат для получения опыта разработки роботизированных кинематических систем и комплексного повышения квалификации во всех причастных к данным разработкам сферах.

Для достижения цели проекта были поставлены следующие задачи:

- расчет кинематической модели 5-осевого робота-манипулятора;
- разработка и монтаж электрической схемы макета;
- проектирование, изготовление и сборка конструкции робота-манипулятора;
- разработка софта (ПО) для работы робота-манипулятора и взаимодействия с ним оператора;

Для решения поставленных задач было решено использовать следующие методы:

1. Сбор и анализ информации о принципах работы современных роботов-манипуляторов;
2. Изучение литературы по программированию языками Python, HTML, Arduino;

Наши гипотезы состояли в том, что:

1. Разработка собственного 5-осевого робота-манипулятора возможна;
2. Возможна работа робота-манипулятора от аккумуляторного ИП с прежним КПД;
3. Возможна разработка собственного ПО для управления роботом-манипулятором посредством ввода координат;

Проблема данного исследования заключается в отсутствии в открытом доступе расчетов, чертежей и программного обеспечения для изготовления роботов-манипуляторов, а также, в стремлении автора приобрести опыт разработки роботизированных кинематических систем.

Расчет кинематической модели 5-осевого робота-манипулятора

Самая древняя наука – это математика, она есть везде, даже в роботах. Знание этой замечательной науки всегда выручит при создании сложных алгоритмов, или при оптимизации уже готовых программ, делая их более легкими для выполнения процессором.

Кинематическая модель принимает координаты и считает углы следующим образом:

Известно: AB = AC = 100 (мм);

Входные данные: координаты (x, y, z);

Расчеты:

$\angle \mathrm{A} = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\pi}{2}$ – установка 1 оси в направлении координат;

$\mathrm{AC}^2 = x^2 + y^2 + z^2$ – расчет расстояния от (0, 0, 0) до (x, y, z);

$\angle \mathrm{C} = \frac{2\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AB}^2}$ – установка 3 оси в направлении координат;

$a = \frac{\pi - \angle C}{2}$; $b = \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ – расчет вспомогательных переменных;

$\angle B = \pi - (a + b)$ – установка 2 оси в направлении координат;

$\angle D = 90$ – установка 4 оси в горизонтальное положение;

$\angle E = \left(\frac{3\pi}{2} - (\pi - b) - a\right)$ – установка 5 оси в горизонтальное положение.

Данная кинематическая модель была запрограммирована на языке C++ в контроллер NodeMCU ESP8266 [1], который является «мозгом» манипулятора. Координаты вводятся в манипулятор через форму на сайте (192.168.1.1) внутри локальной сети Wi-Fi, которую создает контроллер манипулятора [2]. Контроллер делает 3000 вычислений углов в секунду. После вычислений, полученные углы применяются к настоящим осям манипулятора.

В заключение отметим, что цели научно-практической работы достигнуты. Гипотезы были подтверждены, а именно:

- была разработана кинематическая модель манипулятора;
- построенная электрическая схема манипулятора проста и поэтому потребляет мало электроэнергии (до 5вт/ч), она отлично показала себя в работе, блока питания (220в), так и от самодельного преобразователя напряжения;
- действительно, нам удалось разработать и изготовить макет 5-осевого робота-манипулятора;
- текущее программное обеспечение робота полностью удовлетворяет поставленным требованиям;

По завершении работ автором получила опыт работы в следующих сферах:

- Стереометрия (математика);
- Радиоэлектроника;
- 3d-моделирование и инженерия;
- Программирование;

Таким образом, автор открыл для себя много нового, привнеся свой вклад в работу над макетом робота-манипулятора. Ценность всех разработок в том, что их легко масштабировать, например, увеличить размеры манипулятора, а значит и его мощность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. https://myrobot.ru/wiki/index.php?n=Experiences.NodemcuV3Pinout
2. https://randomnerdtutorials.com/esp32-esp8266-input-data-html-form/

MOBILE FIVE-AXIS ROBOT MANIPULATOR WITH CARTESIAN COORDINATE SYSTEM

Stolyarenko D.V.

denstol20020308@gmail.com

Supervisor: A.Yu. Pogodina, Candidate of Physical and Mahtematical Sciences

(*Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev - KAI, Kazan)*

Abstract. This study examines modern industrial robotic manipulators, which are widely used to automate and increase labor productivity, as well as in hazardous industries. An original prototype manipulator was constructed, and the original program code was written to ensure its operation. The tests carried out have confirmed the performance of the prototype.

УДК 51

МАТЕМАТИКА, ФАНТАЗИЯ, ФАНТАСТИКА

Тебетеев Д.А.

danil.tebeteev@yandex.ru

Научный руководитель: С. И. Дорофеева

(Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева-КАИ, Казань)

Аннотация: В работе прослеживается взаимосвязь математики с научной фантастикой, приводятся примеры воплощения фантастических идей в реальные технические проекты.

Математика, креативное мышление, фантазия и научная фантастика… Являются ли эти понятия взаимосвязанными?

Стивен Хокинг (1942 - 2018), один из величайших физиков современности считал: «Научная фантастика может быть полезной — она стимулирует воображение и избавляет от страха перед будущим и наукой. Также как и математика».

Только плохо разбирающиеся в математике люди считают её наукой сухой, в которой главное значение принадлежит логике, счёту, вычислениям. В статье «Абстракция и математическая интуиция» французский математик Жан Александр Дьедонне писал: «Все математики единодушно признают основополагающую роль, которую воображение играет в математическом творчестве. Логика – это необходимый и скучный инструмент (известно, что математики её, вообще говоря, не слишком ценят); ею надо уметь должным образом владеть, так как она позволяет следить за доказательством и проверять его… но не изобретать!» [1]

Воображение, фантазия могут предлагать множество вариантов, связывающих хорошо разработанные и новые области математики. Из множества комбинаций и сочетаний фактов математикам предстоит выбрать вариант, обеспечивающий решение задачи. Если выбранная комбинация никем ранее не применялась – это открытие. Французский математик Анри Лебег (1875 - 1941) писал: «Лишь когда открытие сделано, вмешивается логика для проведения контроля; она окончательно удостоверяет, истинно или иллюзорно открытие; её роль, таким образом, лишь вспомогательная.» [1] А. Лебег также утверждает, что открытие – результат креативности, творческого воображения, и только потом – логика, вычисления, доказательства.

Всё, что родилось сначала в воображении писателей-фантастов Жюля Верна, Николая Кибальчича, Константина Циолковского, Владимира Федоровича Одоевского, Якова Перельмана и других, затем просчитывалось, конструировалось, стало привычным в повседневной жизни. Обратите внимание: среди фантастов названы К. Циолковский, В. Одоевский, Я. Перельман.

Константин Эдуардович Циолковский (1857-1935 гг.) – русский советский ученый и изобретатель в области аэродинамики, ракетостроения, основоположник современной космонавтики. Константина Циолковского в 16 лет родители отправили в Москву, к другу отца, Н. Ф. Фёдорову, работавшему библиотекарем Румянцевского музея. Н. Ф. Фёдоров много занимался с любознательным юношей, так как из-за потери слуха в 10 лет, Константин не мог учиться в обычной школе. В 1879 году К. Циолковский сдал экзамен на звание учителя народных училищ и в 1892 году преподавал в гимназии и епархиальном училище Калуги физику и математику. [2]

Практически с начала трудовой деятельности совмещал преподавание физики и математики с научной деятельностью. Интересы К. Циолковского были очень разносторонними. Систематического образования он не имел, но обладал упорством и желанием осваивать всё новые и новые области знаний. Из-за того, что знания были получены как бы отрывками, он часто приходил к результатам, уже известным в науке. Так произошло с его первой научной работой, посвященной разработке проблем газовой динамики. Следующая работа – «Механика животного организма» - была оценена Д. И. Менделеевым и А. Г. Столетовым, Циолковский был избран действительным членом Русского физико-химического общества. В 1993 году была опубликована его книга «Исследование мировых пространств реактивными приборами», где впервые было доказано, что космическое пространство можно покорять с помощью ракет. Эта работа многими воспринималась, как фантастическое произведение.

Циолковскому не хватило математических знаний, вычисления были достаточно сложными и он не смог произвести расчёты конструкции ракеты.

За свою жизнь он написал более 130-ти статей и сочинений. Самые популярные его научно-фантастические произведения: «На Луне», «Вне Земли», «Воля Вселенной», «Путь к звездам», «Грезы о Земле и небе», в которых он развивал теорию межпланетных сообщений. «Стоявшие у других окон видела оставленную ими Землю на расстоянии тысячи километров. Сначала они даже не понимали, что видят Землю…». Это отрывок из повести К. Э. Циолковского «Вне Земли», написанной им в 1896 и оконченной в 1916 году. В повести грузовые ракеты «Прогресс», выходят в космос для устранения неисправностей… Вот вам и фантастика! Это будни наших дней. К числу заслуг Циолковского относят: изобретение схемы газотурбинного двигателя, разработка теории многоступенчатого ракетостроения и реактивных самолетов, газовые рули для управления полетом ракеты, использование компонентов топлива для охлаждения внешней оболочки космического корабля и многое другое.

Николай Иванович Кибальчич (1853 - 1881), находясь в тюрьме за покушение на Александра II, незадолго до смерти разработал оригинальный проект пилотируемого ракетного летательного аппарата, способного (по мнению многих) совершать космические полёты. В своём проекте рассмотрел устройство порохового ракетного двигателя. Просьба Кибальчича о передаче рукописи в Академию наук следственной комиссией удовлетворена не была, проект был впервые опубликован только в 1918 году в журнале «Былое». Нашли применение расчёты способов обеспечения программированного режима горения пороха, сделанные Кибальчичем, устройства, подающие топливо и регулирующие этот процесс с помощью автоматических часов. [3] Задолго до Циолковского Кибальчич обосновал выбор рабочего тела и источника энергии космического летательного аппарата, высказал идею о возможности применения пороха для реактивного двигателя.

Князь Владимир Фёдорович Одоевский (1803 - 1864) – один из основоположников русского музыкознания и автор одного из первых фантастических произведений. Одним из самых известных его произведений является утопический роман «4338-й год: Петербургские письма», написанный в 1835 году. В своём сочинении Одоевский описывает мир, где «между знакомыми домами устроены магнетические телеграфы, посредством которых живущие на далёком расстоянии общаются друг с другом». Многие связывают это с предсказанием появления Интернета в наше время. Одоевский описал освоение Луны и в отличие от современных автору писателей и других авторов XIX столетия, у Одоевского Луна не населена лунатиками, а осваивается землянами. Ещё наиболее примечательными рассказами являются «Последнее самоубийство» и «Город без имени», описывающие фантастические последствия, к которым приводит реализация закона Мальтуса о возрастании населения в геометрической прогрессии, а произведений природы — в арифметической, и теории Бентама, в качестве мотора и цели всех человеческих действий рассматривающей исключительно полезное начало. [4] Самым известными произведениями Одоевского, которые знакомы всем детям, являются сказки: «Городок в табакерке», «Мороз Иванович» и другие.

Яков Исидорович Перельман (родился в 1882, умер в блокадном Ленинграде в 1942) – русский и советский математик, физик, журналист, педагог, популяризатор точных наук и основоположник жанра занимательной науки. По книгам Перельмана формировали интерес к изучению математики и физики в советских школах, они давала хорошую базу для подготовки к различным олимпиадам международного уровня. Книги Я. И. Перельмана активно переиздаются в настоящее время: на полках книжных магазинов можно найти его книги «Веселые задачи», «Занимательная физика», «Занимательная арифметика», «Занимательные задачи», «Занимательная механика» и другие. Наиболее популярные его произведения публиковались в журнале «Природа и люди». В журнале также публиковались головоломки и задачи, информация знакомившая читателей с последними техническими новинками со всего мира, очерки историков и путешественников, публиковались биографические очерки о деятелях науки, занимательные статьи о географии и этнографии, популярные очерки по химии, физике и ботанике, научно-фантастические романы и исторические повести. 20 ноября 1913 года Я. Перельман выступил с докладом в Российском обществе любителей мироведения «О возможности межпланетных сообщений», в основу которого легли идеи К. Э. Циолковского. В 1914 году написал и опубликовал дополнительную главу «Завтрак в невесомой кухне» к роману Жюля Верна «Из пушки на Луну», которой дал определение «научно-фантастическая» (Жюль Верн свои романы называл научными, а Герберт Уэллс — фантастическими), став таким образом автором нового понятия. В 1919 – 1924 редактировал созданный по собственной инициативе первый советский научно-популярный журнал «В мастерской природы».

В молодости учитель физики и математики, Адлер Тимергалин – главный татарский фантаст, всю жизнь посвятивший только этому жанру. Он выпустил книги «На далекой планете», «Пришельцы из космоса», «Фарфоровая богиня», «Да сбудется желание твое» и другие. Являясь последователем Роберта Шекли, Адлер Тимергалин в своих небольших рассказах ищет ответ на тот же вопрос, который волновал и его заокеанского коллегу: «Что станет с человеком после появления искусственного интеллекта и столкновения с внеземным разумом?». На этот вопрос А. Тимергалин попытался ответить в рассказе «Начать сначала»: главному герою, находящемуся на грани суицида, трижды безуспешно пытается помочь неведомый искусственный разум, способный менять причинно-следственные связи во времени. Человек все еще остается самой проблемной частью идеального будущего, а значит, по Тимергалину, у человечества есть шанс сохранить себя. Ещё одной его популярной работой является рассказ «По дороге домой», в котором астронавты попадают на планету, жители которой предпочитают реальному миру жизнь в сновидениях с заранее заданным сценарием и сами не замечают, как впадают в спячку.

Софья Васильевна Ковалевская: “ Поэт должен видеть то, чего не видят другие. И это же должен и математик”.

Итак, движение вперёд, разработка принципиально новых технологий, техники начинается с воображения, фантастики, а потом идеи воплощаются в реальные технологии, приборы. Хороший инженер, талантливый математик должен обладать креативным мышлением [5]. Связи математики с другими науками, взаимодействие с социально-гуманитарными техническими дисциплинами требует от исследователей широты и глубины знаний в различных областях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Математики о математике. Сб. статей, составитель Н. Я. Виленкин. М.: Знания, 1982. С. 64.

2. Исследователи и ученые России: справочник, составитель В. В. Щевченко. М.: Вече; Новый учебник, 2010. С. 176.

3. https://ru.wikipedia.org/wiki/Кибальчич,_Николай_Иванович#Биография

4. https://ru.wikipedia.org/wiki/Одоевский,_Владимир_Фёдорович

5. *Дорофеева С. И., Никифорова С. В.* Креативность и математика в технических университетах // Функциональны пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы

математического образования. Материалы. Пятой международной конференции. Москва: Российский университет дружбы народов, 2018. С. 26-27.

MATH, FANTASY, FANTASTIC

Tebeteev D.A.
danil.tebeteev@yandex.ru
Supervisor: S. I. Dorofeeva
(Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev-KAI, Kazan)

Abstract: The work traces the relationship between mathematics and science fiction, provides examples of the embodiment of fantastic ideas in real technical projects.

УДК 51

МАТЕМАТИКА И ШАХМАТЫ

Утарова А.Т.
Utarova.2002@mail.ru
Научный руководитель: Дорофеева С.И.
(Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева – КАИ, г. Казань)

Аннотация: В данном докладе будет рассмотрена и выявлена взаимосвязь шахмат и математики. И как они влияют на развитие умственных способностей человека.

Введение

"Главное в шахматах это не то, на сколько ходов вперед ты думаешь, а то, как ты анализируешь текущую ситуацию" – Гарри Каспаров

Актуальность

В наше время много людей играет в шахматы и все шахматисты знают, что шахматы и математика тесно связаны между собой, одно без другого не имеет смысла. Я знаю это не понаслышке, потому что сама играю и являюсь победителем, призером многих областных и городских соревнований Магаданской области.

Меня заинтересовал вопрос: «Как математика связана с шахматами и как давно?»

Цель доклада

Выявление связи между шахматами и математикой.

Задачи доклада

- Изучение истории шахмат.
- Выявление связи между шахматами и математикой

1. История шахмат

Легенда о создании шахмат

Легенду обычно рассказывают школьникам, на уроке математики, когда проходят тему «Геометрическая прогрессия»

Согласно данной легенде, индийский царь решил вознаградить изобретателя шахмат и предложил ему самому выбрать награду. Правитель был очень удивлен, когда мудрец попросил столько пшеничных зёрен, сколько будет на шахматной доске, если положить на первое поле шахматной доски 1 пшеничное зерно, на второе – два, на третье – 4 и так далее. Царь велел быстрее выдать изобретателю шахмат его жалкую награду, но на следующий день придворные математики сообщили ему, что для этого не хватит пшеницы, хранящейся даже в амбарах всего мира.

Награда изобретателю шахмат в соответствии с уговором должна была составить 18 446 744 073 709 551 616 зерен.

Родина шахмат – Индия

Время возникновения игры – первые века нашей эры. Из Индии шахматы проникли в страны Ближнего Востока.

Шахматы в истории Европы

Эта игра носила ярко выраженный военный характер, поэтому ее хорошо встретили в странах средневековой Европы, несмотря на жесточайшие гонения церкви, запрещавшей шахматы наравне с игрой “в кости” и другими “бесовскими наваждениями”. В конце XIV века католическая церковь официально сняла запрет с шахмат. Игра была признана необходимым элементом дворянского воспитания.

Шахматы на Руси

Первое упоминание о шахматах на Руси относится ко второй половине XIII века. В конце XVII - начале XVIII в. Петр I, отправляясь в походы, брал с собой не только шахматы, но и двух постоянных шахматных партнеров. Так же шахматами увлекался и Иван Грозный. При дворе Ивана 4 в шахматы играли часто, и царь обычно приглашал играть с собой ведущих деятелей тогдашней политической жизни Руси, например, Бориса Годунова или князя Бельского. Иногда царь обучал шахматам Малюту Скуратова, он был простолюдином, поэтому в какой-то мере это было нарушением придворного этикета, так как шахматы культивировались только в кругу царской свиты и простые люди не подпускались к этой игре.

2.Математика в шахматах

Турнирная наука

В турнирной таблице невозможно обойтись без математики. Числа используются для отображения результатов партий, стартовых номеров игроков и обозначения результатов жеребьевки. Для определения победителя судье при необходимости нужно рассчитать коэффициенты дополнительных показателей и суммировать очки, набранные игроками.

Математика партии

За доской шахматисту всегда приходится в голове просчитывать ходы свои и соперника, следить за временем, чтобы не проиграть из-за падения флажка.

В наше время создано огромное количество компьютерных устройств, без которых и математикам, и шахматистам будет очень трудно. Например, калькуляторы и шахматные анализаторы, которые являются важным помощником и шахматистов и математиков.

Геометрия

Геометрия заключается в том, что шахматная доска является квадратом, разделенным на равные части. Но в шахматах, как и в математике, есть теории, которые не менее тесно связаны с геометрией.

Правило квадрата

Увидев такую позицию (Крa1, h4. – Крd3), начинающие шахматисты буду просчитывать каждый ход, а более опытные знают, что при ходе чёрных король успеет догнать пешку, а при ходе белых – нет.

Правило треугольника

В данной позиции (Крf5, c5, e6. – Крe8, c6) белые используют треугольник f4-e4-f5, чтобы передать чёрным очередь хода.

Симметрия

Один человек решил, что отыскал безошибочный способ не проиграть чёрными. Его теория основывалась на повторении ходов за белыми. Сыграть с ним вызвался С. Лойд, который и объявил ему мат в 4 хода.

1. c4 c5 2. Фa4 Фa5 3. Фc6 Фc3 4. Ф:c8 #.

Сэмюэль Лойд (1841 – 1911) - американский шахматист, шахматный композитор и автор головоломок. Лойд быстро научился играть в шахматы и уже с 14 лет начал составлять и публиковать в газетах шахматные задачи. В 16 лет Лойд стал редактором отдела задач в ежемесячном журнале «The Chess Monthly», одним из редакторов которого был великий шахматист Пол Морфи

Ретроанализ позиций

Когда я была еще в Магадане, мы очень часто на занятиях по шахматам решали задачи и один раз нам попалась совсем нестандартное условие для обычных шахматных задач. Это была задача на ретроанализ. Ее условием не является поставить мат или пат в определенное количество ходов. В этой задаче спрашивается чаще всего: «Как могла получится та или иная позиция за несколько ходов черных и белых?». Эти задачи умело сочетают в себе шахматы и математику. По сути дела, задачи на ретроанализ позиций - математически-комбинаторные задачи, намного слабее связанные с самой игрой, чем обычные задачи.

3.Шахматисты-математики

В начале данного раздела хочется сказать о выдающейся шахматистке Казани – Алисе Галлямовой. В ее биографии много побед, о которых стоит сказать, это и 1982 год, она стала чемпионкой российского и Центрального советов ДСО «Трудовые резервы», и 1983—1984 гг. она дважды становилась серебряным призёром чемпионатов Татарстана среди женщин, а в 1985—1986 гг. завоевала титул чемпионки. У нее еще много побед, но стоит сказать о первом месте на чемпионате мира среди девушек до 20 лет. На этом турнире она набрала 10 из 11 возможных очков и стала обладательницей золотой медали. На данный момент Галлямова много делает для популяризации шахмат, в том числе она уже несколько лет подряд проводит в Казани Кубок А. Галлямовой – детский командный турнир.

Далее хочется рассказать о интересной задаче с конем. Задача заключается в том, что нужно обойти конем все поля шахматной доски, посетив каждое из них только один раз. Популярность этой задачи в том, что в XVIII и XIX вв. ею занимались многие крупные математики, в том числе великий Леонард Эйлер (швейцарский математик, почти всю жизнь проживший в России, внёсший значительный вклад в развитие математики, а также механики, физики, астрономии и ряда прикладных наук.), посвятивший ей большой мемуар «Решение одного любопытного вопроса, который, кажется, не подчиняется никакому исследованию». Но задача была известна и до Эйлера, однако он первый обратил внимание на ее математическую сущность, поэтому задачу часто связывают именно с ним. Значительно труднее проблема, которая состоит не в отыскании определенного маршрута коня, а в нахождении всех возможных маршрутов и подсчете их числа. К сожалению, эта задача не решена до сих пор, и шансов решить ее не так уж и много. Известно, правда, что число решений не превосходит C^{63}_{168} (это число состоит из ста цифр), но больше 30 миллионов.

Еще есть интересна задача о восьми ферзях, которая привлекала внимание другого великого математика – Карла Гаусса.

Сколькими способами можно расставить на доске восемь ферзей так, чтобы они не угрожали друг другу, т.е. никакие два не стояли на одной вертикали, горизонтали и диагонали? Больше восьми мирных ферзей на доске 8*8 расставить невозможно. Найти какое-либо расположение 8 ферзей, не угрожающих друг другу, легко. Но труднее подсчитать общее число расстановок, в чем, и состоит задача. Надо понимать, что данная задача о восьми ферзях не принадлежит Гауссу, так как ранее (1848г) эта задача была поставлена немецким шахматистом М. Беццелем. Лишь после этого Гаусс заинтересовался этой задачей и нашел 72 решения, о котором сообщил в письме своему другу астроному г. Шумахеру. На сегодняшний день известно 92 варианта расстановок, это конечное число.

Ботвинник Михаил Моисеевич родился 17.08. 1911в Ленинградской области. Это 6-й в истории Шахмат и 1-й советский чемпион мира (1948-1957, 1958- 1960, 1961-63). Международный гроссмейстер (1950) и международный арбитр по шахматной композиции (1956); заслуженный мастер спорта СССР (1945), 7-кратный чемпион СССР (1931- 1952). Доктор технических наук, профессор. Ботвинник является автором ряда изобретений, запатентованных во многих странах, с началом 1970-х гг. руководил созданием шахматной программы для компьютера. Его книги по шахматам, энергетике, кибернетике изданы на 10 языках.

Также известными шахматистами-математиками являются Фишер (Бобби ввел в массовую практику новую форму контроля времени — с прибавлением после каждого совершенного хода. Вариант часов, выполняющий подобный контроль времени, называется «часы Фишера». В конце 80-х гг. ему был вручен патент на эту модель.Страдал аутизмом), Анатолий Карпов (Ему всегда давалась учеба. С ранних лет Анатолий умел быстро считать, опережая в этом собственного учителя.), Магнус Карлсен (действующий чемпион мира имеет образование инженера.)

Вывод: Шахматы и математика тесно связаны между собой. Они развивают логическое мышление, помогают мыслить нестандартно, но при этом используют законы математики. Шахматы развивают скорость принятия решений, что крайне важно в условиях нестандартных ситуаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. https://chess-genius.ru/sozdanie-shahmat-legenda-o-radzhe-i-mudrece
2. https://levico.ru/istoriya-shaxmat/
3. http://table-games.ru/books/item/f00/s00/z0000009/st010.shtml
4. *Гик Е.Я.* Математика на шахматной доске/ М. Мир энциклопедий Аванта+, Астрель,2009. – 317с.
5. https://ruchess.ru/persons_of_day/galliamova/
6. https://chesswood.ru/biography/mikhail-botvinnik.html
7. https://chesswood.ru/biography/robert-james-fischer.html

MATH AND CHESS

Utarova A.

T. Utarova.2002@mail.ru

Scientific supervisor: S. I. Dorofeeva

(Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev-KAI, Kazan)

Abstract: This report will examine and identify the relationship between chess and mathematics. And how they affect the development of a person's mental abilities.

УДК: 519.6, 532.5

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБАХ

Хизбуллина А.Ф.
khizbullina.alina@yandex.ru
Научный руководитель: И.В. Анисимова, д.ф.-м.н., профессор
(«Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева - КАИ» (КНИТУ-КАИ), Казань)

Аннотация: в статье кратко рассматривается вывод математической модели, описывающей ламинарное течение в цилиндрических трубах, приводится схема повышенного порядка точности с учетом аппроксимационной вязкости, численный алгоритм решения первой краевой и его программная реализация.

1. Математическая модель для задач ламинарного течения в цилиндрических трубах

Рассмотрим течение несжимаемой жидкости вдоль цилиндрической трубы. Труба имеет круговое сечение с радиусом a. Для описания такого течения следует использовать цилиндрическую систему координат (r,θ,z), в которой ось z совпадает с осью трубы. Внешние силы отсутствуют. Течение стационарно $\frac{\partial}{\partial t}=0$, одномерно $(v_r=0, v_\theta=0)$, осесимметрично $(v_z=v_z(r))$, в каждой точке скорость направлена параллельно оси трубы, напор жидкости постоянен.

Уравнение Навье – Стокса для z-компоненты скорости в цилиндрических координатах имеет следующий вид [1]:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\cdot\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\cdot\frac{\partial v_z}{\partial\theta}+v_z\cdot\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\cdot\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 v_z}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) \qquad (1.1)$$

С учетом допущений задачи уравнение Навье – Стокса (1.1) запишется следующим образом:

$$\frac{d}{dr}\left(r\cdot\frac{dv_z}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\cdot r \qquad (1.2)$$

Здесь μ - вязкость среды.

Введем постоянный напор жидкости:

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{P_0-P_1}{l}=C, \qquad (1.3)$$

где C – это константа, P_0, P_1 – давления в двух точках M_0 и M_1 на оси Oz, отстоящих одна от другой на расстоянии l.

Тогда выражение (1.2) примет вид:

$$\frac{d}{dr}\left(r\cdot\frac{dv_z}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\cdot C\cdot r \qquad (1.4)$$

На твердой внутренней поверхности трубы выполняется условие прилипания жидкости:

$$v_z\big|_{r=a}=0$$

В конечном итоге получаем следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} r\dfrac{d^2v_z}{dr^2}+\dfrac{dv_z}{dr}=\dfrac{1}{\mu}C\cdot r \\ v_z\big|_{r=a}=0,\ -a\le r\le a \end{cases} \qquad (1.5)$$

или

$$\begin{cases} \mu \cdot r \dfrac{d^2 v_z}{dr^2} + \mu \dfrac{dv_z}{dr} = C \cdot r \\ v_z\big|_{r=a} = 0, \ -a \le r \le a \end{cases} \tag{1.6}$$

Необходимо найти численное решение краевой задачи (1.5) и построить распределение скорости по оси Oz.

Дифференциальное уравнение в системе (1.5) является с малым параметром $\mu\left(0 < \mu < 1\right)$ при старшей производной. При численной реализации такие уравнения имеют особенность – аппроксимационную вязкость. Решение разностной задачи второго порядка точности может не сходится к решению дифференциальной задачи при равенстве величины малого параметра μ и шага сетки. С целью уменьшения апроксимационной вязкости будем использовать регуляризатор, который повысит точность разностной схемы [2-4].

2. Численная реализация первой краевой задачи

Для получения решения первой краевой задачи (1.5), при условии, что оно существует, применим конечно-разностный метод прогонки [5-7]. При этом исходная дифференциальная задача заменяется разностной схемой (приняли $v = v_z$):

$$r_i \cdot \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} + \mu \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} = \frac{1}{\mu} \cdot C \cdot r_i \tag{2.1}$$

Сгруппируем члены уравнения (2.1):

$$\left(2r_i - h\right) v_{i-1} - 4r_i \cdot v_i + \left(2r_i + h\right) v_{i+1} = \frac{2h^2}{\mu} \cdot C \cdot r_i \tag{2.2}$$

Отсюда:

$$A_i = 2r_i - h, \quad B_i = -4r_i, \quad C_i = 2r_i + h, \quad F_i = \frac{2h^2}{\mu} \cdot C \cdot r_i$$

Малый параметр μ при старшей производной регуляризировался $\left(\mu + \dfrac{h^2}{12\mu}\right)$.

Запишем прогоночные коэффициенты, принимая во внимание, что $\alpha_1 = \beta_1 = 0$:

$$\begin{cases} \alpha_{i+1} = \dfrac{-C_i}{\alpha_i \cdot A_i + B_i} \\ \beta_{i+1} = \dfrac{F_i - A_i \cdot \beta_i}{\alpha_i \cdot A_i + B_i} \end{cases} \quad i = \overline{1, n-1} \tag{2.3}$$

Формула для нахождения численных решений исходной задачи примет следующий вид:

$$v_i = \alpha_{i+1} \cdot v_{i+1} + \beta_{i+1}, \ i = \overline{n-1, 1},$$

$$v_0 = v_n = 0 - \text{из граничных условий.} \tag{2.4}$$

3. Результаты расчетов

Программно реализовав конечно-разностный метод правой прогонки, мы получили следующие результаты:

Таблица 1. Результаты вычислений

r_i	v_i (численное решение)	v_i (точное решение)
-2	0	0
-1.8	94.4	94.9
-1.6	134.8	179.9
-1.4	170.8	254.9

-1.2	202.2	320.0
-1.0	229.2	375.0
-0.8	251.7	419.9
-0.6	269.7	454.9
-0.4	283.1	480.0
-0.2	292.1	495.0
0	303.2	500.0
0.2	292.1	495.0
0.4	283.1	480.0
0.6	269.7	454.9
0.8	251.7	419.9
1.0	229.2	375.0
1.2	202.2	320.0
1.4	170.8	254.9
1.6	134.8	179.9
1.8	94.4	94.9
2	0	0

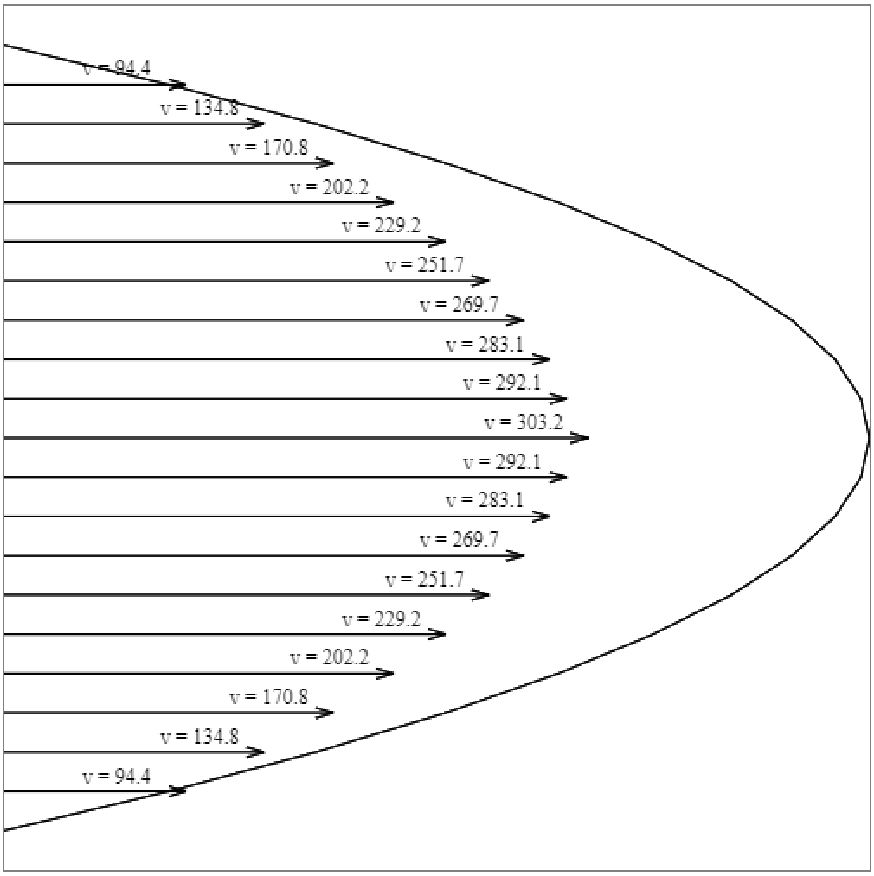


Рис 1. График распределения скоростей

Расчеты проводились при условиях: давление $p_0 = 2$ гПа, давление $p_1 = 1$ гПа, радиус трубы $a = 2$, вязкость $\mu = 8{,}9 \cdot 10^{-4}$ Па·с (вода).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Кочин, Н. Е.* Теоретическая гидромеханика: учебник для университетов. Ч. 2 / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. — Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – с. 297-302.

2. *Игнатьева И.В.* О некоторых численных алгоритмах решения приближенных и

полных уравнений Навье-Стокса. Автореферат дисс. кандидата физико-математических наук / Казанский гос. технич. ун-т им. А. Н. Туполева. Чебоксары, 1998

3. *Задорин А.И., Игнатьев В.И.* О численном решении уравнения с малым параметром при старшей производной// Журнал вычислительной математики и математической физики. 1983. Т. 23. № 3. С. 620

4. *Хизбуллина А.Ф., Гарифуллина Р.И.* О регуляризации разностных схем при решении дифференциальных уравнений с малым параметром. В сборнике: Прикладная математик и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук. Материалы VI Международной научно-практической конференции (школы-семинара) молодых ученых. 2020. С. 452-456

5. *Абрамов А.А.* О применении метода прогонки к нахождению периодических решений дифференциальных и разностных уравнений / А.А. Абрамов, В.Б. Андреев // Вычислительная математика и математическая физика. — 1963. — № 3 (2). — С.377-381.

6. *Вержбитский В.М.* Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения / В.М. Вержбитский. — Москва: Высшая школа, 2000. — 266 с.

7. *Заботина Л.Ш.* Дифференциальные уравнения: методические указания и контрольные задания / Л.Ш. Заботина, И.В. Игнатьева. — Казань: Издательство Казанского государственного технического университета, 1999. — 172 с.

ON NUMERICAL SOLUTION OF LAMINAR FLOW PROBLEMS IN CYLINDRICAL PIPES

Khizbullina Alina

khizbullina.alina@yandex.ru

Scientific adviser: Irina Anisimova, Dr. Sci. (Phys.-Math), professor

(Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev - KAI, Kazan)

Abstract: the article briefly discusses the derivation of a mathematical model describing laminar flow in cylindrical pipes, provides a scheme of an increased order of accuracy taking into account the approximate viscosity, a numerical algorithm for solving the first boundary value and its software implementation.

СОДЕРЖАНИЕ

Отпечатано в изд-ве ИП Сагиева А.Р.
420073, г. Казань, ул. Ад. Кутуя, 116

Заказ № 360 от 01.06.21 г.
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 10.
Бумага офсет 80 г. Печать ризографическая.
Тираж 25 экз.

ISBN 978-5-6045150-5-1
9 785604 515051